主　编　徐利治
副主编　冯克勤
方兆本
徐森林

大学数学解题法诠释

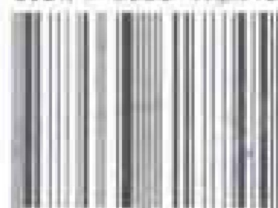


安徽教育出版社



责任编辑／严云锦
装帧设计／袁　泉

DAXUE SHUXUE JIETIFA QUANSHI



ISBN 7-5336-1774-6／G・2310
定价：72.00元

大学数学解题法诠释

主　编　徐利治
副主编　冯克勤　方兆本　徐森林



安徽教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

大学数学解题法诠释/徐利治等编. -合肥:安徽教育出版社,1999.12

ISBN 7-5336-1774-6

Ⅰ.大... Ⅱ.徐... Ⅲ.高等数学-高等学校-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 00238 号

责任编辑:严云锦　　　　装帧设计:袁　泉
出版发行:安徽教育出版社(合肥市跃进路1号)
经　　销:新华书店
排　　版:安徽飞腾彩色制版有限责任公司
印　　刷:合肥远东印刷厂
开　　本:787×1092　1/16
印　　张:49.25
字　　数:1 600 000
版　　次:1999年12月第1版　　2000年10月第2次印刷
印　　数:501—1 500
定　　价:72.00元

发现印装质量问题,影响阅读,请与我社发行部联系调换
电　话:(0551)2651321　　　　邮　编:230061

主　编： 徐利治

副主编： 冯克勤　方兆本　徐森林

编写者：

数学分析	徐森林　薛春华
解析几何与矢量代数	马传渔
线性代数	李炯生
抽象代数	冯克勤
线性规划	高旅端
复变函数	严镇军
实变函数	徐森林
泛函分析	叶怀安
微分方程	盛立人
离散数学	李炯生
概率论	胡太忠　方兆本
计算方法	林成森
数学模型	李尚志

审稿人： 方兆本　徐森林　李炯生

序　言

大家知道，现今人类正处在从工业社会向信息社会转变的历史时期，国内外科技教育界人士已经在关心着高等数学教育的革新问题。首先考虑到的问题是，理工科大学的数学教育应该达到怎样的目标？关于这一问题，我很赞成外国知名数学家 A. Shoenfeld 在他 1991 年撰写的一篇文章中提出的一个观点。他认为帮助学生们学会“数学地思维”最为重要。这就是说，最重要的事是要让学生们获得数学地思维的习惯和能力，从而也就能数学地去观察世界，处理和解决问题。

当然，要帮助学生们获得上述数学素质，只靠传统的重演绎、轻归纳的教材和教法是不可能的。我认为最有效的办法，还是要鼓励并指导学生们自己主动去做数学、想数学、评数学或鉴赏数学。这样说来，以阐明优美的数学方法思想为主线的一部工具书——《大学数学解题法诠释》，对学习高等数学的大学生就成为十分必需的了。

记得 4 年前，我国《工科数学》杂志主编、已故数学教授卢树铭来找我讨论本书的编写计划时，就谈到了此书应该具备的特色和功能。经过一批学有专长且富有教学实践经验的数学专家们的共同努力，此书终于写成了，而且体现了卢树铭教授当初的愿望和设想。相信此书的出版将使早逝者含笑于九泉了。

显而易见，这本书至少具有如下三点特色。一是为了使全书以方法为主线而又不脱离数学的具体内容题材，故此书按题材内容分篇，而按方法分节，这样也就不必去追求数学知识内容的面面俱到。二是为了使读者便于理解方法、思想的来龙去脉，故对各种方法的思想背景、特点等均有简要的文字说明。三是为了帮助青年读者能切实掌握解题的方法和技巧，且能举一而反三，故此书都是结合具体例子来讲述方法的。每种方法都配有一定数量的具有典型性与普适性的例题。有些例题选自研究生入学试题或数学竞赛题，具有一定的深度和难度。

可以期望，只要青年读者们本着“做数学、想数学、评数学”的主动精神来使用这本书，则此书对培育“数学地思维”的能力和习惯应该会有所帮助的。这里我乐意就数学解题方法或一般数学方法的评价与鉴赏问题，提几点建议供读者们参考。

大家知道，数学中的解题方法多不胜数，方法有大有小，有难有易，当然还有优、中、劣之别。一般说来，好的数学方法或解题方法往往具有这样三个特点：(1) 思想的简单性；(2) 方法的普适性；(3) 技巧的针对性。事实上，每一种漂亮的解题方法，其基本思想都是十分简单而自然的。好的方法都有较广的应用范围，也即都具有相当的普适性（即普遍适用性）。但是，用普遍的方法去解决具体问题时，还必须针对问题的特殊性，利用问题提供的特殊条件，使方法采取合适的特殊形式才能使问题迎刃而解。而方法的恰当特殊化常常表现为技巧，所以一个方法是否能引出具有各种针对性的技巧，也是评价它的一个重要标准。

读者们可以注意到，在本书中凡已取得规范化名称的著名方法，如坐标法、参数法、分离变量法等等，无疑都是具备上述三特点的好方法，而且还是十分基本的方法。但尚未取得规范化名称的许多方法技巧中，也有不少是非常好的方法。相信读者们在“做数学”的实践中会逐步去掌握并将赞赏这些好方法。如果再进一步对它们作出扩充和发展，那就更好了。

最后，我还希望此书的使用者或读者如有任何反馈信息或见解，均请直接函告出版社的编辑同志为幸。

徐利治

1998年4月4日

前　言



人类即将步入知识经济的时代。创造知识和应用知识的能力与效率将成为影响一个国家综合国力和国际竞争能力的决定性因素。“一个没有创新能力的民族，难以屹立于世界先进之林”。高等学校如何能培养出具有创新意识和能力的年轻人材，关系到我国下一世纪的发展和命运。为了这个目的，学校的最重要工作是转变教育观念，在教育目标和教学方法上作根本性改革，鼓励和培养学生的主动性和创新意识。

4 年前，徐利治教授和已去世的卢树铭教授倡导编辑一本《大学数学解题法诠释》时，突出的思想是希望学生通过解题训练能加深对数学的理解和方法上的提高与创新，培养数学地思维习惯和能力。安徽教育出版社的编辑们通过艰苦细致的工作，积聚了一批在数学各学科有丰富教学经验的专家编写了此书。作者们精心挑选了习题。他们不仅在做题，而且在讲题。通过解题着重阐述了数学思想与方法，也体现了作者们对各门数学的认识与理解。我相信读者们在学习本书之后会有许多收益。同时，我也希望读者们不要看人家做题，而是自己先做，然后再与书中比较。这不仅是切实提高自己能力的好方法，而且更重要的是我相信读者们会有比本书更好的思想和方法、会有很多的创新。学生本应是超过老师的。

冯克勤

1998 年 8 月 24 日于北京

目　录

第1篇　数学分析

第2篇　解析几何与矢量代数

第3篇　线性代数

第4篇　抽象代数

第5篇　线性规划

第6篇　复变函数

第 7 篇　实变函数

第 8 篇　泛函分析

第 9 篇　微分方程

第 10 篇　离散数学

第 11 篇　概率论

第 12 篇　计算方法

第 13 篇　数学模型

第1篇　数学分析

§1.1　求数列极限的各种方法

极限是数学分析中最重要的基础之一，极限有数列极限和函数极限. 论证极限存在及求出极限是学好数学分析的第一步，数列极限的计算和论证的方法有：

(1) 应用数列极限的定义，即 ε-N 方法.

(2) 数列极限的 $+$、$-$、$\times$、$\div$ 四则运算性质.

(3) 夹逼定理：设 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$，$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$ 存在且相等，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n$ 也存在，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$.

(4) 单调增(减)有上(下)界的数列收敛.

在证明了数列 x_n 收敛后，记极限为 $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，往往在关于 x_n 的一个递推公式两边令 $n\to+\infty$，得到关于 x 的方程式，于是可解出极限值 x 来.

(5) 两个重要极限：

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ \lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(6) 应用 Cauchy 收敛原理.

(7) 如果 x_n 的上极限和下极限相等，即

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to+\infty}}x_n,$$

则 x_n 的极限存在且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n=\underline{\lim\limits_{n\to+\infty}}x_n$.

(8) Stolz 公式(参阅[4]，22 页～26 页)：

($\frac{\infty}{\infty}$ Stolz 公式)：设 $\{x_n\}$ 严格增，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$. 若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\begin{cases}a\in\mathbf{R}(\text{实数集}),\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

($\frac{0}{0}$ Stolz 公式)：设当 $n\to+\infty$ 时，$y_n\to0$，x_n 严格单调减趋于 0. 若

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}=\begin{cases}a\in\mathbf{R},\\+\infty,\\-\infty,\end{cases}$$

则

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n}{x_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{y_n-y_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}.$$

(9) 将数列极限化为函数极限，然后应用求函数极限的方法(如等价代换、函数的连续性、L'Hospital 法则或 Taylor 展开等)求出极限，从而也得到相应的数列极限.

(10) 将数列极限化成 Riemann 积分的定义形式，然后求出积分值，即为所求的极限.

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

(11) 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛 $\Leftrightarrow$ 部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$ 收敛，所以也可用级数收敛的判别法和求和法来研究数列的收敛性和极限.

1.1.1　设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\in\mathbf{R}$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$；

(2) 讨论 $a=+\infty,-\infty,\infty$ 时，(1) 中的结论；

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}=a$，其中 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$；

(4) $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a$，其中 $a_n>0$，$n=1,2,\cdots$.

证　(1) 用极限的定义证. 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}$. 又因为 a_n 收敛，故 a_n 有界，从而 $|a_n-a|$ 有界. 设 $|a_n-a|\leqslant M$，$M>0$，$n=1,2,\cdots$. 固定 N_1，取 $N>\max\left\{N_1,\frac{2N_1M}{\varepsilon}\right\}$，当 $n>N$ 时，

$$\begin{aligned}&\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\&=\frac{|(a_1-a)+\cdots+(a_n-a)|}{n}\\&\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}\\&\quad+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\&\leqslant\frac{N_1M}{N}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此，$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a$.

(2) 当 $a=+\infty$ 时，结论仍成立. 事实上，对 $\forall A$

>0,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=+\infty$,所以存在 N_1,当 $n>N_1$ 时,$a_n>4A$,固定 N_1,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}=0$,故存在 N_2,当 $n>N_2$ 时,$\dfrac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}>-A$,取 $N=\max\{2N_1,N_2\}$,当 $n>N$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\\
&=\frac{a_1+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{a_{N_1+1}+\cdots+a_n}{n}\\
&>-A+\frac{n-N_1}{n}4A=-A+\left(1-\frac{N_1}{n}\right)4A\\
&>-A+\left(1-\frac{1}{2}\right)4A=A.
\end{aligned}$$

于是,$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

同样可证当 $a=-\infty$ 时,结论也正确.

但若 $a=\infty$,则结论不必成立.例如 $a_n=(-1)^{n-1}n$,$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\infty$,但

$$\begin{aligned}
&\frac{a_1+\cdots+a_{2n}}{2n}\\
&=\frac{1-2+3-4+\cdots+2n-1-2n}{2n}\\
&=\frac{-n}{2n}=-\frac{1}{2}\longrightarrow-\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),\\
&\frac{a_1+\cdots+a_{2n-1}}{2n-1}\\
&=\frac{1-2+3-\cdots-(2n-2)+2n-1}{2n-1}\\
&=\frac{n}{2n-1}\longrightarrow\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),
\end{aligned}$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$ 不存在.

(3) 由于 $a_n>0$,$n=1,2,\cdots$,$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,则 $a\geqslant0$.

(ⅰ) 如果 $a>0$,就有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{a}>0$,应用(1)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a},$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=\frac{1}{\frac{1}{a}}=a.$$

(ⅱ) 如果 $a=0$,由于 $a_n>0$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{a_n}=+\infty$.应用(2)得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}=+\infty,$$

于是,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\dfrac{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n}}=0=a.$$

综合(ⅰ)(ⅱ),就有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}=a$.

(4) 由于 $a_n>0$,$n=1,2,\cdots$,故由

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

以及(1)、(3),再应用夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=a.$$

若 $a=0$,可以直接证,事实上,由

$$0<\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}$$

和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}=a=0=\lim\limits_{n\to+\infty}0$,再由夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}=0=a.$$

注 在利用定义(即 ε-N 方法)证明数列 a_n 有极限时,通常有一条主线.它是应用初等数学的技巧将 $|a_n-a|$ 不断适当放大,直到能从其中解出自然数 N 来.本题(1)的主线就是

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right|\\
&\leqslant\frac{|a_1-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|}{n}\\
&\quad+\frac{|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a|}{n}\\
&<\frac{N_1M}{N}+\frac{n-N_1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,
\end{aligned}$$

N 就是从 $\dfrac{N_1M}{N}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 中解出的.(2)中的主线应是缩小不等式.

下面的1.1.2～1.1.7中,请读者特别注意解题中的主线.

1.1.2 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,又当 $m,n\in\mathbf{N}$,$t_{mn}\geqslant0$,$\sum\limits_{n=1}^{m}t_{mn}=1$,$\lim\limits_{m\to+\infty}t_{mn}=0$ 时,试证

$$\lim_{n\to+\infty}(t_{n1}a_1+t_{n2}a_2+\cdots+t_{nn}a_n)=a.$$

证 因为 a_n 收敛于 a,故 a_n 有界,设 $|a_n-a|<M$,$M>0$,$n=1,2,\cdots$.

对 $\forall \varepsilon>0$, $\exists N_1 \in \mathbf{N}$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 固定 N_1, 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty} t_{nk}=0$, 所以存在 N_2, 当 $n>N_2$ 时, $|t_{nk}| < \frac{\varepsilon}{2MN_1}$, $k=1,2,\cdots,N_1$, 取 $N=\max(N_1,N_2)$, 当 $n>N$ 时, 由 $\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}=1$, 有

$$
\begin{aligned}
&|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-a| \\
&=|t_{n1}a_1+\cdots+t_{nn}a_n-(t_{n1}+\cdots+t_{nn})a| \\
&=|t_{n1}(a_1-a)+\cdots+t_{nn}(a_n-a)| \\
&\leqslant t_{n1}|a_1-a|+\cdots+t_{nN_1}|a_{N_1}-a| \\
&\quad +t_{nN_1+1}|a_{N_1+1}-a|+\cdots+t_{nn}|a_n-a| \\
&< M(t_{n1}+\cdots+t_{nN_1})+\frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1}+\cdots+t_{nn}) \\
&\leqslant M\cdot N_1\cdot\frac{\varepsilon}{2MN_1}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} t_{nk}a_k=a$.

1.1.3 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$. 试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

证法 1 由 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=b$ 知 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 有界, 即存在 $M>0$, 使 $|a_n|<M$, $|b_n|<M$, $|a|<M$, 且对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$, 当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{4M},\quad |b_n-b|<\frac{\varepsilon}{4M}.$$

固定 N_1, 取 $N>\max\{N_1,\frac{2M}{\varepsilon}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a|+|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|]\}$, 当 $n>N$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}-ab\right| \\
&=\Big|\frac{1}{n}[(a_0b_n-ab)+(a_1b_{n-1}-ab)+\cdots \\
&\quad +(a_{n-1}b_1-ab)+(a_nb_0-ab)]+\frac{ab}{n}\Big| \\
&=\Big|\frac{1}{n}[b_n(a_0-a)+a(b_n-b)+b_{n-1}(a_1-a) \\
&\quad +a(b_{n-1}-b)+\cdots+b_0(a_n-a)+a(b_0-b)] \\
&\quad +\frac{ab}{n}\Big| \\
&\leqslant\frac{M}{n}[|a_0-a|+\cdots+|a_n-a|+|b_0-b|+\cdots \\
&\quad +|b_n-b|+|b|] \\
&\leqslant\frac{M}{N}[|a_0-a|+\cdots+|a_{N_1}-a| \\
&\quad +|b_0-b|+\cdots+|b_{N_1}-b|+|b|] \\
&\quad +\frac{M}{n}[|a_{N_1+1}-a|+\cdots+|a_n-a| \\
&\quad +|b_{N_1+1}-b|+\cdots+|b_n-b|] \\
&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2M}{n}(n-N_1)\cdot\frac{\varepsilon}{4M}<\varepsilon.
\end{aligned}
$$

这就证明了

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_{n-1}b_1+a_nb_0}{n}=ab.$$

证法 2 令 $\alpha_n=a_n-a$, $\beta_n=b_n-b$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim_{n\to+\infty}(a_n-a)=0,\ \lim_{n\to+\infty}\beta_n=0.$$

根据 Cauchy 不等式和题 1.1.1(1), 有

$$
\begin{aligned}
0&\leqslant\left(\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}\right)^2 \\
&\leqslant\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n} \\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i^2}{n+1}\cdot\frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\beta_i^2}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&=0\cdot0\cdot1=0=\lim_{n\to+\infty}0.
\end{aligned}
$$

再应用夹逼定理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}\right)^2=0.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha_0\beta_n+\alpha_1\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}=0.$$

因此, 由题 1.1.1(1), 有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0}{n} \\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}[(\alpha_0+a)(\beta_n+b)+\cdots \\
&\quad +(\alpha_n+a)(\beta_0+b)] \\
&=\lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{\alpha_0\beta_n+\cdots+\alpha_n\beta_0}{n}+b\,\frac{\alpha_0+\cdots+\alpha_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n} \\
&\quad +a\cdot\frac{\beta_0+\cdots+\beta_n}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}+\frac{n+1}{n}ab\Big] \\
&=0+b\cdot0\cdot1+a\cdot0\cdot1+1\cdot ab=ab.
\end{aligned}
$$

1.1.4 设 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, 试证

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

证法 1 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$ 收敛, 所以 a_n 有界, 因而 $|a_n-a|$ 有界, 设 $|a_n-a|\leqslant M$, $M>0$, $n=1,2,\cdots$; 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_1\in\mathbf{N}$, 当 $n>N_1$ 时, $|a_n-a|<\frac{\varepsilon}{3}$. 固定 N_1, $\exists N_2$, 当 $n>N_2$ 时, $\frac{N_1}{n}M<\frac{\varepsilon}{3}$, $\frac{|a|}{n}<\frac{\varepsilon}{3}$, 取 $N=\max(N_1,N_2)$, 当 $n>N$ 时, 有

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right| \\
&=\Big|\frac{1}{n^2}[(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots \\
&\quad +n(a_n-a)+\frac{n(n+1)}{2}a]-\frac{a}{2}\Big|
\end{aligned}
$$

$$= \left| \frac{1}{n^2}[(a_1 - a) + \cdots + n(a_n - a)] + \frac{a}{2n} \right|$$
$$\leqslant \frac{1}{n^2}[|a_1 - a| + \cdots + N_1|a_{N_1} - a| + (N_1+1)|a_{N_1+1} - a| + \cdots + n|a_n - a|] + \frac{|a|}{2n}$$
$$< \frac{M \cdot \frac{N_1(N_1+1)}{2}}{n^2} + \frac{(N_1+1) + \cdots + n}{n^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{|a|}{n}$$
$$< \frac{N_1 M}{n} + \frac{n(n+1) - N_1(N_1+1)}{2n^2} \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

因此
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \frac{a}{2}.$$

证法 2 先证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} = a$.

造一新数列：

$b_1 = a_1, b_2 = b_3 = a_2, b_4 = b_5 = b_6 = a_3, \cdots, b_{\frac{n(n+1)}{2}+1} = \cdots = b_{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = a_{n+1}, \cdots$. 显然，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$. 事实上，对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K \in \mathbf{N}$，当 $k > K$ 时，$|a_k - a| < \varepsilon$. 令 $N = \frac{K(K+1)}{2}$，当 $n > N$ 时，$n > \frac{K(K+1)}{2}$，$|b_n - a| = |a_k - a| < \varepsilon$ $(k > K)$.

由题 1.1.1(1) 知
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} = a,$$
$\dfrac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}}$ 是 $\dfrac{b_1 + \cdots + b_n}{n}$ 的一子列，因此，也有
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{\frac{n(n+1)}{2}}}{\frac{n(n+1)}{2}} = a.$$

下证 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \dfrac{a}{2}$. 事实上，
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \frac{n+1}{2n}$$
$$= a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a}{2}.$$

证法 3 应用 $\frac{\infty}{\infty}$ 型 Stolz 公式，有
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n}{n^2 - (n-1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{na_n}{2n-1}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2 - \frac{1}{n}} = \frac{a}{2}.$$

注 证法 2 中，构造一个新数列 b_n，化为题 1.1.1(1).

1.1.5 已知 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，$|q| < 1$，求证
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

证 因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - a) = 0$，存在 $M > 0$，使 $|a_n - a| < M, n \in \mathbf{N}$.

对任意的 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \frac{1-|q|}{3(1-q)}\varepsilon$. 又因 $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} aq^n = 0$，故存在 $N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，$|q|^n < \frac{\varepsilon}{3N_1 M|1-q|}$，$|aq^n| < \frac{\varepsilon}{3}$. 于是，当 $n > N = N_1 + N_2 + 1$ 时，有
$$|(1-q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) - a|$$
$$= |(1-q)[(a_n - a) + (a_{n-1} - a)q + \cdots + (a_{N_1+1} - a)q^{n-N_1-1} + \cdots + (a_1 - a)q^{n-1}] - aq^n|$$
$$< |1-q|\left[\frac{(1-|q|)\varepsilon}{3(1-q)} \cdot \frac{1-|q|^{n-N_1}}{1-|q|} + N_1 M \cdot \frac{\varepsilon}{3N_1 M|1-q|}\right] + \frac{\varepsilon}{3}$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

所以
$$\lim_{n\to+\infty} (1-q)(a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = a,$$
$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + a_{n-1}q + \cdots + a_1 q^{n-1}) = \frac{a}{1-q}.$$

1.1.6 设 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a, b_n \geqslant 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_1 + \cdots + b_n) = S$. 试证 $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n b_1 + \cdots + a_1 b_n) = aS$.

证 设 $S_n = b_1 + \cdots + b_n$，由 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ 得到 $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$. 又因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_n - a) = a - a = 0$，所以 $|a_n - a| < A, \forall n \in \mathbf{N}$.

对 $\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，所以存在 $N_1 \in \mathbf{N}$，

当 $n > N_1$ 时，$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{3(S+1)}$. 固定 N_1，又因 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$，$\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$，故存在 $N_2 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_2$ 时，有 $|b_n| < \frac{\varepsilon}{3AN_1}$，$|S - S_n| < \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)}$. 于是，当 $n > N = N_1 + N_2$ 时，有

$$\begin{aligned}
&|a_nb_1 + \cdots + a_1b_n - aS| \\
&= |(a_n - a)b_1 + \cdots + (a_1 - a)b_n - a(S - S_n)| \\
&\leqslant |a_n - a||b_1| + \cdots + |a_{N_1+1} - a||b_{n-N_1}| \\
&\quad + |a_{N_1} - a||b_{n-N_1+1}| + \cdots \\
&\quad + |a_1 - a||b_n| + |a||S - S_n| \\
&< \frac{\varepsilon}{3(S+1)} S + A \cdot N_1 \frac{\varepsilon}{3AN_1} \\
&\quad + |a| \frac{\varepsilon}{3(|a|+1)} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty}(a_nb_1 + \cdots + a_1b_n) = aS.$$

1.1.7 设 $f(0) = 0$，$f'(0)$ 存在有限，令

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right),$$

求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解 由条件 $f(0) = 0$，$f'(0)$ 存在有限知

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}.$$

于是，对 $\forall\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $0 < x < \delta$ 时，

$$f'(0) - \varepsilon < \frac{f(x)}{x} < f'(0) + \varepsilon,$$

$$(f'(0) - \varepsilon)x < f(x) < x(f'(0) + \varepsilon),$$

取 $N \in \mathbf{N}$，使 $\frac{1}{N} < \delta$，则当 $n > N$ 时，有 $0 < \frac{k}{n^2} \leqslant \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \delta (1 \leqslant k \leqslant n)$，因此

$$[f'(0) - \varepsilon]\frac{k}{n^2} < f\left(\frac{k}{n^2}\right) < [f'(0) + \varepsilon]\frac{k}{n^2}.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}[f'(0) - \varepsilon]\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\
&= [f'(0) - \varepsilon]\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) \\
&< [f'(0) + \varepsilon]\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} \\
&= \frac{1}{2}[f'(0) + \varepsilon]\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

又因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[f'(0) - \varepsilon]\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)}{2} - \frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}[f'(0) + \varepsilon]\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{f'(0)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$，故存在 N_1，当 $n > N_1$ 时，

$$\frac{f'(0)}{2} - \varepsilon < \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) < \frac{f'(0)}{2} + \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{f'(0)}{2}$.

注 解题时，注意给出的条件是很重要的，本题中，由 $f'(0)$ 的存在有限性，了解 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 与 $f'(0)$ 有关联，从而由 $f'(0)$ 的定义下手，问题能很快得以解决.

1.1.8 设 $a > 0$，$x_0 > 0$，$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$，$n = 0,1,2,\cdots$，试求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解 因为

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \geqslant \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a},$$

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n,$$

所以数列 $\{x_n\}$ 单调减有下界 $\sqrt{a}$，从而 $\{x_n\}$ 收敛，记 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x \geqslant \sqrt{a} > 0$，由此得

$$\begin{aligned}
x &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right),
\end{aligned}$$

$$2x = x + \frac{a}{x},$$

$$x^2 = a.$$

$x = \sqrt{a}$ ($-\sqrt{a} < 0$，不可能为 x_n 的极限)，即有 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{a}$.

注 从此题起，是一系列单调数列的极限题，解这类问题时，一般先用初等的方法或数学归纳法证明所给数列的单调性和有界性，然后利用数列前后项的关系，等式两边同取极限，得到关于极限值的方程，就可以解得极限值了.

1.1.9 设 $x_1 = a > 0$，$y_1 = b > 0$，$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n}$，$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n)$，$n = 1,2,\cdots$. 试证：$x_n$ 和 y_n 收敛于 a 和 b 之间的同一数，此数称为 a 和 b 的"算术 - 几何平均数".

证 显然 $x_n, y_n > 0$，$n = 1,2,\cdots$，且有

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \geqslant \sqrt{x_ny_n} = x_{n+1},\ n = 1,2,\cdots$$

$$x_{n+1} = \sqrt{x_ny_n} \geqslant \sqrt{x_n \cdot x_n} = x_n,\ n = 1,2,\cdots$$

$$y_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + y_n) \leqslant \frac{1}{2}(y_n + y_n) = y_n.$$

即 x_n 单调增有上界 $\max\{a,b\}$，y_n 单调减有下界 $\min\{a,b\}$，所以 x_n, y_n 都收敛，记 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$，$y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. 对 $x_n, y_n, x_{n+1}, y_{n+1}$ 的关系式两边求极限得

$$\begin{aligned}
y &= \lim_{n\to+\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(x_n + y_n) \\
&= \frac{1}{2}(x + y),
\end{aligned}$$

$$x = y,$$

且 $\max\{a,b\} \geqslant x = y \geqslant \min\{a,b\}$.

1.1.10 设$0 < a_n < 1$,且 $a_{n+1}(1-a_n) \geqslant \frac{1}{4}$, $n \in \mathbf{N}$.求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

解 由$0 < a_n < 1$知$0 < 1 - a_n < 1$,又因 $a_{n+1}(1 - a_n) \geqslant \frac{1}{4}$,故

$$a_{n+1} - a_n \geqslant \frac{1}{4(1-a_n)} - a_n = \frac{(1-2a_n)^2}{4(1-a_n)} \geqslant 0,$$
$$a_{n+1} \geqslant a_n,$$

即 a_n 单调增有上界 1,从而 a_n 收敛.记 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$,于是

$$\frac{1}{4} \leqslant \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}(1 - a_n) = a(1 - a),$$
$$(a - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0, a = \frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a = \frac{1}{2}.$$

1.1.11 设 $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n}, n \in \mathbf{N}$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

解法 1 由 $a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{4}, a_3 = \frac{4}{5}, a_4 = \frac{5}{9}$,应用数学归纳法易知 a_{2k-1} 单调减和 a_{2k} 单调增,且 $0 < a_n < 4$,所以 a_{2k-1} 和 a_{2k} 均收敛.设

$$\lim_{k\to+\infty} a_{2k} = a, \lim_{k\to+\infty} a_{2k-1} = b \ (k \in \mathbf{N}),$$

于是由

$$a_{2k} = \frac{1}{1+a_{2k-1}} \text{ 和 } a_{2k+1} = \frac{1}{1+a_{2k}}$$

取极限得

$$a = \lim_{k\to+\infty} a_{2k} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k-1}} = \frac{1}{1+b},$$
$$b = \lim_{k\to+\infty} a_{2k+1} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{k\to+\infty} a_{2k}} = \frac{1}{1+a},$$

即

$$\begin{cases} a + ab = 1, \\ b + ab = 1. \end{cases}$$

解得 $a = b$.进一步再由

$$a + a \cdot a = 1$$

得到

$$a^2 + a - 1 = 0.$$

方程有两个根$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$,但因 $a_n > 0$,故 $a \geqslant 0$,于是得 $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

解法 2 如果 a_n 收敛,记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$,则

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{n\to+\infty} a_n} = \frac{1}{1+a},$$
$$a^2 - a + 1 = 0.$$
$$a = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \text{ (由 } a_n > 0, \text{故 } a \geqslant 0).$$

下面证明 a_n 收敛.

对 $\forall \varepsilon > 0$,取自然数 $N > 1 + \frac{|a_1 - a|}{\varepsilon a}$,当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left| \frac{1}{1+a_{n-1}} - \frac{1}{1+a} \right| \\ &= \frac{|a_{n-1} - a|}{(1+a_{n-1})(1+a)} \\ &\leqslant \frac{|a_{n-1} - a|}{1+a} \leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{1}{1+a}\right)^{n-1} |a_1 - a| \\ &= \frac{1}{(1+a)^{n-1}} |a_1 - a| \\ &\leqslant \frac{1}{(n-1)a} |a_1 - a| < \frac{1}{N-1} \frac{|a_1 - a|}{a} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

注 上题的两种解法很典型.(1) 有时,一个数列本身并不单调,但其奇子列和偶子列各自有单调有界性,因此它们各自收敛.然后,根据关系式,证明它的奇子列、偶子列极限相等,因而数列收敛.(2) 先假设数列有极限,利用关系式,求出极限值,然后再用定义(ε-N 方法)证明其正确性.在用此方法时,最后的验证是必不可少的.

1.1.12 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n}$,求 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

解法 1 若 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ 存在有限,记 $x = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$,则

$$\begin{aligned} x &= \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} \\ &= \frac{3(1+x)}{3+x}, \end{aligned}$$
$$3x + x^2 = 3 + 3x, x^2 = 3.$$
$$x = \sqrt{3} \ (x_n > 0, \text{故 } x \geqslant 0).$$

下面就证明 $x = \sqrt{3}$ 确为 x_n 的极限,显然 $x_n > 0$.

对 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N > \log_{\frac{3-\sqrt{3}}{3}} \frac{\varepsilon}{|x_1 - \sqrt{3}| + 1}$,当 $n > N$ 时,有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{3}| &= \left| \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - \sqrt{3} \right| \\ &= \left| \frac{3 + 3x_n - 3\sqrt{3} - \sqrt{3}x_n}{3+x_n} \right| \\ &= \frac{(3-\sqrt{3})|x_n - \sqrt{3}|}{3+x_n} \\ &\leqslant \frac{3-\sqrt{3}}{3} |x_n - \sqrt{3}| \\ &\leqslant \cdots \leqslant \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^n |x_1 - \sqrt{3}| \end{aligned}$$

$$\leqslant \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)^N |x_1-\sqrt{3}| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \sqrt{3}.$$

解法 2 显然 $x_n > 0$,且

(i) 当 $0 < x_1 \leqslant \sqrt{3}$ 时,归纳可证

$$0 < x_{n+1} = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} = \frac{3+3x_n}{3+x_n}$$

$$= 3 - \frac{6}{3+x_n} \leqslant 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{9+3\sqrt{3}-6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{3(1+x_n)}{3+x_n} - x_n$$

$$= \frac{3+3x_n-3x_n-x_n^2}{3+x_n}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-x_n)(\sqrt{3}+x_n)}{3+x_n} \geqslant 0,$$

$x_{n+1} \geqslant x_n$,即 x_n 单调增有上界$\sqrt{3}$,从而 x_n 收敛.

(ii) 当 $x_1 > \sqrt{3}$ 时,归纳可证

$$x_{n+1} = 3 - \frac{6}{3+x_n} > 3 - \frac{6}{3+\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

且

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(\sqrt{3}-x_n)(\sqrt{3}+x_n)}{3+x_n} < 0,$$

$x_{n+1} < x_n$,即 x_n 单调减有下界$\sqrt{3}$(或 0),从而 x_n 收敛.

综合(i)(ii)知 x_n 必收敛,由解法 1 知

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x = \sqrt{3}.$$

解法 3 $x_n = \dfrac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}}$.

$$x_n + \sqrt{3} = \sqrt{3}(1+\sqrt{3})\frac{x_{n-1}+\sqrt{3}}{x_{n-1}+3},$$

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{3}} = \frac{1}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{x_{n-1}+3}{x_{n-1}+\sqrt{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{6}\left(1+\frac{3-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}\right)$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{6} + (2-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6} = (2-\sqrt{3})\left(\frac{1}{x_{n-1}+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$= \cdots$$

$$= (2-\sqrt{3})^{n-1}\left(\frac{1}{x_1+\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

$$\to 0\ (n\to+\infty),$$

$$\frac{1}{x_n+\sqrt{3}} \longrightarrow \frac{\sqrt{3}}{6}\ (n\to+\infty),$$

$$x_n + \sqrt{3} \longrightarrow 2\sqrt{3}\ (n\to+\infty).$$

于是,$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sqrt{3}$.

解法 4 易知

$$b_n = \frac{x_n-\sqrt{3}}{x_n+\sqrt{3}} = \frac{\dfrac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}} - \sqrt{3}}{\dfrac{3(1+x_{n-1})}{3+x_{n-1}} + \sqrt{3}}$$

$$= \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\cdot\frac{x_{n-1}-\sqrt{3}}{x_{n-1}+\sqrt{3}}$$

$$= \cdots = \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}\right)^{n-1}\frac{x_1-\sqrt{3}}{x_1+\sqrt{3}}$$

$$\longrightarrow 0\ (n\to+\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{3}(1+b_n)}{1-b_n} = \sqrt{3}.$$

1.1.13 设$0 < a_1 < b_1 < c_1$,令

$$a_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}},\ b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3},$$

试证:a_n, b_n, c_n 收敛于同一实数.

证法 1 由题设

$$a_{n+1} = \frac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{b_n}+\dfrac{1}{c_n}},\quad b_{n+1} = \sqrt[3]{a_nb_nc_n},$$

$$c_{n+1} = \frac{a_n+b_n+c_n}{3},$$

及 $0 < a_1 < b_1 < c_1$,得到对任意 $n \in \mathbf{N}$,有

$$a_n < b_n < c_n.$$

因为

$$a_{n+1} > \frac{3}{\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n}+\dfrac{1}{a_n}} = a_n > a_1(n>1),$$

$$c_{n+1} < \frac{c_n+c_n+c_n}{3} = c_n < c_1(n>1).$$

所以,a_n 严格增,c_n 严格减,且 $a_1 < a_n < c_n < c_1$,因而 a_n、c_n 均收敛,记 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = c > 0$.

又因

$$\frac{3}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n} + \frac{1}{3c_{n+1}-a_n-c_n} + \frac{1}{c_n},$$

令 $n\to+\infty$,有

$$\frac{3}{a} = \frac{1}{a} + \frac{1}{3c-a-c} + \frac{1}{c}$$

$$= \frac{1}{a} + \frac{1}{2c-a} + \frac{1}{c},$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{2c-a} + \frac{1}{c}.$$

化简得

$$(a-c)(a-4c) = 0.$$

又 $3c_{n+1}-a_n-c_n=b_n>0$.所以

$$4c-a>2c-a=3c-a-c\geqslant 0.$$

因此 $a=c\ (a\neq 4c)$.再由 $a_n<b_n<c_n$ 和夹逼定理就得 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$.

证法 2 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to+\infty}c_n=c$ 及 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(3c_{n+1}-a_n-c_n)=3c-a-c=2c-a$.令 $b=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$,则 $b=2c-a$, $a-c=c-b$.又因 $a_n<b_n<c_n$,故 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}b_n\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}c_n$,即

$$a\leqslant b\leqslant c.$$

这蕴涵着 $a-c\leqslant 0$ 和 $c-b\geqslant 0$,从而

$$0\leqslant c-b=a-c\leqslant 0, c-b=a-c=0,$$

即 $a=c=b$.

1.1.14 设 $x_0>0$, $a\geqslant 0$,

$$x_n=\frac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3a)}{3x_{n-1}^2+a}, n=1,2,\cdots.$$

试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛,并求 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$.

证法 1 显然 $x_n>0$.从

$$x_{n+1}-x_n=\frac{-2x_n(x_n^2-a)}{3x_n^2+a},$$

$$x_{n+1}-\sqrt{a}=\frac{(x_n-\sqrt{a})^3}{3x_n^2+a}$$

知:若 $x_0\geqslant\sqrt{a}$,则由上两式及归纳法得到 $x_n\geqslant\sqrt{a}$,且 $\{x_n\}$ 为单调减数列,因此 $\{x_n\}$ 收敛;若 $x_0<\sqrt{a}$,则由上面两式及归纳法又可得 $x_n<\sqrt{a}$ 及 $\{x_n\}$ 为单调增数列,同样得 $\{x_n\}$ 收敛.

设 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$,对 $x_n=\dfrac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3a)}{3x_{n-1}^2+a}$ 两边求极限,有

$$x=\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}(x_{n-1}^2+3a)}{3x_{n-1}^2+a}=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a},$$

$$3x^3+ax=x^3+3ax,$$

$$x(x^2-a)=0.$$

若 x_n 单调减,则有下界 $\sqrt{a}>0$,故 $x>0$;若 x_n 单调增,则因 $x_1>0$,故 $x>0$.由方程 $x(x^2-a)=0$ 就只能得 $x=\sqrt{a}$.故 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\sqrt{a}$.

证法 2 由

$$y_n=\frac{x_n-\sqrt{a}}{x_n+\sqrt{a}}$$
$$=\frac{x_{n-1}^3+3ax_{n-1}-3x_{n-1}^2\sqrt{a}-a\sqrt{a}}{x_{n-1}^3+3ax_{n-1}+3x_{n-1}^2\sqrt{a}+a\sqrt{a}}$$
$$=\left(\frac{x_{n-1}-\sqrt{a}}{x_{n-1}+\sqrt{a}}\right)^3$$
$$=\left(\frac{x_{n-2}-\sqrt{a}}{x_{n-2}+\sqrt{a}}\right)^9$$
$$=\cdots=\left(\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right)^{3^n}\longrightarrow 0\ (n\to+\infty),$$

得到

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+y_n}{1-y_n}\sqrt{a}=\frac{1+0}{1-0}\sqrt{a}=\sqrt{a}.$$

1.1.15 证明:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛;当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

证法 1 因为 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)^\alpha}>a_n$,所以 a_n 严格单调增.

当 $\alpha>1$ 时,对任意 n,存在 $k\in\mathbf{N}$,使 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,则

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$$
$$=1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}\right)$$
$$<1+\left(\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{(2^k)^\alpha}+\cdots+\frac{1}{(2^k+2^k-1)^\alpha}\right)$$
$$<1+\frac{2}{2^\alpha}+\frac{4}{4^\alpha}+\cdots+\frac{2^k}{(2^k)^\alpha}$$
$$=1+\frac{1}{2^{\alpha-1}}+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$
$$<\frac{1}{1-\dfrac{1}{2^{\alpha-1}}},$$

从而 a_n 收敛.

当 $\alpha\leqslant 1$ 时,同样有 $k\in\mathbf{N}$,使 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$,则

$$a_n=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\cdots+\frac{1}{n^\alpha}$$
$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$
$$=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$
$$\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{2^{k-1}}{2^n}$$
$$=1+\frac{k}{2}$$
$$>1+\frac{1}{2}(\log_2 n-1)\to+\infty(n\to+\infty).$$

所以 $\sum\limits_{l=1}^{n}\dfrac{1}{l^\alpha}$ 无界,从而发散,即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}$ 发散.

证法 2 因为

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}<\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha},$$

所以，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 与 $\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}$ 同敛散. 而

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^{\alpha}}=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}, & \alpha>1,\\ \ln x\Big|_1^{+\infty}, & \alpha=1,\\ \frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^{+\infty}, & \alpha<1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{1-\alpha},\text{收敛},\alpha>1,\\ +\infty,\text{发散},\alpha=1,\\ +\infty,\text{发散},\alpha<1.\end{cases}$$

故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ 当 $\alpha>1$ 时收敛；当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

1.1.16 设 $a_n>0, S_n=a_1+\cdots+a_n, T_n=\frac{a_1}{S_1}+\cdots+\frac{a_n}{S_n}$，如果 $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$，则 $\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty$.

证法1 因为 $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$，对 $n_1=2$，$\lim_{n\to+\infty}(S_n-S_2)=+\infty$，故存在 $n_2>n_1$，使 $S_{n_2}>2S_{n_1}$；同样，对 n_2，存在 $n_3>n_2$，使 $S_{n_3}>2^2S_{n_2}$，…，对 n_k，存在 $n_{k+1}>n_k$，使 $S_{n_{k+1}}>2^kS_{n_k}$，所以

$$\begin{aligned}T_{n_{k+1}}&=\frac{a_1}{S_1}+\frac{a_2}{S_2}+\cdots+\frac{a_{n_{k+1}}}{S_{n_{k+1}}}\\&\geqslant 1+\left(\frac{a_{n_1+1}}{S_{n_1+1}}+\cdots+\frac{a_{n_2}}{S_{n_2}}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{a_{n_k+1}}{S_{n_k+1}}+\cdots+\frac{a_{n_{k+1}}}{S_{n_{k+1}}}\right)\\&\geqslant 1+\frac{S_{n_2}-S_{n_1}}{S_{n_2}}+\cdots+\frac{S_{n_{k+1}}-S_{n_k}}{S_{n_{k+1}}}\\&=k-\left(\frac{S_{n_1}}{S_{n_2}}+\cdots+\frac{S_{n_k}}{S_{n_{k+1}}}\right)\\&>k-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&>k-1.\end{aligned}$$

由此得到 $\lim_{k\to+\infty}T_{n_{k+1}}=+\infty$. 再由 T_n 严格增推得

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty.$$

证法2 因为 S_n 和 T_n 都是严格增的数列，所以 $\lim_{n\to+\infty}S_n$ 和 $\lim_{n\to+\infty}T_n$ 都存在(可能为 $+\infty$). 现证 $\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty$. (反证) 假设 $\lim_{n\to+\infty}T_n=T<+\infty$，则对 $0<\varepsilon_0<1$，存在 $n_0\in\mathbf{N}$，使当 $n>n_0$ 时，

$$T-\varepsilon_0<T_n<T,$$

即 $0\leqslant T_n-T_{n_0}=\frac{a_{n_0+1}}{S_{n_0+1}}+\cdots+\frac{a_n}{S_n}<T-T_{n_0}<\varepsilon_0$，故对于 $n\geqslant n_0+1$，有

$$\begin{aligned}\varepsilon_0&>\frac{a_{n_0+1}}{S_{n_0+1}}+\cdots+\frac{a_n}{S_n}>\frac{a_{n_0+1}+\cdots+a_n}{S_n}\\&=\frac{S_n-S_{n_0}}{S_n}=1-\frac{S_{n_0}}{S_n},\end{aligned}$$

$$\frac{S_{n_0}}{S_n}>1-\varepsilon_0,$$

$$S_n<\frac{S_{n_0}}{1-\varepsilon_0}<+\infty,$$

S_n 有界，这与 $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$ 相矛盾，所以

$$\lim_{n\to+\infty}T_n=+\infty.$$

1.1.17 设 f 和 g 分别为区间 $[a,b]$ 上的非负和正值连续函数，试证

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\mathrm{d}x}=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x).$$

证 如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 0$. 等式显然成立.

如果在 $[a,b]$ 上 $f(x)\not\equiv 0$，由于 f 连续，所以存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)=f(x_0)>0$. 不失一般性，设 $a<x_0<b$，对 $\forall 0<\varepsilon<M$，由 f 连续，存在 $\delta>0$，当 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 时，$M-\frac{\varepsilon}{2}=f(x_0)-\frac{\varepsilon}{2}<f(x)$，于是

$$\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}g(x)\mathrm{d}x}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\mathrm{d}x}\leqslant M\sqrt[n]{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.$$

因为 g 为正连续函数，所以

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}g(x)\mathrm{d}x>0,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}g(x)\mathrm{d}x}=1=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}.$$

于是，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有

$$M-\varepsilon<\sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\mathrm{d}x}<M+\varepsilon,$$

故 $\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\mathrm{d}x}=M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}f(x)$.

注 这还是数列极限题，但与函数连续性密切相关. 不等式

$$\left(M-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}g(x)\mathrm{d}x}$$

$$\leqslant\sqrt[n]{\int_a^b g(x)[f(x)]^n\mathrm{d}x}\leqslant M\sqrt[n]{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

及

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}g(x)\mathrm{d}x}=1=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$$

起了关键作用. 值得注意的是，这里不用夹逼定理.

1.1.18 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 皆为 $[a,b]$ 上的正值连

续函数，记 $M=\max\limits_{a\le x\le b} f(x)$. 证明

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)f^n(x)\mathrm{d}x}=M,$$

其中 $f^n(x)=[f(x)]^n$.

证 设

$$a_n=\int_a^b g(x)f^n(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b g^{\frac{1}{2}}(x)f^{\frac{n-1}{2}}(x)\cdot g^{\frac{1}{2}}(x)\cdot f^{\frac{n+1}{2}}(x)\mathrm{d}x,$$

由 Schwarz(或 Cauchy) 不等式，有

$$a_n^2\leqslant\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\mathrm{d}x$$
$$=a_{n-1}a_{n+1}.$$

因为 $g(x),f(x)$ 皆为$[a,b]$上的正值函数，故 $a_n>0$，从而

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}\geqslant\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

设 $b_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$，则$\{b_n\}$为单调增数列，又易证 $b_n\leqslant M$，即

$$b_n=\frac{\int_a^b g(x)f^n(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x}$$
$$\leqslant\frac{M\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)f^{n-1}(x)\mathrm{d}x}=M.$$

因此，$\{b_n\}$收敛，于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_a^b g(x)f^{n+1}(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)f^n(x)\mathrm{d}x}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}b_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$
$$\xlongequal{\text{由题 1.1.1(4)}}\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdots\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\int_a^b g(x)f^n(x)\mathrm{d}x}\xlongequal{\text{由题 1.1.17}}M.$$

注 首先要能判断出已知数列的单调性，然后利用 Schwarz 不等式及定积分的性质证明之，最后再利用前面题中结论. 解题要有这种判断力.

1.1.19 证明

(1) $e_n=(1+\frac{1}{n})^n$ 为严格增的数列且有上界，因而收敛，记 $e=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^n$;

(2) $\beta_n=(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 为严格减的数列，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\beta_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$;

(3) $(1+\frac{1}{n})^n<e<(1+\frac{1}{n})^{n+1}$;

(4) $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$;

(5) $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$ ($c=0.57721\cdots$，称为 Euler 常数);

(6) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=1$;

(7) 设 $y_n=\sum\limits_{k=0}^n\frac{1}{k!}$，则 $e_n<y_n<e$，$\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^n\frac{1}{k!}=e$;

(8) 对任何自然数 n，$e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{nn!}$，$0<\theta_n<1$，由此作近似计算可得 $e=2.7182818\cdots$;

(9) e 为无理数;

(10) $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$;

(11) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$.

证 (1) 用两种方法证 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是严格增数列.

(方法 1) 对任何 n，$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>1$. 用 m 个正数的几何平均数不大于它们的算术平均数就得

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$<\left[\frac{1+n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}\right]^{n+1}$$
$$=\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1}.$$

(方法 2) 用二项式展开得

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$
$$=1+1+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!}n(n-1)\cdots(n-k+1)\cdot\frac{1}{n^k}$$
$$=2+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$
$$<2+\sum_{k=2}^n\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=1+1$$

$$+\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k!}(n+1)\cdots(n+1-k+1)\frac{1}{(n+1)^k}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1},$$

所以 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 为严格增数列. 由方法2还知

$$e_n=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}$$

$$\leqslant 1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(k-1)k}$$

$$=1+1+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=1+1+1-\frac{1}{n}<3.$$

e_n 有上界3, 因而数列 e_n 收敛, 记其极限为 e, 即 $e=\lim\limits_{n\to+\infty}e_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. 显然 $2<e\leqslant 3$.

(2) 用两种方法证 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 严格减.

(方法1) $$\frac{1}{\beta_n}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$=1\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$<\left[\frac{1+(n+1)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}{n+2}\right]^{n+2}$$

$$=\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2}=\frac{1}{\beta_{n+1}}.$$

所以 $\beta_n>\beta_{n+1}$, β_n 为严格减数列.

(方法2) 由

$$\frac{\beta_n}{\beta_{n+1}}=\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}}$$

$$=\left[\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right]^{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}$$

$$=\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$\geqslant\left(1+\frac{n+1}{n^2+2n}\right)\left(1-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=1+\frac{n+1}{n^2+2n}-\frac{1}{n+2}-\frac{n+1}{n(n+2)^2}$$

$$=1+\frac{n^2+3n+2-n^2-2n-n-1}{n(n+2)^2}$$

$$=1+\frac{1}{n(n+2)^2}>1.$$

故 $\beta_n>\beta_{n+1}$, $\beta_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 严格减. 而

$$\lim_{n\to+\infty}\beta_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e.$$

(3) 由 $e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 严格增, 极限为 e 知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e$, 同理 $\beta_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 严格减, 极限为 e, 就有 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$ 即

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\ \forall n\in\mathbf{N}.$$

(4) 对 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 各取对数得($e>1$)

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$n<\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}<n+1.$$

取倒数得

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

(5) 将(4)中右边的不等式从1到 n 列出有

$$\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)<\frac{1}{1},$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{2},$$

……

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}.$$

将不等式各边相加得

$$\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n}<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n},$$

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

进而有 $\ln n<\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$.

设 $x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>0$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)+\ln n$$

$$=\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<0.$$

故 x_n 严格减, 且有下界0, 因此 x_n 收敛, 记

$$c=\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

称为 Euler 常数, $c=0.57721\cdots$.

(6) 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=c$, 令 $x_n=c+\alpha_n$, 于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n-c)=0$, 且 $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}=x_n+\ln n$, 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{x_n+\ln n}{\ln n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{c+\alpha_n+\ln n}{\ln n}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{c}{\ln n}+\frac{\alpha_n}{\ln n}\right)$$

$$=1+c\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln n}+\lim_{n\to+\infty}\alpha_n\cdot\frac{1}{\ln n}$$

$$=1+c\cdot 0+0\cdot 0=1.$$

(7) $y_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}$,显然 y_n 是严格增的数列.一方面,由(1)知

$$e_n=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$<1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=y_n.$$

另一方面,对 $m>n$,由

$$e>e_m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{m})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{n-1}{m})+\cdots+\frac{1}{m^m}$$

$$>1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{m})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{n-1}{m}),$$

固定 n,令 $m\to+\infty$ 就得

$$e=\lim_{m\to+\infty}e_m$$

$$\geqslant\lim_{m\to+\infty}\left[1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{m})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{m})\cdots(1-\frac{n-1}{m})\right]$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}.$$

综合起来,就有

$$e_n<y_n\leqslant e,\quad n=1,2,\cdots$$

再由 $\lim_{n\to+\infty}e_n=e=\lim_{n\to+\infty}e$ 和夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}y_n=\lim_{n\to+\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!})=e.$$

(8) 对 $\forall n\in\mathbf{N}$,考虑

$$y_{n+m}-y_n$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots+\frac{1}{(n+m)!}$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}(1+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)\cdots(n+m)})$$

$$<\frac{1}{(n+1)!}\left(1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+2)^{m-1}}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1-(\frac{1}{n+2})^m}{1-\frac{1}{n+2}},$$

令 $m\to+\infty$,得

$$0<e-y_n\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{\frac{n+1}{n+2}}$$

$$=\frac{n+2}{(n+1)^2}\cdot\frac{1}{n!}<\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n!},$$

即

$$0<\frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}}<1.$$

令 $\frac{e-y_n}{\frac{1}{n\cdot n!}}=\theta_n$,则 $0<\theta_n<1$,而 $e-y_n=\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$,从而

$$e=y_n+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!},0<\theta_n<1.$$

通过该式作近似计算可得

$$e=2.7182818\cdots.$$

(9)(反证)假设 e 为有理数,则存在互质的自然数 p,q,使 $e=\frac{p}{q}$.由(8),e 可表示为 $y_q+\frac{\theta_q}{qq!}$,$0<\theta_q<1$,因此

$$\frac{p}{q}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{q!}+\frac{\theta_q}{q\cdot q!},$$
$$0<\theta_q<1.$$

两边同乘 $q!$ 得

$$p\cdot(q-1)!=2q!+\cdots+1+\frac{\theta_q}{q},0<\theta_q<1,$$

等式左边是整数,右边前 q 项也是整数,但最后一项 $\frac{\theta_q}{q}$ 不是整数,所以右边不为整数,矛盾.e 是无理数.

(10) 由(3) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<e^n<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$$

$$\frac{(n+1)^n}{n!}<e^n<\frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<\frac{(n+1)^{n+1}}{e^n}$$

$$=e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

(11)(方法1)在(10)的不等式各边开 n 次方得

$$\frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}\sqrt[n]{n+1},$$

$$\frac{1}{e}\frac{n+1}{n}<\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}<\frac{1}{e}\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{n+1},$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{e}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{e}\cdot\frac{n+1}{n}\sqrt[n]{n+1}$ 和夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}.$$

（方法 2）应用 Stirling 公式

$$n!=\sqrt{2\pi n}\,n^n e^{-n+\frac{\theta_n}{12n}},0<\theta_n<1$$

可得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[2n]{2\pi n}\cdot n\cdot e^{-1}\sqrt[n]{e^{\frac{\theta_n}{12n}}}}{n}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

（方法 3）$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}}$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\ln\frac{1}{n}+\cdots+\ln\frac{n}{n}\right]$$

$$=\int_0^1\ln x\,dx=x\ln x\Big|_0^1-\int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-1=\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}-1$$

$$=0-1=-1,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}}$$

$$=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\sqrt[n]{\frac{1}{n}\cdots\frac{n}{n}}}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

注 数列 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 和 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 是两个单调有界的有理数列，而其极限却是无理数 e，本题是一个系列题，它叙述了证明过程并给出数 e 与 $n!$ 的关系 $\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$ 及极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=\frac{1}{e}$. 这些都重要又很有用.

【1.1.20】试证

$$\lim_{n\to+\infty}\{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\}=\frac{1}{e}.$$

证法 1 由题 1.1.19(10) 的不等式

$$\left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<\left(\frac{n+1}{e}\right)^n\cdot(n+1)$$

得 $\frac{n+1}{e}<\sqrt[n]{n!}<\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}$. 令

$$a_n=[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}$$

$$=(n!)^{\frac{1}{n}}\left\{\left[\frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right\}.$$

则有

$$\frac{n+1}{e}\left[\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]<a_n$$

$$<\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left[(e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right].$$

一方面，我们有

$$\frac{n+1}{e}(n+1)^{\frac{1}{n}}\left[(e^n)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$$

$$=\left[(n+1)(e^{\frac{1}{n+1}}-1)\right]\cdot\frac{(n+1)^{\frac{1}{n}}}{e}$$

$$\to\ln e\cdot\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\ (n\to+\infty),$$

另一方面，令 $t_n=(n+1)^{\frac{1}{n}}-1>0$，则 $\lim\limits_{n\to+\infty}t_n=0$. 于是，

$$\alpha_n=\left[\frac{e}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\right]^{\frac{1}{n+1}}-1=\left(\frac{e}{1+t_n}\right)^{\frac{1}{n+1}}-1,$$

$$n+1=\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln(1+\alpha_n)},$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e}\left[\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln(1+\alpha_n)}\alpha_n\right\}$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{e}{1+t_n}}{\ln(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}}$$

$$=\frac{1}{e}\frac{\ln\frac{e}{1+0}}{\ln e}=\frac{1}{e}.$$

根据夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\{[(n+1)!]^{\frac{1}{n+1}}-(n!)^{\frac{1}{n}}\}=\frac{1}{e}.$$

证法 2 由

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[(n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{1}{n}}=1^0=1$$

和 $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n+1)}{n}=0$ 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e}\left[\left(\frac{e^n}{n+1}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{e(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}}\left[e^{\frac{1}{n+1}}-(n+1)^{\frac{1}{n(n+1)}}\right]$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}(n+1)\left[e^{\frac{1}{n+1}}-e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e^{\frac{1}{n+1}}-1}{\frac{1}{n+1}}-\frac{e^{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}-1}{\frac{1}{n(n+1)}\ln(n+1)}\cdot\frac{\ln(n+1)}{n}\right]$$

$$=\frac{1}{e}[1-1\cdot0]=\frac{1}{e}.$$

1.1.21 设 $a_n\geqslant0$, $S_n=\sum\limits_{i=1}^n a_i$ 收敛于 S，求证：$b_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 收敛.

证法1 由题设，$S_{n+1}=S_n+a_{n+1}\geqslant S_n$，故 S_n 单调增且 $S\geqslant S_n\geqslant 0$.

若 $S=0$，则 $a_j=0,\forall j\in\mathbf{N}$，于是 $b_n\equiv 1$，必收敛；

若 $S>0$，取 $n>S$，即 $[\frac{n}{S}]\geqslant 1$. 由正数的算术平均数不小于几何平均数得

$$\begin{aligned}b_n&=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\&\leqslant\left[\frac{(1+a_1)+(1+a_2)+\cdots+(1+a_n)}{n}\right]^n\\&=\left(1+\frac{S_n}{n}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{S}{n}\right)^n\\&=\left(1+\frac{1}{\frac{n}{S}}\right)^n\leqslant\left(1+\frac{1}{[\frac{n}{S}]}\right)^{([\frac{n}{S}]+1)S}\\&<e^S\left(1+\frac{1}{[\frac{n}{S}]}\right)^S<e^S\cdot 2^S=(2e)^S.\end{aligned}$$

因此，$b_n=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)$ 单调增($b_{n+1}=b_n(1+a_{n+1})\geqslant b_n$)且有上界 $(2e)^S$，从而它必收敛.

证法2 利用当 $x\geqslant 0$ 时，$e^x\geqslant 1+x$ 得到

$$\begin{aligned}b_n&=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\&\leqslant e^{a_1}\cdot e^{a_2}\cdots e^{a_n}=e^{a_1+\cdots+a_n}\leqslant e^S,\end{aligned}$$

再由 $b_{n+1}=b_n(1+a_{n+1})\geqslant b_n$ 知 b_n 单调增，所以 b_n 收敛.

1.1.22 设 $\alpha<1$，求证

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]=0.$$

证法1 因为 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 单调增趋于 e，而 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ 单调减趋于 e，所以

$$\begin{aligned}0&<n^\alpha\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]\\&<n^\alpha\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=n^\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{1}{n}<\frac{e}{n^{1-\alpha}}.\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{e}{n^{1-\alpha}}=0=\lim_{n\to+\infty}0,$$

根据夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-(1+\frac{1}{n})^n\right]=0.$$

证法2 由 Taylor 展开得到

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}=e^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right)}\\&=e^{1-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}=e\cdot e^{-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})}\\&=e\left\{1+\left[-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right]+o\left(-\frac{1}{2n}+o(\frac{1}{n})\right)\right\}\\&=e-\frac{e}{2n}+o(\frac{1}{n}).\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(e-\frac{e}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{e}{2n^{1-\alpha}}+o\left(\frac{1}{n^{1-\alpha}}\right)\right]=0.\end{aligned}$$

证法3 应用 L'Hospital 法则有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}n^\alpha\left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]\\&=\lim_{x\to0}\frac{e-(1+x)^{\frac{1}{x}}}{x^\alpha}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-(1+x)^{\frac{1}{x}}\left[\frac{1}{x(1+x)}-\frac{1}{x^2}\ln(1+x)\right]}{\alpha x^{\alpha-1}}\\&=-\frac{e}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^{1+\alpha}(1+x)}\\&=-\frac{e}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^{1+\alpha}}\\&=-\frac{e}{\alpha}\lim_{x\to0}\frac{1-1-\ln(1+x)}{(1+\alpha)x^\alpha}\\&=\frac{e}{\alpha(1+\alpha)}\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\alpha x^{\alpha-1}}\\&=\frac{e}{\alpha^2(1+\alpha)}\lim_{x\to0}\frac{x^{1-\alpha}}{1+x}=0.\end{aligned}$$

注 经常将数列夹在一常数和一个以该常数为极限的数列之间，然后应用夹逼定理.

1.1.23 试证明

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\ln2}{2}+\sin\frac{\ln3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

证 由

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{\sin\frac{\ln2}{2}}\\&\leqslant\left(\sin\frac{\ln2}{2}+\sin\frac{\ln3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\\&\leqslant\sqrt[n]{n}\end{aligned}$$

和

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\sin\frac{\ln2}{2}}=1=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n},$$

再根据夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sin\frac{\ln2}{2}+\sin\frac{\ln3}{3}+\cdots+\sin\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

注 由于当 $n\to+\infty$ 时，对任意实数 $a(a\neq0)$，$\sqrt[n]{a}\to1$ 及 $\sqrt[n]{n}\to1$，而在 a 和 n 中可以夹进很多数. 故这两个极限应用很广.

1.1.24 设 $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数，$a_n=$

$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}$，求 $\lim_{n\to+\infty}a_n$.

解　当 $2\leqslant k\leqslant[\frac{n}{2}]+1$ 时（$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数），有

$$\frac{1}{C_n^k}=\frac{k!}{n(n-1)\cdots(n-k+1)}$$
$$=\frac{2}{n(n-1)}\cdot\frac{k(k-1)\cdots3}{(n-2)\cdots(n-k+1)}$$
$$\leqslant\frac{2}{n(n-1)}.$$

因此，

$$2=\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^n}\leqslant a_n=\frac{1}{C_n^0}+\frac{1}{C_n^1}+\cdots+\frac{1}{C_n^n}$$
$$\leqslant2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}\left(\left[\frac{n}{2}\right]\times2\right)$$
$$\leqslant2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n(n-1)}\left(\frac{n}{2}\cdot2\right)$$
$$=2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}.$$

根据

$$\lim_{n\to+\infty}2=2=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2}{n}+\frac{2}{n-1}\right)$$

和夹逼定理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{C_n^k}=2.$$

1.1.25　设数列 a_n,b_n,c_n 满足：

$$a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1},a_1>0,$$
$$4\leqslant b_n\leqslant5,4\leqslant c_n\leqslant5,$$

求 $\lim_{n\to+\infty}a_n$.

解　显然有

$$0<a_n=\frac{\sqrt{b_n^2+c_n^2}}{b_n+c_n}a_{n-1}$$
$$<\frac{\sqrt{5^2+5^2}}{4+4}a_{n-1}=\frac{5\sqrt2}{8}a_{n-1}$$
$$<\frac{5\sqrt2}{8}\cdot\frac{5\sqrt2}{8}a_{n-2}<\cdots<\left(\frac{5\sqrt2}{8}\right)^{n-1}a_1.$$

因为 $\lim_{n\to+\infty}0=0=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5\sqrt2}{8}\right)^{n-1}a_1$（注意 $0<\frac{5\sqrt2}{8}<1$），所以由夹逼定理就有

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=0.$$

1.1.26　求极限 $\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt k}$.

解法1　由

$$2=\frac{2n+2}{\sqrt{(n+1)^2}}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt k}$$
$$\leqslant\frac{2n+2}{\sqrt{n^2}}=2+\frac{2}{n},$$

$$\lim_{n\to+\infty}2=2=\lim_{n\to+\infty}\left(2+\frac{2}{n}\right),$$

以及夹逼定理立即得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt k}=2.$$

解法2　因为

$$\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt k}\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt k}$$
$$\leqslant\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{2}{\sqrt k+\sqrt{k-1}},$$

而且

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{2}{\sqrt{k+1}+\sqrt k}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}2(\sqrt{k+1}-\sqrt k)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}2\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-\sqrt{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+4}{\sqrt{(n+1)^2+1}+n}=2,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{2}{\sqrt k+\sqrt{k-1}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}2(\sqrt k-\sqrt{k-1})$$
$$=\lim_{n\to+\infty}2\left(\sqrt{(n+1)^2}-\sqrt{n^2-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{4n+4}{(n+1)+\sqrt{n^2-1}}=2.$$

所以，由夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt k}=2.$$

1.1.27　设 $\{a_n\}$ 为正数数列，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt n}=a.$$

试证：$\lim_{n\to+\infty}\sqrt n\left(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right)=0$.

证法1　因为

$$0\leqslant\sqrt n\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$$
$$=\frac{\sqrt n}{\sqrt[n]{n!}}\sqrt[n]{a_1\cdot2a_2\cdots na_n}$$
$$\leqslant\frac{\sqrt n}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}$$
$$=\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt n},$$

而 $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt n}=0\cdot a=0$，

再由夹逼定理就得

925765

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right)=0.$$

证法 2 先证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}=0$.(反证)假设 $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}=b\neq0$,由 $a_n>0$ 知 $b>0$.取定自然数 N,使 $Nb>a$.于是

$$\begin{aligned}
a&=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\\
&=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\\
&\geqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{(N+1)a_{N+1}+\cdots+na_n}{\sqrt{n}}\\
&\geqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\Big[\frac{N(a_1+\cdots+a_n)}{\sqrt{n}}\\
&\quad-\frac{N(a_1+\cdots+a_{N-1})}{\sqrt{n}}\Big]\\
&=N\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}\\
&=Nb>a
\end{aligned}$$

矛盾,所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}\\
&=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}=0.
\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right)\\
&\leqslant\frac{a_1+\cdots+a_n}{\sqrt{n}}\longrightarrow0\ (n\to+\infty),
\end{aligned}$$

根据夹逼定理,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\left(\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\right)=0.$$

1.1.28 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]$,$0<\alpha<1$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{[na_n]}{n}$,其中 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a\in\mathbf{R}$;

(3) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{p(n)}{n}$,其中 $p(n)$ 为能整除自然数 n 的素(质)数的个数.

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}
0&<(n+1)^\alpha-n^\alpha=n^\alpha\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^\alpha-1\Big]\\
&<n^\alpha\Big[\Big(1+\frac{1}{n}\Big)-1\Big]=\frac{1}{n^{1-\alpha}},
\end{aligned}$$

$0<\alpha<1$,故 $1-\alpha>0$,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{1-\alpha}}=0=\lim\limits_{n\to+\infty}0$,根据夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}[(n+1)^\alpha-n^\alpha]=0.$$

(2) 因为

$$a_n-\frac{1}{n}=\frac{na_n-1}{n}<\frac{[na_n]}{n}\leqslant\frac{na_n}{n}=a_n$$

和

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(a_n-\frac{1}{n}\Big)=a-0=a=\lim_{n\to+\infty}a_n,$$

以及夹逼定理,有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{[na_n]}{n}=a.$$

(3) 设 $p_1,\cdots,p_k$ 为 n 的所有素因子,则 $k=p(n)$,于是

$$n=p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}\geqslant p_1\cdots p_k\geqslant2^k.$$

因此

$$p(n)=k\leqslant\log_2 n,$$

$$0<\frac{p(n)}{n}\leqslant\frac{\log_2 n}{n}.$$

由 $\lim\limits_{n\to+\infty}0=0=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\log_2 n}{n}$ 和夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{p(n)}{n}=0.$$

注 由于夹逼定理有两个不等式,故在选择数列 b_n,c_n,使 $b_n\leqslant a_n\leqslant c_n$ 时,往往要用到很多初等数学的技巧,而且要对数列的极限有一个正确的估计.本题直至 1.1.31 都是这类技巧.

1.1.29 设$\{a_n\}$为实数列,满足不等式

$$0\leqslant a_k\leqslant100a_n,\text{其中 }n\leqslant k\leqslant2n,\ n=1,2,\cdots.$$

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$.

证 由题设,对任何自然数 n,有

$$\begin{aligned}
&a_{2n}\leqslant100a_n,\ n<2n\leqslant2n,\\
&a_{2n}\leqslant100a_{n+1},\ n+1\leqslant2n\leqslant2(n+1),\\
&\cdots\cdots\\
&a_{2n}\leqslant100a_{2n-1},\ 2n-1<2n\leqslant2(2n-1).
\end{aligned}$$

将上面的不等式相加再同乘 2 得

$$0\leqslant2na_{2n}\leqslant200(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1}).$$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1})=0$.由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}2na_{2n}=0.$$

同理得

$$\begin{aligned}
0&\leqslant(2n-1)a_{2n-1}<2na_{2n-1}\\
&\leqslant200(a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n-1})\\
&\longrightarrow0(n\to+\infty),
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}(2n-1)a_{2n-1}=0.$$

因此 $$\lim_{n\to+\infty}na_n=0.$$

1.1.30 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\Big(1+\frac{1}{n^2}\Big)\Big(1+\frac{2}{n^2}\Big)\cdots\Big(1+\frac{n}{n^2}\Big).$$

解法 1 因为

$$1+\frac{1}{n}<\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n+1-k}{n^2}\right)$$
$$=1+\frac{n+1}{n^2}+\frac{k(n+1-k)}{n^4}$$
$$\leqslant 1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{4n^4},$$

所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$$
$$\leqslant\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)\left(1+\frac{n+1-k}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{4n^4}\right]^{\frac{n}{2}}.$$

设 $A_n=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{(n+1)^2}{4n^4}$，则 $A_n\to 0$，且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2}A_n=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}+\frac{(n+1)^2}{8n^3}\right)=\frac{1}{2},$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{(n-1)^2}{4n^4}\right]^{\frac{n}{2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}(1+A_n)^{\frac{n}{2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[(1+A_n)^{\frac{1}{A_n}}\right]^{\frac{n}{2}A_n}=e^{\frac{1}{2}}.$$

再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=e^{\frac{1}{2}}$ 和夹逼定理立即有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)\left(1+\frac{n+1-k}{n^2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}.$$

解法2 因为当 $k\leqslant n$ 时，

$$\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{(n+1)^2}{k}}>\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{k}+2}$$
$$>\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{k}\right]+1}\right)^{\left[\frac{n^2}{k}\right]+2}>e,$$

所以

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)>\frac{k}{(n+1)^2}.$$

同理

$$\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{(n-1)^2}{k}}<\left(1+\frac{k}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{k}-2+\frac{1}{k}}$$
$$<\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{k}\right]}\right)^{\left[\frac{n^2}{k}\right]+\frac{1}{k}-1}$$
$$<\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{k}\right]}\right)^{\left[\frac{n^2}{k}\right]}<e,$$

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\frac{k}{(n-1)^2}.$$

于是，由

$$\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=1}^{n}k$$
$$<\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)<\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(n-1)^2}$$
$$<\frac{1}{(n-1)^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2(n-1)^2}$$

和

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n(n+1)}{2(n-1)^2},$$

再根据夹逼定理得到

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

解法3 根据 $\ln(1+x)=x+o(x)\ (x\to 0)$，有

$$\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{k}{n^2}\right)=\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k}{n^2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}+no\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n(n+1)}{2n^2}+o(1)\right]=\frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)}$$
$$=e^{\frac{1}{2}}.$$

解法4 由 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$ 得

$$\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{i}}\right)$$
$$\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{i}\right]}\right)<\frac{1}{\left[\frac{n^2}{i}\right]}$$
$$<\frac{1}{\frac{n^2}{i}-1}=\frac{i}{n^2-i},$$

$$\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\ln\left(1+\frac{1}{\frac{n^2}{i}}\right)$$
$$>\ln\left(1+\frac{1}{\left[\frac{n^2}{i}\right]+1}\right)>\frac{1}{\left[\frac{n^2}{i}\right]+2}$$
$$>\frac{1}{\frac{n^2}{i}+2}=\frac{i}{n^2+2i},$$
$$\frac{i}{n^2+2i}<\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\frac{i}{n^2-i},$$
$$i=1,2,\cdots,n.$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2i}<\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-i} \qquad (*)$$

又 $\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2n}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2}$,

$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-1}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-n}$,且

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2n}=\frac{1}{n^2+2n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2(n+2)}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2}=\frac{1}{n^2+2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n^2+n}{2(n^2+2)}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-1}=\frac{1}{n^2-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty),$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-n}=\frac{1}{n^2-n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$
$$=\frac{n+1}{2(n-1)}\to\frac{1}{2}\ (n\to+\infty).$$

由夹逼定理知

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2+2i}=\frac{1}{2}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{i}{n^2-i}.$$

由(*)及夹逼定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)=\frac{1}{2}.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}e^{\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)}$$
$$=e^{\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{i}{n^2}\right)}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}.$$

1.1.31 求极限 $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)$, $p>0$.

解法1 因为 $1+\frac{k^p}{n^{p+1}}>1, k=1,\cdots,n$,所以

$$\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$<\left[\frac{\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)+\cdots+\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)}{n}\right]^n$$
$$=\left(1+\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+2}}\right)^n.$$

再由 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}>e$,即 $1+\frac{1}{n}>e^{\frac{1}{n+1}}$ 得

$$1+\frac{k^p}{n^{p+1}}=1+\frac{1}{\frac{n^{p+1}}{k^p}}>1+\frac{1}{\left[\frac{n^{p+1}}{k^p}\right]+1}$$
$$>e^{\frac{1}{\left[\frac{n^{p+1}}{k^p}\right]+1}}>e^{\frac{1}{\frac{n^{p+1}}{k^p}+1}}=e^{\frac{k^p}{n^{p+1}+k^p}}$$

于是

$$\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$>e^{\frac{1^p}{n^{p+1}+1^p}}\cdots e^{\frac{n^p}{n^{p+1}+n^p}}>e^{\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}+n^p}},$$
$$e^{\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}+n^p}}<\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$<\left(1+\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+2}}\right)^n.$$

而由 1.1.33 得到

$$\lim_{n\to+\infty}e^{\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}+n^p}}=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}}\right)^{\frac{n}{n+1}}=e^{\frac{1}{p+1}}.$$

用 1.1.33 证法 1 中的方法得

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^p+\cdots+n^p}{n^{p+2}}\right)^n=e^{\frac{1}{p+1}}.$$

根据夹逼定理,有

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{n^p}{n^{p+1}}\right)=e^{\frac{1}{p+1}}.$$

解法2 根据 $\ln(1+x)=x+o(x)\ (x\to0)$,有

$$\ln\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)=\frac{k^p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$=\frac{k^p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k^p}{n^{p+1}}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{k^p}{n^{p+1}}+n\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^{p+1}}\sum_{k=1}^{n}k^p+o(1)\right]=\frac{1}{p+1},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1^p}{n^{p+1}}\right)\cdots\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty} e^{\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)}\\
&=e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)}=e^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

1.1.32 设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续可导，而

$$\Delta_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)$$

试证：(1) $$-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}M_k\leqslant\Delta_n\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}m_k,$$

其中

$$m_k=\min\left\{f'(x)\,\middle|\,a+(k-1)\frac{b-a}{n}\leqslant x\leqslant a+k\frac{b-a}{n}\right\},$$

$$M_k=\max\left\{f'(x)\,\middle|\,a+(k-1)\frac{b-a}{n}\leqslant x\leqslant a+k\frac{b-a}{n}\right\};$$

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}n\Delta_n=-\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]$.

证 (1) 应用 Lagrange 中值定理

$$\begin{aligned}
\Delta_n&=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\left[f(x)-f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=\sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}f'(\xi_k)\left[x-\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\geqslant\sum_{k=1}^{n}M_k\int_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\left[x-\left(a+k\cdot\frac{b-a}{n}\right)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}M_k\left[x-\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right]^2\Bigg|_{a+(k-1)\frac{b-a}{n}}^{a+k\frac{b-a}{n}}\\
&=-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}M_k.
\end{aligned}$$

同理有

$$\Delta_n\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}m_k.$$

所以

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}M_k\leqslant\Delta_n\leqslant-\frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\sum_{k=1}^{n}m_k.$$

(2) 由(1)得

$$-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}M_k\frac{b-a}{n}\leqslant n\Delta_n\leqslant-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{b-a}{n}.$$

再利用

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}M_k\frac{b-a}{n}\right]\\
&=-\frac{b-a}{2}\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t\\
&=-\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)]\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{b-a}{n}\right]
\end{aligned}$$

和夹逼定理就得到

$$\lim_{n\to+\infty}n\Delta_n=-\frac{b-a}{2}[f(b)-f(a)].$$

注 (1)题实际是(2)的提示．运用系列题中的连贯性也是一种解题技巧，从不等式

$$-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}M_k\frac{b-a}{n}\leqslant n\Delta_n\leqslant-\frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{b-a}{n}$$

立即想到用夹逼定理．

下面介绍用 Stolz 公式求数列的极限．这个方法很容易被接受，特别是当数列的分子部分是级数的部分和时，用起来特别方便．它类似于 L'Hospital 法则，不过 Stolz 公式用于离散的数列，而 L'Hospital 法则用于可导的函数．我们还给出了别的解法，以显示分析的功夫．

1.1.33 证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\frac{1}{p+1}$，$p>0$．

证法1 如果 p 为自然数，应用 Stolz 公式和二项式定理得到

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{(p+1)n^p-C_{p+1}^2n^{p-1}+\cdots+(-1)^{p+2}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(p+1)-C_{p+1}^2\frac{1}{n}+\cdots+(-1)^{p+2}\frac{1}{n^p}}\\
&=\frac{1}{p+1}.
\end{aligned}$$

证法2 如果 $p>0$ 为实数，应用 Stolz 公式和 L'Hospital 法则，有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}
\end{aligned}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{1-(1-x)^{p+1}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{(p+1)(1-x)^{p}} = \frac{1}{p+1}.$$

证法3 如果 $p>0$ 为实数,根据定积分的定义和Newton-Leibniz公式有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^p+\left(\frac{2}{n}\right)^p+\cdots+\left(\frac{n}{n}\right)^p\right]$$

$$= \int_0^1 x^p\,\mathrm{d}x = \frac{x^{p+1}}{p+1}\bigg|_0^1 = \frac{1}{p+1}.$$

证法4 由Stolz公式及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^{\mu}-1}{x}=\mu$ 得

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n^{p+1}-(n-1)^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{1}{n}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\dfrac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{p+1}-1}{-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{p+1}.$$

1.1.34 设 $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ 为组合数,求极限

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}.$$

解法1 应用Stolz公式有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln C_{n+1}^k - \sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{(n+1)^2-n^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k} + \ln C_{n+1}^{n+1}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\ln(n+1)-\ln(n+1)!}{2n+1}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}.$$

解法2 由解法1和题1.1.19(11),有

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left[\frac{n+1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}\right]^{\frac{n+1}{2n+1}} = \ln e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

1.1.35 试证

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{2}{3}$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left[\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \dfrac{2}{3}\right] = \dfrac{1}{2}$.

证法1 (1) 应用Stolz公式

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}}-(n-1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left[n^{\frac{3}{2}}+(n-1)^{\frac{3}{2}}\right]}{n^3-(n-1)^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left[n^{\frac{3}{2}}+(n-1)^{\frac{3}{2}}\right]}{3n^2-3n+1}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}}}{3-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{2}{3}.$$

(2)
$$\lim_{n\to+\infty} n\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} - \frac{2}{3}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{1}{2}}} - \frac{2n}{3}\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{3\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}-2n\sqrt{n}}{3\sqrt{n}}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}$$

$$\times\left\{3\sqrt{n+1}+2\left[n\sqrt{n}-(n+1)\sqrt{n+1}\right]\right\}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\left[3\sqrt{n+1}+2n\sqrt{n}\right.$$

$$\left.-2(n+1)\sqrt{n+1}\right](\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\left[\sqrt{n^2+n}-(n-1)\right]$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+n-(n^2-2n+1)}{\sqrt{n^2+n}+(n-1)}$$

$$= \frac{1}{3}\lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+(1-\frac{1}{n})} = \frac{1}{2}.$$

证法 2 (1) $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left[\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\cdots+\sqrt{\frac{n}{n}}\right]$$

$$= \int_0^1\sqrt{x}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

(2) 因为

$$n\left(\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left[\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\int_0^n\sqrt{x}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\int_{k-1}^{k}\sqrt{x}\,dx)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}(\sqrt{k}-\sqrt{x})\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1(\sqrt{k}-\sqrt{k-x})\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{k}+\sqrt{k-x}}\,dx$$

$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{2(\sqrt{k}+\sqrt{k-1})}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{n}}\cdot\sqrt{n} = \frac{1}{2},$$

另一方面,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{x}{\sqrt{k}+\sqrt{k-x}}\,dx$$

$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\frac{x}{2\sqrt{k}}\,dx = \frac{1}{4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{\sqrt{k}}\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}} > \frac{1}{4\sqrt{n}}\int_1^n\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{n}}2\sqrt{x}\Big|_1^n = \frac{1}{2\sqrt{n}}(\sqrt{n}-1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

于是

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\leqslant n\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{3}\right]\leqslant\frac{1}{2}.$$

再由 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=\frac{1}{2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}$ 及夹逼定理就得

$$\lim_{n\to+\infty}n\left[\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}}-\frac{2}{3}\right]=\frac{1}{2}.$$

1.1.36 设 $x_n=\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n\text{次}}\alpha$,证明

(1) $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$;

(2) 当 $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,$\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1$.

证 (1) 当 $0\leqslant\sin\alpha\leqslant1<\frac{\pi}{2}$ 时,由

$$x_n=\sin\underbrace{\sin\cdots\sin}_{(n-1)\text{次}}\alpha\leqslant\underbrace{\sin\cdots\sin}_{(n-1)\text{次}}\alpha=x_{n-1}$$

立知 x_n 为单调减且有下界 0 的数列,故必收敛.记 $\beta=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$,则由 $\sin x$ 的连续性得到

$$\beta=\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\sin x_{n-1}=\sin\beta,$$

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\beta=0.$$

当 $-1\leqslant\sin\alpha<0$ 时,由

$$x_n=\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n\text{次}}\alpha=-\sin\cdots\sin|\sin\alpha|,$$

可推出

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=-\lim_{n\to+\infty}\sin\cdots\sin|\sin\alpha|=-0=0.$$

于是,对 $\forall\alpha$,

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}\underbrace{\sin\cdots\sin}_{n\text{次}}\alpha=0.$$

(2) 显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{n}{3}}x_n=1\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n^2=3$.

由(1)知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$,于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{x_n^2}=+\infty$.

所以

$$\lim_{n\to+\infty}nx_n^2=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n^2}}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz 公式}}\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}^2}-\frac{1}{x_n^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x_n}-\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{x^2\sin^2x}{x^2-\sin^2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2-\left(x-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{3}x^4+o(x^4)} = 3.$$

1.1.37 设 $0<x_1<1, x_{n+1}=x_n(1-x_n), n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n = 1$.

证法1 因为 $x_{n+1}=x_n(1-x_n)=x_n-x_n^2<x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调减，且 $x_n>0$，有下界0，因此，$\{x_n\}$ 收敛，令 $x=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，则 $x=x(1-x)$，解得 $x=0$. 因此

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\frac{1}{x_n}}$$

$$\xlongequal{\text{Stolz 公式}} \lim_{n\to+\infty}\frac{n-(n-1)}{\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_{n-1}(1-x_{n-1})}-\frac{1}{x_{n-1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n-1}(1-x_{n-1})}{1-(1-x_{n-1})}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}(1-x_{n-1}) = 1-0 = 1.$$

证法2 函数 $y=x(1-x)$ 当 $x\leqslant\frac{1}{2}$ 时严格增，故

$$x_2 = x_1(1-x_1)\leqslant\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}<\frac{1}{3},$$

$$x_3 = x_2(1-x_2)<\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)<\frac{1}{4}$$

……

若 $x_n<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{2}$，则

$$x_{n+1}=x_n(1-x_n)<\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}<\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n+2}=\frac{1}{n+2},$$

所以，$x_n<\frac{1}{n+1}$ 对 $\forall n>2$ 成立. 因此

$$1-(n+1)x_n>0,$$

$$(n+1)x_{n+1}-nx_n$$

$$=nx_n(1-x_n)+x_n(1-x_n)-nx_n$$

$$=x_n(1-(n+1)x_n)>x_n\cdot 0=0.$$

于是知 $\{nx_n\}$ 严格单调增且 $nx_n<(n+1)x_n<1$ 有界，因而数列 $\{nx_n\}$ 收敛. 记 $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}nx_n$. 显然，$\alpha\leqslant 1$.

若 $\alpha<1$，由 nx_n 单调增（$n\geqslant 2$ 时）知 $nx_n<\alpha$. 从而 $x_n<\frac{\alpha}{n}\longrightarrow 0\ (n\to+\infty)$，因此，存在 $N>\frac{2\alpha}{1-\alpha}$，当 $n>N$ 时，有

$$x_n<\frac{\alpha}{n}<\frac{\alpha}{N}<\frac{\alpha}{\frac{2\alpha}{1-\alpha}}=\frac{1-\alpha}{2},$$

$$1-(n+1)x_n=1-x_n-nx_n$$

$$>1-\frac{1-\alpha}{2}-\alpha=\frac{1-\alpha}{2}$$

又因为

$$x_1=x_1,$$

$$2x_2=2x_1(1-x_1)=x_1+x_1(1-2x_1),$$

$$3x_3=3x_2(1-x_2)=2x_2+x_2(1-3x_2),$$

$$\cdots$$

$$nx_n=nx_{n-1}(1-x_{n-1})$$

$$=(n-1)x_{n-1}+x_{n-1}(1-nx_{n-1}),$$

$$(n+1)x_{n+1}=(n+1)x_n(1-x_n)$$

$$=nx_n+x_n(1-(n+1)x_n).$$

两边分别相加得

$$1>(n+1)x_{n+1}$$

$$=x_1+x_1(1-2x_2)+x_2(1-3x_2)+\cdots+x_n(1-(n+1)x_n)$$

$$=x_1+x_1(1-2x_2)+\cdots+x_N(1-(N+1)x_N)+\sum_{k=N+1}^{n}x_k(1-(k+1)x_k)$$

$$>x_1+x_1(1-2x_1)+\sum_{k=N+1}^{n}x_k\cdot\frac{1-\alpha}{2}.$$

则对固定的 N，有

$$\sum_{k=N+1}^{n}x_k<\frac{2}{1-\alpha}(1-x_1-x_1(1-2x_1)),$$

所以正项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 收敛.

但另一方面，因为 kx_k 严格单调增，$kx_k>1\cdot x_1=x_1$，所以 $x_k>\frac{x_1}{k}, k=2,3,\cdots$，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k>x_1\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ 发散，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k$ 也发散. 矛盾. 于是 $\alpha=1$.

证法3 由证法1知 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=0$，所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{1-x_n}=1$. 又因为

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_{n-1}(1-x_{n-1})}=\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{1-x_{n-1}},$$

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{1-x_{n-1}},$$

$$\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}=\frac{1}{1-x_{n-2}},$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{1-x_1},$$

所以，将上述各式相加得到

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{1-x_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{1-x_1},$$

$$\frac{1}{nx_n}=\frac{1}{nx_1}+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1-x_1}+\cdots+\frac{1}{1-x_n}\right)$$

$$-\frac{1}{n(1-x_n)}\longrightarrow 0+1\cdot 0-1(n\to+\infty).$$

于是，$\lim\limits_{n\to+\infty} nx_n=1$.

1.1.38 (压缩映象原理 Banach, 1922) 设(x,ρ)为完备度量(距离)空间$\left(\rho(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\right.$，例如通常的$\mathbf{R}^n$)，$\rho$为度量(距离)函数. $f:X\to X$为映射，如果存在$q\in(0,1)$，使得对$\forall x',x''\in X$有

$$\rho(f(x'),f(x''))\leqslant q\rho(x',x''),$$

则称f为**压缩映象**. 对$\forall x_0\in X$，令迭代

$$x_n=f(x_{n-1}),n\in\mathbf{N}.$$

证明：(1) f为X上的一致连续映射；

(2) 点列x_n是收敛的；

(3) 记$x^*=\lim\limits_{n\to+\infty}x_n$，则$x^*$为$f$的不动点，即$f(x^*)=x^*$；

(4) 方程$f(x)=x$的解是唯一的，即f只有一个不动点.

证 (1) $\forall\varepsilon>0$，取$0<\delta<\frac{\varepsilon}{q+1}$，当$x',x''\in X$，$\rho(x',x'')<\delta$时，有

$$\rho(f(x'),f(x''))\leqslant q\rho(x',x'')$$

$$\leqslant q\delta\leqslant q\cdot\frac{\varepsilon}{q+1}<\varepsilon,$$

因此，f为x上的一致连续映射.

(2) 因为

$$\rho(x_{n+1},x_n)=\rho(f(x_n),f(x_{n-1}))$$

$$\leqslant q\rho(x_n,x_{n-1})\leqslant\cdots\leqslant q^n\rho(x_1,x_0)$$

和

$$\rho(x_{n+p},x_n)$$

$$\leqslant\rho(x_{n+p},x_{n+p-1})+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)$$

$$=(q^{n+p-1}+\cdots+q^n)\rho(x_1,x_0)$$

$$\leqslant\frac{q^n}{1-q}\rho(x_1,x_0),$$

所以，x_n为 Cauchy(基本)序列，因而x_n是收敛的.

(3) 由f的连续性立知

$$x^*=\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}f(x_{n-1})=f(x^*),$$

即x^*为f的不动点.

(另证) 从

$$0\leqslant\rho(x_n,f(x^*))=\rho(f(x_{n-1}),f(x^*))$$

$$\leqslant q\rho(x_{n-1},x^*)\longrightarrow 0(n\to+\infty)$$

和极限定义(或夹逼定理)立知

$$x^*=\lim_{n\to+\infty}x_n=f(x^*).$$

即x^*为f的不动点.

(4) 设x^*和x^{**}都是f的不动点，即

$$x^*=f(x^*),\ x^{**}=f(x^{**}).$$

则

$$\rho(x^*,x^{**})=\rho(f(x^*),f(x^{**}))$$

$$\leqslant q\rho(x^*,x^{**}),$$

$$0\leqslant(1-q)\rho(x^*,x^{**})\leqslant 0,$$

$$(1-q)\rho(x^*,x^{**})=0,$$

$$\rho(x^*,x^{**})=0\ (1-q>0),$$

$$x^*=x^{**}.$$

这就证明了f的不动点是唯一的.

注 压缩映象原理在用迭代法解微分方程等许多方面有广泛的用途. 它的证明主要用了 Cauchy 数列的收敛性.

1.1.39 设(x,ρ)为完备度量(距离)空间，$f:X\longrightarrow X$为映射，如果存在$n\in\mathbf{N}$，使得n次复合的映射$f^n=\underbrace{f\circ\cdots\circ f}_{n\text{次}}$为$X$上的一个压缩映象，则$f$在$x$中必有唯一的不动点.

当$n=1$时，就是题 1.1.38.

证 令$g=f^n$，则g为X上的压缩映象，由题 1.1.38，g有不动点x^*，即$x^*=g(x^*)$，则x^*也是f的不动点. 事实上，因为

$$g\circ f=f^{n+1}=f\circ g,$$

所以，

$$g(f(x^*))=f(g(x^*))=f(x^*).$$

于是$f(x^*)$也是g的不动点，由于压缩映象只有一个不动点，故必有$f(x^*)=x^*$，即x^*为f的不动点.

再证唯一性. 设x^{**}也是f的不动点，即$x^{**}=f(x^{**})$，则

$$f^n(x^{**})=f^{(n-1)}(x^{**})=\cdots$$

$$=f(x^{**})=x^{**},$$

即x^{**}也是$g=f^n$的不动点，但g的不动点是唯一的，故$x^{**}=x^*$，所以f也只有一个不动点.

1.1.40 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n,\ |x|<1.$$

解 $$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1+x+x^2+\cdots+x^n}{n}\right)^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}{n}\right]^n$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{\left[1+\frac{1-x^{n+1}}{n(1-x)}\right]^{\frac{n(1-x)}{1-x^{n+1}}}\right\}^{\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

$$=\left\{\lim_{n\to+\infty}\left[1+\frac{1-x^{n+1}}{n(1-x)}\right]^{\frac{n(1-x)}{1-x^{n+1}}}\right\}^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}}$$

$$=e^{\frac{1}{1-x}}$$

注 本题应用了重要极限$\lim\limits_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$和当$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=u_0>0$，$\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=v_0$时，极限$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}e^{v(x)\ln u(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}=e^{v_0\ln u_0}=u_0^{v_0}=[\lim\limits_{x\to x_0}u(x)]^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)}$.

1.1.41 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cos\frac{2a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}.$$

解 因为

$$\begin{aligned}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}&=\ln\left(1-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o(\frac{1}{n})\right)\\&=-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o(\frac{1}{n}),\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\ln\left(\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[-\frac{k^2a^2}{2n^3}+o(\frac{1}{n})\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{a^2}{2n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+no(\frac{1}{n})\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(-\frac{a^2}{2n^3}\right)\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+o(1)\right]\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[-\frac{a^2}{6}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{2n})+o(1)\right]\\&=-\frac{a^2}{6},\end{aligned}$$

于是得

$$\lim_{n\to+\infty}\cos\frac{a}{n\sqrt{n}}\cdots\cos\frac{na}{n\sqrt{n}}=e^{-\frac{a^2}{6}}.$$

注 利用对数计算将乘积的极限化为和的极限，然后再 Taylor 展开是一种重要的技巧.

1.1.42 记单位圆之内接正n边形周长为$2a_n=2n\sin\frac{\pi}{n}$，熟知

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\cdot\pi=\pi.$$

由直接计算得$a_6=3$，$a_{12}=3.10582854$，$a_{24}=3.13262861$. 如果令

$$b_n=\frac{1}{3}(4a_{2n}-a_n),\quad c_n=\frac{1}{15}(16b_{2n}-b_n),$$

则由a_6,a_{12},a_{24}可算出

$$c_6=3.14159206.$$

断言“序列$\{c_n\}$比序列$\{a_n\}$更快地收敛于π”对吗? 请证明你的结论.

解 断言“序列$\{c_n\}$比序列$\{a_n\}$更快地收敛于π”是正确的. 证明如下:

根据 Taylor 展开式，对任意$x\in\mathbf{R}$，

$$\sin x=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$$

有

$$\begin{aligned}a_n&=n\sin\frac{\pi}{n}=n\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{n})^{2k-1}\\&=\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\\&=\pi\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right].\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}a_n-\pi&=\pi\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\\&=O(\frac{1}{n^2})(n\to+\infty).\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}4a_{2n}&=\left[4+4\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{2n})^{2(k-1)}\right]\\&=\pi\left[4+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\frac{1}{4^{k-2}}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{3}(4a_{2n}-a_n)\\&=\frac{\pi}{3}\left\{\left[4+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\frac{1}{4^{k-2}}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right]\right.\\&\quad\left.-\left[1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right]\right\}\\&=\pi\left\{1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_n-\pi&=\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\\&=O\left(\frac{1}{n^4}\right)(n\to\infty).\end{aligned}$$

最后，由

$$16b_{2n}=\pi\left\{16+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\times\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\frac{1}{4^{k-3}}(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right\}$$

得

$$\begin{aligned}c_n&=\frac{1}{15}(16b_{2n}-b_n)\\&=\pi\left[1+\sum_{k=3}^{\infty}\frac{1}{45}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\times\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)(\frac{\pi}{n})^{2(k-1)}\right]\\&=\pi\left[1+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{45}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\right.\end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}\Bigg]$$

$$c_n-\pi=\sum_{k=4}^{\infty}\frac{1}{45}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{1}{4^{k-2}}-1\right)\times\left(\frac{1}{4^{k-3}}-1\right)\left(\frac{\pi}{n}\right)^{2(k-1)}$$

$$=O\left(\frac{1}{n^6}\right)\quad(n\to+\infty)$$

因此，$\{b_n\}$比$\{a_n\}$更快地收敛于π，而$\{c_n\}$比$\{b_n\}$、$\{c_n\}$比$\{a_n\}$更快地收敛于π.

1.1.43 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^4}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^4+\frac{n^3}{2}-\frac{11}{24}n^2+\frac{7}{16}n\right].$$

解 由 Taylor 公式得

$$\frac{n^4}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=n^4e^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}$$

$$=n^4e^{n\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{3n^3}-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{5n^5}+o(\frac{1}{n^5})\right]-1}$$

$$=n^4e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o(\frac{1}{n^4})}$$

$$=n^4\Bigg\{1+\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{2!}\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+\frac{1}{4n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right]^2$$

$$+\frac{1}{3!}\left[-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left[-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^4+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\Bigg\}$$

$$=n^4\Bigg\{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}-\frac{1}{4n^3}+\frac{1}{5n^4}$$

$$+\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{6n^3}+\left(\frac{1}{18n^4}+\frac{1}{8n^4}\right)$$

$$-\frac{1}{48n^3}+\frac{1}{24n^4}+\frac{1}{24\times16n^4}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\Bigg\}$$

$$=n^4-\frac{n^3}{2}+\frac{11n^2}{24}-\frac{7}{16}n+\frac{2447}{5760}+n^4o\left(\frac{1}{n^4}\right),$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{n^4}{e}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-n^4+\frac{n^3}{2}-\frac{11}{24}n^2+\frac{7}{16}n\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{2447}{5760}+\frac{o(\frac{1}{n^4})}{\frac{1}{n^4}}\right]=\frac{2447}{5760}.$$

注 用 Taylor 展开来估计变量的数量级求极限有时比用 L'Hospital 法则还要方便.

1.1.44 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\sin\frac{k\pi}{n}}$.

解
$$\lim_{n\to+\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\sin\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3+\sin\frac{k\pi}{n}}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{1}{3+\sin x}dx$$

$$\xlongequal{u=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3+\frac{2u}{1+u^2}}$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{du}{3+2u+3u^2}$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(u+\frac{1}{3})^2+\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{2}{3}\frac{3}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u+\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}}\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right).$$

1.1.45 求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}\right].$$

解法 1

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{n}}+\frac{1}{1+\frac{3}{n}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{2n-1}{n}}\right]+\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{n}\frac{1}{1+\frac{2n+1}{n}}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{1+x}dx+0=\frac{1}{2}\ln(1+x)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\ln 3.$$

解法 2 应用公式

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n=c+\varepsilon_n,$$

其中，$c=0.57721\cdots$ 为 Euler 常数，$\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$. 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\sum_{i=1}^{3n+1}\frac{1}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\{[\ln(3n+1)+c+\varepsilon_{3n+1}]-[\ln n+c+\varepsilon_n]\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\ln\frac{3n+1}{n}+\varepsilon_{3n+1}-\varepsilon_n\right]=\ln 3.$$

又由

$$\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right]-\left[\frac{1}{n}-\frac{1}{n+(2n+2)}\right]$$

$$=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+2)}$$

$$< \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}$$

$$< \frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}$$

和夹逼定理，有

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+2n}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{n+(2n+1)}\right]=\frac{1}{2}\ln 3.$$

注 以上两题都是利用了可积函数积分的定义.

1.1.46 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right]$.

解 由题1.1.19(5),

$$x_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$$

收敛于 Euler 常数 c，则

$$\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}[x_{2n}+\ln 2n-(x_n+\ln n)]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}[x_{2n}-x_n+\ln\frac{2n}{n}]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}x_{2n}-\lim_{n\to+\infty}x_n+\ln 2$$

$$=c-c+\ln 2=\ln 2.$$

1.1.47 试证数列

$$\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}\,\middle|\,n=1,2,\cdots\right\}$$

收敛.

证 设 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$，则

$$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^2}\sim\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}.$$

于是，由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{4n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，即部分和 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}-2\sqrt{n}$ 收敛.

注 将数列写成另一数列的部分和，利用级数收敛的判别法则是解决这类和式数列的好方法.

1.1.48 设 $a_n>0,n\in\mathbf{N}$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$，试证 a_n 无界.

证法1 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0,$$

所以对 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\frac{1}{4}$.

（反证）假设 a_n 有界，则 $0<M=\sup\limits_{n>N}\{a_{N+1},a_{N+2},\cdots\}$. 于是，当 $n>N$ 时，有

$$a_n<\frac{1}{4}(a_{n+1}+a_{n+2})\leqslant\frac{1}{4}\cdot 2M=\frac{M}{2},$$

$$M=\sup_{n>N}\{a_n\}\leqslant\frac{M}{2},$$

$$0<\frac{M}{2}=M-\frac{M}{2}\leqslant 0.$$

矛盾. 所以 a_n 无界.

证法2 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0,$$

所以，存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\frac{1}{6},$$

$$a_{n+2}+3a_{n+1}>2(a_{n+1}+3a_n)$$

$$>\cdots>2^{n-N}(a_{N+2}+3a_{N+1}).$$

这就证明了 $a_{n+2}+3a_{n+1}$ 无界，从而 a_n 也无界.

证法3 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0,$$

所以对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in\mathbf{N}$，当 $n>N_\varepsilon$ 时，

$$\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\varepsilon. \qquad (*)$$

（反证）假设 a_n 有界. 显然 $\{a_{N_\varepsilon+1},a_{N_\varepsilon+2},\cdots\}$ 也有界. 设 $M=\sup\{a_{N_\varepsilon+1},a_{N_\varepsilon+2},\cdots\}$，则对 $\forall\delta>0$，存在 $a_n(n\geqslant N_\varepsilon+1)$ 满足 $M-\delta<a_n<M$. 由 $(*)$

$$a_{n+1}-a_{n+2}>\frac{a_n}{\varepsilon}>\frac{M-\delta}{\varepsilon}.$$

特别地，取 $\delta=\frac{M}{2}$，$\varepsilon=\frac{1}{4}$，就有 $a_{n+1}+a_{n+2}>2M$. a_{n+1},a_{n+2} 中必有一数大于 M. 这与 M 是集合 $\{a_{N_{\frac{1}{4}}+1},a_{N_{\frac{1}{4}}+2}\}$ 的上确界矛盾. 所以 a_n 无界.

注 由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$,在估计 a_n 时,知分母比分子要"大"很多,势必 a_n 无界.证法1用了上确界的定义.证法2根据 $\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}<\dfrac{1}{6}$ 推得 $a_{n+2}+3a_{n+1}>2^{n-N}(a_{N+2}+3a_{N+1})$ 是证明的关键.

1.1.49 设实数序列 $\{a_n\}$ 满足

$$(2-a_n)a_{n+1}=1,\ n=1,2,\cdots.$$

试证: $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

证法1 先证 n 充分大时,$a_n>0$.事实上,若有 $a_{n_0}\leqslant 0$,则由 $2-a_{n_0}>0$ 得

$$0<a_{n_0+1}=\frac{1}{2-a_{n_0}}\leqslant\frac{1}{2},$$

$$0<a_{n_0+2}=\frac{1}{2-a_{n_0+1}}\leqslant\frac{2}{3},$$

由归纳可证得 $0<a_{n_0+k}\leqslant\dfrac{k}{k+1}$,即证明了当 $n>n_0$ 时 $a_n>0$.

若 a_n 无小于0的项,即 $a_n\geqslant 0,n=1,2,\cdots$.显然,由 $(2-a_n)a_{n+1}=1$ 推得当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n\neq 0$.从而 $a_n>0$.

由于 n 充分大时,$a_n>0$,故 $2-a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}>0$.$0<a_n<2$,所以 n 充分大时,

$$\begin{aligned}a_n&=a_n\cdot 1=a_n(2-a_n)\cdot a_{n+1}\\&\leqslant\left[\frac{a_n+(2-a_n)}{2}\right]^2\cdot a_{n+1}=a_{n+1}.\end{aligned}$$

即 n 充分大时 a_n 单调增有上界.因而 $\{a_n\}$ 收敛.记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,则

$$1=\lim_{n\to+\infty}1=\lim_{n\to+\infty}(2-a_n)a_{n+1}=(2-a)a,$$

于是

$$(a-1)^2=0.$$

就有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a=1$.

证法2 分两种情形来证.

情形1:存在 k,使 $a_k\leqslant 1$.则

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}\leqslant 1,$$

且

$$\begin{aligned}a_{k+1}-a_k&=\frac{1}{2-a_k}-a_k\\&=\frac{1-2a_k+a_k^2}{2-a_k}=\frac{(1-a_k)^2}{2-a_k}\geqslant 0.\end{aligned}$$

由归纳法易证,当 $n>k$ 时,$a_n>a_{n-1}$,$a_n\leqslant 1$.所以,$\{a_n\}$ 收敛.记 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$,得到

$$1=\lim_{n\to+\infty}(2-a_n)a_{n+1}=(2-a)a,$$

从而 $(a-1)^2=0$,$a=1$.$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

情形2:对任意自然数 n,有 $a_n>1$,则 $a_n=2-\dfrac{1}{a_{n+1}}<2$,从而 $2-a_n>0$,且

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{2-a_n}-a_n\\&=\frac{1-2a_n+a_n^2}{2-a_n}=\frac{(1-a_n)^2}{2-a_n}\geqslant 0.\end{aligned}$$

所以 $\{a_n\}$ 单调增有上界2,故必收敛.与情形1一样可证 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$,这与 $a_n>1$,又单调增有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n>a_1>1$ 相矛盾.所以这种情形不存在.

使该数列成立的只有情形1.已证 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

证法3 由题设 $a_n\neq 0,2,n=2,3,\cdots$,所以不妨设 $a_n\neq 0,2,n=1,2,\cdots$.又若 $\{a_n\}$ 收敛,由证法1知必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.下证 $\{a_n\}$ 收敛.

令 $b_n=1-a_n,n=1,2,\cdots$,则有 $b_n\neq\pm 1$,且 $\{a_n\}$ 收敛 $\Leftrightarrow\{b_n\}$ 收敛.关系式 $(2-a_n)a_{n+1}=1$ 变为

$$(1+b_n)(1-b_{n+1})=1,$$

经计算得 $b_{n+1}=\dfrac{b_n}{1+b_n}$.

显然,若某个 $b_m=0$,则 $b_{m+1}=0$,依次类推可得当 $n\geqslant m$ 时,$b_n=0$,于是 $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$,$\{b_n\}$ 收敛.

若 $b_n\neq 0,n=1,2,\cdots$,则可证必存在 $m\in\mathbf{N}$,使得 $b_m>0$ 或 $b_m<-1$.(反证)假设对任意 $n\in\mathbf{N}$,有 $-1\leqslant b_n<0$,则由

$$b_{n+1}-b_n=\frac{b_n}{1+b_n}-b_n=\frac{-b_n^2}{1+b_n}<0$$

知 b_n 单调减且有下界 -1,所以 $\{b_n\}$ 收敛,但

$$0>b_1>\lim_{n\to+\infty}b_n=0,$$

矛盾.故假设是错误的.因此,必有 $m\in\mathbf{N}$,使 $b_m>0$ 或 $b_m<-1$.

设 $b_m<-1$,则 $1+b_m<0$,$b_{m+1}=\dfrac{b_m}{1+b_m}>0$.故序列 $\{b_n\}$ 中必有 n_0 使 $b_{n_0}>0$.再由 $b_{n_0+1}=\dfrac{b_{n_0}}{1+b_{n_0}}>0$ 递推下去,得当 $n>n_0$ 时,$b_n>0$.这时,

$$b_{n+1}-b_n=-\frac{b_n^2}{1+b_n}<0.$$

$\{b_n\}$ 单调减有下界0,$\{b_n\}$ 收敛,这就证明了 $\{a_n\}$ 的收敛性.

证法4 易证,存在 n 使 $a_n=2\Leftrightarrow a_1=\dfrac{n+1}{n}$.事实上,由题意 $a_n=2\Leftrightarrow 2-a_{n-1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow a_{n-1}=\dfrac{3}{2}\Leftrightarrow a_{n-2}=\dfrac{4}{3}\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow a_1=\dfrac{n+1}{n}$.由题意,对 $\forall n\in\mathbf{N}$,$a_n\neq 2$,知 $a_1\neq\dfrac{n+1}{n}$,$n=1,2,\cdots$.

由证法1知,若 $\{a_n\}$ 收敛于 a,则 $a=1$.

题设条件$(2-a_n)a_{n+1}=1$

$\Leftrightarrow a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}, n=1,2,\cdots$

情形1：当$a_1=1$时，得$a_n=1, n=2,3,\cdots$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

情形2：当$a_n\in(-\infty,1)$时，$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$单调增且有上界1.事实上，当$a_k\in[0,1)$时，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2-a_k}\in[\frac{1}{2},1)\subset[0,1).$$

因而$a_m\in[0,1), m\geqslant k$，由于$a_n\in(-\infty,1)$，所以

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_k}\in(0,1)\subset[0,1).$$

故$a_m\in[0,1), m\geqslant n+1$.即$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}$有上界1.再者，当$a_k<2, a_n\neq1$时，

$$a_{k+1}-a_k=\frac{1}{2-a_k}-a_k=\frac{(1-a_k)^2}{2-a_k}>0,$$

即$a_{k+1}>a_k$，$a_{n+m}\in[0,1), m=1,2,\cdots$，故$a_{n+m}<2$，因而$\{a_n,a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$是单调增的.于是$\{a_n\}$是收敛的，且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

情形3：若有$a_n\in(2,+\infty)$，则$\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$是单调增且有上界1的.事实上，由

$$a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\in(-\infty,0)\subset(-\infty,1)$$

知即a_{n+1}是情形2.于是$\{a_{n+1},a_{n+2},\cdots\}$单调增，有上界1，且$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

情形4：$a_1\in(1,2), a_1\neq\frac{n+1}{n}$ $(\forall n\in\mathbf{N})$时，则必有$l\geqslant2$，使得$a_l>2$.因而

$$a_{l+1}=\frac{1}{2-a_l}\in(-\infty,0).$$

又归结到情形2.

事实上，

$$a_2=\frac{1}{2-a_1},$$

$$a_2-a_1=\frac{(1-a_1)^2}{2-a_1}>0, a_2>a_1.$$

若$a_2\in(1,2)$，则同理$a_3=\frac{1}{2-a_2}>a_2$.因此，只要$a_1,a_2,\cdots,a_m\in(1,2)$，就有

$$1<a_1<a_2<\cdots<a_m<2.$$

不妨设$m\geqslant3$(否则$a_3>2$).记$\Delta_k=a_{k+1}-a_k=\frac{(a_k-1)^2}{2-a_k}$，所以当$1\leqslant k\leqslant m-2$时，

$$\Delta_{k+1}=\frac{(a_{k+1}-1)^2}{2-a_{k+1}}>\frac{(a_k-1)^2}{2-a_k}=\Delta_k>\cdots>\Delta_1$$

于是，存在$l>m$，使$a_l>(l-1)\Delta_1\geqslant2$.

综合上述，只要$a_1\neq\frac{n+1}{n}, 2$，必有$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

证法5 若$a_1\neq1$，设$b_n=1-a_n$，则原关系式$(2-a_n)a_{n+1}=1$变为

$$(1+b_n)(1-b_{n+1})=1.$$

于是有$1+b_n-b_{n+1}-b_nb_{n+1}=1$，化简后得

$$\frac{1}{b_{n+1}}-\frac{1}{b_n}=1,$$

即数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$为单调增的等差数列，公差为1，所以

$$\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b_1}+(n-1)=\frac{1}{1-a_1}+(n-1),$$

$$b_n=\frac{1}{\frac{1}{1-a_1}+(n-1)},$$

显然$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$，$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}(1-b_n)=1-0=1$.

若$a_1=1$，由关系式得$a_n=1, \forall n\in\mathbf{N}$. $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$.

证法6 若$a_1=1$，由上得$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}1=1$.由条件知$a_n\neq2, n=1,2,\cdots$.

当$a_1\neq1$时，可以证明，对任何自然数m，$a_1\neq\frac{m+1}{m}$.事实上(反证)，若$a_1=\frac{m+1}{m}$，则

$$a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{m}{m-1},$$

$$a_3=\frac{m-1}{m-2},\cdots,a_m=2.$$

与对$\forall n\in\mathbf{N}, a_n\neq2$矛盾.于是可以归纳证明

$$a_n=\frac{(n-1)-(n-2)a_1}{n-(n-1)a_1}, n\geqslant2,$$

立即得到$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n(1-a_1)+2a_1-1}{n(1-a_1)+a_1}=1$.

注 证法1用了单调有界数列收敛的正规方法.而证法5构造了一个新数列$\frac{1}{b_n}$(其中$b_n=1-a_n$)，恰好是公差为1的等差数列，从而$\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$，立得$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=1$.

1.1.50 设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+m}\leqslant a_n+a_m$，则数列$\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$收敛或发散于$-\infty$.

证 任意取定自然数N，设$M=0,1,\cdots,N-1$.对任意自然数，可表示为$n=kN+M$，所以

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_n}{n}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_{kN+M}}{kN+M}$$

$$\leqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{ka_N+a_M}{kN+M}=\frac{a_N}{N}$$

$$\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\}=\overline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_n}{n}\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\frac{a_n}{n}\geqslant\inf\left\{\frac{a_n}{n}\right\},$$

故$\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\frac{a_n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{n}=A$.

若 A 为有限数,则 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 收敛.

若 A 不为有限数,因 $\frac{a_n}{n} \leqslant a_1 (a_n < a_{n-1} + a_1 \leqslant \cdots \leqslant na_1)$,故 $A = -\infty$,即 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 发散到 $-\infty$.

注 任给一个数列 $\{a_n\}$,其极限不一定存在,但其上、下极限是一定存在的,故用上、下极限讨论 a_n 的情况是有益的.此题只能用上述方法证明.另外,如果题中加条件 $a_n > 0$,则 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 必收敛.

1.1.51 给定实数序列 $\{a_n \mid n \in \mathbf{N}\}$,满足条件

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$;

(2) $0 < a_n \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k, \forall n = 1,2,\cdots$.

试证:对任意 $x \in (0,1)$,都有 $\{a_n\}$ 的子序列 $\{a_{n_k}\}$,使得 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = x$.

证法 1 归纳构造 $\{n_i\}$,使

$$S_{n_k - 1} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} \leqslant 1 - x < S_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} \quad (*)$$

其中 $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 为序列 $\{a_n\}$ 前 n 项之和.

设 $S_0 = 0$,取 n_1,使 $S_{n_1 - 1} \leqslant 1 - x < S_{n_1}$(如果 $S_1 > 1 - x$,则令 $n_1 = 1, S_{n_1 - 1} = S_0 = 0$).假设 $n_1, \cdots, n_k$ 已定义好,即

$$S_{n_k - 1} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} \leqslant 1 - x < S_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i},$$

由题中条件(2),我们有

$$S_{n_k} + \sum_{i=n_k+1}^{\infty} a_i - \left(\sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} + a_{n_k}\right) \geqslant S_{n_k} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} > 1 - x,$$

由此和 $S_{n_k} - \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} = S_{n_k - 1} - \sum_{i=1}^{k-1} a_{n_i} \leqslant 1 - x$,可取最小的 $n_{k+1} > n_k$,使得

$$S_{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} > 1 - x.$$

此时,由最小性知 $S_{n_{k+1} - 1} - \sum_{i=1}^{k} a_{n_i} \leqslant 1 - x$.在(*)中,令 $k \to +\infty$,就得

$$1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i} \leqslant 1 - x \leqslant 1 - \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i},$$

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} a_{n_i}.$$

证法 2 对 $x \in (0,1)$,令

$$n_1 = \min\{n \in \mathbf{N} \mid a_n < x\},$$

$$n_2 = \min\{n > n_1 \mid a_{n_1} + a_n < x\},$$

$$n_{k+1} = \min\{n > n_k \mid a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_k} + a_n < x\}, k = 1,2,\cdots$$

序列 $\{n_k \mid k \in \mathbf{N}\}$ 被归纳地定义了.

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$,所以 $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$.因此 $\{n_k\}$ 的定义是有意义的,即 n_k 存在唯一,$k = 1,2,\cdots$.又因为 $a_n > 0, n = 1,2,\cdots$,所以序列 $\left\{\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} \mid p \in \mathbf{N}\right\}$ 单调增.且由 $\{n_k\}$ 的定义知 $\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} < x, \forall p = 1,2,\cdots$,所以 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k}$ 收敛,且 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} \leqslant x$.

归纳可证 $\sum_{k=1}^{p-1} a_{n_k} + \sum_{n=n_p}^{\infty} a_n \geqslant x, p = 1,2,\cdots$,其中 $p = 1$ 时约定 $\sum_{k=1}^{p-1} a_k = 0$.

事实上,当 $p = 1$ 时,若 $n_1 = 1$,则 $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 > x$;若 $n_1 > 1$,由 n_1 的定义知,$a_{n_1 - 1} \geqslant x$,再由条件(2)得 $\sum_{n=n_1}^{\infty} a_n \geqslant a_{n_1 - 1} \geqslant x$.即 $p = 1$ 时,不等式成立.

假设 $p \geqslant 1$ 时,$\sum_{k=1}^{p-1} a_k + \sum_{n=n_p}^{\infty} a_n \geqslant x$,则当 $p + 1$ 时有,若 $n_{p+1} = n_p + 1$,则

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} + \sum_{n=n_p+1}^{\infty} a_n = \sum_{k=1}^{p-1} a_{n_k} + \sum_{n=n_p}^{\infty} a_n \geqslant x;$$

若 $n_{p+1} > n_p + 1$,由 n_{p+1} 的定义知

$$a_{n_1} + a_{n_2} + \cdots + a_{n_p} + a_{n_{p+1} - 1} \geqslant x.$$

因而由条件(2)得

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} + \sum_{n=n_{p+1}}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{k=1}^{p} a_{n_k} + a_{n_{p+1} - 1} \geqslant x.$$

不等式对任意 $p = 1,2,\cdots$ 都成立.

这样,由于

$$\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} < x \leqslant \sum_{k=1}^{p} a_{n_k} + \sum_{n=n_{p+1}}^{\infty} a_n, p = 1,2,\cdots,$$

所以

$$\begin{aligned} 0 < x - \sum_{k=1}^{p} a_{n_k} &\leqslant \left(\sum_{k=1}^{p} a_{n_k} + \sum_{n=n_{p+1}}^{\infty} a_n\right) - \sum_{k=1}^{p} a_{n_k} \\ &= \sum_{n=n_{p+1}}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=p}^{\infty} a_n. \end{aligned}$$

从 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1$ 知 $\lim_{p\to+\infty}\sum_{n=p}^{\infty}a_n=0$,因而

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{n_k}=\lim_{p\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}a_{n_k}=x.$$

1.1.52 设实系数多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于实函数 $f(x)$. 试证 $f(x)$ 也是多项式.

证 因为多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(x)$,故对 $\varepsilon=1$,存在与 $x\in\mathbf{R}$ 无关的自然数 N_0,当 $m,n>N_0$ 时,有

$$|P_m(x)-P_n(x)|<\varepsilon=1,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

记 $P_n(x)=\sum_{j=0}^{d_n}a_j^{(n)}x^j$,其中

$$a_j^{(n)}\in\mathbf{R},j=1,2,\cdots,d_n,a_{d_n}^{(n)}\neq0,n=1,2,\cdots.$$

我们断言,当 $m,n>N_0$ 时,$P_m(x)-P_n(x)$ 为常数,即当 $m,n>N_0$ 时,$d_m=d_n,a_j^{(m)}=a_j^{(n)},j=1,2,\cdots,d_m=d_n$.

(反证)假设存在 $m,n>N_0$,$P_m(x)-P_n(x)$ 不是常数,则由于 $P_m(x)-P_n(x)$ 是一个多项式,所以有

$$\lim_{x\to+\infty}|P_m(x)-P_n(x)|=+\infty,$$

这与 $|P_m(x)-P_n(x)|<1$ 对 $\forall x\in\mathbf{R}$ 成立相矛盾. 因而当 $n>N_0$ 时,$P_n(x)-P_{N_0+1}(x)$ 为常数,即

$$P_n(x)=P_{N_0+1}(x)+a_0^{(n)}-a_0^{(N_0+1)}$$

$$=a_0^{(n)}+\sum_{j=1}^{d}a_jx^j,n=N_0+1,N_0+2,\cdots,$$

其中 $d=d_{N_0+1},a_j=a_j^{(N_0+1)},j=1,2,\cdots,d_{N_0+1}=d$.

显然,

$\{P_n(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于函数 $f(x)$

$\Leftrightarrow\{a_0^{(n)}\}=\{P_n(x)-\sum_{j=1}^{d}a_jx^j\}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛于 $f(x)-\sum_{j=1}^{d}a_jx^j$

$\Leftrightarrow\{a_0^{(n)}\}$ 收敛于某实数 $a_0\in\mathbf{R}$,并且

$$f(x)-\sum_{j=1}^{d}a_jx^j=a_0,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

故 $f(x)=\sum_{j=0}^{d}a_jx^j$ 为一个多项式.

1.1.53 设 $f(x)$ 是定义在 $(0,1)$ 上的任意阶可导函数,且函数列 $f(x),f'(x),\cdots,f^{(n)}(x),\cdots$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $F(x)$. 试证:$F(x)=Ce^x$,其中 C 为实常数.

证 显然

$$F(x)=\lim_{n\to+\infty}\{f(x)+[f'(x)-f(x)]+[f''(x)-f'(x)]+\cdots+[f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)]\}$$

$$=f(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[f^{(n)}(x)-f^{(n-1)}(x)]$$

由于在 $(0,1)$ 上,$f^{(n)}(x)\rightrightarrows F(x)\ (n\to+\infty)$,所以

$$F'(x)=f'(x)+\sum_{n=1}^{\infty}[f^{(n+1)}(x)-f^{(n)}(x)]$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left\{f'(x)+\sum_{k=1}^{n}[f^{(k+1)}(x)-f^{(n)}(x)]\right\}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}f^{(n+1)}(x)=F(x).$$

解此微分方程知

$F(x)=Ce^x$,C 为任意实常数.

§1.2 求函数极限的各种方法

函数极限的计算和论证的方法有:

(1) 函数极限的定义,即 ε-δ 和 ε-Δ 方法.

(2) 函数极限的+、-、×、÷及复合的运算定理;初等函数的连续性定理.

(3) 夹逼定理:设 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,$\lim_{x\to x_0}g(x)$ 和 $\lim_{x\to x_0}h(x)$ 存在且相等,则 $\lim_{x\to x_0}f(x)$ 也存在且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=\lim_{x\to x_0}h(x).$$

(4) 单调增(减)有上(下)界的函数 $f(x)$,$\lim_{x\to x_0}f(x)$ 存在有限.

(5) 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

(6) 如果 $\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x)$,则

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\overline{\lim_{x\to x_0}}f(x)=\underline{\lim_{x\to x_0}}f(x).$$

(7) L'Hospital 法则:

"$\frac{0}{0}$"型:设 f,g 在 a 的某个开邻域内(a 可以除外)可导,且 $g'(x)\neq0$,并有 $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$. 如果 $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在,则 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ 也存在,且有

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

推广的 L'Hospital 法则(参阅 §1.6 题 1.6.24).

(8) 应用 Taylor 展开式.

1.2.1 设 f 和 g 为两个周期函数,且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0.$$

试证:$f=g$.

证 设 f 和 g 的周期分别为 T_1 和 T_2,不失一般性,设 T_1、$T_2>0$,则对固定的 x,有

$$
\begin{aligned}
f(x)-g(x) &= \lim_{t\to+\infty}[f(x)-g(x)] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\{[f(x+nT_1)-g(x+nT_1)] \\
&\quad +[g(x+nT_1+nT_2) \\
&\quad -f(x+nT_1+nT_2)] \\
&\quad +[f(x+nT_2)-g(x+nT_2)]\} \\
&= 0+0+0=0.
\end{aligned}
$$

所以,对 $\forall x$,有 $f(x)=g(x)$,即 $f=g$.

注 由 $f(x)-g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ 将固定点 x 处的函数值写成数列 $a_n=f(x)-g(x)$ 的极限是很妙的.

1.2.2 函数 $f:(a,+\infty)\to\mathbf{R}$ 在任意有限区间 (a,b) 内有界,且

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A.$$

试证: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

证 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x+1)-f(x)]=A$,所以对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\Delta_1>\max\{0,a\}$,当 $x>\Delta_1$ 时,有

$$|f(x+1)-f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

固定 Δ_1,由题设,对 $\forall x\in(a,\Delta_1+1)$,有 $|f(x)|<M$.选 $\Delta>\Delta_1$,使得 $\left|\dfrac{M}{\Delta}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$, $\left|\dfrac{(\Delta_1+1)A}{\Delta}\right|<\dfrac{\varepsilon}{3}$,于是,当 $x>\Delta$ 时,有自然数 n,使 $x-n\in(\Delta_1,\Delta_1+1]$.因此,

$$
\begin{aligned}
&\left|\frac{f(x)}{x}-A\right| = \\
&\left|\frac{\sum\limits_{i=0}^{n-1}[f(x-i)-f(x-i-1)]+f(x-n)}{x}-A\right| \\
&\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\left|\frac{f(x-i)-f(x-i-1)-A}{x}\right| \\
&\quad+\left|\frac{(x-n)A}{x}\right|+\left|\frac{f(x-n)}{x}\right| \\
&<\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{n}{x}+\frac{(\Delta_1+1)A}{\Delta}+\frac{M}{\Delta} \\
&<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon,
\end{aligned}
$$

因此, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=A$.

注 用"ε-δ"的方法时,与数列极限一样,有一条主线.

1.2.3 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}$, $a>0$;

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}$;

(3) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, $a_i>0$, $i=1,2,\cdots,n$.

解法 1 (1) 令 $y=a^x-1$,则 $x\to0\Leftrightarrow y\to0$,于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x} &= \lim_{y\to0}\frac{y}{\log_a(1+y)} \\
&= \lim_{y\to0}\frac{1}{\log_a(1+y)^{\frac{1}{y}}} \\
&= \frac{1}{\log_a e}=\ln a.
\end{aligned}
$$

(2) 令 $(1+x)^\mu=e^y$,则 $x\to0\Leftrightarrow y\to0$,于是

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x} &= \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{e^{\frac{y}{\mu}}-1} \\
&= \lim_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}\cdot\frac{\frac{y}{\mu}}{e^{\frac{y}{\mu}}-1}\cdot\mu \\
&= 1\cdot1\cdot\mu=\mu.
\end{aligned}
$$

(3) 设 $u=\dfrac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{n}$,则 $x\to0\Leftrightarrow u\to0$,于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{\frac{(a_1^x-1)+\cdots+(a_n^x-1)}{nx}} \\
&= e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.
\end{aligned}
$$

解法 2 利用 L'Hospital 法则,有

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a^x\ln a}{1}=\ln a$.

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mu(1+x)^{\mu-1}}{1}=\mu$.

(3)
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to0}e^{\frac{\ln(a_1^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}} \\
&= e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(a_1^x+\cdots+a_n^x)-\ln n}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{a_1^x\ln a_1+\cdots+a_n^x\ln a_n}{a_1^x+\cdots+a_n^x}} \\
&= e^{\frac{\ln a_1+\cdots+\ln a_n}{n}}=e^{\ln\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}}=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}.
\end{aligned}
$$

注 1 用变量替换是求一些"$\dfrac{0}{0}$"、"$\dfrac{\infty}{\infty}$"不定型极限的重要手段.

注 2 "1^∞"不定型可以化为重要极限 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 的形式.

1.2.4 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{x^2}$.

解法 1 应用 L'Hospital 法则,有

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x\to0}\frac{1-\cos a_1x\cdots\cos a_nx}{x^2} \\
&= \lim_{x\to0}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\cos a_1x\cdots\sin a_kx\cdots\cos a_nx}{2x} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\lim_{x\to0}a_k^2\cos a_1x\cdots\frac{\sin a_kx}{a_kx}\cdots\cos a_nx
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

解法 2　应用归纳法，就有

当 $n = 1$ 时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1 x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{a_1}{2}x}{x^2}$$

$$= \frac{a_1^2}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{a_1 x}{2}}{\left(\frac{a_1}{2}x\right)^2} = \frac{a_1^2}{2};$$

假设当 $n = m$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1 x\cdots\cos a_m x}{x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k^2,$$

则当 $n = m+1$ 时，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1 x\cdots\cos a_m x\cos a_{m+1}x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\Big[\frac{1-\cos a_{m+1}x}{x^2} + \frac{\cos a_{m+1}x(1-\cos a_1 x\cdots\cos a_m x)}{x^2}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}a_{m+1}^2 + 1\cdot\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m} a_k^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m+1} a_k^2.$$

综上所述，对任何自然数 n，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos a_1 x\cdots\cos a_n x}{x^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k^2.$$

1.2.5　设 f 在 $(a,+\infty)$ 上有有界的导函数，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\ln x} = 0.$

证　设 $|f'(x)| < M, x\in(a,+\infty)$，任取定 $x_0\in(a,+\infty)$，则对 $\forall x > x_0$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_x\in(x_0,x)$，使得

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi_x)(x - x_0),$$

即对任意 $x > \max\{x_0, 1\}$ 有

$$\frac{-M(x-x_0)}{x\ln x} < \frac{f(x)-f(x_0)}{x\ln x} < \frac{M(x-x_0)}{x\ln x}.$$

又因

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-M(x-x_0)}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{M(x-x_0)}{x\ln x} = 0,$$

根据夹逼定理得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)-f(x_0)}{x\ln x} = 0.$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\ln x} = \lim_{x\to+\infty}\Big[\frac{f(x)-f(x_0)}{x\ln x} + \frac{f(x_0)}{x\ln x}\Big] = 0 + 0 = 0.$$

1.2.6　求极限

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\Big]^{\frac{1}{x}}.$$

解　应用 Taylor 公式，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\Big[x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\Big] - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\Big[-\frac{1}{2} + o(1)\Big] = -\frac{1}{2}.$$

(或者应用 L'Hospital 法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}).$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\Big[\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e}\Big]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}[\frac{1}{x}\ln(1+x)-1]}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

注　求函数极限有时用 Taylor 公式比 L'Hospital 法则更简单. 从下面的三题中可以领略到更多.

1.2.7　求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} - x\right].$$

解法 1　$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} - x\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{(x-a_1)\cdots(x-a_n) - x^n}{[(x-a_1)\cdots(x-a_n)]^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-(a_1+\cdots+a_n)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n a_1\cdots a_n}{[(x-a_1)\cdots(x-a_n)]^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + x^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{-(a_1+\cdots+a_n) + \cdots + (-1)^n\frac{a_1\cdots a_n}{x^{n-1}}}{[(1-\frac{a_1}{x})\cdots(1-\frac{a_n}{x})]^{\frac{n-1}{n}} + \cdots + 1}$$

$$= -\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

解法 2　应用 L'Hospilal 法则

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\cdots(x-a_n)} - x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x\left\{\Big[(1-\frac{a_1}{x})\cdots(1-\frac{a_n}{x})\Big]^{\frac{1}{n}} - 1\right\}$$

$$\xlongequal{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to 0^+}\frac{[(1-a_1 y)\cdots(1-a_n y)]^{\frac{1}{n}} - 1}{y}$$

$$= \lim_{y\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}[(1-a_1 y)\cdots(1-a_n y)]^{\frac{1}{n}-1}(-\sum_{i=1}^{n} a_i)}{1}$$

$$= -\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

解法 3　利用 Taylor 展开式

$$(1-\frac{a_i}{x})^{\frac{1}{n}}=1-\frac{a_i}{nx}+o(\frac{1}{x})$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\cdots(x-a_n)}-x\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[(1-\frac{a_1}{x})^{\frac{1}{n}}\cdots(1-\frac{a_n}{x})^{\frac{1}{n}}-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\{[1-\frac{a_1}{nx}+o(\frac{1}{x})]\cdots[1-\frac{a_n}{nx}+o(\frac{1}{x})]-1\}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left[1-\frac{a_1+\cdots+a_n}{nx}+o(\frac{1}{x})-1\right]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}+\frac{o(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}\right]$$

$$=-\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}.$$

1.2.8 求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left[(1+\frac{1}{x})^x-e\right]$.

解法1 反复应用 L'Hospital 法则,得

$$\lim_{x\to+\infty}x\left[(1+\frac{1}{x})^x-e\right]$$

$$\xlongequal{y=\frac{1}{x}}\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{y}}-e}{y}$$

$$=\lim_{y\to0}\frac{(1+y)^{\frac{1}{y}}\dfrac{\frac{y}{1+y}-\ln(1+y)}{y^2}}{1}$$

$$=e\lim_{y\to0}\frac{\frac{y}{1+y}-\ln(1+y)}{y^2}$$

$$=e\lim_{y\to0}\frac{\frac{1}{(1+y)^2}-\frac{1}{1+y}}{2y}$$

$$=\frac{e}{2}\lim_{y\to0}\frac{-1}{(1+y)^2}=-\frac{e}{2}.$$

解法2 应用 Taylor 公式得

$$\lim_{x\to\infty}x\left[(1+\frac{1}{x})^x-e\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[e^{x\ln(1+\frac{1}{x})}-e\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[e^{x(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2}))}-e\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}x\left[e^{1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}-e\right]$$

$$=e\lim_{x\to\infty}x\left[e^{-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})}-1\right]$$

$$=e\lim_{x\to\infty}x\left[1-\frac{1}{2x}+o(\frac{1}{x})-1\right]$$

$$=e\lim_{x\to\infty}\left[-\frac{1}{2}+o(1)\right]=-\frac{e}{2}.$$

1.2.9 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

解法1 反复应用 L'Hospital 法则,有

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+xe^{-\frac{x^2}{2}}}{4x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}-x^2e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+e^{-\frac{x^2}{2}}}{12x^2}-\frac{1}{12}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x-xe^{-\frac{x^2}{2}}}{24x}-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{1}{24}\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x}{x}-e^{-\frac{x^2}{2}}\right]-\frac{1}{12}$$

$$=\frac{1}{24}[1-1]-\frac{1}{12}=-\frac{1}{12}.$$

解法2 应用 Taylor 公式有

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{x^4}\{[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)]$$

$$-[1-\frac{x^2}{2}+\frac{(-\frac{x^2}{2})^2}{2!}+o(x^4)]\}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[-\frac{1}{12}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right]=-\frac{1}{12}.$$

1.2.10 设$a>1,b>1$,函数$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$在$x=0$附近有界,且对任意$x\in\mathbf{R}$有$f(ax)=bf(x)$.证明$f$在$x=0$连续.

证 由题设$f(0)=f(a\cdot0)=bf(0)$,于是从$b>1$和$(b-1)f(0)=0$知$f(0)=0$.

因为f在$x=0$附近有界,故存在$\delta_0>0$,当$|x|<\delta_0$时,$|f(x)|<M,M>0$.

对$\forall\varepsilon>0$,取$N\in\mathbf{N}$,使$N>\log_b\dfrac{M}{\varepsilon}$,于是当$|x|<\delta=\dfrac{\delta_0}{a^N}$(即$|a^Nx|<\delta_0$)时,有$|f(a^Nx)|<M$及

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)-0|=|f(x)|$$

$$=\left|\frac{f(ax)}{b}\right|=\left|\frac{f(a^2x)}{b^2}\right|$$

$$=\cdots=\left|\frac{f(a^Nx)}{b^N}\right|\leqslant\frac{M}{b^N}<\varepsilon,$$

所以,$\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$,即函数$f$在$x=0$处连续.

1.2.11 设f为$\mathbf{R}$上的周期函数,无最小正周期,且f在某点a连续,则f为常值函数.

换言之,f为无最小正周期的周期函数,f不为常值函数,则f处处不连续.

证法1 (反证)假设f不为常值函数,则存在b(不妨设$a<b$),使$f(a)<f(b)$.

因为f在a连续,则对$0<\varepsilon_0=\dfrac{1}{2}[f(b)-$

$f(a)]$，$\exists\delta>0$，当 $|x-a|<\delta$ 时，

$$\begin{aligned}f(x)&<f(a)+\varepsilon_0\\&=f(a)+\frac{1}{2}[f(b)-f(a)]\\&=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]<f(b).\end{aligned}$$

又 f 为无最小正周期的周期函数，故可取 $0<T<\delta$，T 为 f 的正周期，记 $b-a=nT+r$，$0\leqslant r<T<\delta$，则 $a+r\in(a,a+\delta)$，

$$f(b)=f(b-nT)=f(a+r)<f(b),$$

矛盾.故 f 为常值函数.

证法 2 因 f 不为常值函数，则对任意 a，必存在 b，使 $f(b)\neq f(a)$. 又因 f 无最小正周期，取 f 的正周期 $T_n\to0\ (n\to+\infty)$. 令

$$b-a=mT_n+r_n,\ 0\leqslant r_n<T_n,$$

其中 m 为整数，于是 $r_n\to0$ 和 $a+r_n\to a\ (n\to+\infty)$，且

$$\begin{aligned}f(a+r_n)&=f(a+mT_n+r_n)\\&=f(b)\not\to f(a)\ (n\to+\infty).\end{aligned}$$

所以，f 在 a 不连续.由 a 的任取性，知 $f(x)$ 处处不连续.

1.2.12 设函数 f 的定义域为开区间 I、$x_0\in I$，记

$$\omega_f(x_0,\delta)=\sup f((x_0-\delta,x_0+\delta))-\inf f((x_0-\delta,x_0+\delta)),$$

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to0^+}\omega_f(x_0,r)$$

(称 $\omega_f(x_0)$ 为 f 在点 x_0 的振幅). 证明 f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow\omega_f(x_0)=0$.

证 ($\Rightarrow$) f 在 $x_0\in I$ 连续，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使得 $(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset I$，且当 $x\in I$，$|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$f(x_0)-\frac{\varepsilon}{3}<\inf f((x_0-\delta,x_0+\delta))\leqslant f(x)$$

$$\leqslant\sup f((x_0-\delta,x_0+\delta))<f(x_0)+\frac{\varepsilon}{3},$$

于是，当 $0<r<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\omega_f(x_0,r)\leqslant\omega_f(x_0,\delta)\\&=|\sup f((x_0-\delta,x_0+\delta))\\&\quad-\inf f((x_0-\delta,x_0+\delta))|\\&<\left(f(x_0)+\frac{\varepsilon}{3}\right)-\left(f(x_0)-\frac{\varepsilon}{3}\right)\\&=\frac{2\varepsilon}{3}<\varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\omega_f(x_0)=\lim_{r\to0^+}\omega_f(x_0,r)=0.$$

($\Leftarrow$) 设 $\lim\limits_{r\to0^+}[\sup f((x_0-r,x_0+r))-\inf f((x_0-r,x_0+r))]=\lim\limits_{r\to0^+}\omega_f(x_0,r)=\omega_f(x_0)=0$. 则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<r<\delta$，$x\in(x_0-r,x_0+r)$ 时，有

$$\begin{aligned}&|f(x)-f(x_0)|\leqslant|\sup f((x_0-r,x_0+r))\\&-\inf f((x_0-r,x_0+r))|<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

注 用函数在某点 x_0 处的振幅 $\omega_f(x_0)=0$ 来刻划 f 在 x_0 处的连续性在证明难题时经常使用.

1.2.13 证明 $\mathbf{R}$ 上连续的周期函数 f 必一致连续.

证 设 $T>0$ 为连续函数 f 的正周期，由于 f 在闭区间 $[0,2T]$ 上一致连续，所以对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_0>0$，当 $x',x''\in[0,2T]$，$|x'-x''|<\delta_0$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

取 $\delta=\min\{\delta_0,T\}$，则当 $x',x''\in\mathbf{R}$，$x'\leqslant x''$，$|x'-x''|<\delta$ 时，再记 $x_*'=x'-nT\in[0,T]$，n 为整数，则 $x_*''=x''-nT\in[0,2T]$，且 $|x_*'-x_*''|=|x'-x''|<\delta\leqslant\delta_0$，于是有

$$\begin{aligned}&|f(x')-f(x'')|\\&=|f(x_*'+nT)-f(x_*''+nT)|\\&=|f(x_*')-f(x_*'')|<\varepsilon,\end{aligned}$$

即 f 在 $\mathbf{R}$ 上一致连续.

§1.3 实数连续性等价命题

实数理论是数学分析的基础之一，有几种不同的方式引进实数的概念.例如：参考文献[1]中采用了十进位小数；[2]中采用了 Dedekind 分割原理；[3]中则采用等价的 Cauchy 收敛序列来刻画.等等.

引进实数后，可以证明下面六个命题是彼此等价的，称为实数连续性等价命题.

实数连续性命题 1 有上(下)界的非空数集有上(下)确界；

实数连续性命题 2 单调有界数列收敛；

实数连续性命题 3 (Cantor 闭区间套原理) 递降闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

如果 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$，则 $\exists_1\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$(其中 $\exists_1$ 表示存在唯一)；

实数连续性命题 4 (有界闭区间 $[a,b]$ 的紧致性，Heine-Borel) 设 $\mathscr{I}$ 是一个由开区间组成的集合族，如果 $\mathscr{I}$ 能覆盖有界闭区间 $[a,b]$，即对 $\forall x\in[a,b]$，必存在 $I\in\mathscr{I}$ 使 $x\in I$，则在 $\mathscr{I}$ 中必有有限个开区间 $\{I_1,\cdots,I_n\}$ 也覆盖住 $[a,b]$；

实数连续性命题 5 (有界闭区间 $[a,b]$ 的序列

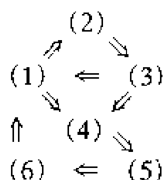
紧致性，Bolzano-Weierstrass）有界数列有收敛的子列；

实数连续性命题 6 （**R**（实数集）的完备性，Cauchy）**R** 中任一 Cauchy（基本）数列必收敛.

应用这六个实数连续性等价命题，我们可以证明闭区间上的连续函数的零值定理、介值定理、最值定理以及一致连续性定理. 论述既可用其中的一个命题，又可用六个中的若干个命题，从而有几种不同的方法，但实质上是一样的，都应用了实数的连续性命题. 类似地，许多问题同样可用六个命题中的若干命题来论证. 本节正是为读者打开思路、开阔眼界而撰写的.

1.3.1 （实数连续性等价命题）证明六个实数连续性命题是彼此等价的.

证 证明的示意图如下：



(1)⇒(2) 不妨设 x_n 单调增有上界. 由连续性命题 1，设

$$x = \sup_{n\in\mathbf{N}} x_n < +\infty.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$，由上确界定义，$x - \varepsilon < x$ 不是 x_n 的上界，故存在 $N \in \mathbf{N}$，$x_N > x - \varepsilon$，而 x_n 单调增，当 $n > N$ 时，有

$$x - \varepsilon < x_N \leqslant x_n < x < x + \varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x < +\infty$，即 x_n 收敛.

(2)⇒(3) 由连续性命题 3 中的条件，得到两串单调有界数列：

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant b_1,$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \geqslant a_1.$$

再由连续性命题 2，a_n，b_n 都收敛，且

$$\lim_{n\to+\infty} b_n - \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

即 a_n 和 b_n 收敛于同数 x_0，易见，

$$a_n \leqslant x_0 \leqslant b_n, \forall n \in \mathbf{N},$$

$$x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n].$$

再证唯一性. 设 $x_0, x_0^* \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，则

$$0 \leqslant |x_0 - x_0^*| \leqslant b_n - a_n \to 0\ (n \to +\infty),$$

$$x_0 - x_0^* = 0, x_0 = x_0^*.$$

(3)⇒(4) （Bolzano 方法，反证）假设 $[a,b]$ 不能被 $\mathscr{I}$ 中有限多个区间覆盖，将 $[a,b]$ 二等分为 $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ 和 $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$，则此两个闭区间中必有一个不能被 $\mathscr{I}$ 中的有限多个区间所覆盖，记此区间为 $[a_1, b_1]$，再将 $[a_1, b_1]$ 等分为二，二者又必有一个不能被 $\mathscr{I}$ 中有限多个区间所覆盖，记此区间为 $[a_2, b_2]$. 如此下去，就得到一个"单调降"的闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots,$$

其中每一个都不能被 $\mathscr{I}$ 中有限多个区间所覆盖，且区间长度

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \longrightarrow 0\ (n \to +\infty).$$

因此，由连续性命题 3（闭区间套原理），存在唯一的 $x_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n] \subset [a,b]$. 由于 $\mathscr{I}$ 能覆盖 $[a,b]$，故必有区间 $I_0 \in \mathscr{I}$，使 $x_0 \in I_0$，但 I_0 是开的，显然当 n 充分大时，有

$$x_0 \in [a_n, b_n] \subset I_0.$$

于是区间 $[a_n, b_n]$ 被 $\mathscr{I}$ 中的一个（当然是有限的）区间 I_0 所覆盖，这与构造 $[a_n, b_n]$ 时的性质相矛盾.

(1)⇒(4) 考察 $x^* \in [a,b]$，使 $[a, x^*]$ 能被 $\mathscr{I}$ 中有限个区间所覆盖. 因为存在 $I_0 \in \mathscr{I}$，使 $a \in I_0$，所以 a 右旁的点集 $[a,b] \cap I_0 \subset I_0$，其中任一点都具有 x^* 的性质. 令

$$a < \sup\{x^* \mid [a, x^*] \text{能被 } \mathscr{I} \text{ 中有限个区间所覆盖}\} = c \leqslant b.$$

现证 $c = b$.（反证）假设 $a < c < b$，则存在 $I_1 \in \mathscr{I}$，使 $c \in I_1 = (\alpha, \beta)$. 根据上确界的定义，存在 x_0^* 使 $\alpha < x_0^* \leqslant c$，且 $[a, x_0^*]$ 能被 $\mathscr{I}$ 中有限个区间集 $\mathscr{I}_1 \subset \mathscr{I}$ 所覆盖. 显然，$\mathscr{I}_1 \cup \{I_1\}$ 覆盖 $\left[a, \frac{c+\beta}{2}\right]$，$c < \frac{c+\beta}{2}$，这与 c 为上确界相矛盾.

(4)⇒(5) 设 $a \leqslant x_n \leqslant b$，$n \in \mathbf{N}$.（反证）假设 a_n 无收敛子集，则对 $\forall y \in [a,b]$，x_n 无收敛于 y 的子列. 因此，存在开区间 I_y，$y \in I_y$，I_y 中最多含 x_n 中的有限多项. 显然，

$$\mathscr{I} = \{I_y \mid y \in [a,b]\}$$

覆盖 $[a,b]$. 由连续性命题 4，存在 $[I_{y_1}, \cdots, I_{y_n}] \subset \mathscr{I}$ 覆盖 $[a,b]$，因此也覆盖数列 $\{x_n \mid n \in \mathbf{N}\}$. 但是，每个 I_y 至多含 x_n 的有限项，从而 $[I_{y_1}, \cdots, I_{y_n}]$ 也至多只能覆盖 x_n 的有限项，不能覆盖整个数列 $\{x_n\}$，矛盾.

(3)⇒(5) 将 $[a,b]$ 二等分，则至少有一等分含 $\{x_n\}$ 的无限多项，记此等分为 $[a_1, b_1]$，取 $x_{n_1} \in [a_1, b_1]$. 再将 $[a_1, b_1]$ 二等分，至少有一等分含有 x_n 的无限多项，记此等分为 $[a_2, b_2]$，取 $x_{n_2} \in [a_2, b_2]$，$n_1 < n_2$. 依次类推，得一区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

使得 $b_i - a_i = \frac{b-a}{2^i}$，且 $[a_i, b_i]$ 中含 $\{x_r\}$ 的无限多项，取 $x_{n_i} \in [a_i, b_i]$，$n_{i-1} < n_i$. 根据连续性命题 3（用

区间套原理)，存在唯一的 $x_0 \in \bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i, b_i]$. 显然，$x_n$ 的子列 x_{n_i} 收敛于 x_0.

(5)⇒(6)　(R 的完备性，A. Cauchy)　设 x_n 为 Cauchy 数列(即基本数列). 先证 x_n 有界. 为此，取 $\varepsilon_0 = 1$，由定义，存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $m, n > N$ 时，

$$|x_m - x_n| < \varepsilon_0 = 1.$$

从而

$$|x_n - x_{N+1}| < 1,$$
$$|x_n| \leqslant |x_{N+1}| + |x_{N+1} - x_n| < |x_{N+1}| + 1.$$

由此，对 $\forall n \in \mathbf{N}$，有

$$|x_n| \leqslant \max\{|x_1|, \cdots, |x_N|, |x_{N+1}| + 1\}$$

即 x_n 有界，下证 $\{x_n\}$ 收敛.

由连续性命题(5)(列紧性)，x_n 有收敛的子列 x_{n_k}，设 $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = x$，即对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists K \in \mathbf{N}$，当 $k > K$ 时，

$$|x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 x_n 是 Cauchy 数列，故又存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $m, n > N$ 时，

$$|x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $n > N$ 时，取 $k > \max\{K, N\}$，$n_k > k > \max\{K, N\}$，有

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.

(6)⇒(1)　设集合 $A \subset \mathbf{R}$，有上界 M(有下界的情形证明类似).

若 $M \in A$，则 $M = \sup A$.

若 $M \overline{\in} A$，任取 $m \in A$，则闭区间 $[m, M]$ 有 A 中之数(如 m)，将 $[m, M]$ 等分为二：$\left[m, \frac{m+M}{2}\right]$，$\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$，若 $\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$ 中含有 A 中之数，则取 $[a_1, b_1] = \left[\frac{m+M}{2}, M\right]$；若 $\left[\frac{m+M}{2}, M\right]$ 中不含 A 中之数，则取 $[a_1, b_1] = \left[m, \frac{m+M}{2}\right]$. 显然，$b_1$ 为 A 的上界，且 $[a_1, b_1]$ 中含有 A 中之数. 再将 $[a_1, b_1]$ 等分为二：$\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$，$\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$. 若 $[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$ 含有 A 中之数，则取 $[a_2, b_2] = [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1]$；若 $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$ 不含 A 中之数，则取 $[a_2, b_2] = \left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$，则 b_2 为 A 的上界，且 $[a_2, b_2]$ 中含有 A 中之数. 如此下去，得到两个数列 a_n, b_n，满足：

(1°) $b_n (n \in \mathbf{N})$ 为 A 的上界；

(2°) $[a_n, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ 含 A 中之数；

(3°) $b_n - a_n = \dfrac{M-m}{2^n}$，$n \in \mathbf{N}$；

(4°) $|a_n - a_{n+1}| \leqslant \dfrac{M-m}{2^{n+1}}$，

$$|b_n - b_{n+1}| \leqslant \frac{M-m}{2^{n+1}}, n \in \mathbf{N}.$$

从而，对 $\forall \varepsilon > 0$，取 $N \in \mathbf{N}$，$N > \log_2 \dfrac{M-m}{\varepsilon}$，当 $n > N$，$p \in \mathbf{N}$ 时，有

$$\begin{aligned}
|a_{n+p} - a_n| &\leqslant |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + \cdots + |a_{n+2} - a_{n+1}| + |a_{n+1} - a_n| \\
&\leqslant \frac{M-m}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}}\right) \\
&= \frac{M-m}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{M-m}{2^n} \\
&< \frac{M-m}{2^N} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

即 a_n 为 Cauchy 数列. 同理 b_n 也为 Cauchy 数列. 已知 $\mathbf{R}$ 是完备的，因此 a_n 和 b_n 在 $\mathbf{R}$ 中是收敛的. 由(3°)知，a_n 和 b_n 收敛于同一数 a. 由(1°)知，a 为 A 的上界，于是 $(a, b_n]$ $(n \in \mathbf{N})$ 中皆无 A 中之数. 根据(2°)，$[a_n, a]$ $(n \in \mathbf{N})$ 中都含有 A 中之数，而 $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$，故知 a 为 A 的上确界.

(3)⇒(1)　在(6)⇒(1)中得到一个递降的闭区间套

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

$$b_n - a_n = \frac{M-m}{2^n} \longrightarrow 0 \ (n \to +\infty),$$

所以，存在唯一的 $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n]$，类似上述，$a$ 为 A 的上确界.

1.3.2 **(零值定理)** 设 f 为 $[a, b]$ 上的连续函数.

(1) 如果 $f(a) \cdot f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使 $f(\xi) = 0$；

(2) 如果 $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$，则存在 $\xi \in [a, b]$，使 $f(\xi) = 0$.

证　(1)(方法 1)(应用区间套原理) 不妨设 $f(a) < 0$，$f(b) > 0$.(反证)假设对 $\forall x \in (a, b)$，$f(x) \neq 0$. 考虑区间 $[a, b]$ 的中点 $\frac{a+b}{2}$，若 $f(\frac{a+b}{2}) < 0$，取 $a_1 = \frac{a+b}{2}$，$b_1 = b$；若 $f(\frac{a+b}{2}) > 0$，取 $a_1 = a$，$b_1 = \frac{a+b}{2}$. 则 $f(a_1) < 0$，$f(b_1) > 0$. 再考虑区间 $[a_1,$

$b_1]$ 的中点,若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})>0$,取 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$,$b_2=b_1$;若 $f(\frac{a_1+b_1}{2})>0$,取 $a_2=a_1$,$b_2=\frac{a_1+b_1}{2}$.则 $f(a_2)<0$,$f(b_2)>0$.如此继续下去,得一"递降"的闭区间套:

$$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$b_n-a_n=\frac{b-a}{2^n}\longrightarrow 0\ (n\to+\infty).$$

由连续性命题 3(闭区间套原理),存在唯一的 $\xi\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subset[a,b]$,则

$$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}b_n=\xi,$$

且对 $\forall n\in\mathbf{N}$ 有

$$f(a_n)<0,f(b_n)>0.$$

然而 f 在$[a,b]$上连续,所以

$$0\geqslant\lim_{n\to+\infty}f(a_n)=f(\xi)=\lim_{n\to+\infty}f(b_n)\geqslant 0,$$
$$f(\xi)=0.$$

且 $\xi\in(a,b)$,这与假设 $\forall x\in(a,b)$,$f(x)\neq 0$ 矛盾.

(方法 2)(应用确界)不妨设 $f(a)<0$,$f(b)>0$.令

$$A=\{x\in[a,b]\mid f(u)<0,\forall u\in[A,x]\}$$

由 $f(a)<0$ 知 $a\in A$,$A\neq\varnothing$.根据连续性命题1,A 有上确界 $\xi=\sup A$.再由 $f(a)<0$,$f(b)>0$ 及 f 的连续性,必有

$$a<\xi=\sup A<b.$$

现证 $f(\xi)=0$.由上确界定义,$\exists y_n\in(\xi,b)$,$y_n\to\xi^+$,$f(y_n)\geqslant 0$,此外,显然有 $x_n\to\xi^-$,$f(x_n)<0$.根据 f 的连续性,

$$0\geqslant\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(\xi)=\lim_{n\to+\infty}f(y_n)\geqslant 0,$$
$$f(\xi)=0,\xi\in(a,b).$$

(方法3)(应用紧致性)(反证)假设对 $\forall x\in(a,b)$,$f(x)\neq 0$.因为 f 在$[a,b]$上连续,对 $\forall x\in[a,b]$,$\exists\delta_x>0$,当 $x'\in I_x=(x-\delta_x,x+\delta_x)$ 时,$f(x')$ 与 $f(x)$ 同号.于是,$\mathscr{I}=\{I_x\mid x\in[a,b]\}$ 为$[a,b]$的一个开覆盖.根据连续性命题4(紧致性),存在$[a,b]$的有限子覆盖 $\mathscr{I}_1=\{I_{x_i}\mid i=1,\cdots,n\}\subset\mathscr{I}$.$f$ 在 I_{x_i} 上保持同号,故 f 在$[a,b]$上保持同号,因而 $f(a)$ 和 $f(b)$ 同号.这与题设 $f(a)f(b)<0$ 矛盾.

(2) 如果 $f(a)=0$,取 $\xi=a$;如果 $f(b)=0$,取 $\xi=b$.如果 $f(a)\neq 0$,$f(b)\neq 0$,则 $f(a)f(b)<0$.根据(1),存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

1.3.3 **(介值定理)** f 在$[a,b]$上连续.

(1) 如果 $\min\{f(a),f(b)\}<r<\max\{f(a),f(b)\}$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=r$;

(2) 如果 $\min\{f(a),f(b)\}\leqslant r\leqslant\max\{f(a),f(b)\}$,则存在 $\xi\in[a,b]$,使得 $f(\xi)=r$.

证 (1) 令 $F(x)=f(x)-r$,则 $F(a)\cdot F(b)<0$,根据题1.3.2(1),存在 $\xi\in(a,b)$,使 $0=F(\xi)=f(\xi)-r$,即

$$f(\xi)=r.$$

(2) 不妨设 $f(a)\leqslant f(b)$.

如果 $r=\min\{f(a),f(b)\}=f(a)$,取 $\xi=a$;如果 $r=\max\{f(a),f(b)\}=f(b)$,则取 $\xi=b$.如果 $\min\{f(a),f(b)\}<r<\max\{f(a),f(b)\}$,由(1),存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=r$.

1.3.4 设 f 在$[a,b]$上连续,则 f 在$[a,b]$上有界.

证法1 由下面的题1.3.5证法1知 f 在$[a,b]$上达到最小值 m、最大值 M,于是

$$|f(x)|\leqslant\max\{|m|,|M|\},$$

即 f 在$[a,b]$上是有界的.

证法2 因为 f 在$[a,b]$上连续,所以对 $\forall x\in[a,b]$,取 $\varepsilon_0=1$,$\exists\delta(x)>0$,$\forall u\in(x-\delta(x),x+\delta(x))\cap[a,b]$,有

$$f(x)-1<f(u)<f(x)+1.$$

显然 $\mathscr{I}=\{(x-\delta(x),x+\delta(x))\mid x\in[a,b]\}$ 为$[a,b]$的一个开覆盖.根据连续性命题4.存在有限子覆盖 $\mathscr{I}_1=\{(x_i-\delta_{(x_i)},x_i+\delta_{(x_i)})\mid i=1,\cdots,n\}$.令

$$M=\max\{|f(x_i)-1|,|f(x_i)+1|,$$
$$i=1,2,\cdots,n\},$$

则对 $\forall x\in[a,b]$,

$$|f(x)|\leqslant M.$$

这证明了 f 在$[a,b]$上有界.

1.3.5 **(最值定理)** 设 f 在$[a,b]$上连续,则 f 在$[a,b]$上达到最大值和最小值.

证法1 考虑 $\sup f([a,b])$,存在 $x_n\in[a,b]$,使得 $\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\sup f([a,b])$.根据连续性命题5(序列列紧性),存在 x_n 的子列 x_{n_i} 收敛于 $x_0\in[a,b]$.再由 f 的连续性得到

$$f(x_0)=\lim_{i\to+\infty}f(x_{n_i})=\sup f([a,b]),$$

即 f 在 x_0 达到最大值 $f(x_0)$.

同理可证 f 在$[a,b]$上达到最小值(或将 f 换成 $-f$).

证法2 (反证)假设 f 无最大值,令 $M=\sup f([a,b])$ 及

$$F(x)=\frac{1}{M-f(x)},x\in[a,b].$$

则 F 是$[a,b]$上的正值函数,根据确界定义,F 在$[a,b]$上无上界.这与(应用题1.3.4证法2得到的)结论相矛盾.

注　设(X,ρ)为度量空间，a_n为X中的一点列，如果对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，当$n,m>N$时有$\rho(a_n,a_m)<\varepsilon$，则称$a_n$为$(X,\rho)$中的**Cauchy点列或基本点列**.

如果(X,ρ)中任何Cauchy点列都收敛，则称(X,ρ)为**完备度量空间**.

1.3.6　(1) (X,ρ)完备

$\Leftrightarrow$(2) Cantor闭集套定理：若

$$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$$

为非空递降闭集序列，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\operatorname{diam}F_n=0$，则$\exists_1 a$，使$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\{a\}$.

$\Leftrightarrow$(3) Cantor闭球套定理：若

$$\overline{B_{x_1}(\delta_1)}\supset\overline{B_{x_2}(\delta_2)}\supset\cdots\supset\overline{B_{x_n}(\delta_n)}\supset\cdots$$

为非空递降闭球序列，且$\lim\limits_{n\to+\infty}\delta_n=0$，则$\exists_1 a$，使

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\overline{B_{x_n}(\delta_n)}=\{a\}.$$

((2)和(3)是闭区间套定理的推广).

证　(1)$\Rightarrow$(2)(G.Cantor)　因为$F_n\neq\varnothing$，取$a_n\in F_n$，又因F_n递降，故$\{a_n,a_{n+1},\cdots\}\subset F_n$，$n\in\mathbf{N}$.于是，当$m>n$时，

$$\rho(a_n,a_m)\leqslant\operatorname{diam}F_n,$$

即a_n为Cauchy点列.根据(X,ρ)完备，它必收敛于$a\in X$.但F_n为闭集，而当$m\geqslant n$时，$a_m\in F_n$，所以$a\in F_n$，$\forall n\in\mathbf{N}$，即$a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

另一方面，如果$b\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，则$a,b\in F_n$，因此

$$0\leqslant\rho(a,b)\leqslant\operatorname{diam}F_n\longrightarrow 0\ (n\to+\infty),$$

$$\rho(a,b)=0,$$

即$a=b$.所以$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n=\{a\}$.

(2)$\Rightarrow$(3)　由闭球为闭集立即得.

(3)$\Rightarrow$(1)　设a_n为X中的Cauchy点列，则存在$n_1<n_2<\cdots$，当$m,n\geqslant n_k$时，

$$\rho(a_n,a_m)<\frac{1}{2^{k+1}}.$$

在X中作一列闭球$\overline{B_{a_{n_k}}\left(\frac{1}{2^k}\right)}$，$k=1,2,\cdots$.当$x\in\overline{B_{a_{n_{k+1}}}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)}$时，由于

$$\rho(x,a_{n_k})\leqslant\rho(x,a_{n_{k+1}})+\rho(a_{n_{k+1}},a_{n_k})$$

$$<\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k},$$

即$x\in B_{a_{n_k}}\left(\frac{1}{2^k}\right)$，从而

$$\overline{B_{a_{n_{k+1}}}\left(\frac{1}{2^{k+1}}\right)}\subset\overline{B_{a_{n_k}}\left(\frac{1}{2^k}\right)},k=1,2,\cdots$$

另一方面，$\operatorname{diam}\overline{B_{a_{n_k}}\left(\frac{1}{2^k}\right)}=\frac{1}{2^{k-1}}\longrightarrow 0\ (k\to+\infty)$.由(3)，$\exists_1 a\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\overline{B_{a_{n_k}}\left(\frac{1}{2^k}\right)}$，并且

$$0\leqslant\rho(a,a_{n_k})\leqslant\frac{1}{2^k}.$$

$\forall\varepsilon>0$，因为a_n为Cauchy点列，故存在$N\in\mathbf{N}$，当$n,m>N$时，$\rho(a_n,a_m)<\frac{\varepsilon}{2}$.取$k$充分大，使得$\frac{1}{2^k}<\frac{\varepsilon}{2}$，且$n_k>N$，则当$n>N$时，有

$$\rho(a,a_n)\leqslant\rho(a,a_{n_k})+\rho(a_{n_k},a_n)$$

$$\leqslant\frac{1}{2^k}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\lim\limits_{n\to+\infty}\rho(a,a_n)=0$，$a_n$收敛于$a$，这就证明了$(X,\rho)$是完备的.

1.3.7　$(\mathbf{R}^n,\rho_0)$是完备度量空间.

证　设$a^m=(a_1^m,\cdots,a_n^m)$，则由

$$|a_i^m-a_i^l|\leqslant\left[\sum_{j=1}^{n}(a_j^m-a_j^l)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\rho(a^m,a^l)$$

$$\leqslant\sqrt{n}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|a_j^m-a_j^l|,i=1,\cdots,n$$

知a^m为Cauchy点列$\Leftrightarrow a_i^m$为Cauchy数列，$i=1,\cdots,n$.因此，由$(\mathbf{R},\rho_0)$的完备性，推得$(\mathbf{R}^n,\rho_0)$为完备度量空间.

1.3.8　设(X,ρ)为序列紧致(见1.5.10(4))度量空间，$\mathscr{I}$为X的一个开覆盖(即$X=\bigcup\limits_{I\in\mathscr{I}}I$，$I$为$(X,\rho)$中的开集)，则存在一个正数$\lambda=\lambda(\mathscr{I})$具有性质：如果$X$的任一子集$A$的直径$d(A)<\lambda$，则至少有一个$I\in\mathscr{I}$，使得$I\supset A$.$\lambda(\mathscr{I})$称为$\mathscr{I}$的一个**Lebegue数**.

证　(反证法)假设结论不成立，则对$\forall n\in\mathbf{N}$，存在$A_n\subset X$，它的直径$d(A_n)<\frac{1}{n}$，而不存在$I\in\mathscr{I}$，使得$A_n\subset I$.在每个A_n中取a_n，因为(X,ρ)序列紧致，故a_n必有子序列a_{n_i}收敛到$a\in X$.因为$\mathscr{I}$为X的开覆盖，故存在$I_0\in\mathscr{I}$，使得$a\in I_0$.因为I_0为开集，点a到$X-I_0$的距离$d=\rho(a,X-I_0)>0$.由于$\lim\limits_{i\to+\infty}a_{n_i}=a$，所以，存在$n_{i_0}$，使得$n_{i_0}>\frac{2}{d}$和$\rho(a,a_{n_{i_0}})<\frac{d}{2}$.于是，对$\forall x\in A_{n_{i_0}}$，有

$$\rho(a,x)\leqslant\rho(a,a_{n_{i_0}})+\rho(a_{n_{i_0}},x)$$

$$<\frac{d}{2}+\frac{1}{n_{i_0}}<\frac{d}{2}+\frac{d}{2}=d,$$

因而，$A_{n_{i_0}}\subset I_0\in\mathscr{I}$.这与不存在$I\in\mathscr{I}$使得$A_{n_{i_0}}\subset I$相矛盾.

1.3.9　设$X\subset\mathbf{R}^n$，ρ_0为$\mathbf{R}^n$中的通常度量(距

离). 则 $f: X \to \mathbf{R}$ 一致连续 $\Leftrightarrow \forall x_m, y_m \in X, \rho_0(x_m, y_m) \to 0 (m \to +\infty)$ 必有 $|f(x_m) - f(y_m)| \to 0 \ (m \to +\infty)$.

换言之, $f: X \to \mathbf{R}$ 不一致连续 $\Leftrightarrow \exists x_m, y_m \in X, \rho_0(x_m, y_m) \to 0 \ (m \to +\infty)$, 但 $|f(x_m) - f(y_m)| \nrightarrow 0 \ (m \to +\infty)$.

证 $(\Rightarrow) \forall \varepsilon > 0$, 因 f 一致连续, 故存在 $\delta(\varepsilon) > 0$, 当 $x', x'' \in X, \rho(x', x'') < \delta(\varepsilon)$ 时, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 由于 $\rho_0(x_m, y_m) \to 0 \ (m \to +\infty)$, 故存在 $M \in \mathbf{N}$, 当 $m > M$ 时, $\rho_0(x_m, y_m) < \delta(\varepsilon)$, 于是 $|f(x_m) - f(y_m)| < \varepsilon$. 这意味着 $|f(x_m) - f(y_m)| \to 0 \ (m \to +\infty)$.

$(\Leftarrow)$(反证) 假设 f 在 X 上不一致连续, 则存在 ε_0, 对 $\forall m \in \mathbf{N}$, 必有 $x_m, y_m \in X$, 虽然 $\rho(x_m, y_m) < \frac{1}{m}$, 但 $|f(x_m) - f(y_m)| \geqslant \varepsilon_0$. 此时, $\rho_0(x_m, y_m) \to 0 \ (m \to +\infty)$, 但 $|f(x_m) - f(y_m)| \nrightarrow 0 (m \to +\infty)$, 这与题设相矛盾, 所以 f 在 X 上一致连续.

1.3.10 $\mathbf{R}^n$ 中紧致集合(有界闭集) X 上的连续函数 $f: X \to \mathbf{R}$ 一定一致连续.

证法 1 (反证) 假设 f 在 X 上不一致连续, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall n \in \mathbf{N}$, 必有 $x_n', x_n'' \in X$, 使得 $\rho_0(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}$, 但 $|f(x_n') - f(x_n'')| \geqslant \varepsilon_0$(其中 ρ_0 为 $\mathbf{R}^n$ 中通常的度量(距离)函数). 因为 X 为紧致集合, 故 x_n' 中必有收敛子列 x_{n_k}', 即 $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}' = x_0 \in X$. 由于 $\rho_0(x_n', x_n'') < \frac{1}{n}$, 故 $\lim\limits_{k \to +\infty} x_{n_k}'' = x_0$. 于是, 由 f 为 X 上的连续函数得到

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)|$$
$$= \lim_{k \to +\infty} |f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \geqslant \varepsilon_0 > 0.$$

矛盾. 所以 f 在 X 上一致连续.

证法 2 对 $\forall \varepsilon > 0$, 因为 f 在 X 上连续, 故对任意的 $x \in X$, 存在 $\delta(x) > 0$, 使当 $x' \in X$, 且 $\rho(x', x) < \delta(x)$ 时, 有 $|f(x') - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

显然, 开球族 $\mathscr{I}_1 = \{B_x(\delta(x)) \mid x \in X\}$ 和 $\mathscr{I}_2 = \{B_x(\frac{\delta(x)}{2}) \mid x \in X\}$ 都是紧致集 X 的开覆盖, 因此, 存在 X 的有限开覆盖 $\mathscr{I} = \{B_{x_i}(\frac{\delta(x_i)}{2}) \mid i = 1, \cdots, m\}$.

令 $\delta = \min\{\frac{\delta(x_i)}{2} \mid i = 1, 2, \cdots, m\}$, 则对 $\forall x', x'' \in X$, 当 $\rho_0(x', x'') < \delta$ 时, 如果 $x' \in B_{x_{i_0}}\left(\frac{\delta(x_{i_0})}{2}\right)$, 必有 $x', x'' \in B_{x_{i_0}}(\delta(x_{i_0}))$, 从而

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

即 f 在 X 上是一致连续的.

证法 3 在证法 2 中, 由于 $\mathscr{I}_1 = \{B_x(\delta(x)) \mid x \in X\}$ 为紧致集 X 的一个开覆盖, 根据题 1.3.8, 存在 Lebegue 数 $\lambda(\mathscr{I}_1) > 0$. 对于 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \lambda(\mathscr{I}_1)$, 则当 $x', x'' \in X$, 且直径 $d(\{x', x''\}) = |x' - x''| < \delta = \lambda(\mathscr{I}_1)$ 时, 存在 $B_{x_0}(\delta(x_0)) \in \mathscr{I}_1$, 使得 $\{x', x''\} \subset B_{x_0}(\delta(x_0))$, 从而 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 这就证明了 f 在 X 上是一致连续的.

1.3.11 设 $X \subset \mathbf{R}^n$, ρ_0 为通常的度量(距离)函数, $\overline{X}$ 为紧致集(即有界闭集), $f: X \to \mathbf{R}$ 为实函数. 试证: f 在 X 上一致连续 $\Leftrightarrow f$ 可延拓到 X 的闭包 $\overline{X}$ 上为连续函数.

证 $(\Leftarrow)$ 如果 f 可延拓到 $\overline{X}$ 为连续函数, 由 $\overline{X}$ 紧致和题 1.3.10, f 在 $\overline{X}$ 上一致连续, 当然也在 $X \subset \overline{X}$ 上一致连续.

$(\Rightarrow)$ f 在 X 上一致连续, 则对 $\forall x_0 \in \overline{X}, x_m \in X, x_m \to x_0 (m \to +\infty)$, $\lim\limits_{m \to +\infty} f(x_m)$ 必存在有限. 事实上, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 f 在 X 上一致连续, 所以存在 $\delta > 0$, 当 $\rho_0(x', x'') < \delta$ 时, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 于是, 存在 $M \in \mathbf{N}$, 当 $m, m' > M$ 时, $\rho_0(x_m, x_{m'}) < \delta$, 从而 $|f(x_m) - f(x_{m'})| < \varepsilon$. 这意味着 $f(x_m)$ 是 Cauchy(基本)序列和 $\lim\limits_{m \to +\infty} f(x_m)$ 存在有限. 再证 $\lim\limits_{m \to +\infty} f(x_m)$ 与序列 $x_m \to x_0$ 的选取无关. 如果 $y_m \in X, y_m \to x_0$, 则 $\{z_m\} = \{x_1, y_1, x_2, y_2, \cdots\}$ 也收敛于 x_0, 所以 $\lim\limits_{m \to +\infty} f(z_m)$ 也存在有限, 且

$$\lim_{m \to +\infty} f(x_m) = \lim_{m \to +\infty} f(z_m) = \lim_{m \to +\infty} f(y_m).$$

由此可知 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x)$ 存在有限, 令

$$\tilde{f}(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in X}} f(x).$$

易见 $\tilde{f}$ 为 $\overline{X}$ 上的连续函数, 且 $\tilde{f}|_X = f$, 即 $\tilde{f}$ 为 f 的延拓.

1.3.12 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 中连续, $f(a) < f(b)$, 又设对一切 $x \in (a, b)$, $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{t} = g(x)$ 存在有限. 试证: 存在 $c \in (a, b)$, 使得 $g(c) \geqslant 0$.

证法 1 因 $f(a) < f(b)$ 及 f 连续, 所以存在 $d \in (a, b)$, 使得 $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, d]\} < f(b)$. 令

$$c = \sup_{t \in [a, b]} \{t \mid \max\{f(x) \mid x \in [a, t]\} \leqslant M\},$$

则由 f 连续知, $f(c) = M$, 从而 $a < c < b$. 容易看出, 对 $\forall \delta > 0, \exists x \in (c, c+\delta)$, 使 $f(x) > M$(否则 $f(x) \leqslant M, \forall x \in (c, c+\delta)$, 则 $\max\{f(x) \mid x \in$

$[a,c+\delta]\}\leqslant M$,这与 c 为上确界相矛盾).因此,存在 $x_n\in(c,b)$,使 x_n 严格单调减趋于 c,且 $f(x_n)>M$.再命 $t_n=x_n-c>0$,则 $f(c+t_n)=f(x_n)>M$,而 $f(c-t_n)\leqslant M$(当 n 充分大时,$c-t_n\in[a,b]$,不妨设 $c-t_n\in[a,b]$,$\forall n\in\mathbf{N}$).由题设 $g(c)=\lim\limits_{t\to0}\dfrac{f(c+t)-f(c-t)}{t}$ 存在有限,故

$$g(c)=\lim_{t\to0}\frac{f(c+t)-f(c-t)}{t}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(c+t_n)-f(c-t_n)}{t_n}\geqslant0.$$

证法 2 因为 $f(b)>f(a)$,所以 $\exists d\in(a,b)$,使

$$M=\max\{f(x)\mid x\in[a,d]\}<f(b)$$

记 $c=\sup\limits_{t\in[a,b]}\{t\mid\max\{f(x)\mid x\in[a,t]\}\leqslant M\}<b$,$\exists 0<t_1<\delta=\min\{c-a,b-c\}$,使 $f(c+t_1)-f(c-t_1)\geqslant0$(若否,对 $\forall x\in(c,c+\delta)$,$f(x)=f(c+x-c)<f(2c-x)\leqslant M$,与 c 的定义矛盾).同理,$\exists 0<t_2<\dfrac{t_1}{2}$,使 $f(c+t_2)-f(c-t_2)\geqslant0$,类似可得

$$0<\cdots<t_n<t_{n-1}<\cdots<t_1,\text{且 } t_n<\frac{t_{n-1}}{2},$$

使 $f(c+t_n)-f(c-t_n)\geqslant0$.故

$$g(c)=\lim_{t\to0}\frac{f(c+t)-f(c-t)}{t}=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+t_n)-f(c-t_n)}{t_n}\geqslant0.$$

1.3.13 设 (X,d) 为紧距离空间(如 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集 X),$\{f_n\}$ 为 X 上的连续函数序列,f 为 X 上的连续函数,它们满足:

(1) $f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots$,$\forall x\in X$;

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$,$\forall x\in X$.

试证:函数序列 $\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f.

证法 1 (反证)假设 $\{f_n\}$ 不一致收敛于 f,则存在某个 $\varepsilon>0$,对 $\forall n\in\mathbf{N}$,$\exists x_n\in X$,使得 $f_n(x_n)-f(x_n)=|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant\varepsilon$(否则用子列代替).

由于 (X,d) 为紧距离空间,所以序列 $\{x_n\}$ 有收敛的子序列 $\{x_{n_k}\}$,设 $\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x_0$.对每个 $n\in\mathbf{N}$,由于 f_n-f 连续,故有 $\lim\limits_{k\to+\infty}[f_n(x_{n_k})-f(x_{n_k})]=f_n(x_0)-f(x_0)$.另一方面,当 $n_k\geqslant n$ 时,有

$$f_n(x_{n_k})-f(x_{n_k})\geqslant f_{n_k}(x_{n_k})-f(x_{n_k})\geqslant\varepsilon,$$

所以

$$f_n(x_0)-f(x_0)=\lim_{k\to+\infty}[f_n(x_{n_k})-f(x_{n_k})]\geqslant\varepsilon,\ n=1,2,\cdots.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty}[f_n(x_0)-f(x_0)]\geqslant\varepsilon.$$

这与对任何 $x\in X$,

$$\lim_{n\to+\infty}[f_n(x)-f(x)]=f(x)-f(x)=0$$

相矛盾.因此,$\{f_n\}$ 在 X 上一致收敛于 f.

证法 2 令 $\varphi_n(x)=f_n(x)-f(x)$,显然 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=0$,$\forall x\in X$;$f_1(x)\geqslant f_2(x)\geqslant\cdots\Leftrightarrow\varphi_1(x)\geqslant\varphi_2(x)\geqslant\cdots$,$\forall x\in X$;$f_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)\Leftrightarrow\varphi_n(x)$ 在 X 上一致收敛于 0.

对 $\forall x_0\in X$,因为 $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x_0)=0$,且 $\varphi_n(x_0)\geqslant\varphi_{n+1}(x_0)$,所以 $\varphi_n(x_0)\geqslant0$.对 $\forall\varepsilon>0$,$\exists N(\varepsilon,x_0)\in\mathbf{N}$,当 $n>N(\varepsilon,x_0)$ 时,有 $0\leqslant\varphi_n(x_0)<\varepsilon$.又因 f_n 连续,故存在 x_0 的开邻域 $\Delta(x_0)$,使得

$$0\leqslant\varphi_{N(\varepsilon,x_0)+1}(x)<\varepsilon,\ \forall x\in\Delta(x_0).$$

于是,当 $n>N(\varepsilon,x_0)$ 时,有

$$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{N(\varepsilon,x_0)+1}(x)<\varepsilon,\ \forall x\in\Delta(x_0).$$

易见,$\{\Delta(x_0)\mid x_0\in X\}$ 为 X 的一个开覆盖,又 (X,d) 为紧距离空间,所以存在有限子覆盖 $\{\Delta(x_1),\cdots,\Delta(x_m)\}$.于是,当 $n>N(\varepsilon)=\max\{N(\varepsilon,x_1),\cdots,N(\varepsilon,x_m)\}$ 时,有

$$0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\varphi_{N(\varepsilon)+1}(x)<\varepsilon,\ \forall x\in X.$$

所以,φ_n 在 X 上一致收敛于 0.

1.3.14 设 $\{f_n(x)\}$ 为定义在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数列,且有

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x),\quad x\in\mathbf{R},$$

则 $f(x)$ 的连续点集 C 是 $\mathbf{R}$ 中的稠密集($\overline{C}=\mathbf{R}$,即 $\forall x_0\in\mathbf{R}$,$\exists x_n\in C$,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$).

证 参阅第 7 篇题 7.3.19.

1.3.15 证明:不存在 $\mathbf{R}$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$,它收敛于 **Dirichlet** 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\0, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

证 参阅第 7 篇 7.3.22.

1.3.16 (1) 设 f_n,f 为 $\mathbf{R}$ 上的一元函数,f_n 在 $\mathbf{R}$ 上连续,$n=1,2,\cdots$,且

$$\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x),\ x\in\mathbf{R}.$$

试证:(1) 存在 $(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}$,使得 f 在 (α,β) 上是有界的;

(2) 设 g 在 $\mathbf{R}$ 上可导.试证,存在 $(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}$,使得 g' 在 (α,β) 上有界.

证 (1)(方法 1)(反证)假设结论不成立.任取区间 $(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}$,则 f 在 (α,β) 上无界.令 $x_1\in(\alpha,\beta)$,使得 $|f(x_1)|>1$.由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x_1)=f(x_1)$,故存在 $N_1\in\mathbf{N}$,$|f_{N_1}(x_1)|>1$.再由 f_{N_1} 连续,存在 $(\alpha_1,\beta_1)\subset(\alpha,\beta)$ 使 $0<\beta_1-\alpha_1<\dfrac{\beta-\alpha}{2}$,$|f_{N_1}(x)|>$

$1, x\in(\alpha_1,\beta_1)$. 由假设, f 在 (α_1,β_1) 上无界, 同理可得到 $(\alpha_2,\beta_2)\subset(\alpha_1,\beta_1)$, $0<\beta_2-\alpha_1<\frac{\beta-\alpha}{2^2}$, $N_2>N_1$,

$$|f_{N_2}(x)|>2, x\in(\alpha_2,\beta_2).$$

依次类推, 得到一闭区间套

$$[\alpha,\beta]\supset[\alpha_1,\beta_1]\supset\cdots\supset[\alpha_k,\beta_k]\supset\cdots$$

$$0\leqslant\beta_k-\alpha_k\leqslant\frac{\beta-\alpha}{2^k},$$

$$N_k>N_{k-1}, f_{N_k}(x_k)>k, x_k\in(\alpha_k,\beta_k).$$

根据连续性命题 3(闭区间套原理), 存在唯一的 $x_0\in\bigcap_{k=1}^{\infty}[\alpha_k,\beta_k]$. 显然, $|f_{N_k}(x_0)|>k$, 所以

$$|f(x_0)|=|\lim_{k\to+\infty}f_{N_k}(x_0)|=+\infty.$$

矛盾. 所以结论成立.

(方法 2) 应用题 1.3.14, f 有连续点 $x_0\in\mathbf{R}$, 则必 $\exists\delta>0$, 使 f 在 $(\alpha,\beta)=(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 中有界.

(2) 令

$$g_n(x)=\frac{g(x+\frac{1}{n})-g(x)}{\frac{1}{n}}, x\in\mathbf{R}, n\in\mathbf{N}.$$

由 g 在 $\mathbf{R}$ 上连续知 $g_n(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续, 且

$$\lim_{n\to+\infty}g_n(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{g(x+\frac{1}{n})-g(x)}{\frac{1}{n}}=g'(x), x\in\mathbf{R}.$$

根据(1), $\exists(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}$, 使得 $g'(x)$ 在 (α,β) 上有界.

1.3.17 设 f 在开区间 I 上连续, 并且 I 中每一点都是 f 的极值点, 证明 f 是 I 上的常值函数.

证法 1 参阅第 7 篇题 7.1.57.

证法 2 (反证) 假设 f 在 I 上不是常值函数, 则存在 $a_1,b_1\in I$, 使得 $f(a_1)\neq f(b_1)$. 不妨设 $f(a_1)<f(b_1)$. 因为 f 连续, 故由介值定理, 存在 $c\in(a_1,b_1)$ 使得

$$f(a_1)<f(c)=\frac{f(a_1)+f(b_1)}{2}<f(b_1).$$

若 $b_1-c\leqslant\frac{b_1-a_1}{2}$, 则令 $a_2=c$, 取 b_2 满足 $a_2=c<b_2<b_1$, 且

$$f(a_1)<f(a_2)=f(c)<f(b_2)<f(b_1);$$

若 $c-a_1\leqslant\frac{b_1-a_1}{2}$, 则令 $b_2=c$, 取 a_2 满足 $a_1<a_2<c=b_2$, 且

$$f(a_1)<f(a_2)<f(c)=f(b_2).$$

无论哪种情形, 都有 $f(a_2)<f(b_2)$. 在 $[a_2,b_2]$ 上重复上述做法, 并依次类推下去, 得一闭区间套:

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$0<b_n-a_n\leqslant\frac{b_1-a_1}{2^n}\longrightarrow0\ (n\to+\infty).$$

根据连续性命题 3(闭区间套原理), $\exists_1 x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 由上述选法, 易见 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$ 且 $\lim_{n\to+\infty}a_n=x_0=\lim_{n\to+\infty}b_n$. 再由 f 连续, $f(a_n)$ 严格增收敛于 $f(x_0)$, $f(b_n)$ 严格减收敛于 $f(x_0)$. 因此

$$f(a_n)<f(x_0)<f(b_n),$$

即 x_0 不是 f 的极值点. 这与 I 中每一点都是 f 的极值点相矛盾.

1.3.18 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上连续, 对 $\forall a>0$, 有 $\lim_{n\to+\infty}f(na)=0$, 试证 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证法 1 (反证法) 假设 $\lim_{x\to+\infty}f(x)\neq0$, 则 $\exists\varepsilon_0>0$, 及 $x_n\to+\infty\ (n\to+\infty)$, 满足 $|f(x_n)|\geqslant\varepsilon_0$. 由 f 的连续性知, 存在 δ_n, 使得当 $x\in[x_n-\delta_n,x_n+\delta_n]$ 时, $|f(x)|\geqslant\varepsilon_0$. 令 $[a_1,b_1]=[x_1-\delta_1,x_1+\delta_1]$(不失一般性, 设 $a_1>0$). 当 $k\geqslant k_1\geqslant\frac{a_1}{b_1-a_1}$ 时, 显然, $kb_1\geqslant(k+1)a_1$, 故 $[ka_1,kb_1]$ 和 $[(k+1)a_1,(k+1)b_1]$ 相交. 于是, $\forall x\geqslant k_1a_1$, 必存在 $k\in\mathbf{N}$, 使 $x\in[ka_1,kb_1]$, 即存在 $c\in[a_1,b_1]$, 使 $kc=x$, 由 $x_n\to+\infty$ 可知, $n\geqslant N_1$ 时, $x_n>k_1a_1$. 考虑 x_{N_1}, 由上述可知, 存在 l_1 使 $x_{N_1}\in[l_1a_1,l_1b_1]$, 故可取到 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$, 使得 $[l_1a_2,l_1b_2]\subset[x_{N_1}-\delta_{N_1},x_{N_1}+\delta_{N_1}]\cap[l_1a_1,l_1b_1]$. 同样, 取 $k_2\geqslant\frac{a_2}{b_2-a_2}$, 存在 $x_{N_2}\geqslant k_2a_2$, 及 l_2 使 $x_{N_2}\in[l_2a_2,l_2b_2]$. 故可取 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$, 使 $x_{N_2}\in[l_2a_3,l_2b_3]\subset[x_{N_2}-\delta_{N_2},x_{N_2}+\delta_{N_2}]\cap[l_2a_2,l_2b_2]$, 且

$$l_2\geqslant\frac{x_{N_2}}{b_3}>\frac{x_{N_2}}{b_2}>\frac{x_{N_1}}{a_1}\geqslant l_1$$

和 $x_{N_2}>\max\{k_2a_2,\frac{b_2}{a_1}x_{N_1}\}$.

重复上述过程, 得到 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_i,b_i]\supset\cdots$, $l_1<l_2<\cdots<l_{i-1}<l_i<\cdots$, 满足

$$[l_{i-1}a_i,l_{i-1}b_i]\subset[x_{N_{i-1}}-\delta_{N_{i-1}},x_{N_{i-1}}+\delta_{N_{i-1}}]\cap[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}].$$

由区间套原理, 存在 $a\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$. 因为

$$l_{i-1}a\in[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}]\subset[x_{N_{i-1}}-\delta_{N_{i-1}},x_{N_{i-1}}+\delta_{N_{i-1}}]\cap[l_{i-1}a_{i-1},l_{i-1}b_{i-1}],$$

所以, $\lim_{i\to+\infty}l_i=+\infty$ 和 $|f(l_{i-1}a)|>\varepsilon_0$,

$$\lim_{i\to+\infty}f(l_ia)\not\to0,$$

这与 $\lim_{l\to+\infty} f(l\alpha) = \lim_{n\to+\infty} f(n\alpha) = 0$ 相矛盾. 从而

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

证法 2 $\forall \varepsilon > 0$, 显然, $A_n = \{\alpha \mid |f(n\alpha)| \leqslant \varepsilon\}$ 为闭集, $B_k = \bigcap_{n>k} A_n$ 也为闭集.

$\forall x \in (0, +\infty)$, 因为 $\lim_{n\to+\infty} f(nx) = 0$, 所以存在 $k \in \mathbf{N}$, 当 $n > k$ 时, $|f(nx)| \leqslant \varepsilon$, 于是 $x \in B_k$, 因此 $(0, +\infty) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. 由 Baire 定理(参阅第 7 篇 7.3.9), 存在 $B_{k_0} \supset [a, b]$. 取 $l \geqslant \max\left\{k_0 + 1, \frac{a}{b-a}\right\}$. 当 $n \geqslant l$ 时, 有 $n(b-a) \geqslant a \Rightarrow nb \geqslant (n+1)a$. 于是, 对 $\forall x \geqslant la$, 即 $x \in [la, +\infty) \subset \bigcup_{n>k_0} [na, nb]$, $x \in [na, nb]$, $n > k_0$. $x = n\alpha$, $\alpha \in [a, b] \subset B_{k_0} = \bigcap_{n>k_0} A_n$, $\alpha \in A_n$, $n > k_0$. 所以

$$|f(x)| = |f(n\alpha)| \leqslant \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

§1.4 零值定理、介值定理和最值定理的应用

见到闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数, 自然会想到零值定理、介值定理和最值定理. 有时, 还需要我们构造一个连续函数, 确定闭区间, 然后再选择应用上述定理.

1.4.1 试证

(1) 实系数方程

$$x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

至少有一个实根;

(2) 实系数方程

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0, a_{2n} < 0$$

至少有两个实根.

证 (1) 因为

$$\lim_{x\to+\infty} (x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1})$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$$
$$= +\infty,$$
$$\lim_{x\to-\infty} (x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1})$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^{2n+1}\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n}}{x^{2n}} + \frac{a_{2n+1}}{x^{2n+1}}\right)$$
$$= -\infty,$$

所以, 存在 $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$, 使 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. 再由多项式函数 $x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + \cdots + a_{2n} x + a_{2n+1}$ 的连续性及零值定理知必存在 $\xi \in (a, b) \subset \mathbf{R}$, 使得

$$\xi^{2n+1} + a_1 \xi^{2n} + \cdots + a_{2n} \xi + a_{2n+1} = 0,$$

ξ 即为方程的根.

(2) 设 $P(x) = x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n}$, $a_{2n} < 0$, 因为

$$\lim_{x\to\infty} P(x)$$
$$= \lim_{x\to\infty} x^{2n}\left(1 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{x^{2n-1}} + \frac{a_{2n}}{x^{2n}}\right) = +\infty,$$

因此, 存在 $a < 0$, $b > 0$ 使 $f(a) > 0$, $f(b) > 0$. 又因为

$$P(0) = a_{2n} < 0,$$

根据多项式函数 $P(x)$ 的连续性和零值定理, 存在 $\xi_1 \in (a, 0)$, $\xi_2 \in (0, b)$ 使得

$$P(\xi_1) = 0, P(\xi_2) = 0,$$

即实系数方程

$$x^{2n} + a_1 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x + a_{2n} = 0, a_{2n} < 0$$

有两个不相同的实根 ξ_1 和 ξ_2.

注 当函数的定义域不是闭区间时, 往往先在定义域内确定两点 $x_1 < x_2$, 其函数值异号, 于是在 $[x_1, x_2]$ 中运用零值定理.

为了运用零值定理、介值定理, 通常需要构造新的函数, 使它满足条件. 下面通过大量例题掌握这一方法.

1.4.2 设函数 f 在闭区间上连续, $f([a, b]) \subset [a, b]$, 则 f 在 $[a, b]$ 中必有"不动点", 即存在 $\xi \in [a, b]$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证 由 f 在 $[a, b]$ 上连续, 函数 $F(x) = f(x) - x$ 在 $[a, b]$ 上也连续. 再由题设 $a \leqslant f(x) \leqslant b$, 所以

$$F(a) = f(a) - a \geqslant 0,$$
$$F(b) = f(b) - b \leqslant 0.$$

根据零值定理知必有 $\xi \in [a, b]$ 使

$$0 = F(\xi) = f(\xi) - \xi,$$

即 $f(\xi) = \xi$.

ξ 即为 f 在 $[a, b]$ 上的不动点.

1.4.3 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 连续, $f \circ f(x) = x$, $\forall x \in \mathbf{R}$, 则存在 $\xi \in \mathbf{R}$, 使 $f(\xi) = \xi$.

证法 1 因 f 连续, 故 $F(x) = f(x) - x$ 也连续. 由于

$$F(a) \cdot F(f(a)) = (f(a) - a)[f \circ f(a) - f(a)]$$
$$= -[f(a) - a]^2 \leqslant 0,$$

因此根据零值定理, 存在 $\xi \in [\min(a_1, f(a)), \max(a, f(a))] \subset \mathbf{R}$, 使得

$$0 = F(\xi) = f(\xi) - \xi,$$

即 $f(\xi) = \xi$.

证法 2 (反证) 假设对 $\forall x \in [a, b] \subset \mathbf{R}$, $f(x) \neq x$, 则由零值定理知对 $\forall x \in [a, b]$,

$$f(x) - x > 0 (\text{或 } f(x) - x < 0),$$

故对 $\forall x \in [a, b]$ 有

$$x = f\circ f(x) > f(x) > x$$
$$(\text{或 } x = f\circ f(x) < f(x) < x),$$

矛盾.

1.4.4 设 f 在 $[a,b]$ 上连续 $(a<b)$, $f(a)=f(b)$. 证明:在曲线 $y=f(x)$ $(x\in[a,b])$ 上一定能找到两点 $A=(\xi,f(\xi))$, $B=(\xi+\frac{b-a}{2},f(\xi+\frac{b-a}{2}))$, 使得 $\xi\in[a,\frac{a+b}{2}]$ 且 AB 平行 x 轴.

证 令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{b-a}{2})$. 由 f 在 $[a,b]$ 上连续知 F 在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上也连续,且

$$F(a)=f(a)-f(a+\frac{b-a}{2})$$
$$=f(a)-f(\frac{a+b}{2}),$$
$$F(\frac{a+b}{2})=f(\frac{a+b}{2})-f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2})$$
$$=f(\frac{a+b}{2})-f(b)$$
$$=f(\frac{a+b}{2})-f(a).$$
$$F(a)\cdot F(\frac{a+b}{2})=-[f(a)-f(\frac{a+b}{2})]^2$$
$$\leqslant 0,$$

根据零值定理,存在 $\xi\in[a,\frac{a+b}{2}]$ 使得

$$0=F(\xi)=f(\xi)-f(\xi+\frac{b-a}{2}),$$
$$f(\xi)=f(\xi+\frac{b-a}{2}),$$

即 AB 平行 x 轴,其中 $A=(\xi,f(\xi))$, $B=(\xi+\frac{b-a}{2},f(\xi+\frac{b-a}{2}))$.

1.4.5 设 f 在 $[0,2]$ 上连续, $f(0)=f(2)$. 证明: $\exists\xi\in[0,1]$, 使得 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

证 因为 f 在 $[0,2]$ 上连续,所以 $F(x)=f(x)-f(x+1)$ 在 $[0,1]$ 上连续,且

$$F(0)\cdot F(1)$$
$$=[f(0)-f(1)][f(1)-f(2)]$$
$$\xlongequal{f(0)=f(2)}[f(0)-f(1)][f(1)-f(0)]$$
$$\leqslant 0.$$

由连续函数的零值定理, $\exists\xi\in[0,1]$ 使得

$$0=F(\xi)=f(\xi)-f(\xi+1),$$

即 $f(\xi)=f(\xi+1)$.

1.4.6 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 连续, $f(0)=f(1)$. 证明: 对 $\forall n\in\mathbf{N}$, 必 $\exists\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$, 使得

$$f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n}).$$

证法1 因为 f 在 $[0,1]$ 上连续,所以 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$ 在 $[0,1-\frac{1}{n}]$ 上也连续. 并注意到

$$\sum_{i=0}^{n-1}F(\frac{i}{n})=\sum_{i=0}^{n-1}[f(\frac{i}{n})-f(\frac{i+1}{n})]$$
$$=f(0)-f(1)=0.$$

故必有 k 使 $F(\frac{k}{n})\cdot F(\frac{k+1}{n})\leqslant 0$. 对 $F(x)$ 在 $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ 上应用连续函数的零值定理,必有 $\xi\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]\subset[0,1-\frac{1}{n}]$ 使得

$$0=F(\xi)=f(\xi)-f(\xi+\frac{1}{n})$$

即 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$.

证法2 令 $F(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{n})$. (反证)假设 $\nexists\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$ 使 $f(\xi)=f(\xi+\frac{1}{n})$, 即 $\nexists\xi\in[0,1-\frac{1}{n}]$, 使 $F(\xi)=0$. 由零值定理, $F(x)$ 必恒大于零或恒小于零. 不妨设 $F(x)$ 恒大于零, 即恒有 $f(x)>f(x+\frac{1}{n})$. 于是,

$$f(0)>f(\frac{1}{n})>f(\frac{2}{n})>\cdots>f(\frac{n}{n})$$
$$=f(1)=f(0),$$

矛盾.

1.4.7 设 $S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$ 为单位球面, $f:S^2\to\mathbf{R}$ 为连续函数,试证:存在 $\xi\in S^2$, 使 $f(\xi)=f(-\xi)$.

证 设 $p\in S^2$, φ 为连接 p 和 $-p$ 的一条道路,使得 $\varphi(0)=p$, $\varphi(1)=-p$, $\varphi([0,1])$ 为 S^2 上的半大圆弧. 令

$$F(t)=f(\varphi(t))-f(-\varphi(t)),\ t\in[0,1],$$

则 F 为 $[0,1]$ 上的连续函数,且

$$F(0)\cdot F(1)$$
$$=[f(\varphi(0))-f(-\varphi(0))][f(\varphi(1))$$
$$-f(-\varphi(1))]$$
$$=[f(p)-f(-p)][f(-p)-f(p)]$$
$$=-[f(p)-f(-p)]^2\leqslant 0.$$

根据零值定理,存在 $t_*\in[0,1]$ 使

$$0=F(t_*)=f(\varphi(t_*))-f(-\varphi(t_*)).$$

令 $\xi=\varphi(t_*)\in S^2$, 上式就意味着

$$f(\xi)=f(-\xi).$$

1.4.8 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上连续有界,则对每一数 λ, 存在数列 $x_n\to+\infty$, 使得

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n+\lambda)-f(x_n)]=0.$$

证 不失一般性,不妨设 $\lambda>0$(若 $\lambda=0$, 则任取 $x_n\to+\infty$, 有 $\lim_{n\to+\infty}[f(x_n+\lambda)-f(x_n)]=$

$\lim\limits_{n\to+\infty}[f(x_n)-f(x_n)]=0$；若 $\lambda<0$，由 $f(x_n+\lambda)-f(x_n)=-[f((x_n+\lambda)+|\lambda|)-f(x_n+\lambda)]$ 可化为 $\lambda>0$ 的情形）. 先证命题：不存在自然数 n，使得

$|f(x+\lambda)-f(x)|\geqslant\dfrac{1}{n}, \forall x\geqslant n.$

（反证）假设上述命题不成立，则由零值定理，恒有 $f(x+\lambda)-f(x)\geqslant\dfrac{1}{n}$，或恒有 $f(x+\lambda)-f(x)\leqslant-\dfrac{1}{n}, \forall x\geqslant n$. 不妨设 $f(x+\lambda)-f(x)\geqslant\dfrac{1}{n}$，$\forall x\geqslant n$，则

$$\begin{aligned}f(n+m\lambda)&\geqslant f(n+(m-1)\lambda)+\frac{1}{n}\\&\geqslant\cdots\geqslant f(n)+\frac{m}{n}\longrightarrow+\infty\ (m\to+\infty).\end{aligned}$$

从而 f 在 $[a,+\infty)$ 上无界，这与题设 f 在 $[a,+\infty)$ 上有界相矛盾.

由上述命题，对 $\forall n\in\mathbf{N}$，$\exists x_n\geqslant n$ 使得

$$|f(x_n+\lambda)-f(x_n)|<\frac{1}{n},$$

因此，$x_n\to+\infty$ 且

$$\lim_{n\to+\infty}[f(x_n+\lambda)-f(x_n)]=0.$$

1.4.9 设函数 $f,g:[0,1]\to[0,1]$ 连续，且对任意 $x\in[0,1]$，有 $f(g(x))=g(f(x))$. 试证：

(1) 如果 f 单调减，则存在唯一的 $a\in[0,1]$，使 $f(a)=g(a)=a$；

(2) 如果 f 单调，则存在 $a\in[0,1]$，使 $f(a)=g(a)=a$；

(3) 如果 f 单调增，使 $f(a)=g(a)=a$ 成立的 $a\in[0,1]$ 唯一吗？

证 (1) 因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，故 $F(x)=f(x)-x$ 也在 $[0,1]$ 上连续. 又 $f(x)$ 单调减，所以对 $\forall x_1,x_2\in[0,1]$，$x_1<x_2$ 有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. 于是

$$\begin{aligned}&F(x_1)-F(x_2)\\&=f(x_1)-f(x_2)-x_1+x_2\\&\geqslant x_2-x_1>0,\end{aligned}$$

$F(x)$ 在 $[0,1]$ 上严格减，由

$$F(1)=f(1)-1\leqslant0,\quad F(0)=f(0)-0\geqslant0$$

和零值定理知 $F(x)=0$ 在 $[0,1]$ 中有解. 再由 $F(x)$ 的严格单调性，此解唯一，记为 a. 即 $\exists_1 a\in[0,1]$，使得 $f(a)=a$.

因为 $f(g(a))=g(f(a))=g(a)$，所以 $g(a)$ 为 $F(x)$ 的零点，从而 $g(a)=a$. 综合上述得 $g(a)=a=f(a)$.

(2) 由(1)的结论，只须对 f 单调增加以证明. 因为 $g:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ 连续，故 $g(x)-x$ 在 $[0,1]$ 上也连续，且 $g(1)-1\leqslant0$，$g(0)-0\geqslant0$. 由零值定理，$\exists x_0\in[0,1]$，使 $g(x_0)-x_0=0$，即 $g(x_0)=x_0$. 令

$$x_1=f(x_0),x_2=f(x_1),\cdots,x_{n+1}=f(x_n),\cdots.$$

用归纳法可以证明，对一切非负整数 n，均有 $g(x_n)=x_n$. 事实上，当 $n=0$ 时，有 $g(x_0)=x_0$. 假设 $n=k$ 时有 $g(x_k)=x_k$，则当 $n=k+1$ 时，由题设条件得

$$\begin{aligned}g(x_{k+1})&=g(f(x_k))=f(g(x_k))\\&=f(x_k)=x_{k+1}.\end{aligned}$$

设 $x_0\leqslant x_1$，则由 f 单调增，应用归纳法可得 $x_k=f(x_{k-1})\leqslant f(x_k)=x_{k+1}$，$k=0,1,2,\cdots$，即 x_k 为单调增有上界1的数列. 因此，$\{x_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=a$. 又 f,g 连续，故

$$a=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(a),$$
$$a=\lim_{n\to+\infty}x_n=\lim_{n\to+\infty}g(x_n)=g(a).$$

(3) 不一定唯一. 反例为 $f(x)=g(x)=x$. 显然，对 $\forall a\in[0,1]$，都有 $f(a)=g(a)=a$.

1.4.10 设函数 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，f 单调. 且有 $x_n\in[a,b]$ 使

$$g(x_n)=f(x_{n+1}),n\in\mathbf{N}.$$

证明：必有 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=g(\xi)$.

如果删去"f 单调"的条件，结论如何？

证法 1 （反证）假设对任意 $x\in[a,b]$，$f(x)\neq g(x)$，即 $F(x)=g(x)-f(x)\neq0$. 由于 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续，故 $F(x)$ 也在 $[a,b]$ 上连续. 根据零值定理，$F(x)$ 恒大于0或恒小于0，不妨设恒有 $F(x)>0$，于是

$$\begin{aligned}f(x_{n+1})-f(x_n)&=g(x_n)-f(x_n)\\&=F(x_n)>0,\end{aligned}$$
$$f(x_{n+1})>f(x_n),$$

即 $f(x_n)$ 为严格增数列. 而 f 是单调函数，所以 $x_n\in[a,b]$ 是有界单调数列，因此一定收敛. 记 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0\in[a,b]$，再由 f、g 的连续性得

$$\begin{aligned}g(x_0)&=\lim_{n\to+\infty}g(x_n)\\&=\lim_{n\to+\infty}f(x_{n+1})=f(x_0).\end{aligned}$$

这与假设对任何 $x\in[a,b]$，$f(x)\neq g(x)$ 矛盾.

证法 2 如果将条件"f 单调"删去，则结论仍成立. 仍用反证法. 同证法1，设 $F(x)=g(x)-f(x)$，仍设 $F(x)$ 恒大于0，于是由连续函数的最值定理，存在 $x_0\in[a,b]$，使得

$$m=\min_{x\in[a,b]}F(x)=F(x_0)>0.$$

由此得到

$$\begin{aligned}f(x_{n+1})-f(x_n)&=g(x_n)-f(x_n)\\&=F(x_n)\geqslant m,\end{aligned}$$
$$f(x_n)-f(x_{n-1})\geqslant m,$$
$$\cdots$$
$$f(x_2)-f(x_1)\geqslant m,$$

将上面各式相加就有

$f(x_{n+1})-f(x_1)\geqslant nm \longrightarrow +\infty\ (n\to+\infty)$,

所以,f在$[a,b]$上无界,这与闭区间$[a,b]$上的连续函数必有界(有最大最小值)相矛盾.

1.4.11 设$f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$是连续函数,存在数$a$及$c>0$,使对所有的自然数$n$有$|f^n(a)|\leqslant c$.求证$f$有不动点$x_0$,即$f(x_0)=x_0$.这里$f^n=\overbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}^{n}$表示$f$的$n$次复合.

证法1 (反证)假设f无不动点,即对任意$x\in\mathbf{R}$,$f(x)\neq x$,则对任意$x\in\mathbf{R}$,必有$f(x)>x$或$f(x)<x$.事实上,若存在$x_1,x_2\in\mathbf{R}$,使得$f(x_1)>x_1$,$f(x_2)<x_2$,则函数$F(x)=f(x)-x$在$\mathbf{R}$上连续,且$F(x_1)=f(x_1)-x_1<0$,$F(x_2)=f(x_2)-x_2>0$.由Bolzano-Cauchy零值定理知,$\exists x_0\in(\min(x_1,x_2),\max(x_1,x_2))$使$F(x_0)=0$,即$f(x_0)=x_0$,这与$f$无不动点的假设矛盾.

不妨设$f(x)>x\ (\forall x\in\mathbf{R})$.令$x_1=a=f^0(a)$,$x_{n+1}=f(x_n)$,$n=1,2,3,\cdots$,得一数列$x_{n+1}=f^n(a)$,$n=0,1,2,\cdots$.由条件$|f^n(a)|\leqslant c$知$\{x_{n+1}\}$为一有界数列.因为$f(x)>x$,故$x_{n+1}=f(x_n)>x_n(\forall n\in\mathbf{N})$.于是$\{x_n\}$为一严格增的有界数列,因而是收敛的.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$.再从$f$的连续性得

$$x_0=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

即x_0为f的不动点,这与假设f无不动点矛盾.

因此,f有不动点x_0.

证法2 情形1.设存在某个自然数n_0,使$f^{n_0}(a)=f^{n_0-1}(a)$.令$x_0=f^{n_0-1}(a)$(记$f^0(a)=a$),则由f^n的定义可知$f(x_0)=x_0$,即x_0就是不动点.

情形2.设对任何$n\in\mathbf{N}$都有$f^n(a)\neq f^{n-1}(a)$.不妨设$f(a)>a$.令

$$M=\{n\in\mathbf{N}:f^n(a)<f^{n-1}(a)\}$$

是自然数集$\mathbf{N}$的一个子集.

(1)当$M=\varnothing$时,对任意$n\in\mathbf{N}$,$f^n(a)>f^{n-1}(a)$.因此数列$\{x_n=f^{n-1}(a)\}$是单调增的;由于$f^n(a)\leqslant c$,所以数列$\{x_n\}$有界,因而收敛.记$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$,从$x_{n+1}=f^n(a)=f(f^{n-1}(a))=f(x_n)$以及$f$的连续性得

$$x_0=\lim_{n\to+\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0),$$

x_0即为f的不动点x_0.

(2)当$M\neq\varnothing$时,令$k=\min\limits_{n\in M}n$,则$k>1$且$f^{k-1}(a)>f^{k-2}(a)$,$f^k(a)<f^{k-1}(a)$.记

$$x_1=f^{k-2}(a),\quad x_2=f^{k-1}(a),$$

$$F(x)=f(x)-x,$$

则

$$\begin{aligned}F(x_1)&=f(x_1)-x_1\\&=f(f^{k-2}(a))-f^{k-2}(a)\\&=f^{k-1}(a)-f^{k-2}(a)>0,\\F(x_2)&=f(x_2)-x_2\\&=f(f^{k-1}(a))-f^{k-1}(a)\\&=f^k(a)-f^{k-1}(a)<0.\end{aligned}$$

$F(x)$也是$\mathbf{R}$上的连续函数,由Bolzano-Cauchy零值定理知$F(x)$在$\mathbf{R}$上有零点x_0,即$F(x_0)=0$.于是

$$f(x_0)-x_0=0,f(x_0)=x_0,$$

即f有不动点x_0.

证法3 (反证)假设f无不动点,即对$\forall x\in\mathbf{R}$,$f(x)\neq x$.由零值定理,不妨设$f(x)-x>0(\forall x\in\mathbf{R})$,于是,$f(x)-x$在$[-c,c]$上达最小值$m>0$.又因$|f^n(x)|\leqslant c$,$\forall n=1,2,\cdots$,所以

$$\begin{aligned}&f^n(a)-f^{(n-1)}(a)\\&=f(f^{n-1}(a))-f^{n-1}(a)\geqslant m,\\&f^{n-1}(a)-f^{n-2}(a)\geqslant m,\\&\cdots\\&f^2(a)-f(a)\geqslant m.\end{aligned}$$

将以上各式相加,并当$n>\dfrac{2c}{m}+1$时有

$$2c\geqslant f^{(n)}(a)-f(a)\geqslant(n-1)m>2c,$$

矛盾.

1.4.12 (1)在半径为1的圆内有1997个点$P_1,P_2,\cdots,P_{1997}$.求证:在同一平面上一定存在这样一点P,它到这1997个点的距离之和等于2000.

(2)在单位球面$S^2=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=1\}$上有1997个点$P_1,P_2,\cdots,P_{1997}$.求证:此球面$S^2$上必有一点$P_0$,使

$$\sum_{i=1}^{1997}\widehat{P_0P_i}=1997\times\frac{\pi}{2}$$

(其中$\widehat{P_0P_i}$表示P_0到P_i的球面距离,即过P_0,P_i的大圆上,以P_0,P_i为端点的劣弧之长).

证 (1)不妨设该圆的圆心在原点(0,0),以$f(x)$记点$(x,0)$到这1997个点的距离之和,则有

$$f(0)\leqslant\underbrace{1+\cdots+1}_{1997个}=1997<2000,$$

$$f(11)\geqslant10\times1997=19970>2000.$$

又因为

$$\begin{aligned}f(x)&=\sqrt{\sum_{i=1}^{1997}[(x-x_i)^2+(0-y_i)]^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^{1997}[(x-x_i)^2+y_i^2]}\end{aligned}$$

是$\mathbf{R}$上的连续函数,其中$P_i=(x_i,y_i)$.根据连续函

数的介值定理，$\exists \xi \in (0,11)$，使

$$f(\xi)-\sqrt{\sum_{i=1}^{1997}[(\xi-x_i)^2+y_i^2]}=2000,$$

即点 $P=(\xi,0)$ 到已知的 1997 个点的距离和为 2000.

(2) 设 $F(P)=\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997}\overset{\frown}{PP_i}$，显然，$F$ 为 P 的连续函数.

在球面上任取一点 A，记 B 为 A 的对径点，即 $B=-A$，于是，$\overset{\frown}{AP_i}+\overset{\frown}{P_iB}=\pi$.

$$\begin{aligned}&F(A)+F(B)\\&=\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997}\overset{\frown}{AP_i}+\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997}\overset{\frown}{BP_i}=\pi,\end{aligned}$$

因此必有

$$F(A)\leqslant\frac{\pi}{2},F(B)\geqslant\frac{\pi}{2}$$

或者 $\quad F(A)\geqslant\frac{\pi}{2},F(B)\leqslant\frac{\pi}{2}$.

由连续函数的介值定理，在过 A 和 $B=-A$ 的大圆弧上必有一点 P_0，使得

$$F(P_0)=\frac{1}{1997}\sum_{i=1}^{1997}\overset{\frown}{P_0P_i}=\frac{\pi}{2},$$

即 $\quad \sum_{i=1}^{1997}\overset{\frown}{P_0P_i}=1997\times\frac{\pi}{2}$.

1.4.13 设 $x_1,\cdots,x_n\in[0,1]$，求证：存在 $t_0\in[0,1]$，使得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|t_0-x_i|=\frac{1}{2}$.

证 令 $f(t)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|t-x_i|$，显然，$f(t)$ 为 $[0,1]$ 上的连续函数，且

$$\begin{aligned}f(0)+f(1)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i|+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|1-x_i|\\&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i)\\&=1,\end{aligned}$$

则 $f(0)$ 与 $f(1)$ 中必有一个大于等于 $\frac{1}{2}$，不妨设 $f(0)\geqslant\frac{1}{2}$，而

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{2}-x_i\right|\leqslant\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

(或 $f(1)=1-f(0)\geqslant\frac{1}{2}$). 于是，根据连续函数的介值定理，存在 $t_0\in[0,\frac{1}{2}]$（或 $t_0\in[\frac{1}{2},1]$）使得 $f(t_0)=\frac{1}{2}$.

1.4.14 设 f 在区间 I 上连续，且 $f:I\to f(I)$ 为一一映射(因而有反函数)，则 f 是严格单调的.

证法 1 (反证) 假设 f 不是严格单调的. 由于 $f:I\to f(I)$ 为一一映射，所以必存在 $x_1,x_2,x_3\in I$，$x_1<x_2<x_3$，而 $f(x_1)<f(x_2)$，$f(x_2)>f(x_3)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$，$f(x_2)<f(x_3)$). 设 r 满足

$$\max\{f(x_1),f(x_3)\}<r<f(x_2).$$

因为 f 在区间 I 上连续，根据介值定理，存在 $\xi_1\in(x_1,x_2)$，$\xi_2\in(x_2,x_3)$，使得

$$f(\xi_1)=r=f(\xi_2),\xi_1<\xi_2.$$

这与 f 为一一映射相矛盾. 因此 f 是严格单调的.

证法 2 (反证) 假设 f 不严格单调，则 f 不是严格单调减的，则存在 $x_1,y_1\in I$ 使得 $x_1<y_1$，但

$$f(x_1)-f(y_1)<0,$$

而 f 也不是严格增的，则存在 $x_2,y_2\in I$ 使 $x_2<y_2$，但

$$f(x_2)-f(y_2)>0.$$

令

$$\begin{aligned}\varphi(t)=&f((1-t)x_1+tx_2)\\&-f((1-t)y_1+ty_2),0\leqslant t\leqslant 1.\end{aligned}$$

显然，φ 为 t 的连续函数且

$$\varphi(0)=f(x_1)-f(y_1)<0,$$
$$\varphi(1)=f(x_2)-f(y_2)>0,$$

$\varphi(0)\varphi(1)<0$，根据零值定理，存在 $t^*\in(0,1)$，使得

$$\begin{aligned}0=\varphi(t^*)=&f((1-t^*)x_1+t^*x_2)\\&-f((1-t^*)y_1+t^*y_2),\end{aligned}$$

即 $f((1-t^*)x_1+t^*x_2)=f((1-t^*)y_1+t^*y_2)$，而

$$(1-t^*)x_1+t^*x_2<(1-t^*)y_1+t^*y_2.$$

这与题设 f 为一一映射相矛盾. 因而 f 是严格单调的.

1.4.15 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在有理点上取值为无理数，在无理点上取值为有理数，试证：f 不是连续函数.

证法 1 设 $R(f)$ 表示函数 f 的值域. 由 f 的定义知，$R(f)$ 中既有有理数，又有无理数，所以 f 不是常值函数.

其次，设 $\mathbf{Q}=\{r_n\mid n\in\mathbf{N}\}$ 是有理数集，则 f 的值域

$$\begin{aligned}R(f)&=\{f(r_n)\mid r_n\in\mathbf{Q}\}\cup\{f(x)\mid x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\}\\&\subset\{f(r_n)\mid r_n\in\mathbf{Q}\}\cup\mathbf{Q}\end{aligned}$$

为至多可数集.

(反证) 假设 f 为连续函数，根据 Bolzano-Cauchy 介值定理，非常值函数 f 的值域 $R(f)$ 必包含闭区间，而闭区间点集是不可数的，因而 $R(f)$ 也为不可数集，这与上面证得 $R(f)$ 是至多可数集相矛盾. 故 f

不为连续函数.

证法 2 （反证）假设 f 为连续函数，记 $\mathbf{Q}=\{r_1, r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，取 $x_1\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，则 $x_1\neq r_1$，存在含 x_1 的闭区间 I，使 $r_1\notin I$. 再取 $x_1^*\in \mathring{I}\cap\mathbf{Q}$，从而 $f(x_1^*)\neq r_1$. 由于 f 连续，故存在闭区间 $[a_1,b_1]\subset \mathring{I}$，使 $r_1\notin[a_1,b_1]$ 和 $r_1\notin f([a_1,b_1])$. 同理，存在闭区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使 $r_2\notin[a_2,b_2]$ 和 $r_2\notin f([a_2,b_2])$，且 $b_2-a_2<\frac{1}{2}(b_1-a_2)$. 依次类推得到闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

使 $r_n\notin[a_n,b_n]$，$r_n\notin f([a_n,b_n])$，且 $b_n-a_n<\frac{1}{2}(b_{n-1}-a_{n-1})$. 根据闭区间套原理，$\exists_1 x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 易见，$x_0\neq r_n$，$n=1,2,\cdots$，即 $x_0\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$，从而 $f(x_0)\in\mathbf{Q}$. 另一方面，由选法，$f(x_0)\neq r_n$，$n=1,2,\cdots$，$f(x_0)\notin\mathbf{Q}$，矛盾.

注 虽然所讨论的函数必不是连续函数，但它却可以是几乎处处连续的（见 1.12.3(7)）. 例如，令

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{p}, & x=\frac{q}{p},p,q\in\mathbf{Z},p>0,p,q\text{ 无公因子},\\ \pi, & x=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ 0, & x\text{ 为无理数}.\end{cases}$$

容易验证 f 在任意无理点处是连续的.

1.4.16 设 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在有限，则 f 在 $\mathbf{R}$ 上必达到最大值或最小值.

如果将条件“连续”改为“可导”，则必存在 $\xi\in\mathbf{R}$，使 $f'(\xi)=0$.

证 设 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$，如果 $f(x)\equiv c$，则 f 在任何一点 $x\in\mathbf{R}$ 达到最大值和最小值；如果 $f(x)\not\equiv c$，则必存在 $x_*\in\mathbf{R}$，使 $f(x_*)\neq c$. 不妨设 $f(x_*)>c$，令 $\varepsilon_0=f(x_*)-c>0$，由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=c$ 知，存在 $\Delta>|x_*|\geqslant0$，当 $|x|>\Delta$ 时有

$$f(x)<c+\varepsilon_0$$
$$=c+(f(x_*)-c)=f(x_*).$$

另一方面，由于 f 在 $[-\Delta,\Delta]$ 上连续，根据最值定理，存在 $\xi\in[-\Delta,\Delta]$ 使 $f(\xi)=\max\limits_{x\in[-\Delta,\Delta]}f(x)$，此时，必有 $f(\xi)\geqslant f(x_*)$，所以对任何 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$f(x)\leqslant f(\xi),$$

即 $f(\xi)$ 为 f 在 $\mathbf{R}$ 上的最大值.

如果 f 可导，由 ξ 为极大值点，根据 Fermat 定理，

$$f'(\xi)=0.$$

1.4.17 设 f 在 $[a,b)$ 上连续，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，且对任意 $(\alpha,\beta)\subset[a,b)$，$f(x)$ 在 (α,β) 上达不到最小值. 试证：f 在 $[a,b)$ 上是严格增函数.

证法 1 （反证）假设 f 在 $[a,b)$ 上不是严格增函数. 则存在 $x_1,x_2\in[a,b)$，$x_1<x_2$，但 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$. 又因 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=+\infty$，则存在 $x_3\in(x_2,b)$，使 $f(x_3)\geqslant f(x_1)$. f 在 $[x_1,x_3]$ 上连续，根据闭区间上的连续函数一定达到最小值，但 $f(x_3)$，$f(x_1)$ 不是最小值，因此，最小值在 (x_1,x_3) 内达到，这与题设 f 在任何 $(\alpha,\beta)\subset[a,b)$ 上达不到最小值的条件矛盾. 所以 f 在 $[a,b)$ 上是严格增函数.

证法 2 任取 $x_1,x_2\in[a,b)$，$x_1<x_2$，由于 $\lim\limits_{x\to b}f(x)=+\infty$，故存在 $b>x_3>x_2>x_1$，使 $f(x_3)>\max\{f(x_1),f(x_2)\}$，$[x_1,x_3]\subset[a,b)$，故 f 在 $[x_1,x_3]$ 上的最小值是 $f(x_1)$ 或 $f(x_3)$，但 $f(x_3)>f(x_1)$. 因此，$f(x_1)$ 必为 f 在 $[x_1,x_3]$ 上的最小值，且 $x_2\in(x_1,x_3)$，$f(x_2)$ 不能为最小，于是得 $f(x_1)<f(x_2)$. 由 x_1,x_2 的任取性，f 为严格增函数.

1.4.18 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，且在任何 $[\alpha,\beta]\subset[a,b]$ 上至少有两个不同的最大值点，试证 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数.

证 （反证）假设 f 不为常值函数，则

$$m=\min\{f(x)\mid x\in[a,b]\}$$
$$<\max\{f(x)\mid x\in[a,b]\}=M.$$

令 $f(x_0)=m$，$x_0\in[a,b]$，f 在 $[a,x_0]$ 和 $[x_0,b]$ 中至少有一个达最大值 M，不妨设在 $[x_0,b]$ 中达最大值 M. 命

$$\xi=\inf\{x\in[x_0,b]\mid f(x)=M\}.$$

因 $f(x_0)=m<M$，f 连续，故存在 $\delta>0$，使在 $[x_0,x_0+\delta]$ 中，$f(x)<M$，$x_0<x_0+\delta\leqslant\xi$. 由 f 连续，

$$f(\xi)=\lim_{n\to+\infty}f(x_n)=\lim_{n\to+\infty}M=M,$$

其中 $x_n\in\{x\in[x_0,b]\mid f(x)=M\}$，$x_n$ 单调减趋于 ξ，易见，f 在 $[x_0,\xi]$ 中仅在 ξ 达最大值 M，这与题设 f 在 $[x_0,\xi]$ 中至少有两个不同的最大值点相矛盾.

1.4.19 设函数 f 在区间 I 上连续，且有唯一的极值点 $x_0\in\mathring{I}$（I 的内点集）. 若 $f(x_0)$ 为极大(小)值，则 $f(x_0)$ 为最大(小)值.

证 （反证）假设 $f(x_0)$ 不为最大值，则存在 x_1 使 $f(x_1)>f(x_0)$，不妨设 $x_0<x_1$.

因为 $f(x_0)$ 为极大值点，故存在 $0<\delta<x_1-x_0$，使得在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内 $f(x)\leqslant f(x_0)$. 于是，根据最值定理，连续函数必在 (x_0,x_1) 中某点达到最小值，当然也是极小值，这与 f 在 I 上有唯一的极值点

x_0 相矛盾．因此，$f(x_0)$ 必为 f 在 I 上的最大值．

1.4.20　构造一个函数 $F(x,y)$ 在整个平面 $\mathbf{R}^2$ 上有唯一的驻点，且为极大值点，但非最大值点．

解　令

$$F(x,y)=2(\operatorname{arctg}x)^3-2(\operatorname{arctg}x)^2+\frac{1}{8}\operatorname{arctg}x\cdot\operatorname{arctg}y-\frac{1}{64}(\operatorname{arctg}y)^2,$$

则解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{1}{1+x^2}[6(\operatorname{arctg}x)^2-4\operatorname{arctg}x+\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}y]=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=\dfrac{1}{1+y^2}[\dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{32}\operatorname{arctg}y]=0,\end{cases}$$

得 $\operatorname{arctg}y=0$（或 $\frac{7}{3}>\frac{\pi}{2}$（不合）），$\operatorname{arctg}x=0$（或 $\frac{7}{12}$（但相应的 y 不合）），即 $F(x,y)$ 有唯一的驻点 $(0,0)$．由于

$$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}(0,0)=-4<0,$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{1}{8},$$

$$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}(0,0)=-\frac{1}{32},$$

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2F}{\partial x^2}(0,0) & \dfrac{\partial^2F}{\partial x\partial y}(0,0)\\ \dfrac{\partial^2F}{\partial y\partial x}(0,0) & \dfrac{\partial^2F}{\partial y^2}(0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & \dfrac{1}{8}\\ \dfrac{1}{8} & -\dfrac{1}{32}\end{vmatrix}=\frac{1}{8}-\frac{1}{64}>0,$$

所以，$(0,0)$ 为 $F(x,y)$ 的极大值点．但是

$$F(\operatorname{tg}1,\operatorname{tg}1)=2-2+\frac{1}{8}-\frac{1}{64}=\frac{7}{64}>0=F(0,0).$$

即 $F(0,0)$ 非最大值．

§1.5　$\mathbf{R}^n$ 中的拓扑

从极限理论和实数理论导出了闭区间 $[a,b]$ 上连续函数的零值定理、介值定理、最值定理及一致连续性的定理．要将这些定理推广到 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中，必须介绍 $\mathbf{R}^n$ 中拓扑的确切定义，随之而来的还有开集、闭集、聚点、收敛、紧致性、连通性等重要概念．本节证明了 $\mathbf{R}^n$ 中子集 A 的紧致、可数紧致、列紧、序列紧致都等价于 A 为 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭集；连通集上的连续函数有零值定理、介值定理；紧致集上的连续函数有最值定理．此外还证明了区域的三种等价定义．

非空集合 X 的一个子集族

$$\tau=\{U\mid U\text{ 具有性质 }*\}$$

如果满足：

（1°）$X,\varnothing\in\tau$；

（2°）若 $U_1,U_2\in\tau$，则 $U_1\cap U_2\in\tau$；

（3°）$U_\alpha\in\tau,\alpha\in\Gamma$，则 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}U_\alpha\in\tau$．

则称 τ 为 X 上的一个拓扑，(X,τ) 称为 X 上的一个**拓扑空间**．

$U\in\tau$ 称为 (X,τ) 中的**开集**．如果 $F^C=X-F\in\tau$，则称 F 为 (X,τ) 中的**闭集**．由归纳和(2)知，有限个开集的交为开集，任意多个开集的并为开集．

设 $A\subset X,a\in X$（不必 $\in A$），如果对 a 的任何**开邻域**（含 a 的开集）U 必有

$$U\cap(A-\{a\})\neq\varnothing,$$

则称 a 为 A 的**聚点**，记 A 的聚点的全体为 A'，称为 A 的**导集**．$\overline{A}=A\cup A'$ 称为 A 的**闭包**．

设 a_n 为 (X,τ) 中的点列．如果 $\exists a\in X$，对 a 的任何开邻域 U，$\exists N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $a_n\in U$，则称 a_n 收敛于 a，记作 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$．

设 X 为非空集合，

$$\rho:X\times X\longrightarrow\mathbf{R}$$

$$(x,y)\longrightarrow\rho(x,y)$$

为映射，如果满足：

（1°）$\rho(x,y)\geqslant0$，且 $\rho(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$（正定性）；

（2°）$\rho(x,y)=\rho(y,x)$（对称性）；

（3°）$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$（三角（点）不等式）．

则称 ρ 为 X 上的一个**度量（距离）**，(X,ρ) 称为 X 上的一个**度量空间**，$\rho(x,y)$ 称为**点 x 和 y 的距离**．

特别是 $(\mathbf{R}^n,\rho_0)$，

$$\rho_0:\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},$$

$$\rho_0(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^n(x_i-y_i)^2\Big]^{\frac{1}{2}},$$

其中 $x=(x_1,\cdots,x_n),y=(y_1,\cdots,y_n)$．

1.5.1　度量空间 (X,ρ) 上的子集族

$$\tau_\rho=\{U\mid\forall a\in U,\exists\delta>0,\text{使 }B_a(\delta)\subset U\}$$

（其中 $B_a(\delta)=\{x\in X\mid\rho(x,a)<\delta\}$ 为以 a 为中心 δ 为半径的开球）为 X 上的一个拓扑，称为**由 ρ 诱导的拓扑**．

证　现证 τ_ρ 满足拓扑的三个条件．

（1°）$\forall a\in X$，显然 $B_a(1)\subset X$，故 $X\in\tau_\rho$．

因为 $\varnothing$ 中不含任何元素，自然满足 τ_ρ 的性质，故 $\varnothing\in\tau_\rho$．

(2°) 设 $U_1, U_2 \in \tau_\rho$，如果 $U_1 \cap U_2 = \emptyset$，则显然有 $U_1 \cap U_2 = \emptyset \in \tau_\rho$；如果 $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$，则 $\forall a \in U_1 \cap U_2$，$\exists \delta_1, \delta_2 > 0$，使 $Ba(\delta_i) \subset U_i$，$i = 1,2$. 于是 $Ba(\delta) \subset U_1 \cap U_2$，其中 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. 因此，$U_1 \cap U_2 \in \tau_\rho$.

(3°) 设 $U_\alpha \in \tau_\rho, \alpha \in \Gamma$. 如果 $a \in \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$，则 $a \in U_{\alpha_0}, \alpha_0 \in \Gamma$. 于是，$\exists \delta_0$ 使 $Ba(\delta_0) \subset U_{\alpha_0} \subset \bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha$. 因此，$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \tau_\rho$.

1.5.2 设 (X,τ) 为拓扑空间，$Y \subset X$，记

$$\tau_Y = \{U \cap Y \mid U \in \tau\}$$

则 τ_Y 为 Y 上的一个拓扑，称为由 τ **诱导的拓扑**，(Y, τ_Y) 称为 (X,τ) 的**诱导拓扑空间或子拓扑空间**.

证 验证 τ_Y 为拓扑.

(1°) $Y = X \cap Y \in \tau_Y$，$\emptyset = \emptyset \cap Y \in \tau_Y$.

(2°) 若 $H_i = U_i \cap Y \in \tau_Y$，$U_i \in \tau$，$i = 1,2$. 则 $U_1 \cap U_2 \in \tau$，故

$$H_1 \cap H_2 = (U_1 \cap Y) \cap (U_2 \cap Y) = (U_1 \cap U_2) \cap Y \in \tau_Y.$$

(3°) 若 $H_\alpha = U_\alpha \cap Y \in \tau_Y$，$U_\alpha \in \tau$，$\alpha \in \Gamma$，则 $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha \in \tau$，故

$$\bigcup_{\alpha \in \Gamma} H_\alpha = \bigcup_{\alpha \in \Gamma}(U_\alpha \cap Y) = (\bigcup_{\alpha \in \Gamma} U_\alpha) \cap Y \in \tau_Y.$$

1.5.3 设 (X,ρ) 为度量空间，$Y \subset X$，记 $\rho_Y = \rho|_Y$，(Y, ρ_Y) 为 (X,ρ) 的子度量空间，τ_ρ 为由 ρ 诱导的 (X,ρ) 上的拓扑（见题 1.5.1）. 证明 $\tau_{\rho_Y} = (\tau_\rho)_Y$.（读者自行证明）

1.5.4 设 (X,ρ) 为度量空间，$A \subset X$. 则 a 为 A 的聚点，即 $a \in A' \Leftrightarrow$ 对 a 的任何开邻域 U，$U \cap A$ 为无限集，即 U 含 A 中无限个点.

证 ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 设 $a \in A'$，则对 a 的任何开邻域 U，$\exists n_1 \in \mathbf{N}$，使 $Ba(\frac{1}{n}) \subset U$. 则有 $a_1 \in Ba(\frac{1}{n_1}) \cap (A - \{a\})$. 取 $n_2 > n_1$，使 $\frac{1}{n_2} < \rho(a_1, a)$，则对 a 开邻域 $Ba(\frac{1}{n_2})$，有 $a_2 \in Ba(\frac{1}{n_2}) \cap (A - \{a\})$，显然 $a_2 \neq a_1$. 依次类推得到点列 a_k，使 $a_k \in B_a(\frac{1}{n_k}) \cap (A - \{a\})$，且 a_k 为异于 $a_1, \cdots, a_{k-1}$ 的点. 于是，U 含 A 中无限个点.

1.5.5 设 (X,τ) 为拓扑空间，则闭集族

$$\mathscr{F} = \{F \mid F \text{ 为 } (X,\tau) \text{ 中的闭集}\}$$

具有性质：

(1°) $X, \emptyset \in \mathscr{F}$；

(2°) 若 $F_1, F_2 \in \mathscr{F}$，则 $F_1 \cup F_2 \in \mathscr{F}$；

(3°) 若 $F_\alpha \in \mathscr{F}, \alpha \in \Gamma$，则 $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} F_\alpha \in \mathscr{F}$.

由 (2) 和归纳法有：若 $F_1, \cdots, F_n \in \mathscr{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{F}$.

证 根据闭集的定义，$F = U^C = X - U$，$U \in \tau$，拓扑的三个条件以及 de Morgan 公式

$$(\bigcap_{\beta \in B} F_\beta)^C = \bigcup_{\beta \in B} F_\beta^C,$$
$$(\bigcup_{\beta \in B} F_\beta)^C = \bigcap_{\beta \in B} F_\beta^C,$$

立即推出(1°)、(2°)、(3°).

1.5.6 设 (X,τ) 为拓扑空间，$A \subset X$，$a \in A$. 如果存在 a 的开邻域 U，使得 $a \in U \subset A$，则称 a 为 A 的**内点**. 记 A 的内点的全体为 $\mathring{A}$. 证明：$\mathring{A}$ 为含在 A 中的最大开集. 从而 $\mathring{A} = \bigcup_{U \subset A} U$，且有 $A \in \tau \Leftrightarrow \mathring{A} = A$.

证 $\forall a \in \mathring{A}$，根据内点定义，存在 a 的开邻域 U_a，使 $a \in U_a \subset A$，显然 $U_a \subset A$，且 $\mathring{A} = \bigcup_{a \in \mathring{A}} U_a \in \tau$，即 $\mathring{A}$ 为开集.

另一方面，若开集 $U \subset A$，对 $\forall a \in U$，取 $U_a = U$，于是 $a \in \mathring{A}$，$U \subset \mathring{A}$. 这就证明了 $\mathring{A}$ 为含在 A 中的最大开集.

1.5.7 设 (X,τ) 为拓扑空间，$A \subset X$，则 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小闭集. 从而 $\overline{A} = \bigcap_{A \subset F} F$，$F \in \mathscr{F}$ 为闭集.

证 $\forall a \in (\overline{A})^C = X - \overline{A}$，则 $a \,\overline{\in}\, \overline{A} = A \cup A'$，即 $a \,\overline{\in}\, A$ 和 $a \,\overline{\in}\, A'$，所以存在 a 的开邻域 U_a，使得 $U_a \cap A = \emptyset$，更一步有 $U_a \cap \overline{A} = \emptyset$. 这意味着 $U_a \subset (\overline{A})^C$，故 $(\overline{A})^C$ 为开集，因而 $\overline{A}$ 为闭集.

若闭集 $F \supset A$. 如果 $a \in A'$，则由聚点的定义，必有 $a \in F'$，$A' \subset F'$. 由此，根据下面的题 1.5.8，闭集 $F = \overline{F} = F \cup F' \supset A \cup A' = \overline{A}$.

综合上述知 $\overline{A}$ 为包含 A 的最小闭集. 再由题 1.5.5(3°) 即有 $\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathscr{F}}} F$.

1.5.8 设 (X,τ) 为拓扑空间，则

(1) A 为闭集.

$\Leftrightarrow$(2) $A' \subset A$.

$\Leftrightarrow$(3) $\overline{A} = A$.

$\Rightarrow$(4) $\forall a_n \in A$，$\lim_{n \to +\infty} a_n = a$，则 $a \in A$.

特别当 (X, τ_ρ) 为 (X,ρ) 的诱导拓扑空间时，(1)、(2)、(3)、(4) 彼此等价.

证 (1)$\Rightarrow$(2) 设 A 为闭集，则 A^C 为开集，对 $\forall a \in A^C$（a 的开邻域），有 $A^C \cap (A - \{a\}) = \emptyset$，所以 $a \,\overline{\in}\, A'$，从而 $A' \subset A$.

(2) $\Leftrightarrow$(3) 显然.

(1) $\Leftarrow$(3) 由题 1.5.7，$A = \overline{A}$ 为闭集.

(1) $\Rightarrow$(4) 因 A 为闭集，故 A^C 为开集.（反证）

假设 $a \overline{\in} A$，则 $a \in A^C$，即 A^C 为 a 的一个开邻域. 因为 $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$，所以存在 $N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，有 $a_n \in A^C$，即 $a_n \overline{\in} A$. 这与 $a_n \in A$ 矛盾.

对于 (X, τ_ρ)，我们只须证：

(2) $\Leftarrow$ (4) $\forall a \in A'$，由聚点定义，在度量空间 (X, ρ) 中，$\exists a_n \in A$，使得 $\lim_{n \to +\infty} a_n = a$，再由(4)，必有 $a \in A$，所以，$A' \subset A$.

1.5.9 在直线上的通常的拓扑空间 (X, τ_{ρ_0}) 中，U 为开集 $\Leftrightarrow U = \bigcup_{i \in \Gamma} (\alpha_i, \beta_i)$，其中 Γ 为至多可数集，(α_i, β_i) 为两两不相交的开区间(称为开集 U 的构成区间).

证 ($\Leftarrow$) 由 τ_{ρ_0} 的定义.

($\Rightarrow$) 设 U 为 $\mathbf{R}^1$ 的开集，对 $\forall a \in U$，$\exists \varepsilon > 0$，使

$$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = B_a(\varepsilon) \subset U.$$

令

$$\alpha_a = \inf\{x \mid (x, a) \subset U\},$$

$$\beta_a = \sup\{x \mid (a, x) \subset U\},$$

根据确界的定义，$\alpha_a, \beta_a \overline{\in} U$，且 $(\alpha_a, \beta_a) \cap (\alpha_b, \beta_b) \neq \emptyset$，必有 $(\alpha_a, \beta_a) = (\alpha_b, \beta_b)$. 于是，得到若干两两不相交的 U 的构成区间.

在每个构成区间中取一个有理点，易见，不同的构成区间对应不同的有理点，所以这种构成区间至多可数(有限或可数 —— 与自然数可一一对应). 所以

$$U = \bigcup_{i \in \Gamma} (\alpha_i, \beta_i),$$

其中 Γ 为至多可数集.

1.5.10 拓扑空间 (X, τ) 为

(1) **紧致空间**：X 的每个开覆盖必有有限的子覆盖.

(2) **可数紧致空间**：X 中任何可数开覆盖(覆盖中元素至多可数个)必有有限子覆盖.

(3) **列紧空间**：X 中任何无限子集 A 必有聚点 $a \in X$.

(4) **序列紧致空间**：X 中每个点列 a_n 必有收敛于 $a \in X$ 的子序列.

(5) 递降非空闭集序列 $\{F_i\}$ 必有交，即 $\exists x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} F_i \neq \emptyset\right)$.

试证明

$$\begin{array}{c}(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \\ \Updownarrow \\ (5) \Leftarrow (4)\end{array}$$

证 (1) $\Rightarrow$ (2) 显然.

(2) $\Rightarrow$ (3) 设 $A \subset X$ 为任一无限子集. 取 A 的可数子集 A_1，下证 A_1 必有聚点($\in X$)，当然，它也是 A 的聚点. (反证)假设 A_1 无聚点，即 $A_1' = \emptyset \subset A_1$，从而 A_1 为闭集. 对于 $\forall x \in A_1$，由于 x 不是 A_1 的聚点，故存在 x 的开邻域 U_x，使

$$U_x \cap (A_1 - \{x\}) = \emptyset,$$

即

$$U_x \cap A_1 = \{x\}.$$

明显地，$\{U_x \mid x \in A_1\} \cup A_1^C$ 为 X 的可数开覆盖. 由 (X, τ) 为可数紧致空间，故必存在有限子覆盖 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}, A_1^C\}$. 因 A_1^C 中无 A_1 的点，故 $\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$ 覆盖 A_1，从而

$$A_1 = \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}\right) \cap A_1$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} (U_{x_i} \cap A_1) = \{x_1, \cdots, x_n\}$$

为有限集，这与 A_1 为可数集相矛盾.

(2) $\Rightarrow$ (5) (反证)假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$，则由 de Morgan 公式，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n^C = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right)^C = \emptyset^C = X,$$

因此，$\{F_n^C \mid n \in N\}$ 为 X 的可数开覆盖. 由(2)，存在有限子覆盖 $\{F_{n_1}^C, \cdots, F_{n_k}^C\}$，于是，由

$$F_{n_1}^C \cup \cdots \cup F_{n_k}^C = X$$

推出

$$\emptyset \neq F_{\max\{n_1, \cdots, n_k\}} = F_{n_1} \cap \cdots \cap F_{n_k}$$

$$= (F_{n_1}^C \cup \cdots \cup F_{n_k}^C)^C = X^C = \emptyset$$

矛盾. 所以 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

(2) $\Leftarrow$ (5) 设 $\mathscr{I} = \{U_n \mid n \in \mathbf{N}\}$ 为 X 的可数开覆盖. 我们断定 $\mathscr{I}$ 必有有限子覆盖. (反证)假设 $\mathscr{I}$ 无有限子覆盖. 令

$$F_n = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right\}^C, n \in \mathbf{N},$$

则 $F_n \neq \emptyset$ (由 $\bigcup_{i=1}^{n} U_i \neq X$)，但

$$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$$

由(5)

$$\emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)^C$$

$$= \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right)\right)^C = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n\right)^C = X^C = \emptyset$$

矛盾. 从而 $\mathscr{I}$ 有有限子覆盖. (X, τ) 是可数紧致的.

(4) $\Rightarrow$ (5) $\Leftrightarrow$ (2) 设 $\{F_n\}$ 为 X 中的任一递降非空闭集序列，取 $x_n \in F_n$，$n \in \mathbf{N}$. 因为 X 是序列紧致的，故存在 x_n 的子点列 x_{n_i} 收敛于 $x \in X$，对 $\forall i \in \mathbf{N}$，由于 $x_{n_i}, x_{n_{i+1}}, \cdots \in F_{n_i}$ 以及 F_{n_i} 为闭集，所以 $x \in F_{n_i} \subset F_i$，$i \in \mathbf{N}$，从而 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$. 这就证明了 $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \emptyset$.

1.5.11　对于度量空间(X,ρ)诱导的拓扑空间(X,τ_ρ)有

$$\begin{array}{ccc}(1)\Rightarrow & (2) & \Leftrightarrow (3)\\ & \Updownarrow \quad \swarrow & \Updownarrow\\ & (5) & \Leftrightarrow (4)\end{array}$$

证　(5)⇒(4)　设x_n为X中任一点列，记$E_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$，$F_n=\overline{E}_n$，于是，$F_n$为$X$中递降的非空闭集序列. 根据(5)有$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$. 在$x$处取递降开球序列

$$B_x(1)\supset B_x(\frac{1}{2})\supset\cdots\supset B_x(\frac{1}{n})\supset\cdots.$$

由于对$\forall n\in\mathbf{N}$，$x\in F_n=\overline{E}_n$，所以$B_x(\frac{1}{m})\cap E_n\neq\emptyset$，$\forall m,n\in\mathbf{N}$. 令

$$n_1=\min\{j\mid x_j\in B_x(1)\cap E_1\},$$

$$n_2=\min\{j>n_1\mid x_j\in B_x(\frac{1}{2})\cap E_{n_1+1}\},$$

$$\cdots$$

$$n_k=\min\{j>n_{k-1}\mid x_j\in B_x(\frac{1}{k})\cap E_{n_{k-1}+1}\}$$

$$\cdots$$

显然，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而$x_{n_k}$为$x_n$的子序列且$x_{n_k}\in B_x(\frac{1}{k})$，$\rho(x_k,x)<\frac{1}{k}\to 0\ (k\to+\infty)$，即$\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x$. 这证明$(X,\tau_\rho)$为序列紧致的.

(5)⇐(3)　设F_n为递降的非空闭集序列，取$x_n\in F_n$，考虑集合$A=\{x_n\mid x\in\mathbf{N}\}$.

若A为有限集，则必存在$x\in A$满足：对$\forall N\in\mathbf{N}$，必有$n>N$，使得$x_n=x$(否则，对$\forall x\in A$，$\exists N_x\in\mathbf{N}$，使当$n>N_x$，有$x_n\neq x$. 令$N_0=\max\{N_x\mid x\in A\}$，则当$n>N_0$时，$x_n\notin A$，与$A$的定义矛盾). 于是$x=x_n\in F_n\subset\cdots\subset F_N$，$\forall N\in\mathbf{N}$. 所以$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$.

若A为无限集，由(X,τ_ρ)列紧，故存在$x\in A'$. 易见，对(X,τ_ρ)，x也是$A_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$的聚点，$\forall n\in\mathbf{N}$. 但$A_n\subset F_n$，所以$x$也是$F_n$的聚点. 又因$F_n$为闭集，所以$x\in F_n$，$n\in\mathbf{N}$，即$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$，所以，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n\neq\emptyset$. 这就证明了$(X,\tau_\rho)$满足(5).

(3)⇒(4)　设x_n为(X,τ_ρ)中任一序列，记$A=\{x_n\mid n\in\mathbf{N}\}$.

若A为有限集，则存在$x\in A$，$n_1<n_2<\cdots$，使$x_{n_k}=x$. 于是$\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x\in X$.

若A为无限集，由(X,τ_ρ)列紧性，存在$x\in A'$. 令$A_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$.

$$n_1=\min\{j\mid x_j\in B_x(1)\cap A_1\},$$

$$n_2=\min\{j\mid x_j\in B_x(\frac{1}{2})\cap A_{n_1+1}\},$$

$$\cdots$$

$$n_k=\min\{j\mid x_j\in B_x(\frac{1}{k})\cap A_{n_{k-1}+1}\},$$

$$\cdots$$

显然，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，从而$x_{n_k}$为$x_n$的子序列且$x_{n_k}\in B_x(\frac{1}{k})$，$\rho(x_{n_k},x)<\frac{1}{k}\to 0\ (k\to+\infty)$，即$\lim\limits_{k\to+\infty}x_{n_k}=x$. 这就证明了$(X,\tau_\rho)$是序列紧致的.

1.5.12　在(X,τ_ρ)中，$A\subset X$(作为子拓扑空间)紧致$\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}A$为$(X,\tau_\rho)$中的有界闭集.

证法1　(⇒)取一定点$a\in A$. 显然，$\mathscr{U}=\{B_a(n)\mid n\in\mathbf{N}\}$为$A$的一个开覆盖，由于$A$紧致，存在$N\in\mathbf{N}$，使得$B_a(N)=\bigcup\limits_{n=1}^{N}B_a(n)\supset A$. 故$A$有界.

再证A为闭集，只要证A^C为开集. 设$p\in A^C$，对任意$q\in A$，取$0<r(q)<\frac{1}{2}\rho(p,q)$，则

$$B_q(r(q))\cap B_p(r(q))=\emptyset.$$

于是$\mathscr{U}=\{B_q(r(q))\mid q\in A\}$为$A$的一个开覆盖. 由$A$的紧致性，存在$A$的有限子覆盖$\mathscr{U}_1=\{B_{q_i}(r(q_i))\mid i=1,\cdots,n\}$. 因为

$$B_{q_i}(r(q_i))\cap B_p(r(q_i))=\emptyset,\ i=1,\cdots,n$$

所以

$$\bigcup_{i=1}^{n}B_{q_i}(r(q_i))\quad 与\quad U=\bigcup_{i=1}^{n}B_p(r(q_i))$$

不相交，从而$A\cap U=\emptyset$，$p\in U\subset A^C$，由此知A^C为开集.

证法2　(⇒)(反证)假设A不为闭集，则$A'\not\subset A$. 即存在$a\in A'$，但是$a\notin A$. 于是，存在相异点组成的集合$\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}\subset A$，使$\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=a$.

显然，

$$\{B_x(\frac{1}{2}\rho(x,a))\mid x\in A\}$$

为A的一个开覆盖，而它无有限子覆盖，这与A紧致相矛盾.

($\not\Leftarrow$)反例：$X=A=(0,1)\subset\mathbf{R}$作为通常的$(\mathbf{R}^1,\rho_0)$的子拓扑空间是有界闭集. 但显然区间集

$$\{(\frac{1}{n},1)\mid n\in\mathbf{N}\}$$

为$(0,1)$的开覆盖，但它无有限子覆盖. 因此，$A=(0,1)$非紧致.

1.5.13　(Heine-Borel)在通常的$(\mathbf{R}^n,\rho_0)$中，$A\subset\mathbf{R}^n$紧致$\Leftrightarrow A$为$(\mathbf{R}^n,\tau_{\rho_0})$中的有界闭集.

证　(⇒)题1.5.12已证.

(⇐)设闭长方体$I_1\supset A$. (反证)假设A非紧致.

则存在 A 的开覆盖 $\{U_\alpha \mid \alpha\in\Gamma\}$，它无有限子覆盖. 将 $I_1 2^n$ 等分，必有一等分 $I_2\subset I_1$，使 $I_2\cap A$ 无有限子覆盖. 再将 $I_2 2^n$ 等分，必有一等分 $I_3\subset I_2$，使 $I_3\cap A$ 无有限子覆盖. 于是，得到一串闭长方体的递降序列

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_m\supset\cdots$$

$$\text{直径 } \operatorname{diam} I_m\to 0\ (m\to+\infty).$$

根据闭区间套原理，$\exists_1 a\in I_m,\forall m\in\mathbf{N}$，显然 A 有点列收敛于 a. 又因 A 为闭集，故 $a\in A$. 所以存在 $U_{\alpha_0}\ni a$，则有 $N\in\mathbf{N}$，当 $m>N$ 时，$I_m\subset U_{\alpha_0}$，即 $\{U_{\alpha_0}\}$ 为 $I_m\cap A$ 的有限子覆盖，这与 $I_m\cap A$ 无有限子覆盖相矛盾. 所以 A 紧致.

1.5.14 在 $(\mathbf{R}^n,\rho_0)$ 中，$A\subset\mathbf{R}^n$ 作为子拓扑空间序列紧致 $\Leftrightarrow A$ 为 $(\mathbf{R}^n,\tau_{\rho_0})$ 中的有界闭集.

证 $(\Rightarrow)$(反证) 若 A 无界，则 $\exists a_n,a_0\in A$，使 $\rho(a_n,a_0)\geqslant n$. 显然 a_n 无收敛子列. 这与 A 序列紧致相矛盾. 因此，A 必有界.

(反证) 若 A 不为闭集，则存在 $a_n\in A$，它收敛于 a，但 $a\overline{\in} A$. 当然 a_n 的一切子列也收敛于 $a\overline{\in}A$. 从而 A 不是序列紧致的，矛盾. 因此，A 为闭集.

$(\Leftarrow)$(反证) 假设 A 非序列紧致，则存在 $a_n\in A$，它无收敛于 A 中的点的子列. 所以，$\forall a\in A$，存在开球 $B_a(r(a))$ 最多含 a_n 的有限多项. 易见

$$\mathscr{V}=\{B_a(r(a))\mid a\in A\}$$

为 A 的一个开覆盖. 因为 A 有界闭，根据 Heine-Borel 定理，存在 $\{Ba_i(r(a_i))\mid i=1,\cdots,m\}$ 覆盖 A. 当然也覆盖 $\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$，这与 $\bigcup\limits_{i=1}^m Ba_i(r(a_i))$ 只含 $\{a_n\}$ 中有限项相矛盾.

由题 1.5.11、1.5.13 和 1.5.14 立即推得:

1.5.15 在 $(\mathbf{R}^n,\rho_0)$ 中，$A\subset\mathbf{R}^n$ 作为子拓扑空间紧致、可数紧致、列紧、序列紧致都等价于 A 为 $(\mathbf{R}^n,\tau_{\rho_0})$ 中的有界闭集.

设 (X,τ_1) 和 (Y,τ_2) 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 为映射，$x_0\in X$，如果对 $f(x_0)\in Y$ 的任何开邻域 V，存在 x_0 的开邻域 U，使得

$$f(U)\subset V,$$

则称 f 在 x_0 **连续**. 如果 f 在 X 上的每一点处连续，则称 f 为**连续映射**或 f 在 X 上**是连续的**. 如果 f 为一一连续映射，且 f^{-1} 也连续，则称 f 为**拓扑映射或同胚**.

特别在 $(X,\tau_{\rho_1}),(Y,\tau_{\rho_2})$ 时，f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得 $f(B_{x_0}(\delta))\subset B_{f(x_0)}(\varepsilon)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，当 $x\in X,\rho(x,x_0)<\delta$ 时有 $\rho(f(x),f(x_0))<\varepsilon$.

1.5.16 设 (X,τ_1) 和 (Y,τ_2) 为拓扑空间，$f:X\to Y$ 为映射，则

(1) f 为连续映射.

$\Leftrightarrow$(2) 开集 V 的逆象 $f^{-1}(V)=\{x\in X\mid f(x)\in V\}$ 为开集.

$\Leftrightarrow$(3) 闭集 F 的逆象 $f^{-1}(F)=\{x\in X\mid f(x)\in F\}$ 为闭集.

$\Rightarrow$(4) 对 $\forall x\in X,\forall x_n\in X,\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，必有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$.

证 (1)$\Rightarrow$(2) 若 $f^{-1}(V)\neq\varnothing$，则对 $\forall x\in f^{-1}(V)$，$f(x)\in V\subset Y$ 为开集. 因 f 连续，故有 x 的一个开邻域 U_x，使得 $f(U_x)\subset V$，即 $U_x\subset f^{-1}(V)$. 所以

$$f^{-1}(V)=\bigcup_{x\in f^{-1}(V)}U_x$$

为 X 中的开集.

(1)$\Leftarrow$(2) 对 $\forall x\in X$，任何 $f(x)$ 的开邻域 V，由(2)，$f^{-1}(V)$ 为 x 的开邻域，且 $f(f^{-1}(V))\subset V$. 所以 f 在 x 连续，从而 f 为连续映射.

(2)$\Leftrightarrow$(3) 由 $f^{-1}(Y-B)=X-f^{-1}(B)$ 立即推得.

(1)$\Rightarrow$(4) 设 V 为 $f(x)$ 的任一开邻域，因 f 在 x 连续，则存在 x 的开邻域 U，使得 $f(U)\subset V$. 由 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x\in U$(开集)，故存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，有 $x_n\in U$. 于是，$f(x_n)\in V$，从而 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$.

1.5.17 设 (X,ρ_1) 和 (Y,ρ_2) 为度量空间，$f:X\to Y$ 为映射，则

(1) f 在 $x\in X$ 连续 $\Leftrightarrow\forall x_n\in X,\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$;

(2) f 在 X 上连续 $\Leftrightarrow\forall x\in X,\forall x_n\in X,\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$，有 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)=f(x)$.

从而，对度量空间，题 1.5.16 中的(1)(2)(3)(4)是彼此等价的.

证 只须证(1).

$(\Rightarrow)$ 见题 1.5.16 的证明中(1)$\Rightarrow$(4).

$(\Leftarrow)$(反证) 假设 f 在 $x\in X$ 不连续，则存在 $f(x)$ 的开邻域 V，不存在 x 的开邻域 U 使得 $f(U)\subset V$. 特别地，存在 $x_n\in B_x(\frac{1}{n})$，使得 $f(x_n)\overline{\in}V$. 显然，$\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x$. 但 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)\neq f(x_0)$，这与已知条件相矛盾.

1.5.18 设 $U\subset\mathbf{R}^n$ 为开集，$f:U\to\mathbf{R}^m$，$y=f(x)=(f_1(x),\cdots,f_m(x))=(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n))$ 在 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 连续 $\Leftrightarrow f_i(x)$

$= f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 在 x^0 连续，$i = 1,\cdots,m$.

证 从 $|f_i(x) - f_i(x^0)| \leqslant \rho_0(f(x), f(x^0))$

$$= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}[f_j(x) - f_j(x^0)]^2}$$

$$= \sqrt{m}\max_{1\leqslant j\leqslant m}|f_j(x) - f_j(x^0)|$$

立即推出结论.

设(X,τ)为拓扑空间，如果 X 为两个不相交的非空开集的并，则称(X,τ)为**非连通**的拓扑空间. 否则称为**连通的**拓扑空间. 易见，

X 非连通 $\Leftrightarrow X$ 为两个不相交非空闭集的并 $\Leftrightarrow X$ 含有一个非空的真子集，它既为开集又为闭集.

如果对 $\forall p,q \in X$，存在连接 p 和 q 的一条道路，即存在连续映射

$$\varphi:[0,1]\to X, t\mapsto \varphi(t)$$

使得 $\varphi(0) = p, \varphi(1) = q$，则称$(X,\tau)$为**道路连通**的拓扑空间.

1.5.19 $[a,b]\subset \mathbf{R}^1$ 是连通的拓扑空间.

证 （反证）假设$[a,b]$非连通，则$[a,b] = U\cup V$，U 和 V 为$[a,b]$中不相交的非空开集. 设 $p\in U$，$q\in V$，不妨设 $p<q$. 令

$$\alpha = \sup\{x\mid x\in U\cap[p,q]\}$$

由 U 和 V 为开集，易见 $p<\alpha<q$，再由 sup 的定义知 $\alpha\overline{\in} V\cap[p,q]$ 和由$(\alpha,q]\subset V$ 知 $\alpha\overline{\in} U\cap[p,q]$，因此

$$\alpha\overline{\in}(U\cap[p,q])\cup(V\cap[p,q])$$
$$= (U\cup V)\cap[p,q] = [p,q],$$

矛盾.

类似可知 (a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$，$(-\infty,a)$，$(-\infty,a]$，$[a,+\infty)$，$(a,+\infty)$，$(-\infty,+\infty)$都是连通的.

1.5.20 $\mathbf{R}^n$ 是道路连通的，因而是连通的.

证 $\forall p,q\in\mathbf{R}^n$，令

$$\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}^n,$$
$$\varphi(t) = (1-t)p + tq,$$

则 φ 为连接 $\varphi(0) = p$ 和 $\varphi(1) = q$ 的道路. 所以 $\mathbf{R}^n$ 是道路连通的. 由下面的题 1.5.21，$\mathbf{R}^n$ 是连通的.

我们也可用反证法证明 $\mathbf{R}^n$ 是连通的. 事实上，假设 $\mathbf{R}^n$ 是非连通的，则存在非空开集 U 和 V 使得 $\mathbf{R}^n = U\cup V$. 取 $p\in U, q\in V$. 设连接 p 和 q 的直线段为 L，则 $U\cap L$，$V\cap L$ 为 L 的两个非空开集，且 $L = (U\cap L)\cup(V\cap L)$. 这与题 1.5.19 的结论相矛盾.

1.5.21 (X,τ) 道路连通 $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}(X,\tau)$ 连通.

证 （反证）假设(X,τ)非连通，则 $X = U\cup V$，U 和 V 为(X,τ)中的非空不交的开集. 取 $p\in U$，$q\in V$. 因(X,τ)道路连通，故存在连结 p 和 q 的道路 $\varphi:[0,1]\to X$，使 $\varphi(0) = p\in U$，$\varphi(1) = q\in V$. 于是，

$$[0,1] = \varphi^{-1}(X) = \varphi^{-1}(U)\cup\varphi^{-1}(V),$$

其中 $0\in\varphi^{-1}(U)$，$1\in\varphi^{-1}(V)$，$\varphi^{-1}(U)$，$\varphi^{-1}(V)$ 为$[0,1]$的不相交的开集，这与题 1.5.19 结论相矛盾.

反例 1. 参阅题 1.5.27.

反例 2. 设 $A = \{(x,y)\mid y = \sin\frac{1}{x}, 0<x<\frac{2}{\pi}\}\subset\mathbf{R}^2$，$B = \{(0,y)\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}\subset\mathbf{R}^2$. 显然 $\overline{A} = A\cup B$. 因为 A 为$(0,\frac{2}{\pi}]$的连续象，它是道路连通的，当然也是连通的. 再由题 1.5.22，$\overline{A}$ 是连通的，但 $\overline{A}$ 不是道路连通的. 事实上，设 $a\in A$，$b\in B$，$\varphi:[0,1]\to\overline{A}$ 为任一映射，使得 $\varphi(0) = a$，$\varphi(1) = b$，则 φ 必不连续.

（反证）假设 $\varphi(t) = (x(t), y(t))$ 连续. 令

$$t_* = \inf\{t\in[0,1]\mid\varphi(t)\in B\}.$$

显然，$0<t_*$. 由 t_* 的定义，存在 $t_n\to t_*^+(n\to+\infty)$，$\varphi(t_n)\in B$. 于是

$$\lim_{t\to t_*}x(t) = x(t_*) = \lim_{n\to+\infty}x(t_n)$$
$$= \lim_{n\to+\infty}0 = 0.$$

$$y(t_*) = \lim_{t\to t_*^-}y(t) = \lim_{t\to t_*^-}\sin\frac{1}{x(t)}.$$

易见，这与右边极限不存在相矛盾.

1.5.22 设(X,τ)为拓扑空间，Y 为 X 的连通子集（即 Y 作为子拓扑空间是连通的），且 $Y\subset Z\subset\overline{Y}$，则 Z 也连通. 特别地，$\overline{Y}$ 是连通的.

证 （反证）假设 Z 非连通，则 $Z = A\cup B$，A 和 B 为 Z 中不相交的非空开集. 因为连通子集 $Y = (Y\cap A)\cup(Y\cap B)$，而 $Y\cap A$ 和 $Y\cap B$ 为 Y 中的开集. 所以 $Y\cap A = \varnothing$ 或 $Y\cap B = \varnothing$，即 $Y\subset B$ 或 $Y\subset A$. 不妨设 $Y\subset A$. 由于

$$Z\subset\overline{Y}\subset\overline{A},$$

故

$$Z\cap B\subset\overline{A}\cap B = (\overline{A}\cap Z)\cap B$$
$$= A^-\cap B = A\cap B = \varnothing$$

（其中 A^- 为 A 在 Z 中的闭包）. 因此，$B = Z\cap B = \varnothing$. 这与假设 B 非空相矛盾.

1.5.23 设(X,τ_1)，(Y,τ_2)为拓扑空间，$f:X\to Y$ 为连续映射，则

(1) 如果(X,τ_1)紧致，那么 $f(X)$ 也紧致；

(2) 如果(X,τ_1)可数紧致，那么 $f(X)$ 也可数紧致；

(3) 如果(X,τ_1)序列紧致，那么 $f(X)$ 也序列

紧致；

(4) 如果(X,τ_1)连通，那么$f(X)$也连通；

(5) 如果(X,τ_1)道路连通，那么$f(X)$也道路连通.

证 (1) $f(X)$视作(Y,τ_2)的子拓扑空间. 显然由定义知$f:X\to f(X)$也为连续映射. 设$\mathscr{I}=\{V_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$为$f(X)$的任一开覆盖，由题1.5.16(2)，$f^{-1}(V_\alpha)$为$X$的开集. 因此，$\{f^{-1}(V_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$为$X$的一个开覆盖. 由$X$紧致，$\{f^{-1}(V_\alpha)\mid\alpha\in\Gamma\}$有一个有限子覆盖$\mathscr{I}_1=\{f^{-1}(V_{\alpha_k})\mid k=1,\cdots,n\}$. 因为$ff^{-1}(V_\alpha)=V_\alpha$，所以$\{V_{\alpha_k}\mid k=1,\cdots,n\}$为$f(X)$关于$\mathscr{I}$的一个有限子覆盖. 所以$f(X)$是$Y$的紧致子集.

(2) 仿(1)证.

(3) 在$f(X)$中任取点列y_n，令$x_n\in X$，使$f(x_n)=y_n$. 因(X,τ_1)序列紧致，故x_n有收敛子列x_{n_k}收敛于$x\in X$，但由f连续，所以$y_{n_k}=f(x_{n_k})$收敛于$f(x)\in f(X)$，即y_n有收敛于$f(x)\in f(X)$的子序列$y_{n_k}=f(x_{n_k})$. 故$f(x)$也是序列紧致的.

(4)（反证）假设$f(X)$非连通，则$f(X)=A\cup B$，其中A、B为$f(X)$中的非空不相交的开子集. 由f连续，$f^{-1}(A)$与$f^{-1}(B)$也为X的非空不相交的开子集，且$X=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，从而$X$不连通. 与已知$X$连通矛盾. 所以$f(X)$也是连通的.

(5) 设$p,q\in f(X)$，则$\exists a,b\in X$使$f(a)=p,f(b)=q$. 因为(X,τ_1)道路连通，所以有连续映射$\psi:[0,1]\to X$，使$\psi(0)=a,\psi(1)=b$. 于是

$$\varphi=f\circ\psi:[0,1]\to f(X),$$
$$\varphi(0)=f\circ\psi(0)=f(a)=p,$$
$$\varphi(1)=f\circ\psi(1)=f(b)=q$$

为$f(X)$中连接p和q的一条道路. 故$f(X)$是道路连通的.

1.5.24 （最值定理）(1) 设(X,τ)为紧致（或可数紧致或序列紧致）空间，$f:X\to\mathbf{R}$为连续函数，则f必达到最大值和最小值.

(2) 对于度量空间(X,ρ)，(X,τ_ρ)为列紧空间. 上述结论也成立.

证 (1) 由题1.5.23，$f(X)\subset\mathbf{R}$紧致（或可数紧致或序列紧致），再由题1.5.15，$f(X)$为有界闭集. 所以有

$$\inf f(X)\in f(X),\sup f(X)\in f(X).$$

于是存在$a,b\in X$，使

$$f(a)=\inf f(X),f(b)=\sup f(X).$$

$f(a),f(b)$就分别是f的最小值和最大值.

(2) 由(1)和题1.5.11立即推出.

1.5.25 （介值定理）设(X,τ)连通，$f:X\to\mathbf{R}$为连续函数，$p,q\in X$，则f达到介于$f(p)$和$f(q)$之间的一切值.

证 由题1.5.23，$f(X)\subset\mathbf{R}$为连通集，即为区间（或缩成一点），所以f达到介于$f(p)$和$f(q)$之间的一切值.

1.5.26 设(X,ρ_1)为序列紧致（或列紧或可数紧致或紧致）的度量空间，(Y,ρ_2)为度量空间，$f:X\to Y$为连续映射，则f在X上一致连续.

证 只须考虑序列紧致情形. 此时，仿题1.3.10证法1，对于紧致情形还可仿题1.3.10证法2和证法3.

1.5.27 设$\mathbf{R}_+^2=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid y>0\}$，$F_n=[-n,n]\times[\frac{1}{n}-\frac{1}{4n(n+1)},\frac{1}{n}+\frac{1}{4n(n+1)}]$，$n=1,2,\cdots$. 证明：

(1) $G=\mathbf{R}_+^2-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$为开区域；

(2) G的闭包$\overline{G}$为$\mathbf{R}^2$的连通子集；

(3) $\overline{G}$不是道路连通的.

证 (1) 对$\forall p\in G$，显然$\varepsilon=\inf\limits_{q\in G^c}\rho(p,q)>0$，则以$p$为中心$\varepsilon$为半径的开圆$B_p(\varepsilon)\subset G$，所以$G$为开集.

设$p,q\in G,p\neq q$，显然存在折线（平行于坐标轴的直线段组成）将p和q相连，因此，G是折线连通的，当然是道路连通的，也是连通的（G不能分成两个不相交的非空开集的并）. 这就证明了G为开区域.

(2) 由题1.5.22，$\overline{G}$是连通的.

(3)（反证）假设G是道路连通的，则对$(0,0)\in\overline{G}$，$(0,2)\in\overline{G}$，必有连接$(0,0)$和$(0,2)$的一条道路，即存在连续映射

$$\varphi:[0,1]\longrightarrow\overline{G},\ \varphi(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t)),$$
$$\varphi(0)=(0,0),\varphi(1)=(0,2).$$

其中φ_1,φ_2为t的连续函数. 由连续函数的最值定理，存在$t_*\in[0,1]$使得$|\varphi_1(t_*)|=\max\limits_{t\in[0,1]}|\varphi_1(t)|$. 取自然数$N>|\varphi(t_*)|$，由于$0<\frac{1}{N}<2$和连续函数的介值定理，存在$t_{**}\in(0,1)$，使得$\varphi_2(t_{**})=\frac{1}{N}$. 所以

$$\begin{aligned}&(\varphi_1(t_{**}),\varphi_2(t_{**}))=(\varphi_1(t_{**}),\frac{1}{N})\\&\in([-|\varphi_1(t_*)|,|\varphi_1(t_*)|]\times\{\frac{1}{N}\})\cap\overline{G}\\&\subset((-N,N)\times\{\frac{1}{N}\})\cap\overline{G}=\varnothing,\end{aligned}$$

矛盾. 从而$\overline{G}$不是道路连通的.

1.5.28 设$U\subset\mathbf{R}^n$为开集，则

(1) U 折线连通(U 中任何两点有一条折线相连接).

$\Leftrightarrow$ (2) U 道路连通.

$\Leftrightarrow$ (3) U 连通.

连通(或道路连通或折线连通)的开集 U 称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**开区域**(简称**区域**),$\overline{U}$ 称为**闭区域**.

证 (1)$\Rightarrow$(2) 因为折线道路是特殊的道路.

(2)$\Rightarrow$(3) 由题 1.5.21.

(3)$\Rightarrow$(1) 设 $U_x=\{y\in U \mid$ 存在 U 中连接 x 和 y 的折线$\}$,则 U_x 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集.事实上,对于 $\forall p\in U_x\subset U$,由于 U 为开集,存在 p 的开球邻域 $B_p(\varepsilon)\subset U$.而 $\forall q\in B_p(\varepsilon)$,有直线段连接 p 和 q,所以,在 U 中有折线将 x 和 q 相连,即 $q\in U_x$,$B_p(\varepsilon)\subset U_x$,故 U_x 为开集.

如果 $U_x\neq U(x\in U)$,则 $U=U_x\cup(\bigcup\limits_{y\in U-U_x}U_y)$,因此,$U$ 可表示为两个非空不相交的开集的并.这与 U 连通相矛盾.于是 $U_x=U$,因而 U 是折线连通的

§1.6 微分中值定理的应用

与一阶导数有关的重要定理有

Fermat 定理:设 f 在 x_0 可导且达到极值,则 $f'(x_0)=0$.

Rolle 定理:设 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f'(\xi)=0$.

Lagrange 中值定理:设 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,则存在 $\xi\in(a,b)$ 或 $\theta\in(0,1)$ 使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$
$$=f'(a+\theta(b-a))(b-a).$$

Cauchy 中值定理:设 f,g 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $g'(x)\neq 0,x\in(a,b)$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

如果要考虑一个可导函数 f 在区间$[a,b]$的两端点的值之差 $f(b)-f(a)$ 或考虑割线的斜率

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

就应立即想到用 Rolle 定理或 Lagrange 中值定理.如果考虑两个函数 f,g 以及函数值差商

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

应立即想到 Cauchy 中值定理.还有些问题要证明存在 $\xi\in(a,b)$ 得出某种结论,但既无函数,又无区间,这时就得根据需要在某个区间上构造一个函数,以便应用上述有关定理来证明所需的结论.

应用 Rolle 定理,关键在构造一个函数,满足定理的条件.题 1.6.1 ~ 1.6.5 都是根据需要,构造一个函数,使其既满足 Rolle 定理的条件,且导函数又与题中条件或结论的某部分相一致.

1.6.1 实数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 满足

$$\frac{a_0}{1}+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

试证:方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个实根.

证 令

$$f(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1},$$

显然 $f(x)$ 为多项式函数,是可导的,且

$$f(0)=0,f(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0.$$

根据 Rolle 定理,存在 $\xi\in(0,1)$ 使

$$f'(\xi)=a_0+a_1\xi+\cdots+a_n\xi^n=0.$$

ξ 即为方程 $a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=0$ 的一个实根.

1.6.2 设函数 f 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)=0$,则一定存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

证 令 $F(x)=e^xf(x)$.由 $f(x)$ 的条件知 $F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $F(a)=F(b)=0$,则由 Rolle 定理,存在 $\xi\in(a,b)$ 使

$$0=F'(\xi)=e^{\xi}[f(\xi)+f'(\xi)],$$

$e^{\xi}\neq 0$,所以

$$f(\xi)+f'(\xi)=0.$$

1.6.3 设 f 和 g 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且 $f(a)=f(b)=0$.证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

证法 1 令 $F(x)=f(x)e^{g(x)}$.显然,$F(x)$ 在$[a,b]$上连续,在(a,b)内可导,且

$$F(a)=f(a)e^{g(a)}$$
$$=0=f(b)e^{g(b)}=F(b).$$

根据 Rolle 定理,存在 $\xi\in(a,b)$,使

$$0=F'(\xi)$$
$$=[f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)]e^{g(\xi)},$$
$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0.$$

证法 2 (i) 若 $f\equiv 0$,则 $\forall\xi\in(a,b)$,

$$f'(\xi)+f(\xi)g'(\xi)=0+0\cdot g'(\xi)=0.$$

(ii) 若 $f\not\equiv 0$,因 $f(a)=f(b)=0$,故 $\exists a\leqslant a_1<b_1\leqslant b$ 使

$f(a_1)=f(b_1)=0$,且 $f(x)>0,\forall x\in(a_1,b_1)$.

令 $F(x)=\ln f(x)+g(x)$,因为

$$\lim_{x\to a_1^+} F(x) = \lim_{x\to a_1^+}[\ln f(x) + g(x)] = -\infty,$$
$$\lim_{x\to b_1^-} F(x) = \lim_{x\to b_1^-}[\ln f(x) + g(x)] = -\infty,$$
所以 $\exists \xi \in (a_1,b_1)$ 使 $F(\xi) = \max_{a_1<x<b_1} F(x)$. 因此
$$0 = F'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} + g'(\xi)$$
$$= \frac{1}{f(\xi)}[f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi)]$$
由 $f(\xi) > 0$, 知 $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.

1.6.4 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 可导,证明 $f(x) = 0$ 的任何两根之间必有 $f'(x) - af(x) = 0$ 的一个根, a 为实常数.

证 设 x_1, x_2 是方程 $f(x) = 0$ 的两个不同的根,不妨设 $x_1 < x_2$. 令
$$F(x) = e^{-ax}f(x),$$
则 F 在 $\mathbf{R}$ 上可导且
$$F'(x) = e^{-ax}[f'(x) - af(x)]$$
显然 $F(x_1) = e^{-ax_1}f(x_1) = 0 = e^{-ax_2}f(x_2) = F(x_2)$. 由 Rolle 定理,存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使 $F'(\xi) = 0$. 又 $e^{-a\xi} > 0$, 因此必有
$$f'(\xi) - af(\xi) = 0.$$
ξ 为 $f(x)$ 两根 x_1, x_2 之间,又为 $f'(x) - af(x) = 0$ 的根,结论得证.

1.6.5 设 $f:[0,1]\to\mathbf{R}$ 连续,在 $(0,1)$ 内可导, $f(0) = 0$, 且对任何 $x \in (0,1)$ 都有 $f(x) \neq 0$, 证明:存在 $\xi \in (0,1)$, 使得
$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)},$$
其中 n 为自然数, $\mathbf{R}$ 为实数集.

证法 1 令 $F(x) = f^n(x)f(1-x)$. 由题设显然可知 F 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导. 又
$$F(0) = f^n(0)f(1)$$
$$= 0 = f^n(1)f(0) = F(1),$$
于是根据 Rolle 定理,存在 $\xi \in (0,1)$, 使
$$0 = F'(\xi)$$
$$= nf^{n-1}(\xi)f'(\xi)f(1-\xi) - f^n(\xi)f'(1-\xi).$$
因为 $f(\xi) \neq 0$, 所以 $nf'(\xi)f(1-\xi) = f(\xi)f'(1-\xi)$, 而
$$\frac{nf'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

证法 2 由于 $x \in (0,1)$ 时, $f(x) \neq 0$, 则由零值定理, f 在 $(0,1)$ 中恒大于 0 或恒小于 0, 不妨设 f 恒大于 0. 令 $F(x) = n\ln f(x) + \ln f(1-x)$, $x \in (0,1)$, 显然
$$\lim_{x\to 0^+} F(x) = -\infty = \lim_{x\to 1^-} F(x)$$
故 $\exists 0 < a < \frac{1}{2} < b < 1$, 使 $F(a), F(b) < F(\frac{1}{2})$. 由最值定理 $\exists \xi \in (a,b)$ 使 $F(\xi) = \max_{a\le x\le b} F(x)$, 于是由 Fermat 定理,
$$0 = F'(\xi) = n\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} - \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$
立即得 $\dfrac{nf'(x)}{f(\xi)} = \dfrac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$.

1.6.6 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上 2 阶可导, $f'' > 0$. 又设 $f(x_0) < 0$, 且 $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \beta > 0$. 试证方程 $f(x) = 0$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上恰有两个根.

证 因为 $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = \alpha < 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \beta > 0$, 所以存在 a, b 使 $a < x_0 < b$, $f'(a) < 0$, $f'(b) > 0$. 又因 $f'' > 0$, 故 f' 严格单调增. 由于
$$(f(x) - [f(b) + f'(b)(x-b)])'$$
$$= f'(x) - f'(b) > 0, x > b,$$
所以
$$f(x) - [f(b) + f'(b)(x-b)]$$
$$> f(b) - [f(b) + f'(b)(b-b)] = 0,$$
$$f(x) > f(b) + f'(b)(x-b), x > b,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
同理,
$$f(x) > f(a) + f'(a)(x-a), x < a,$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty.$$
于是,存在 $c < a$, $d > b$, 使 $f(c) > 0$, $f(d) > 0$. 此外由题设知 $f(x_0) < 0$ 和 2 阶可导函数 f 必连续. 根据零值定理,存在 $\xi_1 \in (c, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, d)$ 使得
$$f(\xi_1) = 0 = f(\xi_2).$$
最后,证明 $f(x) = 0$ 恰有两根. (反证) 假设 $f(x) = 0$ 有第三个根 ξ_3, 不妨设 $\xi_1 < \xi_2 < \xi_3$. 由 Rolle 定理,存在 $\eta_1 \in (\xi_1, \xi_2)$, $\eta_2 \in (\xi_2, \xi_3)$ 使得
$$f'(\eta_1) = 0 = f'(\eta_2).$$
再由 Rolle 定理,存在 $\zeta \in (\eta_1, \eta_2)$ 使
$$f''(\zeta) = 0,$$
与题设 $f'' > 0$ 相矛盾. 故 $f(x) = 0$ 恰有两根.

1.6.7 设 f 在 $[a,b]$ 上 3 阶可导,试证:存在 $\xi \in (a,b)$ 使得
$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(b) + f'(a)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

证法 1 令 M 满足
$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(b) + f'(a)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 M,$$
又设 $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{1}{2}(x-a)[f'(x) +$

$f'(a)] + \frac{1}{12}(x-a)^3M$,则

$$F(a) = F(b) = 0.$$

根据 Rolle 定理,存在 $x_1 \in (a,b)$,使得

$$\begin{aligned} 0 &= F'(x_1) \\ &= \frac{1}{2}[f'(x_1) - f'(a) - (x_1-a)f''(x_1)] \\ &\quad + \frac{1}{4}(x_1-a)^2M. \end{aligned}$$

从式中又可看出 $F'(a)=0$,再由 Rolle 定理,存在 $\xi \in (a,x_1)$,使

$$\begin{aligned} 0 = F''(\xi) &= \frac{1}{2}f''(\xi) - \frac{1}{2}f''(\xi) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\xi-a)f'''(\xi) + \frac{\xi-a}{2}M \\ &= -\frac{1}{2}(\xi-a)[f'''(\xi)-M]. \end{aligned}$$

由于 $\xi \neq a$,所以必有 $f'''(\xi)=M$,即存在 $\xi \in (a,b)$ 使

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(b)+f'(a)] - \frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

证法 2 由证法 1,从 $F'(x_1)=0$ 得

$$f'(a) = f'(x_1) + (a-x_1)f''(x_1) + \frac{1}{2}(x_1-a)^2M.$$

再由 Taylor 公式,$\exists \xi \in (a,x_1) \subset (a,b)$,使

$$f'(a) = f'(x_1) + (a-x_1)f''(x_1) + \frac{1}{2}(x_1-a)^2f'''(\xi).$$

比较上面两式立即可得

$$M = f'''(\xi),$$

于是

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(b)+f'(a)] - \frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

注 用待定系数法和 Rolle 定理或 Taylor 公式来证明所需的结果,是一种独特的方法.

1.6.8 设 f 在区间 I 上可导,则

(1) f 单调增(减)$\Leftrightarrow$ 对 $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$;

(2) f 严格单调增(减)$\Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0 (\leqslant 0)$,且集合 $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ 不构成区间.

证 (1) ($\Rightarrow$) f 单调增,故对 $\forall x \in I, \Delta x \neq 0$,有

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

从而

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geqslant 0.$$

($\Leftarrow$) 设对 $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$,则对 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,应用 Lagrange 中值定理,存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

$$f(x_2) \geqslant f(x_1)$$

即 f 在 I 上是单调增的.

(2) ($\Rightarrow$) f 在 I 上严格单调增,由(1),$f'(x) \geqslant 0$. 下证集合 $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ 不构成区间.(反证)假设存在区间 $[x_1, x_2] \subset I, x_1 < x_2$. 在 (x_1, x_2) 上,$f'(x) \equiv 0$,则由 Lagrange 中值定理,存在 $\xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) = 0,$$

$f(x_2) = f(x_1)$,这与 f 在 I 上严格增矛盾. 所以 $f'(x)$ 的零点不构成区间.

($\Leftarrow$) 由对 $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0$ 和(1)知,f 在 I 上单调增. 只须证 f 是严格增.(反证)假设 f 在 I 上不严格增,则存在 $x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$,但 $f(x_1) = f(x_2)$. 由 f 单调增知,在 $[x_1, x_2]$ 上,$f(x) \equiv f(x_1)$,从而在 (x_1, x_2) 上 $f'(x) \equiv 0$. 这与(2)中条件:集合 $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ 不构成区间相矛盾. 从而 f 严格单调增.

√1.6.9 设函数 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续,在 $(a, +\infty)$ 内可导,$f(a) < 0$,且当 $x > a$ 时,$f'(x) > k > 0$. 试证 f 有唯一的零点.

证 由 $f(a) < 0$ 知 $a - \frac{f(a)}{k} > a$. 在 $[a, a - \frac{f(a)}{k}]$ 上应用 Lagrange 中值定理,存在 $\xi \in (a, a - \frac{f(a)}{k})$ 使

$$\begin{aligned} & f(a - \frac{f(a)}{k}) - f(a) \\ &= f'(\xi)[(a - \frac{f(a)}{k}) - a] \\ &= f'(\xi) \cdot (-\frac{f(a)}{k}) \\ &\geqslant k \cdot (-\frac{f(a)}{k}) = -f(a). \\ & f(a - \frac{f(a)}{k}) > 0. \end{aligned}$$

根据零值定理,存在 $c \in (a, a - \frac{f(a)}{k})$,使得 $f(c) = 0$.

另一方面,由题设当 $x > a$ 时,$f'(x) > k > 0$ 知 f 在 $[a, +\infty)$ 上严格增,所以 $f(x) = 0$ 至多有一个根. 因此,c 为 f 在 $(a, +\infty)$ 内唯一的零点.

1.6.10 函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且对 $\forall x \in (0,1)$,有 $|f'(x)| < 1$ 及 $f(0) = f(1)$. 证明:对任意 $x_1, x_2 \in [0,1]$,有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\frac{1}{2}.$$

证 (1) $x_1=x_2\in[0,1]$,不等式显然成立.

(2) $0<|x_2-x_1|<\frac{1}{2}$,则由中值定理,存在 $\xi\in(0,1)$,在 x_1,x_2 之间使

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f'(\xi)||x_2-x_1|<1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

(3) $|x_2-x_1|>\frac{1}{2}$,不妨设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant 1$,则 $x_2-x_1>\frac{1}{2}$,于是,由题意及中值定理得

$$\begin{aligned}&|f(x_2)-f(x_1)|\\&=|f(x_2)-f(1)+f(0)-f(x_1)|\\&\leqslant|f(x_2)-f(1)|+|f(x_1)-f(0)|\\&=|f'(\xi_2)|(1-x_2)+|f'(\xi_1)|x_1\\&<1-x_2+x_1=1-(x_2-x_1)\\&<1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

其中,$0<\xi_1<x_1,x_2<\xi_2<1$.

1.6.11 设 f 在$[0,a]$上 2 阶可导,$|f''(x)|\leqslant M,x\in[0,a]$,且 f 在$(0,a)$内达到最大值.试证:

$$|f'(0)|+|f'(a)|\leqslant Ma.$$

证 设 $x_0\in(0,a),f(x_0)=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}f(x)$,则由 Fermat 定理知 $f'(x_0)=0$.根据 Lagrange 中值定理,存在 $\xi_1\in(0,x_0)$ 及 $\xi_2\in(x_0,a)$ 使得

$$f'(0)=f'(x_0)+f''(\xi_1)(0-x_0)=-f''(\xi_1)x_0,$$

$$f'(a)=f'(x_0)+f''(\xi_2)(a-x_0)=f''(\xi_2)(a-x_0)$$

因此

$$\begin{aligned}&|f'(0)|+|f'(a)|\\&=|f''(\xi_1)x_0|+|f''(\xi_2)||a-x_0|\\&\leqslant Mx_0+M(a-x_0)=Ma.\end{aligned}$$

注 从 f 在$(0,a)$内达最大值立即联想到 Fermat 定理,$\exists x_0\in(0,a),f'(x_0)=0$.再由所证结论自然联系到 Lagrange 中值定理.

√1.6.12 (G. Darboux 定理)设 f 在$[a,b]$内可导,则对介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的任何值 c,必有 $\xi\in[a,b]$ 使 $f'(\xi)=c$.

证法 1 令

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}f'(a), & x=a,\\ \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a<x\leqslant b,\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}\dfrac{f(b)-f(x)}{b-x}, & a\leqslant x<b,\\ f'(b), & x=b.\end{cases}$$

则

$$\lim_{x\to a^+}\varphi_1(x)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\varphi_1(a),$$

$$\lim_{x\to b}\varphi_2(x)=\lim_{x\to b}\frac{f(b)-f(x)}{b-x}=f'(b)=\varphi_2(b),$$

从而 $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ 都是$[a,b]$上的连续函数.

因此 c 介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间,故 c 必介于 $f'(a)$ 及 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 之间或介于 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 及 $f'(b)$ 之间,不妨设为前者,由 φ_1 连续与介值定理知,存在 $\theta\in[a,b]$,使

$$c=\varphi(\theta)=\frac{f(\theta)-f(a)}{\theta-a}.$$

再对 f 应用 Lagrange 中值定理,存在 $\xi\in(a,\theta)$,使

$$f'(\xi)=\frac{f(\theta)-f(a)}{\theta-a}=\varphi(\theta)=c.$$

证法 2 如果 $c=f'(a)$ 或 $c=f'(b)$,则取 $\xi=a$ 或 $\xi=b$ 即可.对严格介于 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 中的任一值 c,令

$$F(x)=f(x)-cx,$$

显然 F 在$[a,b]$内可导,且

$$F'(x)=f'(x)-c.$$

由于 c 介于 $f'(a)$、$f'(b)$ 之间,故

$$F'(a)\cdot F'(b)=(f'(a)-c)(f'(b)-c)<0.$$

不失一般性,设 $F'(a)>0,F'(b)<0$. F 可导蕴涵着 F 连续,因此,存在 $\xi\in[a,b]$ 使得

$$F(\xi)=\max_{x\in[a,b]}f(x).$$

由 $F'(a)>0,F'(b)<0$,故存在 $\delta>0$,当 $a<x<a+\delta$ 时,

$$\frac{F(x)-F(a)}{x-a}>0,F(x)>F(a);$$

当 $b-\delta<x<b$ 时,

$$\frac{F(x)-F(b)}{x-b}<0,F(x)>F(b).$$

由此得 $\xi\neq a,\xi\neq b$,即 $\xi\in(a,b)$ 且 ξ 为 F 的极大值点.根据 Fermat 定理有

$$F'(\xi)=0,$$

即 $f'(\xi)-c=0,f'(\xi)=c$.

注 1 这是中值定理的几何形式,有一条割线就有一条与之平行的切线,存在斜率介于 $f'(a)$ 和 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$、介于 $f'(b)$ 和 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 的割线,就一定存在这样斜率的切线.这是证法 1 的几何思路.

注 2 证法 2 的思想基于:$f'(x)$ 达到 $f'(a)$ 与 $f'(b)$ 之间的一切值 $c\Leftrightarrow$ 函数 $F(x)=f(x)-cx$ 的导函数 $F'(x)$ 有零点.于是,必然联想到对 $F(x)$ 应用 Fermat 定理.

1.6.13 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的可导函数,则 $f'(x)$ 无第一类间断点.

证法1 (反证)假设 $f'(x)$ 有第一类间断点 x_0,则 $f'(x_0+0)$、$f'(x_0-0)$ 存在、有限.由中值定理得到

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\substack{x\to x_0^+\\(\xi\to x_0^+)}}f'(\xi)=f'(x_0+0)$$

同理 $f'_-(x_0)=f'(x_0-0)$.又因为 $f(x)$ 在 x_0 可导,所以 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$,于是 $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)$,$f'(x)$ 在 x_0 处连续.这与 $f'(x)$ 是第一类间断点矛盾.

证法2 (反证)若 $f'(x)$ 有第一类间断点 x_0,不妨设

$$\lim_{x\to x_0^-}f'(x)=f'(x_0-0)<f'(x_0+0)=\lim_{x\to x_0^+}f'(x).$$

令 $\varepsilon=f'(x_0+0)-f'(x_0-0)$,则存在 $\delta>0$,当 $x_0-\delta<x<x_0$ 时,

$$f'(x)<f'(x_0-0)+\frac{\varepsilon}{3}=\frac{f'(x_0+0)+2f'(x_0-0)}{3}.$$

当 $x_0<x<x_0+\delta$ 时,

$$f'(x)>f'(x_0+0)-\frac{\varepsilon}{3}=\frac{2f'(x_0+0)+f'(x_0-0)}{3}.$$

所以在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 上,$f'(x)$ 的值至多有一个

$$f'(x_0)\in\left(\frac{f'(x_0+0)+2f'(x_0-0)}{3},\frac{2f'(x_0+0)+f'(x_0-0)}{3}\right).$$

这与 Dauboux 定理矛盾.所以 $f'(x)$ 不可能有第一类间断点.

1.6.14 设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上可导,且

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0,$$

证明:$\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=0$.并构造一函数 $f(x)$ 满足上述条件,但 $\varlimsup\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|>0$.

证法1 (反证)若 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|\neq 0$,则 $\varliminf\limits_{x\to+\infty}|f'(x)|=A>0$.于是取 $\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$,存在 $M>\max\{0,a\}$,当 $x\geqslant M$ 时有

$$\frac{A}{2}=A-\frac{A}{2}<|f'(x)|.$$

对 $\forall x\in(M,+\infty)$,由中值定理,存在 $\xi\in(M,x)$,有

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(x)}{x}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{f(M)+f'(\xi)(x-M)}{x}\right|\geqslant\frac{A}{2}>0.$$

这与 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$(从而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|=0$)矛盾.所以

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

例如 $f(x)=\sin x$,满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$,在 $[a,+\infty)$ 内可导,但 $(\sin x)'=\cos x$,有

$$\varlimsup_{x\to+\infty}|(\sin x)'|=\varlimsup_{x\to+\infty}|\cos x|=1>0.$$

证法2 对任意自然数 n,存在 $\Delta_1>n$,当 $x>\Delta_1$ 时,有 $\left|\dfrac{f(n)}{x-n}\right|<\dfrac{1}{2n}$,$\left|\dfrac{x}{x-n}\right|<2$.又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,所以存在 $\Delta>\Delta_1$,当 $x>\Delta$ 时,$\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{1}{4n}$,且

$$\left|\frac{f(x)-f(n)}{x-n}\right|\leqslant\left|\frac{f(x)}{x}\right|\left|\frac{x}{x-n}\right|+\left|\frac{f(n)}{x-n}\right|<\frac{1}{4n}\cdot 2+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

再由中值定理,存在 $\xi_n\in(n,x)$ 使

$$|f'(\xi_n)|=\left|\frac{f(x)-f(n)}{x-n}\right|<\frac{1}{n}.$$

取 $n=1,2,\cdots$,得数列 $\{\xi_n\}$,且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\xi_n=+\infty$,于是

$$\lim_{n\to+\infty}|f'(\xi_n)|=0.$$

所以

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

证法3 取 $\{x_n\}$,使 $a<x_1<2x_1<x_2<2x_2<\cdots<x_n<2x_n\cdots$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=+\infty$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$,故对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $A>0$,当 $x>A$ 时有 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|<\dfrac{\varepsilon}{4}$.固定 A,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,有 $x_n>A$.又因为 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导,故由中值定理,存在 $\xi_n\in(x_n,2x_n)$ 使

$$|f'(\xi_n)|=\left|\frac{f(2x_n)-f(x_n)}{x_n}\right|\leqslant 2\left|\frac{f(2x_n)}{2x_n}\right|+\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|<2\cdot\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to+\infty}|f'(\xi_n)|=0$,从而

$$\varliminf_{x\to+\infty}|f'(x)|=0.$$

√1.6.15 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2阶可导,且 $|f(x)|\leqslant 1$ 和
$$[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4.$$
试证:存在 $\xi\in(-2,2)$ 使得 $f(\xi)+f''(\xi)=0$.

证 令 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$,则
$$F'(x)=2f'(x)[f(x)+f''(x)].$$
由中值定理,存在 $a\in(-2,0)$, $b\in(0,2)$ 使得
$$f'(a)=\frac{f(0)-f(-2)}{2},$$
$$f'(b)=\frac{f(2)-f(0)}{2}.$$
于是,有
$$|f'(a)|=\left|\frac{f(0)-f(-2)}{2}\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(|f(0)|+|f(-2)|)$$
$$\leqslant\frac{1}{2}(1+1)=1,$$
$$|F(a)|=[f(a)]^2+[f'(a)]^2$$
$$\leqslant 1+1=2.$$
同理有
$$|f'(b)|\leqslant 1,\ |F(b)|\leqslant 2.$$
因为 f 2阶可导,所以 F 可导,当然也连续,从而 F 在 $[a,b]$ 上达到最大值 $F(\xi)$, $\xi\in[a,b]$.

由于
$$F(a)\leqslant 2<4=[f(0)]^2+[f'(0)]^2$$
$$=F(0)\leqslant F(\xi),$$
$$F(b)\leqslant 2<4=F(0)\leqslant F(\xi),$$
故 $\xi\neq a,b$,由此知 ξ 为 F 在 $[a,b]$ 上的极大值点,根据 Fermat 定理,
$$0=F'(\xi)=2f'(\xi)[f(\xi)+f''(\xi)].$$
但是 $f'(\xi)\neq 0$.(反证)假设 $f'(\xi)=0$,则
$$4=F(0)\leqslant F(\xi)=[f(\xi)]^2+[f'(\xi)]^2$$
$$=[f(\xi)]^2\leqslant 1,$$
矛盾.从而
$$f(\xi)+f''(\xi)=0.$$

注 从题目的条件 $[f(0)]^2+[f'(0)]^2=4$ 和结论 $f(\xi)+f''(\xi)=0$ 提供了构造函数 $F(x)=[f(x)]^2+[f'(x)]^2$,并对其应用 Fermat 定理的线索.

1.6.16 设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 2阶可导,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=r\in\mathbf{R}$,证明:存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使 $f''(\xi)=0$.

证法1 如果 f 为常值函数,则显然 $f(x)\equiv r$,因此, $\forall\xi\in\mathbf{R}$, $f''(\xi)=0$.

如果 f 不为常值函数,则存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)\neq r$.不妨设 $f(x_0)<r$.由于 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=r$,取 $\varepsilon_0=r-f(x_0)>0$,根据极限的定义,必有 $\Delta>0$,当 $|x|>\Delta$ 时,
$$f(x)>r-\varepsilon_0=f(x_0).$$
又因连续函数 f 必在闭区间 $[-\Delta,\Delta]$ 中的某点 x_* 达到最小值 $f(x_*)$,则 $f(x_*)\leqslant f(x)$, $x\in\mathbf{R}$.再由 Fermat 定理, $f'(x_*)=0$.

(反证)假设对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x)\neq 0$,根据 Darboux 定理,恒有 $f''(x)>0$(或恒有 $f''(x)<0$).所以 $f'(x)$ 严格增(或减).故存在 $x_1>x_*$,使 $f'(x_1)>f'(x_*)$(或 $f'(x_1)<f'(x_*)$) $=0$,从而
$$f(x)>f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1),\ x>x_1$$
(或 $f(x)<f(x_1)+f'(x_1)(x-x_1)$, $x>x_1$),
$r=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$(或 $-\infty$),矛盾.故必存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使 $f''(\xi)=0$.

证法2 由 Lagrange 中值定理,存在 $\xi_n\in(n-1,n)$, $\eta_n\in(-n,-(n-1))$ 使得(注意到 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(n)=r=\lim\limits_{n\to+\infty}f(-n)$)
$$f'(\xi_n)=\frac{f(n)-f(n-1)}{n-(n-1)}$$
$$=f(n)-f(n-1)\to r-r=0\ (n\to+\infty),$$
$$f'(\eta_n)=\frac{f(-(n-1))-f(-n)}{-(n-1)-(-n)}$$
$$=f(-(n-1))-f(-n)$$
$$\to r-r=0\ (n\to+\infty).$$
(反证)假设对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x)\neq 0$,根据 Darboux 定理,恒有 $f''(x)>0$(或恒有 $f''(x)<0$).所以 f' 严格增(或减), $0=\lim\limits_{n\to-\infty}f'(\eta_n)=\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)<\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}f'(\xi_n)=0$,矛盾.这就证明了存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使 $f''(\xi)=0$.

注 值得注意的是,对 $\forall x\in\mathbf{R}$, $f''(x)\neq 0$ 恒有 $f''(x)>0$(或恒有 $f''(x)<0$),不能从反证法和关于 $f''(x)$ 的零值定理推得,原因是 $f''(x)$ 未必连续.例如:设
$$\varphi(x)=\begin{cases}x^3+2x+x^3\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$
显然 φ 连续.令
$$f(x)=\int_0^x\varphi(x)\mathrm{d}x,$$
则 $f'(x)=\varphi(x)$,
$$f''(x)$$
$$=\begin{cases}3x^2\left(1+\sin\dfrac{1}{x^2}\right)+2\left(1-\cos\dfrac{1}{x^2}\right), & x\neq 0,\\ 2, & x=0\end{cases}$$
$$>0,$$
但
$$\lim_{x\to 0}f''(x)=\lim_{x\to 0}\left[3x^2\left(1+\sin\frac{1}{x^2}\right)+2-2\cos\frac{1}{x^2}\right]$$
不存在,当然 $f''(x)$ 不连续.

1.6.17 设函数 f 在 $[a,+\infty)$ 上可导，$f(a)=0$，且当 $x\geqslant a$ 时，$|f'(x)|\leqslant|f(x)|$. 试证 $f\equiv 0$.

证法1 设 $0<\alpha<1$，$f(x)$ 在 $[a,a+\alpha]$ 上连续可导，则由连续函数的最值定理，存在 $x_0\in[a,a+\alpha]$ 使得

$$M=\max_{x\in[a,a+\alpha]}|f(x)|=|f(x_0)|.$$

根据 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(a,x_0)$ 使得

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)|=|f(x_0)-f(a)|\\&=|f'(\xi)(x_0-a)|\leqslant|f(\xi)|\cdot\alpha\leqslant M\alpha,\\&(1-\alpha)M\leqslant 0,\end{aligned}$$

注意到 $1-\alpha>0$，有 $0\leqslant M\leqslant 0$. 立即推出 $M=0$ 和在 $[a,a+\alpha]$ 上 $f\equiv 0$. 同理可证对 $\forall x\in[a+(n-1)\alpha,a+n\alpha]$，$n\in\mathbf{N}$，$f(x)=0$. 因此，$f(x)\equiv 0$，$x\in[a,+\infty)$.

证法2 （反证）假设 $f(x)\not\equiv 0$，$x\geqslant a$，则必存在区间 (x_0,x_1)，使得 $f(x_0)=0$，但 $f(x)\neq 0$，$\forall x\in(x_0,x_1)$. 由连续函数的零值定理，不妨设 $f(x)>0$，$\forall x\in(x_0,x_1)$，根据题设 $|f'(x)|\leqslant|f(x)|$，有

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant 1,\ \forall x\in(x_0,x_1).$$

令 $y=y(x)=x-\ln f(x)$，则 $y'(x)=1-\dfrac{f'(x)}{f(x)}\geqslant 0$，$\forall x\in(x_0,x_1)$. 从而 $y=y(x)$ 为单调增的函数，这与

$$\lim_{x\to x_0^+}y(x)=\lim_{x\to x_0^+}(x-\ln f(x))=+\infty$$

相矛盾. 因此，$f(x)\equiv 0$，$x\in[a,+\infty)$.

证法3 同证法2，有

$$\left|\frac{f'(x)}{f(x)}\right|\leqslant 1,\ \forall x\in(x_0,x_1).$$

令 $y=y(x)=\ln|f(x)|$，$x\in(x_0,x_1)$，则由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi\in(x_0,x_1)$ 使得

$$\left|\frac{y(x)-y(x_1)}{x-x_1}\right|=|y'(\xi)|=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right|\leqslant 1,$$

所以

$$\begin{aligned}|y(x)|&\leqslant|y(x)-y(x_1)|+|y(x_1)|\\&\leqslant|x-x_1|+|y(x_1)|\\&\leqslant|x_0-x_1|+|y(x_1)|.\end{aligned}$$

这与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}y(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\ln|f(x)|=-\infty$ 相矛盾.

注1 要证在 $[a,+\infty)$ 上 $f\equiv 0$，先证在一小区间 $[a,a+\alpha]\subset[a,a+1)$ 上 $f\equiv 0$，采取逐段伸展的方法，达到最终目的.

注2 反证法也是这类问题的通用方法. 这样可将 $[a,+\infty)$ 内的函数限制到 (x_0,x_1) 上来讨论. 再由假设 $f(x)\neq 0$ 及

$$|f'(x)|\leqslant|f(x)|\ (\Leftrightarrow|(\ln f(x))'|\leqslant 1)$$

想到构造新函数 $y=x-\ln f(x)$.

下面的题1.6.18、1.6.19、1.6.21是上题的进一步推广.

1.6.18 $\mathbf{R}$ 上的二次可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=f'(0)=0$，且 $|f''(x)|\leqslant C|f(x)f'(x)|$，$\forall x\in\mathbf{R}$，其中 C 为正常数. 试证：$f(x)\equiv 0$.

证法1 （反证）假设 $f(x)\not\equiv 0$，$x\geqslant 0$，则不妨设对 $\forall\varepsilon>0$，在 $[0,\varepsilon]$ 中 $f(x)\not\equiv 0$. 不然的话，令

$$x_0=\max\{\delta>0\mid f(x)=0,\ \forall x\in[0,\delta]\}$$

则由 f,f' 的连续性知 $f(x_0)=f'(x_0)=0$，且对 $\forall\varepsilon>0$，在 $[x_0,x_0+\varepsilon]$ 中，$f(x)\not\equiv 0$，把 x_0 视作原点即可. 因而，在 $[0,\varepsilon]$ 中，$f''(x)\not\equiv 0$.

取 $x_1>0$，使得 $\dfrac{1}{x_1}>C$. 由 $f,f'\in C^0(\mathbf{R})$，可设 $\max\limits_{x\in[0,x_1]}|f(x)|=M_0\in(0,1)$，且 $M_1=\max\limits_{x\in[0,x_1]}|f'(x)|>0$.

取 $x_2\in(0,x_1]$，使 $|f'(x_2)|=M_1$. 由 Lagrange 中值定理，$\exists x_3\in(0,x_2)$，使得

$$\begin{aligned}|f''(x_3)|&=\left|\frac{f'(x_2)-f'(0)}{x_2-0}\right|\\&=\left|\frac{f'(x_2)}{x_2}\right|=\frac{M_1}{|x_2|}.\end{aligned}$$

则由题设

$$\begin{aligned}CM_1&\geqslant C|f'(x_3)|>C|f(x_3)||f'(x_3)|\\&\geqslant|f''(x_3)|=\left|\frac{f'(x_2)}{x_2}\right|\\&\geqslant\left|\frac{f'(x_2)}{x_1}\right|>CM_1\end{aligned}$$

矛盾. 因而 $f(x)\equiv 0$，$\forall x\geqslant 0$.

同理可证对 $x\leqslant 0$，也有 $f(x)\equiv 0$（或用 $f(-x)$ 代 $f(x)$ 证得）.

因此，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$f(x)\equiv 0$.

证法2 设若 $x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=f'(x_0)=0$，由 $f'(x)$ 的连续性可知存在 $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$，其中 $0<\varepsilon<1$，使得 x 在其中有

$$|f(x)|<1,\ |f'(x)|<\frac{1}{C}.$$

对 $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ 应用 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\left|f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)(x-x_0)^2\right|\\&=\frac{1}{2}|f''(\xi_1)||x-x_0|^2\\&\leqslant\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|\cdot\varepsilon^2\\&\leqslant\frac{1}{2}C|f(\xi_1)f'(\xi_1)|,\end{aligned}$$

其中 ξ_1 满足：$x_0\leqslant\xi_1\leqslant x$（或 $x\leqslant\xi_1\leqslant x_0$）. 于是

$|\xi_1 - x_0| \leqslant |x - x_0| < \varepsilon < 1$. 因此

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2} C |f(\xi_1) f'(\xi_1)|$$
$$\leqslant \frac{1}{2} C |f(\xi_1)| \cdot \frac{1}{C} = \frac{1}{2} |f(\xi_1)|.$$

对 $f(\xi_1)$ 同法讨论, $\exists \xi_2$ 使得 $x_0 \leqslant \xi_2 \leqslant \xi_1$(或 $\xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant x_0$) 且

$$|f(\xi_1)| \leqslant \frac{1}{2} |f(\xi_2)|,$$
$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2^2} |f(\xi_2)|.$$

继续上述方法, 在 $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ 中存在序列 $\{\xi_k\}$ 使得

$$|f(x)| \leqslant \frac{1}{2^k} |f(\xi_k)| < \frac{1}{2^k}.$$

令 $k \to +\infty$ 就得到 $f(x) = 0, x \in (x_0 - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

令 $A_0 = \sup\{A \mid f(x) = 0, \forall x \in [0, A)\}$, 则可证 $A_0 = +\infty$. (反证) 假设 $0 < A_0 < +\infty$, 则由 A_0 定义和 f, f' 连续知 $f(A_0) = 0, f'(A_0) = 0$. 再由上述论证, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得对 $\forall x \in [0, A_0 + \varepsilon], f(x) = 0$. 这与 A_0 是上确界相矛盾.

同理, 令 $A_1 = \inf\{A \mid f(x) = 0, x \in (A, 0]\}$, 则 $A_1 = -\infty$.

所以 $f(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}$.

证法 3 (反证) 假设 $f(x) \not\equiv 0$, 由 $f(0) = 0$ 知, 存在 $x_0 \neq 0$, 使 $f'(x_0) \neq 0$. 不妨设 $f'(x_0) > 0, x_0 > 0$. 令

$$\alpha = \sup\{x \mid x \in [0, x_0], f'(x) = 0\},$$

则 $f'(\alpha) = 0, f'(x) > 0, \forall x \in (\alpha, x_0]$. 在 (α, x_0) 中, 命

$$F(x) = C\int_0^x |f(t)| \mathrm{d}t - \ln f'(x),$$

则由题设 $|f''(x)| \leqslant C |f(x)| |f'(x)|$ 立即推出

$$F'(x) = C |f(x)| - \frac{f''(x)}{f'(x)} \geqslant 0.$$

即 $F(x)$ 在 (α, x_0) 中单调增, 故 $\lim\limits_{x \to \alpha^+} F(x)$ 存在且为 $-\infty$ 或有限数. 于是

$$+\infty > \lim_{x \to \alpha^+} F(x)$$
$$= \lim_{x \to \alpha^+} \left[C\int_0^x |f(t)| \mathrm{d}t - \ln f'(x)\right] = +\infty.$$

矛盾. 于是在 $\mathbf{R}$ 上, $f(x) \equiv 0$.

1.6.19 设 $\mathbf{R}$ 上 n 次可导函数 $f(x)$ 满足 $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0$, 且存在正常数 C 与固定的 $j \in \{0, \cdots, n-1\}$, 使得 $|f^{(n)}(x)| \leqslant C |f^{(j)}(x)|, \forall x \in \mathbf{R} (f^{(0)}(x) = f(x))$. 试证: $f(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}$.

证法 1 (反证) 假设 $f(x) \not\equiv 0, x \geqslant 0$, 则不妨设 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[0, \varepsilon]$ 中, $f(x) \not\equiv 0$. 不然的话, 令

$$x_0 = \max\{\delta > 0 \mid f(x) = 0, \forall x \in [0, \delta]\},$$

则由 $f, f', \cdots, f^{(n-1)}$ 的连续性知, $f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, 且对 $\forall \varepsilon > 0$, 在 $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ 中 $f(x) \not\equiv 0$, 把 x_0 视作原点即可. 因而, 在 $[0, \varepsilon]$ 中, $f^{(j)}(x) \not\equiv 0, j = 0, 1, \cdots, n-1$.

取 $x_1 \in (0, 1)$, 使 $\frac{1}{x_1} > C$. 由 $f^{(j)} \in C^0(R)$, 可设 $M_j = \max\limits_{x \in [0, x_1]} |f^{(j)}(x)|$, 则 $M_j > 0$. 令 $x_2 \in [0, x_1]$, 使 $|f^{(j)}(x_2)| = M_j$. 由 Lagrange 中值定理得到 $x_3, x_4, \cdots, x_{n-j+2}$ 使

$$|f^{(i+1)}(x_{i-j+3})|$$
$$= \left|\frac{f^{(i)}(x_{i-j+2}) - f^{(i)}(0)}{x_{i-j+2} - 0}\right|$$
$$= \left|\frac{f^{(i)}(x_{i-j+2})}{x_{i-j+2}}\right|, i = j, j+1, \cdots, n-1.$$

则

$$0 < x_{n-j+2} < x_{n-j+1} < \cdots < x_2 \leqslant x_1 < 1,$$

且由题设得到

$$CM_j \geqslant C |f^{(j)}(x_{n-j+2})|$$
$$\geqslant |f^{(n)}(x_{n-j+2})|$$
$$= \left|\frac{f^{(n-1)}(x_{n-j+1})}{x_{n-j+1}}\right|$$
$$= \left|\frac{f^{(n-2)}(x_{n-j})}{x_{n-j+1} \cdot x_{n-j}}\right| = \cdots$$
$$= \left|\frac{f^{(j)}(x_2)}{x_{n-j+1} \cdot x_{n-j} \cdots x_2}\right|$$
$$\geqslant \frac{|f^{(j)}(x_2)|}{x_1} > CM_j,$$

矛盾. 所以, 对任何 $x \geqslant 0, f(x) = 0$.

类似可证对任何 $x \leqslant 0, f(x) = 0$(或者用 $f(-x)$ 代替 $f(x)$ 证得). 于是, $f(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R}$.

证法 2 设若 $x_0 \in \mathbf{R}, f(x_0) = f'(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$. 选 $0 < \varepsilon < 1$, 使得 $0 < \frac{C}{(n-j)!}\varepsilon^{n-j} \leqslant r < 1$, 则当 $|x - x_0| < \varepsilon < 1$ 时, 对 $f^{(j)}$ 应用 Taylor 公式, 存在 $\xi_1 \in (x_0, x)$(或 $\xi_1 \in (x, x_0)$), 使得

$$|f^{(j)}(x)|$$
$$= \left| f^{(j)}(x_0) + \frac{f^{(j+1)}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots \right.$$
$$+ \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-j-1)!}(x - x_0)^{n-j-1}$$
$$\left. + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{(n-j)!}(x - x_0)^{n-j} \right|$$
$$= \frac{1}{(n-j)!} |f^{(n)}(\xi_1)| |x - x_0|^{n-j}$$

$$\leqslant \frac{1}{(n-j)!}C\varepsilon^{n-j}|f^{(j)}(\xi_1)|$$
$$\leqslant r|f^{(j)}(\xi_1)|\leqslant r^2|f^{(j)}(\xi_2)|\leqslant\cdots$$
$$\leqslant r^k|f^{(j)}(\xi_k)|$$
$$\leqslant r^kM_j\longrightarrow 0\ (k\to+\infty).$$

这就证明了,对任意 $x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$,$f^{(j)}(x)=0$,其中 $x_0<\xi_k<\xi_{k-1}<\cdots<\xi_2<\xi_1<x$(或 $x_0>\xi_1>\xi_2>\cdots>\xi_{k-1}>\xi_k>x$).类似题 1.6.18 证法 2 的最后部分,有

$$f(x)\equiv 0,x\in\mathbf{R}.$$

1.6.20 函数 f 在有界区间 (a,b) 内可导,无界,证明 $f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界,但其逆不真.

证法1 因为 f 在 (a,b) 内无界,故存在 $x_n\in(a,b)$,使

$$|f(x_n)|>n,\quad n=1,2,\cdots.$$

在 (a,b) 中取一点 c,由 Lagrange 中值定理,$\exists\xi_n\in(a,b)$,使

$$|f'(\xi_n)|=\left|\frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c}\right|$$
$$\geqslant\frac{|f(x_n)|-|f(c)|}{b-a}$$
$$\geqslant\frac{n-|f(c)|}{b-a}\to+\infty,$$

因此,$f'(x)$ 在 (a,b) 内也无界.

证法2 (反证)假设 $f'(x)$ 在 (a,b) 内有界,则存在 $M>0$,使对 $\forall x\in(a,b)$,$|f'(x)|\leqslant M$.

取定 $c\in(a,b)$,则对任意 $x\in(a,b)$,有

$$|f(x)-f(c)|=|f'(\xi)||x-c|$$
$$\leqslant M(b-a),$$

其中 ξ 在 x 与 c 之间,$\xi\in(a,b)$.又因

$$|f(x)-f(c)|\geqslant|f(x)|-|f(c)|,$$

所以

$$|f(x)|\leqslant|f(c)|+|f(x)-f(c)|$$
$$\leqslant|f(c)|+M(b-a).$$

这与 $f(x)$ 在 (a,b) 内无界相矛盾.因此,$f'(x)$ 在 (a,b) 中也是无界的.

命题之逆不真.例如函数 $f(x)=\sqrt{x}$,$x\in(0,1)$,$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ 在 $(0,1)$ 内无界,但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 内是有界的.

1.6.21 设在有界区间 $[a,b]$ 上,函数 f 连续,g 可导,$g(a)=0$,$\lambda\neq0$ 是常数,如果对 $\forall x\in[a,b]$ 有

$$|g(x)f(x)+\lambda g'(x)|\leqslant|g(x)|,$$

试证:$g(x)\equiv0,x\in[a,b]$.

证法1 (反证)假设 $g\not\equiv0$,则存在子区间 $(c,d)\subset(a,b)$,使得在 (c,d) 内,$g(x)\neq0$,而 $g(c)=0$,于是在 (c,d) 内有

$$\left|f(x)+\lambda\frac{g'(x)}{g(x)}\right|\leqslant1.$$

令 $h(x)=\ln|g(x)|$,$x\in(c,d)$,则 $h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$,于是

$$|f(x)+\lambda h'(x)|$$
$$=\left|f(x)+\lambda\frac{g'(x)}{g(x)}\right|\leqslant1.\qquad(*)$$

但 $\lim\limits_{x\to c^+}h(x)=\lim\limits_{x\to c^+}\ln|g(x)|=-\infty$,因此 $h(x)$ 在有界区间 (c,d) 内无界.由题 1.6.20,$h'(x)$ 也在 (c,d) 内无界.再由 $(*)$ 及 f 在 $[a,b]$ 上连续因而有界得

$$\left|\frac{f(x)}{\lambda}+h'(x)\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda|},\ |f(x)|\leqslant M,$$
$$|h'(x)|=\left|\frac{f(x)}{\lambda}+h'(x)-\frac{f(x)}{\lambda}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{f(x)}{\lambda}+h'(x)\right|+\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|$$
$$\leqslant\left|\frac{1}{\lambda}\right|+\left|\frac{f(x)}{\lambda}\right|\leqslant\frac{1+M}{|\lambda|}.$$

与 $h'(x)$ 在 (c,d) 上无界矛盾.所以 $g\equiv0,x\in[a,b]$.

证法2 令

$$G(x)=g(x)e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)dt},$$

显然 $G(a)=0$.

$$|G'(x)|=e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)dt}\left|\frac{g(x)f(x)}{\lambda}+g'(x)\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{|\lambda|}|e^{\frac{1}{\lambda}\int_a^x f(t)dt}g(x)|=\frac{1}{|\lambda|}|G(x)|.$$

令 ε 充分小,使 $[a,a+\varepsilon]\subset[a,b]$,且 $\varepsilon<|\lambda|$.又设 d 是 $|G(x)|$ 在 $[a,a+\varepsilon]$ 上的最大值点,若 $G(d)\neq0$,则

$$0\neq|G(d)|=|G(d)-G(a)|$$
$$=|G'(\xi)||d-a|$$
$$<\frac{1}{|\lambda|}|G(\xi)||\lambda|=|G(\xi)|,$$

其中 $a<\xi<d\leqslant a+\varepsilon$,$|G(d)|<|G(\xi)|$ 与 $G(d)$ 是 G 在 $[a,a+\varepsilon]$ 上的最大值矛盾.因此有

$$g(x)\equiv0,x\in[a,a+\varepsilon].$$

由此可推出在 $[a,a+2\varepsilon]$ 上 $g(x)\equiv0,\cdots$,在 $[a,a+N\varepsilon]$ 上 $g(x)\equiv0$,当 $N\varepsilon\geqslant b-a$ 时,就得在 $[a,b]$ 上 $g(x)\equiv0$.

1.6.22 设函数 f 在 $[0,1]$ 上可导,$f(0)=0$,$f(1)=1$,$k_1,\cdots,k_n$ 是任意 n 个正数.试证:在 $[0,1]$ 中存在 n 个不同的数 $x_1,\cdots,x_n$ 使

$$\sum_{i=1}^n\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^n k_i.$$

证 令 $S=\sum_{i=1}^{n}k_i, y_0=0, y_i=\frac{1}{S}\sum_{j=1}^{i}k_j, 1\leqslant i\leqslant n$，则

$$0=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=1,$$

$$y_i-y_{i-1}=\frac{k_i}{S}, 1\leqslant i\leqslant n.$$

由于 f 在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=0, f(1)=1$，所以根据介值定理，存在 $0=\xi_0<\xi_1<\cdots<\xi_n=1$，使得 $f(\xi_i)=y_i, 0\leqslant i\leqslant n$.

因为 f 在 $[0,1]$ 上可导，所以由 Lagrange 中值定理，存在 $x_1,\cdots,x_n\in[0,1]$ 使得

$0=\xi_0<x_1<\xi_1<x_2<\xi_2<\cdots<x_n<\xi_n=1$ 且

$$\frac{k_i}{Sf'(x_i)}=\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(x_i)}=\frac{f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})}{f'(x_i)}$$
$$=\xi_i-\xi_{i-1}, 1\leqslant i\leqslant n.$$

于是，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{Sf'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_{i-1})$$
$$=\xi_n-\xi_0=1-0=1,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=S=\sum_{i=1}^{n}k_i.$$

注 从要论证的结论，反推上去也是一种有效的方法．本题就是从结论反推的．$\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{f'(x_i)}=\sum_{i=1}^{n}k_i=S$ 就是 $\sum_{i=1}^{n}\frac{k_i}{Sf'(x_i)}=1$．记 $\frac{k_i}{Sf'(x_i)}=\frac{y_i-y_{i-1}}{f'(x_i)}=\frac{f(\xi_i)-f(\xi_{i-1})}{f'(x_i)}=\xi_i-\xi_{i-1}$，立即想到利用中值定理和介值定理了．

√**1.6.23** 设函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $ab>0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证法 1 设函数 $F(x)=\frac{f(x)}{x}, G(x)=\frac{1}{x}$，因 $ab>0$，所以 a,b 同号，因此 $F(x), G(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且在 (a,b) 中可导．$G'(x)=-\frac{1}{x^2}\neq 0, F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$．根据 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{af(b)-bf(a)}{a-b}$$
$$=\frac{\frac{f(b)}{b}-\frac{f(a)}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}=\frac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}$$
$$=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{\frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}}{-\frac{1}{\xi^2}}$$
$$=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证法 2 设函数 $F(x)=xf(\frac{ab}{x})$，由 Lagrange 中值定理，$\exists\,\eta\in(a,b)$ 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix}a & b\\ f(a) & f(b)\end{vmatrix}=\frac{bf(a)-af(b)}{b-a}$$
$$=\frac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$$
$$=f(\frac{ab}{\eta})+\eta f'(\frac{ab}{\eta})\frac{-ab}{\eta^2}$$
$$=f(\frac{ab}{\eta})-\frac{ab}{\eta}f'(\frac{ab}{\eta})=f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

其中 $\xi=\frac{ab}{\eta}\in(a,b)$.

1.6.24 （推广的 L'Hospital 法则） 设 $f(x), g(x)$ 在 (a,b) 内可导，且对 $\forall x\in(a,b), g'(x)\neq 0$，当 $x\to a^+$ 时，$g(x)\to\infty$，且

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A\text{（有限实数或 }\infty\text{）}.$$

则

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

证 1°. A 为有限实数．

因为 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，所以对 $\forall\varepsilon>0, \exists x_1>a$，当 $a<\xi<x_1$ 时，

$$\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

对 $a<x<x_1$，应用 Cauchy 中值定理，存在 $\xi\in(x,x_1)$，使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

从而

$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}-A\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

又因为 $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=\infty$，所以存在 $\delta>0$，当 $a<x<a+\delta<x_1$ 时有

$$1+\left|\frac{g(x_1)}{g(x)}\right|<2,$$
$$\left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-A\right|=$$
$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\left[1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right]+\frac{f(x_1)}{g(x)}-A\right|=$$

$$\left|\left(\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A\right)\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)+\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}-A\right|\left|\left(1-\frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\right|$$

$$+\left|\frac{f(x_1)-Ag(x_1)}{g(x)}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{4}\cdot 2+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=A$.

2°. $A=\infty$. 此时,当 x 充分接近 a^+ 时,$f'(x)\neq 0$,并且对 $M=1$,存在 $\delta>0$,使当 $a<x<x_1<a+\delta$ 时,有

$$\left|\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)}\right|=\left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|>1(x<\xi<x_1).$$

从而 $|f(x)-f(x_1)|>|g(x)-g(x_1)|\geqslant|g(x)|-|g(x_1)|$. 固定 x_1,并令 $x\to a^+$,就得 $|f(x)-f(x_1)|\to+\infty$. 可见 $\lim\limits_{x\to a^+}|f(x)|=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$. 由此及利用 1° 的结果得出

$$\lim_{x\to a^+}\frac{g(x)}{f(x)}=\lim_{x\to a^+}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0.$$

于是 $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$.

注 1 这里是 $x\to a^+$ 的情形,对 $x\to a^-$ 以及 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 的情形也有类似的结论和证法. 由 $x\to a^+$ 及 $x\to a^-$ 的结论可知 $x\to a$ 时的结论也成立.

注 2 这里"推广"的意思在"$\frac{\infty}{\infty}$"型的 L'Hospital 法则中,不需要 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$. 它给应用 L'Hospital 法则带来极大的简便. 它的应用在题 1.6.25 的证法 2,1.6.26 的证法 1 以及 1.6.27 的证法 2 中可以见到.

√1.6.25 设函数 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且满足条件 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$,试证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证法 1 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0$,所以对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\Delta_1>0$,使当 $x>\Delta_1$ 时,有 $|f(x)+f'(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$.

固定 Δ_1,当 $x>\Delta_1$ 时,由 Cauchy 中值定理,存在 $\xi\in(\Delta_1,x)$,使得

$$\frac{e^xf(x)-e^{\Delta_1}f(\Delta_1)}{e^x-e^{\Delta_1}}=\frac{e^\xi[f(\xi)+f'(\xi)]}{e^\xi}=f(\xi)+f'(\xi).$$

于是,当 $x>\Delta>\max\left\{\Delta_1,\ln\frac{2|f(\Delta_1)|+1}{\varepsilon}e^{\Delta_1}\right\}$ 时,有

$$|f(x)-0|=|f(x)|$$

$$=|e^{\Delta_1-x}f(\Delta_1)+(1-e^{\Delta_1-x})[f(\xi)+f'(\xi)]|$$

$$\leqslant e^{\Delta_1-x}|f(\Delta_1)|+|f(\xi)+f'(\xi)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

证法 2 由题 1.6.24,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=0.$$

1.6.26 设 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=r\in\mathbf{R}$. 证明

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=r.$$

证法 1 由推广的 L'Hospital 法则得

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^xf(x)+e^xf'(x)}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x[f(x)+f'(x)]}{e^x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=r.$$

证法 2 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+f'(x)]=r\in\mathbf{R}$,所以,存在 $x_0>0$,当 $x>x_0$ 时,有

$$|f(x)+f'(x)-r|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又因 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x_0)-r|e^{x_0-x}=0$,故存在 $\Delta>x_0>0$,当 $x>\Delta$ 时,有

$$|f(x_0)-r|e^{x_0-x}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

根据 Cauchy 中值定理,存在 $\xi\in(x_0,x)$,使得

$$\frac{f(x)e^x-f(x_0)e^{x_0}}{e^x-e^{x_0}}$$

$$=\frac{(f(\xi)+f'(\xi))e^\xi}{e^\xi}=f(\xi)+f'(\xi),$$

移项得 $f(x)=[f(\xi)+f'(\xi)](1-e^{x_0-x})+f(x_0)e^{x_0-x}$. 因而

$$|f(x)-r|$$

$$=|[f(\xi)+f'(\xi)-r](1-e^{x_0-x})$$

$$+f(x_0)e^{x_0-x}-re^{x_0-x}|$$

$$\leqslant|f(\xi)+f'(\xi)-r|$$

$$+|f(x_0)-r|e^{x_0-x}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=r$.

1.6.27 设函数 f 在 $(a,+\infty)$ 上可导,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$,求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$.

证法 1 对 $\forall \varepsilon > 0$,因为 $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$,所以存在 $\Delta_1 > \max(0,a)$,当 $x > \Delta_1$ 时,$|f'(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. 于是,当 $x > \Delta = \frac{2|f(\Delta_1)|}{\varepsilon} + \Delta_1$ 时,根据 Lagrange 中值定理,存在 $\xi \in (\Delta, x)$,使得

$$\left|\frac{f(x)}{x} - 0\right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leqslant \left|\frac{f(x)}{x - \Delta_1}\right|$$

$$= \left|\frac{f(x) - f(\Delta_1) + f(\Delta_1)}{x - \Delta_1}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{f(x) - f(\Delta_1)}{x - \Delta_1}\right| + \left|\frac{f(\Delta_1)}{x - \Delta_1}\right|$$

$$= |f'(\xi)| + \frac{|f(\Delta_1)|}{|x - \Delta_1|}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{|f(\Delta_1)|}{\frac{2|f(\Delta_1)|}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

证法 2 根据题 1.6.24(推广的 L'Hospital 法则)和题设有

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0.$$

1.6.28 设 $D \subset \mathbf{R}^n$ 为开集,如果函数 $f: D \to \mathbf{R}$ 满足:

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \cdots, x_n), t > 0.$$

则称 f 为 **α 次齐次函数**. 证明: f 为可微的 α 次齐次函数 $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n) = \alpha f(x_1, \cdots, x_n)$.

证 ($\Rightarrow$) f 为 α 次齐次函数,则有

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \cdots, x_n), t > 0.$$

两边对 t 求导,又 f 可微,就得

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_i(tx_1, \cdots, tx_n) = \alpha t^{\alpha-1} f(x_1, \cdots, x_n).$$

令 $t = 1$,有

$$\sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n) = \alpha f(x_1, \cdots, x_n).$$

($\Leftarrow$) 若 $\sum_{i=1}^n x_i f'_{x_i}(x_1, \cdots, x_n) = \alpha f(x_1, \cdots, x_n)$,令

$$\varphi(t) = \frac{f(tx_1, \cdots, tx_n)}{t^\alpha}, \alpha > 0,$$

则

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t^{2\alpha}}\Big[\sum_{i=1}^n x_i f'_i(tx_1, \cdots, tx_n) \cdot t^\alpha - f(tx_1, \cdots, tx_n)\alpha \cdot t^{\alpha-1}\Big]$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n tx_i f'_i(tx_1, \cdots, tx_n) - \alpha f(tx_1, \cdots, tx_n)}{t^{\alpha+1}}$$

$$\xlongequal{tx_i = u_i} \frac{\sum_{i=1}^n u_i f'_i(u_1, \cdots, u_n) - \alpha f(u_1, \cdots, u_n)}{t^{\alpha+1}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n u_i f'_{u_i}(u_1, \cdots, u_n) - \alpha f(u_1, \cdots, u_n)}{t^{\alpha+1}} = 0.$$

从而 $\varphi(t)$ 为常数,即

$$\frac{f(tx_1, \cdots, tx_n)}{t^\alpha} = \varphi(t) = \varphi(1) = f(x_1, \cdots, x_n), t > 0.$$

于是

$$f(tx_1, \cdots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \cdots, x_n), t > 0.$$

f 是 α 次齐次函数.

1.6.29 设 f 在 x_0 2 阶可导. 证明

$$f''(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}.$$

证 因为 f 在点 x_0 2 阶可导,所以 f 在 x_0 的某个开邻域中 1 阶可导,当然也连续. 根据 L'Hospital 法则和 2 阶导数的定义,有

$$\lim_{h\to0} \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}$$

$$= \lim_{h\to0} \frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0 - h)}{2h}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{h\to0}\Big[\frac{f'(x_0 + h) - f'(x_0)}{h} + \frac{f'(x_0 - h) - f'(x_0)}{-h}\Big]$$

$$= \frac{1}{2}[f''(x_0) + f''(x_0)] = f''(x_0).$$

1.6.30 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界,且 $f'' \geqslant 0$. 证明 f 是常数.

证 (反证) 假设 f 不为常数,则存在 $x_0 \in \mathbf{R}$,$f'(x_0) \neq 0$,不妨设 $f'(x_0) > 0$(当 $f'(x_0) < 0$ 时,类似证明或用 $-f$ 代替 f). 令

$$F(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)],$$

则

$$F'(x) = f'(x) - f'(x_0).$$

因为 $f''(x) \geqslant 0$,所以 f' 单调增,因此,当 $x \geqslant x_0$ 时,$F'(x) = f'(x) - f'(x_0) \geqslant 0$,从而 $F(x)$ 在 $[x_0, +\infty)$ 上单调增. 于是,

$$f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = F(x) \geqslant F(x_0) = 0,$$

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), x \geqslant x_0.$$

因为 $\lim_{x\to+\infty}[f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)] = +\infty$,所以 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,这与 f 在 $\mathbf{R}$ 上有界矛盾. 故 f 是常值函数.

√1.6.31 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上 2 阶可导,且 $f(a) > 0$,$f'(a) < 0$,当 $x > a$ 时,$f''(x) \leqslant 0$. 试证: 方程

$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一根.

证 因为 $f''(x)\leqslant 0(x>a)$,所以 $f'(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 内单调减,故当 $x>a$ 时,$f'(x)\leqslant f'(a)<0$. 从而 f 在 $(a,+\infty)$ 内严格减,$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内至多有一根.

另一方面,由于当 $x>a$ 时,

$$\{f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]\}' = f'(x)-f'(a)\leqslant 0,$$

所以,$f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)]$ 单调减,因而有

$$f(x)-[f(a)+f'(a)(x-a)] \leqslant f(a)-[f(a)+f'(a)(a-a)]=0,$$

$$f(x)\leqslant f(a)+f'(a)(x-a),\ x>a.$$

由

$$\lim_{x\to+\infty}[f(a)+f'(a)(x-a)]=-\infty$$

立即得到 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$. 因此,存在 $b>a$,使 $f(b)<0$. 再由题设 $f(a)>0$ 和连续函数的零值定理,存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

综上所述,$f(x)=0$ 在 $(a,+\infty)$ 内有且仅有一根.

1.6.32 设函数 $f(x)=e^x\left[\frac{1}{x}-\frac{\ln(x-1)}{x}\right]$,试求函数 f 在 $[2,4]$ 上的最大值.

解法1 先求 f 的导数

$$f'(x)= e^x\left(\frac1x-\frac{\ln(x-1)}{x}-\frac1{x^2}+\frac{\ln(x-1)}{x^2}-\frac{1}{x(x-1)}\right)$$

$$=\frac{e^x}{x^2(x-1)}\{(x-1)^2[1-\ln(x-1)]-x\}$$

$$=\frac{e^x(x-1)}{x}\left[1-\ln(x-1)-\frac{x}{(x-1)^2}\right].$$

再令 $g(x)=1-\ln(x-1)-\frac{x}{(x-1)^2}$,则

$$g'(x)=-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{2x}{(x-1)^3}=\frac{x(3-x)}{(x-1)^3}.$$

当 $2\leqslant x\leqslant 3$ 时,$g'(x)>0$;而当 $3<x<4$ 时,$g'(x)<0$. 故 $g(x)$ 在 $[2,3]$ 上单调增,在 $[3,4]$ 上单调减. 易见在 $x\in[2,4]$ 上,

$$g(x)\leqslant g(3)=1-\ln2-\frac34 =\frac14-\ln2=\frac14-\frac12\ln4 <\frac14-\frac12=-\frac14<0.$$

由此可知在 $x\in[2,4]$ 上,$f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x}g(x)<0$. 故 $f(x)$ 在 $[2,4]$ 上严格减,所以

$$\max_{x\in[2,4]} f(x)=f(2)=\frac12e^2.$$

解法2 由解法1知

$$f'(x)=\frac{e^x}{x^2(x-1)}\{(x-1)^2[1-\ln(x-1)]-x\}.$$

注意到 $x>e+1$ 时,

$$f(x)=\frac{e^x}{x}[1-\ln(x-1)]<0,$$

而 $f(2)=\frac12e^2>0$,所以只须在区间 $[2,e+1]$ 上讨论 $f(x)$ 即可.

令 $h(x)=(x-1)^2[1-\ln(x-1)]$,则

$$h'(x)=2(x-1)[1-\ln(x-1)]-(x-1)=(x-1)[1-2\ln(x-1)].$$

而在 $[2,e+1]$ 上,当且仅当 $x=e^{\frac12}+1$ 时,$h'(x)=0$. 此时,在 $[2,e^{\frac12}+1]$ 上,$h'(x)\geqslant0$,$h(x)$ 单调增,在 $[e^{\frac12}+1,e+1]$ 上,$h'(x)\leqslant0$,h 单调减,再由 $h(2)=1$,$h(e^{\frac12}+1)=\frac e2$,$h(e+1)=0$ 得到,在 $[2,e+1]$ 上,

$$h(x)<2,\ f'(x)<0.$$

从而 $f(x)$ 在 $[2,e+1]$ 上单调减,所以

$$\max_{x\in[2,4]}f(x)=\max_{x\in[2,e+1]}f(x)=f(2)=\frac12e^2.$$

1.6.33 求出使得下列不等式对所有自然数 n 都成立的最大的数 α 及最小的数 β:

$$\left(1+\frac1n\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac1n\right)^{n+\beta}.$$

解 显然对 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\left(1+\frac1n\right)^{n+\alpha}\leqslant e\leqslant\left(1+\frac1n\right)^{n+\beta}$$

$$\Leftrightarrow(n+\alpha)\ln\left(1+\frac1n\right)\leqslant1\leqslant(n+\beta)\ln\left(1+\frac1n\right)$$

$$\Leftrightarrow\alpha\leqslant\frac{1}{\ln\left(1+\frac1n\right)}-n\leqslant\beta.$$

因此,

$$\alpha=\inf_{n\in\mathbf{N}}\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac1n\right)}-n\right\},$$

$$\beta=\sup_{n\in\mathbf{N}}\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac1n\right)}-n\right\}.$$

设

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac1x,\ x\in(0,1],$$

则 $f(x)$ 是严格单调减的函数. 事实上,因为

$$f'(x)=\frac{-1}{[\ln(1+x)]^2}\frac{1}{1+x}+\frac1{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{x^2(1+x)[\ln(1+x)]^2},$$

令 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$,$x\in[0,1]$,则

$$g'(x)=2\ln(1+x)+\ln^2(1+x)-2x,$$

$$g''(x)=\frac{2}{1+x}+\frac{2\ln(1+x)}{1+x}-2$$

$$=\frac{2}{1+x}[\ln(1+x)-x]<0.$$

所以 $g'(x)$ 在 $[0,1]$ 中严格单调减. 又 $g'(0)=0$, 故对任意 $x\in(0,1]$, $g'(x)<g'(0)=0$, 因此 $g(x)$ 在 $(0,1]$ 中亦严格单调减, 因而同理有 $g(x)<g(0)=0$, $\forall x\in(0,1]$. 这意味着 $f'(x)<0$, $\forall x\in(0,1]$, 于是 $f(x)$ 在 $(0,1]$ 中严格单调减. 由此结论得

$$\alpha=\inf_{n\in\mathbf{N}}\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right\}$$

$$=\inf_{x\in(0,1]}\{f(x)\}=f(1)=\frac{1}{\ln 2}-1,$$

$$\beta=\sup_{n\in\mathbf{N}}\left\{\frac{1}{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}-n\right\}$$

$$=\sup_{x\in(0,1]}\{f(x)\}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}.$$

再由 L'Hospital 法则得

$$\beta=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x+(1+x)\ln(1+x)}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1+1+\ln(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

1.6.34 试证函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ 在开区域(连通开集) $D\subset\mathbf{R}^n$ 上满足 $\frac{\partial f}{\partial x_1}=\cdots=\frac{\partial f}{\partial x_n}=0$, 则 f 在 D 上为常值函数.

证法 1 先证 f 为局部常值函数. $\forall p\in D$, 作开球 $B_p(\varepsilon_p)\subset D$. 对于 $\forall q\in B_p(\varepsilon_p)$, 作 p 和 q 的连线 $(1-t)p+tq$, 令

$$g(t)=f((1-t)p+tq),0\leqslant t\leqslant1,$$

则

$$g'(t)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^n 0\cdot(q_i-p_i)$$

$$=0,0\leqslant t\leqslant1.$$

由此知 $g(t)$ 为 $[0,1]$ 上的常值函数, 从而 $f(q)=g(1)=g(0)=f(p)$, f 在 $B_p(\varepsilon_p)$ 中为常值函数.

令 $U_p=\{q\in D\mid f(q)=f(p)\}$, 由于 f 是局部常值函数, 故 U_p 为 $\mathbf{R}^n$ 中的开集. 可证 $U_p=D$ (反证). 事实上, 假设 $U_p\subset D$ 但 $U_p\neq D$, 则 $D-U_p\neq\varnothing$. 因为 f 为局部常值函数, 故 $D-U_p$ 为非空开集, 且 $(D-U_p)\cap U_p=\varnothing$, $D=(D-U_p)\cup U_p$. 这蕴涵着 D 不连通, 与题设 D 为开区域是连通的开集矛盾. 因而 $U_p=D$. 由 U_p 的定义知, f 在 $D=U_p$ 上是常值函数.

证法 2 取固定点 $p\in D$. 对 $\forall q\in D$, 由于 D 为区域, 所以存在连接 p 和 q 的折线, 记相应的折线道路(连续映射)为

$$\varphi:[0,1]\to D,\varphi(0)=p,\varphi(1)=q.$$

对 $\forall r\in\varphi([0,1])$, 作开球 $B_r(\varepsilon_r)\subset D$, 使得 f 在 $B_r(\varepsilon_r)$ 上为常值. 显然, $\{B_r(\varepsilon_r)\mid r\in\varphi([0,1])\}$ 覆盖了整个紧致集(有界闭集) $\varphi([0,1])$. 因此, 必存在有限个 $\{B_{r_i}(\varepsilon_{r_i})\mid i=1,\cdots,m\}$ 覆盖 $\varphi([0,1])$, 易见, $f|_{B_{r_i}(\varepsilon_{r_i})}$, $i=1,\cdots,m$ 上的值都相同. 特别地, $f(p)=f(q)$. 这就证明了 f 在 D 上为常值函数.

1.6.35 设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 为区域, f 在 D 中连续, $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv0$, 问当 y 固定时 f 是否关于 x 为常值, 即 $f(x,y)=g(y)$? 再问, 当 D 为什么样的区域时, f 一定与 x 无关.

解 在 f 在 D 中连续, $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv0$ 的条件下, 不能断言 f 与 x 无关(即固定 y, f 关于 x 为常值), 举例如下:

$$f(x,y)=\begin{cases}y^2, & (x,y)\in D_1,\\ y^3, & (x,y)\in D_2,\\ 0, & (x,y)\in D_3,\end{cases}$$

其中 $D_1=[-2,-1]\times[0,1]$, $D_2=[1,2]\times[0,1]$, $D_3=[-2,2]\times[-1,0]$, $D=D_1\cup D_2\cup D_3$ 显然是 R^2 中的区域, f 在 D 上连续, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv0$, $(x,y)\in D$, 但当 $y=\frac{1}{2}$ 时,

$$f\left(x,\frac{1}{2}\right)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x\in[-2,-1],\\ \frac{1}{8}, & x\in[1,2],\end{cases}$$

函数值与 x 有关!

如果当 y 固定时, $D^y=\{x\mid(x,y)\in D\}$ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的一个连通区间时, 又有 $\frac{\partial f}{\partial x}\equiv0$, 函数 $f(x,y)$ 必与 x 无关.

1.6.36 设 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中 n 个线性无关的单位向量, 函数 f 在区域(连通的开集) $D\subset\mathbf{R}^n$ 中可微, 方向导数 $\frac{\partial f}{\partial\eta_i}(x)=0$, $i=1,\cdots,n$, $x\in D$. 试证: 在 D 上, $f\equiv$ 常数.

证 记 $\eta_i=(a_{i1},\cdots,a_{in})\in S^{n-1}$ ($\mathbf{R}^n$ 中的单位球面), $i=1,2,\cdots,n$, 则

$$0=\frac{\partial f}{\partial\eta_i}$$

$$= f_{x_1}'a_{i1} + f_{x_2}'a_{i2} + \cdots + f_{x_n}'a_{in}, i = 1,\cdots,n. \qquad (*)$$

因 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 线性无关,故

$$\det(a_{ij}) \neq 0,$$

从而(*)只有零解

$$f_{x_i}' \equiv 0, i = 1,\cdots,n.$$

又因 D 为区域,故连通,所以

$$f(x) \equiv \text{常数}, x \in D.$$

1.6.37 试证函数 $f(u,v) = (u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})^2$ 在区域

$$D = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u < \sqrt{2}, v > 0\}$$

中的最小值为 8.

证法 1 先求函数 f 的临界点(即驻点):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial u} = 2(u-v) - 2(\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} \\ \quad = 0 & ① \\ \frac{\partial f}{\partial v} = -2(u-v) + 2(\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})\frac{9}{v^2} = 0 & ② \end{cases}$$

视 $u-v, \sqrt{2-u^2}-\frac{9}{v}$ 为两个未知量,则上述等式是一个二元一次齐次方程组.可以断言:在临界点处,其行列式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{2u}{\sqrt{2-u^2}} \\ -2 & \frac{18}{v^2} \end{vmatrix} = 4\left(\frac{9}{v^2} - \frac{u}{\sqrt{2-u^2}}\right) = 0.$$

(反证)事实上,若 $\Delta \neq 0$,则上述齐次方程组只有平凡解:

$$\begin{cases} u - v = 0 \\ \sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v} = 0. \end{cases}$$

因此,$u = v, \sqrt{2-u^2} = \frac{9}{v}$,于是 $u^4 - 2u^2 + 81 = 0$.但此方程无实数解.矛盾.因此,在临界点处,$\Delta = 0$,即

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{9}{v^2}. \qquad ③$$

这样,在条件③下,①与②实为同一方程,整理①得

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} - \frac{v}{\sqrt{2-u^2}} - \left(1 - \frac{9}{v\sqrt{2-u^2}}\right)\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} = 0,$$

$$-\frac{v}{\sqrt{2-u^2}} + \frac{9u}{v(2-u^2)} = 0,$$

$$\frac{v}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{9}{v\sqrt{2-u^2}}\frac{u}{\sqrt{2-u^2}},$$

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} = \frac{v^2}{9}. \qquad ④$$

由③④得

$$\frac{9}{v^2} = \frac{u}{\sqrt{2-u}} = \frac{v^2}{9},$$

$$v^4 = 81,$$

由 $v > 0$ 知 $v = 3$.因此,

$$\frac{u}{\sqrt{2-u^2}} = 1.$$

化简得 $u^2 = 1$,再由 $0 < u < \sqrt{2}$ 知 $u = 1$.即 f 只有一个临界点 $(u,v) = (1,3)$.又因为

$$\lim_{v\to+\infty} f(u,v) = +\infty = \lim_{v\to0^+} f(u,v),$$

所以,f 在 D 中无最大值,但必有最小值.以 f 有唯一临界点知 $(u,v) = (1,3)$ 为 f 的最小值点而 $f(1,3) = 8$.

证法 2 令点 $P(u) = (u, \sqrt{2-u^2}) \in \mathbf{R}^2$,点 $Q(v) = (v, \frac{9}{v}) \in \mathbf{R}^2$.显然,

$$M = \{P(u) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < u < \sqrt{2}\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2, x > 0, y > 0\}$$

为圆周在第 1 象限的部分.

$$N = \{Q(v) \in \mathbf{R}^2 \mid v > 0\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 9, x > 0, y > 0\}$$

为双曲线在第 1 象限的一支.

记 $\rho(P,Q)$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中点 P、Q 之间的 Euclid 距离,C 和 H 分别为直线 $y = x$ 与圆和双曲线在第 1 象限内的交点.则

$$f(u,v) = (u-v)^2 + (\sqrt{2-u^2} - \frac{9}{v})^2$$
$$= [\rho(P(u), Q(v))]^2$$
$$\geqslant [\rho(C,H)]^2 = [\rho((1,1),(3,3))]^2$$
$$= (3-1)^2 + (\sqrt{2^2-1} - \frac{9}{3})^2 = 8.$$

即当 $(u,v) = (1,3) \in D$ 时,$f(u,v)$ 取其最小值 8.

$\rho(P(u), Q(v)) \geqslant \rho(C,H)$ 的证明如下.

易知,$x + y = 2$ 与 $x + y = 6$ 分别是 $P(u)$ 所在圆周在点 $C(1,1)$ 处与 $Q(v)$ 所在双曲线在点 $H(3,3)$ 处的切线,两切线相互平行,并且都与线段 CH(位于直线 $x = y$ 上)垂直;除点 C 外,其余的点 $P(u) \in M$ 都满足 $x + y < 2$(当 $x \neq y, x^2 + y^2 = 2$ 时,$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 < 2(x^2 + y^2) = 4$,即 $x + y < 2$);除点 H 外,其余的点 $Q(v) \in N$ 都满足 $x + y > 6$(当 $x > 0, y > 0, x \neq y, xy = 9$ 时,$x + y > 2\sqrt{xy} = 6$).因而,

$$\rho(P(u),Q(v))\geqslant\rho(C,H).$$

1.6.38　求函数 $f(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z(x>0,y>0,z>0)$ 在球面 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ 上的最大值,并证明:对任何正数 a,b,c 有

$$abc^3\leqslant 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

解　应用 Lagrange 不定乘数法.设

$$F(x,y,z)=\ln x+\ln y+3\ln z-\lambda(x^2+y^2+z^2-5r^2),$$

则由方程

$$(*)\begin{cases}F_x'=\dfrac{1}{x}-2\lambda x=0,\\ F_y'=\dfrac{1}{y}-2\lambda y=0,\\ F_z'=\dfrac{3}{z}-2\lambda z=0,\\ F_\lambda'=-(x^2+y^2+z^2-5r^2)=0\end{cases}$$

得出

$$1-2\lambda x^2=0,1-2\lambda y^2=0,3-2\lambda z^2=0,$$
$$x^2+y^2+z^2-5r^2=0.$$

前三式相加代入第四式可得 $\lambda=\dfrac{1}{2r^2}$,于是

$$(x,y,z)=(r,r,\sqrt{3}r).$$

$f(x,y,z)$ 在条件 $x^2+y^2+z^2=5r^2$ 下的可能极值点就是 $(r,r,\sqrt{3}r)$.因为

$$\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty,\lim_{y\to0^+}\ln y=-\infty,$$
$$\lim_{z\to0^+}\ln z=-\infty,$$

故存在 $0<\varepsilon<r$,使得当 $0<x<\varepsilon$,或 $0<y<\varepsilon$,或 $0<z<\varepsilon$ 时,

$$f(x,y,z)<f(r,r,\sqrt{3}r).$$

又因 f 是连续函数,故 f 在紧致集(即有界闭集)

$$\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=5r^2,\ x\geqslant\varepsilon,y\geqslant\varepsilon,z\geqslant\varepsilon\}$$

上达到最大值,显然它就是 f 在 $\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2=5r^2,x>0,y>0,z>0\}$ 上的最大值,此最大值点满足 $(*)$,因此,最大值点必为唯一的驻点 $(r,r,\sqrt{3}r)$.此时

$$f(r,r,\sqrt{3}r)=\ln r+\ln r+3\ln(\sqrt{3}r)=\ln(3\sqrt{3}r^5).$$

对任何正数 a,b,c,取 $r=\left(\dfrac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{1}{2}}$,于是就有

$$(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2+(\sqrt{c})^2=a+b+c=5r^2,$$

$$f(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c})=\frac{1}{2}\ln(abc^3)$$

$$\leqslant\ln(3\sqrt{3}r^5)=\ln3\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{5}{2}}.$$

从而

$$abc^3\leqslant\left[3\sqrt{3}\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^{\frac{5}{2}}\right]^2=27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$$

1.6.39　设 f_x' 在 (x_0,y_0) 处存在,f_y' 在 (x_0,y_0) 处连续,求证:$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

证　$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$$=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]+[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]$$
$$=f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta\Delta y)\Delta y+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon\Delta x\ (0<\theta<1)$$
$$=[f_y'(x_0,y_0)+\eta]\Delta y+f_x'(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$
$$=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon\Delta x+\eta\Delta y,$$

其中 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\varepsilon=0$(因为 f_x' 在 (x_0,y_0) 存在),$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\eta=0$(因为 f_y' 在 (x_0,y_0) 连续).因此,f 在 (x_0,y_0) 处可微.

1.6.40　设 f_x',f_y' 在 (x_0,y_0) 的某个开邻域内存在,且在点 (x_0,y_0) 处可微,则

$$f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0).$$

证　设

$$w=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0),$$
$$\varphi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y).$$

由中值定理,

$$\frac{w}{\Delta x\Delta y}=\frac{1}{\Delta x\Delta y}[\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)]$$
$$=\frac{1}{\Delta x}\varphi_y'(y_0+\theta_1\Delta_y)\quad(0<\theta_1<1)$$
$$=\frac{1}{\Delta x}[f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_1\Delta y)-f_y'(x_0,y_0+\theta_1\Delta y)]$$
$$\xlongequal{f_y'\text{ 在}(x_0,y_0)\text{ 可微}}\frac{1}{\Delta x}\{f_y'(x_0,y_0)+f_{yx}''(x_0,y_0)\Delta x+f_{yy}''(x_0,y_0)\theta_1\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\theta_2\Delta y]-[f_y'(x_0,y_0)+f_{yy}''(x_0,y_0)\theta_1\Delta y+\varepsilon_3\theta_1\Delta y\}$$
$$=f_{yx}''(x_0,y_0)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\theta_1\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varepsilon_3\theta_1\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\varepsilon_i=0,i=1,2,\lim\limits_{\Delta y\to0}\varepsilon_3=0.$

交换 x 与 y 的位置得到

$$f_{xy}''(x_0,y_0)+\varepsilon_4+\varepsilon_5\theta_2\frac{\Delta x}{\Delta y}-\varepsilon_6\theta_2\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{w}{\Delta x\Delta y}$$
$$=f_{yx}''(x_0,y_0)+\varepsilon_1+\varepsilon_2\theta_1\frac{\Delta y}{\Delta x}-\varepsilon_2\theta_1\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

其中 $0<\theta_2<1,\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\varepsilon_i=0,i=4,5;\lim\limits_{\Delta x\to0}\varepsilon_6=0.$

取 $\Delta y=\Delta x\to 0$ 得到

$$f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0).$$

1.6.41 设 f_x',f_y',f_{yx}'' 在 (x_0,y_0) 的某个开邻域内存在，f_{yx}'' 在 (x_0,y_0) 处连续. 证明 $f_{xy}''(x_0,y_0)$ 存在，且

$$f_{xy}''(x_0,y_0)=f_{yx}''(x_0,y_0).$$

证 根据偏导数的定义，有

$$\begin{aligned}
&f_{xy}''(x_0,y_0)\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x'(x_0,y_0+\Delta y)-f_x'(x_0,y_0)}{\Delta y}\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta y}\times\\
&\Big[\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)}{\Delta x}\\
&\quad-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}\Big]\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w}{\Delta x\Delta y},
\end{aligned}$$

其中 $w=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)$.

同理可证

$$f_{yx}''(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{\Delta y\to 0}\frac{w}{\Delta x\Delta y}.$$

以上是 $\frac{w}{\Delta x\Delta y}$ 的两个累次极限. 令

$$\varphi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y),$$

则

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{w}{\Delta x\Delta y}&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0)}{\Delta x\Delta y}\\
&\xlongequal{\text{中值定理}}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x}\varphi_y'(y_0+\theta_2\Delta y)\\
&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x}[f_y'(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\\
&\quad-f_y'(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)]\\
&\xlongequal{\text{中值定理}}\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f_{yx}''(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\\
&\xlongequal{f_{yx}''\text{在}(x_0,y_0)\text{连续}}f_{yx}''(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

这是 $\frac{w}{\Delta x\Delta y}$ 的二重极限. 其中 $0<\theta_1,\theta_2<1$. 当 Δy 充分小时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{w}{\Delta x}$ 存在；当 Δx 充分小时，$\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{w}{\Delta y}$ 存在. 根据二重极限和累次极限的定理，有

$$\begin{aligned}
f_{xy}''(x_0,y_0)&=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{w}{\Delta x\Delta y}\\
&=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{w}{\Delta x\Delta y}=f_{yx}''(x_0,y_0).
\end{aligned}$$

§1.7 凸(凹)函数

f 在区间 I 上有定义. 如果对 $\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2,\forall t\in[0,1]$，有

$$f((1-t)x_1+tx_2)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}(1-t)f(x_1)+tf(x_2),$$

则称 f 在 I 上是**下凸(上凹)**的，简称为凸(凹)的.

如果对 $\forall x_1,x_2\in I,x_1<x_2,\forall t\in(0,1)$，有

$$f((1-t)x_1+tx_2)\underset{(>)}{<}(1-t)f(x_1)+tf(x_2),$$

则称 f 在 I 上是**严格凸(严格凹)**的.

如果 $x_1,x_2\in I,x_1<x_2$，令 $x=(1-t)x_1+tx_2$，则

$$t=\frac{x-x_1}{x_2-x_1},1-t=\frac{x_2-x}{x_2-x_1},$$

于是，

f 在区间 I 上为凸(凹)函数

$$\Leftrightarrow f(x)\underset{(\geqslant)}{\leqslant}\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

f 在区间 I 上为严格凸(凹)函数

$$\Leftrightarrow f(x)\underset{(>)}{<}\frac{x_2-x}{x_2-x_1}f(x_1)+\frac{x-x_1}{x_2-x_1}f(x_2).$$

下面主要讨论凸函数，凹函数的情形是完全类似的. 此外，容易看到：f 为凸函数 $\Leftrightarrow -f$ 为凹函数. 因此，研究了凸函数，实际上也就研究了凹函数. 至于严格凸(凹)函数，只须将凸(凹)函数中的符号 $\leqslant(\geqslant)$ 改为 $<(>)$ 即可.

1.7.1 f 在区间 I 上为凸函数

$\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$，不等式

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

中任何两式组成的不等式成立.

证 f 为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$，有

$$\begin{aligned}
&f(x_2)\leqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)\\
\Leftrightarrow\ &f(x_3)-f(x_2)\geqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_3)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)\\
&=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}[f(x_3)-f(x_1)]\\
\Leftrightarrow\ &\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.
\end{aligned}$$

f 为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$，有

$$f(x_2)\leqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)$

$$\leqslant \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$$=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}[f(x_3)-f(x_1)]$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}$$

f 为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$,有

$$f(x_2)\leqslant \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$

$$\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2)$$
$$\leqslant (x_3-x_2)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_3)$$
$$\Leftrightarrow (x_3-x_2)[f(x_2)-f(x_1)]$$
$$=(x_3-x_2)f(x_2)-(x_3-x_2)f(x_1)$$
$$\leqslant -(x_2-x_1)f(x_2)+(x_2-x_1)f(x_3)$$
$$=(x_2-x_1)[f(x_3)-f(x_2)]$$
$$\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

√1.7.2 f 在区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_1,\cdots,x_n\in I,t_1,\cdots,t_n>0(n\geqslant 2),t_1+\cdots+t_n=1$,有

$$f(t_1x_1+\cdots+t_nx_n)$$
$$\leqslant t_1f(x_1)+\cdots+t_nf(x_n).$$

证 ($\Leftarrow$)对 $\forall n\geqslant 2$,题中右边的不等式成立.特别取 $n=2,t_1=1-t,t_2=t,0<t<1$ 和 $x_1,x_2\in I$ 有

$$f((1-t)x_1+tx_2)\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2).$$

这就证明了 f 在 I 上是凸函数.

($\Rightarrow$)(归纳法)f 是 I 上的凸函数.

$n=2$ 时,$\forall t_1,t_2,t_1+t_2=1$,令 $1-t=t_1,t=t_2$,则对 $\forall x_1,x_2\in I$ 有

$$f(t_1x_1+t_2x_2)=f((1-t)x_1+tx_2)$$
$$\leqslant(1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$
$$=t_1f(x_1)+t_2f(x_2).$$

结论成立.

假设结论对 $n=k-1$ 成立,则当 $n=k$ 时,对 $\forall x_1,\cdots,x_k\in I,\forall t_1,\cdots,t_k>0,t_1+\cdots+t_k=1$,有

$$f(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)$$
$$=f((t_1+\cdots+t_{k-1})(\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_{k-1}}x_1+\cdots$$
$$+\frac{t_{k-1}}{t_1+\cdots+t_{k-1}}x_{k-1})+t_kx_k)$$
$$\leqslant(t_1+\cdots+t_{k-1})f(\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_{k-1}}x_1+\cdots$$
$$+\frac{t_{k-1}}{t_1+\cdots+t_{k-1}}x_{k-1})+t_kf(x_k)$$
$$\leqslant(t_1+\cdots+t_{k-1})[\frac{t_1}{t_1+\cdots+t_{k-1}}f(x_1)+\cdots$$
$$+\frac{t_{k-1}}{t_1+\cdots+t_{k-1}}f(x_{k-1})]+t_kf(x_k)$$
$$=t_1f(x_1)+\cdots+t_kf(x_k),$$

故结论对 $n=k$ 也成立.

1.7.3 设 f 在区间 I 上可导,则 f 在 I 上为凸函数
$\Leftrightarrow$(1)f' 在 I 上单调增
$\Leftrightarrow$(2)f 的图形在其任一点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线的上方.

证 (1)($\Rightarrow$)f 为 I 上的凸函数,由题 1.7.1,对 $\forall x_1,x,x_2\in I,x_1<x<x_2$,有

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$
$$\leqslant\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

令 $x\to x_1^+$ 就得

$$f'(x_1)=f'_+(x_1)=\lim_{x\to x_1^+}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}$$
$$\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

再利用后面的不等式,令 $x\to x_2^-$,得

$$f'(x_2)=f'_-(x_2)=\lim_{x\to x_2^+}\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$$
$$\geqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

比较两式立即得出 $f'(x_1)\leqslant f'(x_2)$,即 f' 在 I 上单调增.

($\Leftarrow$)f' 在 I 上单调增.对 $\forall x_1,x,x_2\in I,x_1<x<x_2$,由 Lagrange 中值定理,存在 $\xi_1,\xi_2,x_1<\xi_1<x<\xi_2<x_2$,使得

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f'(\xi_1)\leqslant f'(\xi_2)$$
$$=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}.$$

根据题 1.7.1,f 是 I 上的凸函数.

(2)($\Rightarrow$)设 f 为 I 上的凸函数,由(1)知 f' 在 I 上单调增.对 $\forall x_0\in I$,由 Lagrange 中值定理,存在介于 x_0 和 x 之间的 ξ,使得

$$f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)]$$
$$=f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$
$$=f'(\xi)(x-x_0)-f'(x_0)(x-x_0)$$
$$=[f'(\xi)-f'(x_0)](x-x_0)\geqslant 0,$$
$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\forall x\in I,$$

即曲线 $y=f(x)$ 的图形上的点 $(x,f(x))$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线 $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ 的上方.

($\Leftarrow$)设 $y=f(x)$ 的图形 $(x,f(x))$ 在 $\forall(x_2,f(x_2))(x_2\in I)$ 的切线的上方,即对 $\forall x\in I$,有

$$f(x) \geqslant f(x_2) + f'(x_2)(x - x_2),$$
$$f(x) - f(x_2) \geqslant f'(x_2)(x - x_2).$$
于是当 $x_1, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3$ 时，有
$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \leqslant f'(x_2) \leqslant \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$
由题 1.7.1 知，f 是 I 上的凸函数.

1.7.4　设 f 在区间 I 上 2 阶可导，则 f 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow f'' \geqslant 0$.

证　根据题 1.7.3，$f'' \geqslant 0 \Leftrightarrow f'(x)$ 单调增 $(x \in I) \Leftrightarrow f$ 在 I 上为凸函数.

关于充分性，也可直接证明如下.

因 $f''(x) \geqslant 0$，所以 f' 在 I 上单调增. 则对 $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2, t \in (0,1)$. 由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_1, \xi_2 \in I$ 使得 $\xi_1 \in (x_1, (1-t)x_1 + tx_2)$，$\xi_2 \in ((1-t)x_1 + tx_2, x_2)$（因此 $\xi_1 < \xi_2$，$f'(\xi_1) \leqslant f'(\xi_2)$），满足
$$\begin{aligned}&[(1-t)f(x_1) + tf(x_2)] - f((1-t)x_1 + tx_2)\\ &= (1-t)[f(x_1) - f((1-t)x_1 + tx_2)]\\ &\quad + t[f(x_2) - f((1-t)x_1 + tx_2)]\\ &= (1-t)f'(\xi_1)\cdot t(x_1 - x_2)\\ &\quad + tf'(\xi_2)(1-t)(x_2 - x_1)\\ &= t(1-t)(x_2 - x_1)[f'(\xi_2) - f'(\xi_1)] \geqslant 0.\end{aligned}$$
即
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$
f 为 I 上的凸函数.

1.7.5　设 f 为区间 I 上的凸函数，$[a,b] \subset \mathring{I}$（$I$ 的内点集），则 f 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件，即存在常数 K，使得对 $\forall x_1, x_2 \in [a,b]$，
$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant K|x_2 - x_1|.$$
由此得到 f 在 $[a,b]$ 上是一致连续的，而 f 在 $\mathring{I}$ 上是连续的（注意 f 在 I 的端点处不必连续）.

证　任取 $x_1, x_2 \in [a,b] \subset (A,B) \subset [A,B] \subset I$，$x_1 < x_2$，则由题 1.7.1 知
$$\begin{aligned}\frac{f(A)-f(a)}{A-a} &\leqslant \frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\\ &\leqslant \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\\ &\leqslant \frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2} \leqslant \frac{f(B)-f(b)}{B-b},\end{aligned}$$
于是，
$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right| \leqslant K = \max\left\{\left|\frac{f(A)-f(a)}{A-a}\right|, \left|\frac{f(B)-f(b)}{B-b}\right|\right\},$$
即
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K|x_2 - x_1|,$$
$$\forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

1.7.6　设 f 在区间 I 上为凸函数，则 f 在 I 上处处有左右导函数 f'_-, f'_+，且都为增函数，并且对任意 $x \in I$ 有 $f'_-(x) \leqslant f'_+(x)$.

证　对 $\forall x_0 \in \mathring{I}$，令
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$
对 $\forall x_1, x_2 \in \mathring{I}, x_1 < x_2 < x_0$，由 f 为 I 上的凸函数和题 1.7.1 知
$$\varphi(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} = \varphi(x_2).$$
因此，φ 是 I 上的增函数，取 $x, B \in \mathring{I}, x < x_0 < B$，则
$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant \frac{f(B) - f(x_0)}{B - x_0} = \varphi(B),$$
$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0^-} \varphi(x)$$
存在有限.

再证 f'_- 单调增. 对 $\forall x_1, x_2, u, v \in I, u < x_1 < v < x_2$. 因 f 为 I 上的凸函数，故有
$$\frac{f(u) - f(x_1)}{u - x_1} \leqslant \frac{f(v) - f(x_1)}{v - x_1} \leqslant \frac{f(v) - f(x_2)}{v - x_2}.$$
令 $u \to x_1^-, v \to x_2^-$，就得
$$f'_-(x_1) \leqslant f'_-(x_2),$$
即 f'_- 在 I 上为增函数.

同理可证，$f'_+(x)$ 在 $\mathring{I}$ 上处处存在有限，且在 I 上单调增.

最后，对 $u, x, v \in I, u < x < v$，有
$$\frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leqslant \frac{f(v) - f(x)}{v - x},$$
$$f'_-(x) = \lim_{u \to x^-} \frac{f(u) - f(x)}{u - x} \leqslant \lim_{v \to x^+} \frac{f(v) - f(x)}{v - x} = f'_+(x).$$

1.7.7　f 在 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow$ 对 $\forall x_0 \in I$，$\exists \alpha \in \mathbf{R}$，使得
$$f(x) \geqslant f(x_0) + \alpha(x - x_0), x \in I.$$

证 (⇐)对 $\forall x_1,x_2,x_3\in I$, $x_1<x_2<x_3$,知 $x_2\in \mathring{I}$,根据题中条件,存在 $\alpha\in\mathbf{R}$,使得对 $\forall x\in I$,

$$f(x)\geqslant f(x_2)+\alpha(x-x_2),$$

所以有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)+\alpha(x_1-x_2),$$
$$f(x_3)\geqslant f(x_2)+\alpha(x_3-x_2).$$

又因 $x_1-x_2<0$, $x_3-x_2>0$,所以

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

根据题 1.7.1,f 是 I 上的凸函数.

(⇒)因 f 是 I 上的凸函数,由题 1.7.6 知,在 $x=x_0$ 处,有

$$f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0).$$

当 $x<x_0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant f'_-(x_0),$$
$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'_-(x_0)(x-x_0),$$

当 $x>x_0$ 时,

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant f'_+(x_0),$$
$$f(x)\geqslant f(x_0)+f'_+(x_0)(x-x_0).$$

取 $\alpha\in\mathbf{R}$,使 $f'_-(x_0)\leqslant\alpha\leqslant f'_+(x_0)$,则无论 $x<x_0$ 或 $x>x_0$ 或 $x=x_0$,恒有

$$f(x)\geqslant f(x_0)+\alpha(x-x_0).$$

注 有关凸函数进一步的知识,读者可参阅第 7 篇 7.1.53、7.3.33、7.3.34、7.3.35 和 7.3.38.

1.7.8 证明区间 I 上的两个单调增的非负凸函数 f,g 之积仍为凸函数.

证 f,g 为单调增的非负凸函数,则对 $\forall x_1,x_2\in I$, $0<t<1$,有

$$\begin{aligned}
&t(1-t)[f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2)]\\
&\quad-t(1-t)[f(x_1)g(x_2)+f(x_2)g(x_1)]\\
&=t(1-t)[f(x_1)-f(x_2)][g(x_1)-g(x_2)]\\
&\geqslant 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(f\cdot g)((1-t)x_1+tx_2)\\
&=f((1-t)x_1+tx_2)\cdot g((1-t)x_1+tx_2)\\
&\leqslant[(1-t)f(x_1)+tf(x_2)][(1-t)g(x_1)\\
&\quad+tg(x_2)]\\
&=(1-t)^2f(x_1)g(x_1)+t^2f(x_2)g(x_2)\\
&\quad+t(1-t)[f(x_1)g(x_2)+f(x_2)g(x_1)]\\
&\leqslant(1-t)^2f(x_1)g(x_1)+t^2f(x_2)g(x_2)\\
&\quad+t(1-t)[f(x_1)g(x_1)+f(x_2)g(x_2)]\\
&=(1-t)f(x_1)g(x_1)+tf(x_2)g(x_2)\\
&=(1-t)(f\cdot g)(x_1)+t(f\cdot g)(x_2).
\end{aligned}$$

所以 $f\cdot g$ 在 I 上是凸函数.

1.7.9 设 $f(x)$ 为区间 $[a,b]$ 上的凸函数,则

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

证 因为 f 为 $[a,b]$ 上的凸函数,由题 1.7.5,f 在 (a,b) 上连续,在 $[a,b]$ 上有界,从而 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

当 $x\in\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ 时,$a+b-x\in\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$,且有

$$f(a+b-x)+f(x)\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

于是

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x\\
&=\int_{\frac{a+b}{2}}^b[f(a+b-x)+f(x)]\mathrm{d}x\\
&\geqslant\int_{\frac{a+b}{2}}^b 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{a+b}{2}\right)\\
&=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\leqslant\int_a^b\left[\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{f(a)}{b-a}\left[-\frac{(b-x)^2}{2}\right]\Big|_a^b+\frac{f(b)}{b-a}\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b\\
&=\frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)].
\end{aligned}$$

综合起来就有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

1.7.10 设 $x_1\geqslant 0,\cdots,x_n\geqslant 0$,应用凸函数性质证明

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

证 如果存在 $x_i=0$,则不等式显然成立.

如果 $x_i\neq 0$, $i=1,\cdots,n$. 令 $f(x)=\ln x$,因 $f'(x)=\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\frac{1}{x^2}<0$,由题 1.7.4,f 在 $(0,+\infty)$ 上为严格凹函数,此时,对 $x_1,\cdots,x_n\in(0,+\infty)$, $t_1=t_2=\cdots=t_n=\frac{1}{n}$,有

$$\begin{aligned}
\ln\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}&\geqslant\frac{\ln x_1+\cdots+\ln x_n}{n}\\
&=\ln\sqrt[n]{x_1\cdots x_n},
\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}.$$

1.7.11 设 $f(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的凸函数,$f(x)\geqslant 0$,且 $f(0)=0$,则 $\frac{f(x)}{x}$ 为 $(0,+\infty)$ 上的单调增

函数.

证 对任意 $0<x_1<x_2$，有

$$f(x_1)=f(\frac{x_1}{x_2}\cdot x_2)$$
$$=f(\frac{x_1}{x_2}\cdot x_2+\frac{x_2-x_1}{x_2}\cdot 0).$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 是凸函数，所以

$$f(x_1)=f(\frac{x_1}{x_2}\cdot x_2+\frac{x_2-x_1}{x_2}\cdot 0)$$
$$\leqslant \frac{x_1}{x_2}f(x_2)+\frac{x_2-x_1}{x_2}f(0)=\frac{x_1}{x_2}f(x_2),$$

于是 $\frac{f(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f(x_2)}{x_2}$，即 $\frac{f(x)}{x}$ 是 $(0,+\infty)$ 上的单调增函数.

1.7.12 设 $f_1(x),f_2(x)$ 是 $[0,+\infty)$ 上的两个凸函数，$f_1(x)\geqslant 0,f_2(x)\geqslant 0$，且 $f_1(0)=f_2(0)=0$，试证函数

$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{x}$$

在 $(0,+\infty)$ 上也是凸函数.

证法1 设 $0<x_1<x_2<+\infty$，$x=tx_1+(1-t)x_2$，$0\leqslant t\leqslant 1$. 由 f_1,f_2 为凸函数和题1.7.11得到

$$f_1(x)\leqslant tf_1(x_1)+(1-t)f_1(x_2),$$
$$f_2(x)\leqslant tf_2(x_1)+(1-t)f_2(x_2),$$
$$\frac{f_1(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f_1(x_2)}{x_2},\ \frac{f_2(x_1)}{x_1}\leqslant\frac{f_2(x_2)}{x_2}.$$

应用上面四个不等式，并注意到 $f_1(x)\geqslant 0,f_2(x)\geqslant 0$，有

$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{x}-[t\frac{f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1}+(1-t)\frac{f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2}]$$
$$\leqslant\frac{1}{x}\{t^2f_1(x_1)f_2(x_1)+(1-t)^2f_1(x_2)f_2(x_2)+t(1-t)[f_1(x_1)f_2(x_2)+f_1(x_2)f_2(x_1)]\}-[t\frac{f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1}+(1-t)\frac{f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2}]$$
$$=tf_1(x_1)f_2(x_1)[\frac{t}{x}-\frac{1}{x_1}]+(1-t)f_1(x_2)f_2(x_2)[\frac{1-t}{x}-\frac{1}{x_2}]+\frac{t(1-t)}{x}[f_1(x_1)f_2(x_2)+f_1(x_2)f_2(x_1)]$$
$$=tf_1(x_1)f_2(x_1)\frac{-(1-t)x_2}{xx_1}+(1-t)f_1(x_2)f_2(x_2)\frac{-tx_1}{xx_2}+\frac{t(1-t)}{x}[f_1(x_1)f_2(x_2)+f_1(x_2)f_2(x_1)]$$
$$=\frac{t(1-t)x_2f_1(x_1)}{x}\left[\frac{f_2(x_2)}{x_2}-\frac{f_2(x_1)}{x_1}\right]+\frac{t(1-t)x_1f_1(x_2)}{x}\left[\frac{f_2(x_1)}{x_1}-\frac{f_2(x_2)}{x_2}\right]$$
$$=\frac{t(1-t)x_1x_2}{x}\left[\frac{f_2(x_2)}{x_2}-\frac{f_2(x_1)}{x_1}\right]\times\left[\frac{f_1(x_1)}{x_1}-\frac{f_1(x_2)}{x_2}\right]\leqslant 0.$$

即

$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{x}\leqslant t\frac{f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1}+(1-t)\frac{f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2}.$$

所以函数

$$\frac{f_1(x)f_2(x)}{x},x\in(0,+\infty)$$

为凸函数.

证法2 因为 f_1,f_2 在 $[0,+\infty)$ 为凸函数，所以 f_1,f_2 在 $(0,+\infty)$ 上连续，从而

$$F(x)=\frac{f_1(x)f_2(x)}{x}$$

在 $(0,+\infty)$ 上连续. 由此和第7篇7.3.35知，要证 F 在 $(0,+\infty)$ 上为凸函数，只须证

$$F\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{1}{2}[F(x_1)+F(x_2)].$$

根据题1.7.11，$\frac{f_1(x)}{x},\frac{f_2(x)}{x}$ 都单调增，因此

$$\left[\frac{f_2(x_1)}{x_1}-\frac{f_2(x_2)}{x_2}\right]\left[\frac{f_1(x_1)}{x_1}-\frac{f_1(x_2)}{x_2}\right]\geqslant 0,$$
$$[x_2f_2(x_1)-x_1f_2(x_2)][x_2f_1(x_1)-x_1f_1(x_2)]\geqslant 0.$$

展开得

$$x_1x_2f_1(x_1)f_2(x_2)+x_1x_2f_1(x_2)f_2(x_1)\leqslant x_2^2f_1(x_1)f_2(x_1)+x_1^2f_1(x_2)f_2(x_2),$$
$$f_1(x_1)f_2(x_2)+f_1(x_2)f_2(x_1)\leqslant\frac{x_2}{x_1}f_1(x_1)f_2(x_1)+\frac{x_1}{x_2}f_1(x_2)f_2(x_2),$$
$$-\frac{x_2f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1(x_1+x_2)}+\frac{f_1(x_1)f_2(x_2)}{x_1+x_2}+\frac{f_1(x_2)f_2(x_1)}{x_1+x_2}-\frac{x_1f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2(x_1+x_2)}\leqslant 0.$$

再由 f_1,f_2 为非负凸函数，就有

$$F(\frac{x_1+x_2}{2})=\frac{f_1(\frac{x_1+x_2}{2})f_2(\frac{x_1+x_2}{2})}{\frac{x_1+x_2}{2}}$$
$$\leqslant\frac{[f_1(x_1)+f_1(x_2)][f_2(x_1)+f_2(x_2)]}{2(x_1+x_2)}$$
$$=\frac{1}{2}\{\frac{f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1}(1-\frac{x_2}{x_1+x_2})$$

$$+\frac{f_1(x_1)f_2(x_2)}{x_1+x_2}+\frac{f_1(x_2)f_2(x_1)}{x_1+x_2}$$
$$+\frac{f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2}\left(1-\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\frac{f_1(x_1)f_2(x_1)}{x_1}+\frac{f_1(x_2)f_2(x_2)}{x_2}\right]$$
$$=\frac{1}{2}[F(x_1)+F(x_2)].$$

因此 $F(x)=\dfrac{f_1(x)f_2(x)}{x}$ 为凸函数.

1.7.13 设函数 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上单调增,

$$\varphi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\geqslant 0.$$

试证 φ 为凸函数.

证法 1 因为 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增,所以对 $\forall x\in[x_2,x_3]$,有 $f(x_2)\leqslant f(x)$,且

$$f(x_2)\leqslant\frac{1}{x_3-x_2}\int_{x_2}^{x_3}f(x)\mathrm{d}x,$$

于是对 $0\leqslant x_1<x_2<x_3<+\infty$,有

$$\frac{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{\int_0^{x_2}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t}{x_2-x_1}$$
$$=\frac{\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t}{x_2-x_1}\leqslant\frac{\int_{x_1}^{x_2}f(x_2)\mathrm{d}t}{x_2-x_1}=f(x_2)$$
$$\leqslant\frac{\int_{x_2}^{x_3}f(t)\mathrm{d}t}{x_3-x_2}=\frac{\int_0^{x_3}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x_2}f(t)\mathrm{d}t}{x_3-x_2}$$
$$=\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_2)}{x_3-x_2}.$$

根据题 1.7.1,$\varphi(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上为凸函数.

证法 2 由于 φ 为凸函数

$$\Leftrightarrow\varphi(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)\leqslant\lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2),$$
$$0\leqslant\lambda_1,\lambda_2\leqslant 1,\lambda_1+\lambda_2=1.$$
$$\Leftrightarrow\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t+\int_{x_1}^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}f(t)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\lambda_1\int_0^{x_1}f(t)\mathrm{d}t+\lambda_2\int_0^{x_2}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$0\leqslant\lambda_1,\lambda_2\leqslant 1,\lambda_1+\lambda_2=1.$$
$$\Leftrightarrow\int_{x_1}^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}f(t)\mathrm{d}t\leqslant\lambda_2\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t,$$
$$0\leqslant\lambda_1,\lambda_2\leqslant 1,\lambda_1+\lambda_2=1.$$

这最后一个不等式是成立的.事实上,因为 $0\leqslant\lambda_2\leqslant 1$,所以 $\lambda_2u\leqslant u$,$f(x_1+\lambda_2u)\leqslant f(x_1+u)$,因此有

$$\int_{x_1}^{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}f(t)\mathrm{d}t=\int_{x_1}^{x_1+\lambda_2(x_2-x_1)}f(t)\mathrm{d}t$$
$$\xlongequal{t=x_1+\lambda_2u}\lambda_2\int_0^{x_2-x_1}f(x_1+\lambda_2u)\mathrm{d}u$$
$$\leqslant\lambda_2\int_0^{x_2-x_1}f(x_1+u)\mathrm{d}u$$
$$\xlongequal{t=x_1+u}\lambda_2\int_{x_1}^{x_2}f(t)\mathrm{d}t.$$

所以 φ 为 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

证法 3 设 $c\in[0,+\infty)$ 为任一点.

若 $x<c$,则

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t=-\int_x^c f(t)\mathrm{d}t$$
$$\geqslant-\int_x^c f(c)\mathrm{d}t$$
$$=f(c)(x-c);$$

若 $x>c$,则

$$\int_c^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_c^x f(c)\mathrm{d}t=f(c)(x-c).$$

所以

$$\varphi(x)-\varphi(c)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^c f(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_c^x f(t)\mathrm{d}t\geqslant f(c)(x-c),$$
$$\varphi(x)\geqslant\varphi(c)+f(c)(x-c).$$

根据题 1.7.7,$\varphi(x)$ 为 $[0,+\infty)$ 上的凸函数.

1.7.14 试证

$$\left(\sum_{k=1}^n t_kx_k\right)^{\sum\limits_{k=1}^n t_kx_k}\leqslant\prod_{k=1}^n x_k^{t_kx_k},$$

其中 $t_k>0,x_k>0,\sum\limits_{k=1}^n t_k=1$,$\prod\limits_{k=1}^n$ 表示乘积号.

证 设 $f(x)=x\ln x, x>0$,则

$$f'(x)=1+\ln x,$$
$$f''(x)=\frac{1}{x}>0, x>0.$$

所以 f 是凸函数,从而

$$\ln\left(\sum_{k=1}^n t_kx_k\right)^{\sum\limits_{k=1}^n t_kx_k}=\sum_{k=1}^n t_kx_k\ln\left(\sum_{k=1}^n t_kx_k\right)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^n t_kx_k\ln x_k=\ln\prod_{k=1}^n x_k^{t_kx_k},$$

于是

$$\left(\sum_{k=1}^n t_kx_k\right)^{\sum\limits_{k=1}^n t_kx_k}\leqslant\prod_{k=1}^n x_k^{t_kx_k}.$$

§1.8 Taylor 公式

有限 Taylor 公式主要有两种形式.

第一种形式:设 f 在区间 I 上有 n 阶连续导函数,在内点集 $\mathring{I}$ 上有 $n+1$ 阶导数,则 f 在 $x_0\in I$ 有 Taylor 展开式:

$$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$
$$= \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

$\xi \in (x_0, x)$ 或 $\xi \in (x, x_0)$，$0<\theta<1$ 称为 Lagrange 余项.

第二种形式：设 f 在 x_0 有 n 阶导数，则

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o((x-x_0)^n).$$

一般情形下，只要见到 2 阶以上的导数，马上就应想到 Taylor 展开. 有时在某固定点 x_0 处展开，有时在 x 展开，这由问题的条件和结论所决定. 还有将不同点处的函数值写成同一点的 Taylor 展开式或将 $f(x)$ 写成不同点处的 Taylor 展开式，然后将两个 Taylor 展开式相加或相减，用以导出所要求的结果.

下面的题 1.8.1，1.8.2 就是应用 Taylor 公式的两种形式，解出 θ 后求出 $\lim\limits_{h\to 0}\theta$ 的.

1.8.1 设 f 在 x_0 有 $n+1$ 阶导数，且 $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$，将 f 用 Taylor 公式表示为

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)，其中\ \theta \in (0,1).$$

试证：$\lim\limits_{h\to 0}\theta = \dfrac{1}{n+1}$.

证 由 Taylor 公式

$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h), \theta \in (0,1),$$
$$f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}).$$

两式相减得

$$\frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)] = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0) + o(h^{n+1}).$$

因此，由导数的定义有

$$\lim_{h\to 0}\theta = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0) + o(1)}{\frac{f^{(n)}(x_0+\theta h) - f^{(n)}(x_0)}{\theta h}}$$
$$= \frac{\frac{1}{n+1}f^{(n+1)}(x_0)}{f^{(n+1)}(x_0)} = \frac{1}{n+1}.$$

1.8.2 设 $\delta > 0$，f 在 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中 n 阶连续可导，且 $f^{(k)}(x_0) = 0$，$k = 2,3,\cdots,n-1$，$f^{(n)}(x_0) \neq 0$. 当 $0 < |h| < \delta$ 时，有

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0 + h\theta(h)),$$
$$0 < \theta(h) < 1.$$

试证：

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}.$$

证 由 Taylor 公式，存在 $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ 使

$$f(x_0+h)$$
$$= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_1 h),$$
$$f'(x_0 + h\theta(h)) = f'(x_0)$$
$$+ \frac{h^{(n-1)}(\theta(h))^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0 + \theta_2 h\theta(h)).$$

则

$$f'(x_0) + \frac{h^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)$$
$$= \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
$$= f'(x_0 + h\theta(h))$$
$$= f'(x_0) + \frac{h^{n-1}(\theta(h))^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(x_0 + \theta_2 h\theta(h)).$$

再由 $f^{(n)}$ 连续及 $f^{(n)}(x_0) \neq 0$，有

$$\lim_{h\to 0}\theta(h) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f^{(n)}(x_0+\theta_1 h)}{nf^{(n)}(x_0 + \theta_2 h\theta(h))}\right)^{\frac{1}{n-1}}$$
$$= \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{nf^{(n)}(x_0)}\right)^{\frac{1}{n-1}} = \sqrt[n-1]{\frac{1}{n}}.$$

1.8.3 f 在 $(a-R, a+R)$ 中有各阶导数，且对任意 $n \in \mathbf{N}$，有

$$|f^{(n)}(x)| \leqslant M(常数), \forall x \in (a-R, a+R),$$

则 f 在 $(a-R, a+R)$ 中可展开为 Taylor 级数.

证 根据 Taylor 公式的 Lagrange 余项得到

$$0 \leqslant |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|$$
$$\leqslant \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$
$$\leqslant M\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \longrightarrow 0\ (n \to +\infty)$$

（由 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{R^n}{n!}$ 收敛于 e^R 知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ 或由取 $N_0 \geqslant R$，有

$$\frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant \frac{R^{N_0}}{N_0!}\cdot\frac{R}{N_0+1}\cdots\frac{R}{n} \leqslant \frac{R^{N_0+1}}{N_0!}\cdot\frac{1}{n}$$

知 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{R^{n+1}}{(n+1)!} = 0$）.

因此，$\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x) = 0, \forall x \in (a-R, a+R)$，即 f 在 $(a-R, a+R)$ 中可展开为 Taylor 级数.

1.8.4 设 f 和 g 在 $[-1,1]$ 上连续，在 $(-1,1)$ 上有任意阶导数，且

$$|f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)| \leqslant n!\,|x|, n = 0,1,2,\cdots.$$

试证 $f\equiv g$.

证 因为

$$|f^{(n)}(x)-g^{(n)}(x)|\leqslant n!|x|,x\in(-1,1),$$

所以

$$|f^{(n)}(0)-g^{(n)}(0)|\leqslant n!|0|=0.$$

$$f^{(n)}(0)-g^{(n)}(0)=0,n=0,1,2,\cdots$$

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)-g^{(k)}(0)}{k!}x^k\right.\\ &\quad\left.+\frac{f^{(n+1)}(\xi)-g^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right|\\ &=\frac{|f^{(n+1)}(\xi)-g^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\\ &\leqslant\frac{(n+1)!|\xi|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\leqslant|x|^{n+1}.\end{aligned}$$

令 $n\to+\infty$,就得 $f(x)-g(x)=0,x\in(-1,1)$.

再由 f,g 在$[-1,1]$上连续,故 $f-g$ 在$[-1,1]$上也连续,从而

$$\begin{aligned}f(1)-g(1)&=\lim_{x\to1^-}[f(x)-g(x)]\\&=\lim_{x\to1^-}0=0,\\ f(-1)-g(-1)&=\lim_{x\to-1^+}[f(x)-g(x)]\\&=\lim_{x\to-1^+}0=0.\end{aligned}$$

于是对 $\forall x\in[-1,1]$,$f(x)-g(x)=0$,即在$[-1,1]$上

$$f(x)\equiv g(x).$$

1.8.5 设函数 f 在 $\mathbf{R}$ 上 2 阶可导,且

$$M_k=\sup_{x\in\mathbf{R}}|f^{(k)}(x)|<+\infty,k=0,1,2.$$

证明:$M_1^2\leqslant 2M_0M_2$.

证法1 由 Taylor 公式,有

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_1),\xi_1\text{介于}x\text{与}x+h\text{之间},$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(\xi_2),\xi_2\text{介于}x\text{与}x-h\text{之间},$$

两式相减得

$$f(x+h)-f(x-h)=2hf'(x)+\frac{h^2}{2}[f''(\xi_1)-f''(\xi_2)].$$

于是

$$\begin{aligned}2h|f'(x)|&\leqslant2|h||f'(x)|\\&\leqslant|f(x+h)|+|f(x-h)|\\&\quad+\frac{h^2}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]\\&\leqslant2M_0+\frac{h^2}{2}\cdot2M_2,\end{aligned}$$

$$2hM_1\leqslant2|h|M_1\leqslant2M_0+h^2M_2,$$

$$M_2h^2-2hM_1+2M_0\geqslant0,$$

$$\Delta=4M_1^2-4M_2\cdot2M_0\leqslant0,$$

$$M_1^2\leqslant2M_0M_2.$$

证法2 若 $M_2=0$,则 $f''(x)=0,x\in\mathbf{R}$,从而 $f'(x)=c$(常数),$f(x)=f(0)+cx$.如果 $c\neq0$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)|=+\infty$,与 $|f(x)|\leqslant M_0$ 矛盾.因此 $c=0$. $M_1=0$,自然有

$$M_1^2=0\leqslant2M_0M_2.$$

若 $M_2\neq0$,由证法1,有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\\&\quad+\frac{h}{4}[f''(\xi_2)-f''(\xi_1)],\end{aligned}$$

$$|f'(x)|\leqslant\frac{2M_0}{2h}+\frac{h}{4}2M_2=\frac{M_0}{h}+\frac{h}{2}M_2.$$

特别令 $h=\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}$,就得

$$\begin{aligned}|f'(x)|&\leqslant\frac{M_0}{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}}+\frac{\sqrt{\frac{2M_0}{M_2}}}{2}M_2\\&=2\cdot\sqrt{\frac{M_0M_2}{2}}=\sqrt{2M_0M_2}.\end{aligned}$$

于是

$$M_1^2\leqslant2M_0M_2.$$

注 从条件 f 2阶可导联想到需用 Taylor 展开,而结论 $M_1^2\leqslant2M_0M_2$ 又暗示应有两个 Taylor 展式才能解出 $|f'(x)|$.将 $f(x\pm h)$ 在 x 处展开,意外地得一个关于 h 的一元二次不等式,问题得以解决.

下面的题1.8.6,1.8.7,1.8.8都用到两个 Taylor 展开式.

1.8.6 设 $f(x)$ 在$[0,1]$上有 2 阶连续导数,且 $f(0)=f(1)$,$|f''(x)|\leqslant1$,$\forall x\in[0,1]$,试证:在$[0,1]$上 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.

证 应用 Taylor 公式得

$$\begin{aligned}f(0)&=f(x)+f'(x)(-x)\\&\quad+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)x^2,0<\xi_1<x,\\ f(1)&=f(x)+f'(x)(1-x)\\&\quad+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x)^2,x<\xi_2<1,\end{aligned}$$

两式相减,及 $f(0)=f(1)$,就有

$$0=f'(x)+\frac{1}{2}[f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2],$$

$$\begin{aligned}|f'(x)|&=\frac{1}{2}|f''(\xi_2)(1-x)^2-f''(\xi_1)x^2|\\&\leqslant\frac{1}{2}[|f''(\xi_2)|(1-x)^2+|f''(\xi_1)|x^2]\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}[(1-x)^2+x^2]$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2},\ x\in[0,1].$$

1.8.7 设 $f:[0,2]\to\mathbf{R}$ 2阶可导,且对 $\forall x\in[0,2]$ 有 $|f(x)|\leqslant 1$ 和 $|f''(x)|\leqslant 1$. 证明:当 $x\in[0,2]$ 时

$$|f'(x)|\leqslant 2.$$

证 对 $\forall x\in[0,2]$,由 Taylor 公式,

$$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{f''(\xi_1)}{2}x^2,0<\xi_1<x,$$

$$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(2-x)^2,x<\xi_2<2,$$

两式相减得

$$f(0)-f(2)=-2f'(x)+\frac{1}{2}x^2f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_2),$$

$$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{1}{2}x^2f''(\xi_1)-\frac{1}{2}(2-x)^2f''(\xi_2).$$

所以,对 $\forall x\in[0,2]$ 有

$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\left[|f(2)|+|f(0)|+\frac{1}{2}x^2|f''(\xi_1)|+\frac{1}{2}(2-x)^2|f''(\xi_2)|\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[1+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}(2-x)^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x^2-2x+2\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x^2-2x+4)=\frac{1}{2}[(x-1)^2+3]$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(1+3)=2.$$

1.8.8 设 f 在 $[0,1]$ 上 2 阶可导,$f(0)=f(1)=0$,$\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. 试证:

(1) $\exists x_1\in(0,1)$,使 $f'(x_1)=0$;

(2) $\exists\xi_1,\xi_2\in(0,1)$,使 $f''(\xi_1)\geqslant 8$,$f''(\xi_2)\leqslant 8$.

证 (1) 因为 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1<0=f(0)=f(1)$,所以 $f(0)$,$f(1)$ 不是 f 在 $[0,1]$ 中的最小值. 设 $f(x_1)=\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)$,则 x_1 为极小值点,根据 Fermat 定理,$f'(x_1)=0$.

(2) f 在 $[0,1]$ 上 2 阶可导,由 Taylor 公式

$$f(0)=f(x_1)-f'(x_1)x_1+\frac{x_1^2}{2!}f''(\xi_1),\xi_1\in(0,x_1),$$

$$f(1)=f(x_1)+f'(x_1)(1-x_1)+\frac{(1-x_1)^2}{2!}f''(\xi_2),\xi_2\in(x_1,1).$$

注意到 $f(x_1)=-1$,$f'(x_1)=0$,$f(0)=f(1)=0$,就有

$$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{2}f''(\xi_1)=1,\\[2mm]\dfrac{(1-x_1)^2}{2}f''(\xi_2)=1.\end{cases}$$

(i) 如果 $0<x_1\leqslant\frac{1}{2}$,则 $\frac{1}{2}\leqslant 1-x_1<1$.

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_1^2}\geqslant\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8,$$

$$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_1)^2}\leqslant\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8.$$

(ii) 如果 $\frac{1}{2}<x_1<1$,则 $0<1-x_1<\frac{1}{2}$.

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_1^2}<\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8,$$

$$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_1)^2}>\frac{2}{(\frac{1}{2})^2}=8.$$

1.8.9 设函数 f 在 $[a,b]$ 上 2 阶可导,且 $f'(a)=f'(b)=0$. 试证:存在 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$|f''(\xi)|\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证法 1 由连续函数的介值定理知存在 $d\in[a,b]$,使 $f(d)=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$. 不妨设 $a\leqslant d\leqslant\frac{a+b}{2}$,则由 Taylor 公式,存在 $\xi\in(a,d)\subset(a,b)$,使得

$$f(d)=f(a)+f'(a)(d-a)+\frac{f''(\xi)}{2!}(d-a)^2=f(a)+\frac{f''(\xi)}{2}(d-a)^2$$

$$|f''(\xi)|=\left|\frac{2[f(d)-f(a)]}{(d-a)^2}\right|\geqslant\frac{|f(b)-f(a)|}{(\frac{b-a}{2})^2}=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

证法 2 设 $a<x<b$,将 $f(x)$ 分别在 a 和 b Taylor 展开,得到

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x-a)^2,\xi_1\in(a,x),$$

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x-b)^2,\xi_2\in(x,b).$$

特别取 $x=\frac{a+b}{2}$,并注意到 $f'(a)=f'(b)=0$,

就有

$$f(\frac{a+b}{2})-f(a)=\frac{f''(\xi_1)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4},$$

$$f(\frac{a+b}{2})-f(b)=\frac{f''(\xi_2)}{2}\cdot\frac{(b-a)^2}{4}.$$

所以

$$\begin{aligned}|f''(\xi)|&=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}\\&\geqslant\frac{1}{2}[|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|]\\&\geqslant\left|\frac{1}{2}f''(\xi_1)-\frac{1}{2}f''(\xi_2)\right|\\&=\frac{4}{(b-a)^2}\left|[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]-[f(\frac{a+b}{2})-f(b)]\right|\\&=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.\end{aligned}$$

其中 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2.

证法3 因为 f 和函数 $(x-a)^2$ 在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上2阶可导,所以在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上两次应用Cauchy中值定理,存在 $\eta_1\in(a,\frac{a+b}{2})$,及存在 $\xi_1\in(a,\eta_1)$,使得

$$\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{(\frac{b-a}{2})^2}=\frac{f(\frac{b+a}{2})-f(a)}{(\frac{a+b}{2}-a)^2-(a-a)^2}$$

$$=\frac{f'(\eta_1)}{2(\eta_1-a)}=\frac{f'(\eta_1)-f'(a)}{2(\eta_1-a)}=\frac{f''(\xi_1)}{2}.$$

类似地,因为 f 和 $(b-x)^2$ 在 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上2阶可导,所以又可在 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上两次应用Cauchy中值定理,存在 $\eta_2\in(\frac{a+b}{2},b)$, $\xi_2\in(\eta_2,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(\frac{b+a}{2})}{(\frac{b-a}{2})^2}=\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})}{(b-\frac{a+b}{2})^2-(b-b)^2}$$

$$=\frac{f'(\eta_2)}{2(b-\eta_2)}=\frac{f'(\eta_2)-f'(b)}{2(b-\eta_2)-2(b-b)}=\frac{f''(\xi_2)}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}|f''(\xi)|&=\max\{|f''(\xi_1)|,|f''(\xi_2)|\}\\&\geqslant\frac{1}{2}(|f''(\xi_1)|+|f''(\xi_2)|)\\&=\left|\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(a)}{(\frac{b-a}{2})^2}\right|+\left|\frac{f(b)-f(\frac{a+b}{2})}{(\frac{b-a}{2})^2}\right|\\&\geqslant\frac{4}{(b-a)^2}\left|[f(b)-f(\frac{a+b}{2})]+[f(\frac{a+b}{2})-f(a)]\right|\\&=\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.\end{aligned}$$

其中 $\xi=\xi_1$ 或 ξ_2.

注 f 2阶可导及 $f'(a)=f'(b)=0$ 提示我们:(1)可用Taylor展开;(2) a 和 b 的作用等同.从而有巧妙、简单的证法1:将 $f(d)-\frac{1}{2}[f(a)+f(b)]$ 在 a 或 b 处Taylor展开;证法2:将 $f(x)$ 分别在 a 和 b 处Taylor展开;证法3:将 $f(x)$ 和 $(x-a)^2$ 在 $[a,\frac{a+b}{2}]$ 上, $f(x)$ 和 $(b-x)^2$ 在 $[\frac{a+b}{2},b]$ 上两次应用Cauchy中值定理.

1.8.10 设 f 在 $(-1,1)$ 内2阶可导, $f(0)=f'(0)=0$,且

$$|f''(x)|\leqslant|f(x)|+|f'(x)|.$$

试证:存在 $\delta>0$,使在 $(-\delta,\delta)$ 内, $f(x)\equiv0$.

证法1 因 f 在 $(-1,1)$ 内2阶可导,故 f,f' 连续.令

$$\begin{aligned}M&=\max_{-\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}}\{|f(x)|+|f'(x)|\}\\&=|f(x_0)|+|f'(x_0)|,x_0\in[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}].\end{aligned}$$

再由Taylor公式和 $f(0)=f'(0)=0$ 有

$$\begin{aligned}f(x_0)&=f(0)+f'(0)x_0+\frac{f''(\xi)}{2!}x_0^2\\&=\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2,\end{aligned}$$

$$f'(x_0)=f'(0)+f''(\eta)x_0=f''(\eta)x_0,$$

其中 $\xi,\eta\in(0,x_0)$ 或 $(x_0,0)$.于是

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)|+|f'(x_0)|\\&=\left|\frac{1}{2}f''(\xi)x_0^2\right|+|f''(\eta)x_0|\\&\leqslant\left|\frac{1}{2}f''(\xi)\cdot(\frac{1}{4})^2\right|+\left|f''(\eta)\cdot\frac{1}{4}\right|\\&\leqslant\frac{1}{4}[|f''(\xi)|+|f''(\eta)|]\\&\leqslant\frac{1}{4}[|f(\xi)|+|f'(\xi)|+|f(\eta)|+|f'(\eta)|]\\&\leqslant\frac{1}{4}\cdot2M=\frac{M}{2},\end{aligned}$$

从而 $0\leqslant M-\frac{M}{2}=\frac{M}{2}\leqslant0, M=0$.

即 $f(x)=0,x\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

证法2 连续函数 $|f(x)|+|f'(x)|$ 在 $[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 上可取到最大值.设 $x_0\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]$ 使 $|f(x_0)|+|f'(x_0)|=\max\limits_{x\in[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}]}\{|f(x)|+|f'(x)|\}=M$.由Lagrange定理, $\exists\,\xi_1,\xi_2$ 介于 x_0 与0之间,使

$$\begin{aligned}M&=|f(x_0)-f(0)|+|f'(x_0)-f'(0)|\\&=|f'(\xi_1)||x_0|+|f''(\xi_2)||x_0|\\&\leqslant[|f'(\xi_1)|+|f(\xi)|]|x_0|\end{aligned}$$

$$\leqslant [|f(\xi_2)| + |f'(\xi_2)|]|x_0|$$
$$\leqslant 2M|x_0| \leqslant \frac{2}{3}M.$$

由此，$M = 0$，取 $\delta = \frac{1}{3}$，在 $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ 内 $f(x) \equiv 0$.

注 由 $f(0) = f'(0) = 0$ 和题的结论，想到 $|f(x)| + |f'(x)|$ 是否有不为零的点，自然找一个闭区间，它在上达到最大值的点 x_0，再利用 $f(x_0)$ 和 $f'(x_0)$ 在 0 处的 Taylor 展式.

1.8.11 设 2 阶可导函数 f 当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时满足
$$[f(x)]^2 + [f''(x)]^2 = r^2 (r > 0).$$
试证：当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，
$$|f'(x)| \leqslant (\frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2})r.$$

证 由 Taylor 公式，当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，有
$$f(b) = f(x) + f'(x)(b-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(b-x)^2,$$
$$f(a) = f(x) + f'(x)(a-x) + \frac{f''(\eta)}{2}(a-x)^2, a < \xi, \eta < b.$$

两式相减得到
$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(x) + \frac{f''(\xi)}{2}(b-x)^2 - \frac{f''(\eta)}{2}(a-x)^2,$$
$$(b-a)f'(x) = f(b) - f(a) + \frac{f''(\eta)}{2}(a-x)^2 - \frac{f''(\xi)}{2}(b-x)^2.$$

再由二次函数 $g(x) = \frac{(a-x)^2}{2} + \frac{(b-x)^2}{2}$ 在 $[a, b]$ 上的最大值为 $\max_{x\in[a,b]} g(x) = \frac{(b-a)^2}{2}$，就有
$$(b-a)|f'(x)|$$
$$\leqslant |f(b)| + |f(a)| + \frac{(a-x)^2}{2}|f''(\eta)| + \frac{(b-x)^2}{2}|f''(\xi)|$$
$$\leqslant r + r + \left[\frac{(a-x)^2}{2} + \frac{(b-x)^2}{2}\right]r$$
$$\leqslant 2r + \frac{(b-a)^2}{2}r,$$
$$|f'(x)| \leqslant (\frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2})r.$$

注 将 $f(a)$，$f(b)$ 在点 x 处展开，反过来解出 $f'(x)$，是很妙的. 这也正是 Taylor 公式的灵活之处. 本题求证的思路来自条件 $[f(x)]^2 + [f''(x)]^2 = r^2 (\Rightarrow |f(x)| \leqslant r, |f''(x)| \leqslant r)$ 和结论 $|f'(x)| \leqslant (\frac{2}{b-a} + \frac{b-a}{2})r$（将 $f(a)$，$f(b)$ 在 x 处展开）.

1.8.12 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有 3 阶连续导数，且 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f'''(x)$ 存在有限，试证：
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty} f'''(x) = 0.$$

证法 1 由题设和 Taylor 公式，有
$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1), \xi_1 \in (x, x+1),$$
$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_2), \xi_2 \in (x-1, x).$$

两式相加得
$$f''(x) = f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2).$$

由于 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to+\infty} f'''(x)$ 存在有限，记为 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = A$，$\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = B$，因此
$$\lim_{x\to+\infty} f''(x) = \lim_{x\to+\infty}[f(x+1) + f(x-1) - 2f(x) - \frac{1}{6}f'''(\xi_1) + \frac{1}{6}f'''(\xi_2)]$$
$$= A + A - 2A - \frac{1}{6}B + \frac{1}{6}B$$
$$= 0.$$

再由
$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f''(\eta_1), \eta_1 \in (x, x+1),$$
$$f(x-1) = f(x) - f'(x) + \frac{1}{2}f''(\eta_2), \eta_2 \in (x-1, x),$$

得到
$$\lim_{x\to+\infty} f'(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2}[f(x+1) - f(x-1) + \frac{1}{2}f''(\eta_2) - \frac{1}{2}f''(\eta_1)]$$
$$= \frac{1}{2}[A - A + \frac{1}{2}\cdot 0 - \frac{1}{2}\cdot 0] = 0.$$

因为
$$f(n+1) = f(n) + f'(n) + \frac{1}{2}f''(n) + \frac{1}{6}f'''(\xi_1(n)),$$
$$\xi_1(n) > n, \lim_{n\to+\infty} \xi_1(n) = +\infty.$$

所以
$$\lim_{n\to+\infty} f'''(\xi_1(n))$$
$$= \lim_{n\to+\infty}[f(n+1) - f(n) - f'(n) - \frac{1}{2}f''(n)]$$
$$= A - A - 0 - \frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

从而由 $\lim_{x\to+\infty} f'''(x)$ 存在有限得
$$\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = \lim_{n\to+\infty} f'''(\xi_1(n)) = 0.$$

证法 2 设 $\lim_{x\to+\infty} f'''(x) = c$，则对任给的 $\varepsilon > 0$，存在

$x_0>0$，当 $|x|>x_0$ 时，有

$$c-\varepsilon<f'''(x)<c+\varepsilon.$$

两边在 $[x_0,x]$ 上积分（注意：$f'''(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续），有

$$(c-\varepsilon)(x-x_0)<f''(x)-f''(x_0)$$
$$<(c+\varepsilon)(x-x_0),$$

再积分有

$$f''(x_0)(x-x_0)+\frac{c-\varepsilon}{2}(x-x_0)^2$$
$$<f'(x)-f'(x_0)$$
$$<f''(x_0)(x-x_0)+\frac{c+\varepsilon}{2}(x-x_0)^2,$$

再积分得

$$f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{c-\varepsilon}{3!}(x-x_0)^3$$
$$<f(x)-f(x_0)$$
$$<f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{c+\varepsilon}{3!}(x-x_0)^3.$$

若 $c\neq 0$，则可选 $c+\varepsilon, c-\varepsilon$ 与 c 同号．令 $x\to+\infty$，就有

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(x_0))=\infty.$$

这与 $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-f(x_0))=\lim_{x\to+\infty}f(x)-f(x_0)$ 为有限数相矛盾．因此 $\lim_{x\to\infty}f'''(x)=c=0$．

关于 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=\lim_{x\to+\infty}f''(x)=0$，请参阅证法1．

1.8.13　设 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 3阶可导，且 $f(x)$ 和 $f'''(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界．证明 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也有界．

证　因为 f,f''' 在 $\mathbf{R}$ 上有界，所以存在正数 M_0 和 M_3，使得 $|f(x)|<M_0$，$|f'''(x)|<M_3$，$x\in\mathbf{R}$．由 Taylor 公式，存在 $\xi_1\in(x,x+1)$，$\xi_2\in(x-1,x)$，使得

$$f(x+1)=f(x)+f'(x)+\frac{f''(x)}{2}+\frac{1}{6}f'''(\xi_1),$$
$$f(x-1)=f(x)-f'(x)+\frac{f''(x)}{2}-\frac{1}{6}f'''(\xi_2).$$

两式相加，整理得

$$f''(x)=f(x+1)+f(x-1)-2f(x)-\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)-f'''(\xi_2)],$$
$$|f''(x)|\leqslant|f(x+1)|+|f(x-1)|+2|f(x)|+\frac{1}{6}[|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_2)|]$$
$$\leqslant 4M_0+\frac{M_3}{3}.$$

两式相减整理得

$$2f'(x)=f(x+1)-f(x-1)-\frac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_3)],$$
$$|f'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\{|f(x+1)|+|f(x-1)|+\frac{1}{6}[|f'''(\xi_1)|+|f'''(\xi_3)|]\}$$
$$\leqslant M_0+\frac{1}{6}M_3.$$

这就证明了 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上也有界．

注　将 $f(x+1)$ 和 $f(x-1)$ 在 x 处 Taylor 展开是上述两题证明的关键．

1.8.14　设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上2阶可导，$f''(x)$ 有界，$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$．求证：$\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$．

证法1　设 $|f''(x)|<M$．由条件 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$ 知，对任给的 $\varepsilon>0$，存在 $\Delta_0>0$，当 $x>\Delta_0$ 时，

$$|f(x)|<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

取 $\Delta_1>\Delta_0+\varepsilon$，当 $x>\Delta_1$ 时，取 $x_0=x-\varepsilon>\Delta_0$，由中值定理，存在 $x>\xi>x_0>\Delta_0$，使

$$|f'(\xi)|=\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|$$
$$\leqslant\frac{|f(x)|+|f(x_0)|}{\varepsilon}<\frac{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}}{\varepsilon}=\varepsilon,$$

且 $x-\xi<x-x_0=\varepsilon$．故存在 $\eta\in(\xi,x)$ 使

$$|f'(x)|=|f'(\xi)+f''(\eta)(x-\xi)|$$
$$\leqslant|f'(\xi)|+|f''(\eta)||x-\xi|$$
$$<\varepsilon+M\cdot\varepsilon=(M+1)\varepsilon,$$

因此 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$．

证法2　设 $|f''(x)|<M$．对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N$，使 $\frac{M}{2N}<\frac{\varepsilon}{3}$，固定 N，因为 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以，存在 $\Delta>0$，当 $x>\Delta$ 时，有 $|f(x)|<\frac{\varepsilon}{3N}$，据 Taylor 公式有

$$f(x+\frac{1}{N})-f(x)=f'(x)\frac{1}{N}+\frac{f''(\xi)}{2N^2}.$$

故

$$|f'(x)|\leqslant N[|f(x+\frac{1}{N})|+|f(x)|+|\frac{f''(\xi)}{2N^2}|]$$
$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

所以 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=0$．

证法3　设 $|f''(x)|<M$，因 $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$，故 f 有界．令

$$M_k(a)=\sup\{|f^{(k)}(x)|: x\in[a,+\infty)\},$$

则 $M_2(a),M_0(a)$ 有界.

因为 $M_2(a)$ 对任意 $a\in[0,+\infty)$ 一致有界,且 $\lim\limits_{a\to+\infty}M_0(a)=0$,所以 $\lim\limits_{a\to+\infty}M_2(a)M_0(a)=0$.

由题 1.8.5,

$$0\leqslant M_1^2(a)\leqslant 2M_2(a)M_0(a)$$

知 $\lim\limits_{a\to+\infty}M_1^2(a)=0$,于是 $\lim\limits_{a\to+\infty}M_1(a)=0$,即 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

1.8.15 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上无限次可导的实值函数,且存在 $L>0$,使在 $\mathbf{R}$ 上,对 $\forall n\geqslant 0$,有 $|f^{(n)}(x)|\leqslant L$. 试证:如果 $f\equiv 0$ 在一无限有界集 M 上成立,则 $f\equiv 0$.

证 由 f 连续及在 M 上 $f\equiv 0$ 知,对任意 $x\in\overline{M}$(M 的闭包),$f(x)=0$. 故不妨设 M 为闭集,即 $x_n\in M$, $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0$ 蕴涵着 $x_0\in M$.

因为 M 是无限有界闭集,所以存在互不相同的 $x_n\in M$,使得 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=x_0\in M$. 从 $\{x_n\}$ 中不难选出严格单调的子序列 $\{x_n^{(0)}\}$,则仍有 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^{(0)}=x_0$,为确定起见,不妨设

$$x_1^{(0)}<x_2^{(0)}<\cdots<x_n^{(0)}<\cdots<x_0,$$

由集合 M 的性质知 $f(x_n^{(0)})=f(x_0)$, $n=1,2,\cdots$.

我们用归纳法来证明,对任意 $k\in\mathbf{N}$,存在以 x_0 为极限的严格单调增序列 $\{x_n^{(k)}\}$,使得 $f^{(k)}(x_n^{(k)})=0$, $n=1,2,\cdots$. 事实上,由 Rolle 定理,存在 $x_n^{(1)}\in(x_n^{(0)},x_{n+1}^{(0)})$,使 $f'(x_n^{(1)})=0$, $n=1,2,\cdots$. 显然,由于 $\{x_n^{(0)}\}$ 是以 x_0 为极限的严格单调增序列,故 $\{x_n^{(1)}\}$ 也是以 x_0 为极限的严格单调增序列.

假设 $\{x_n^{(k)}\}$ 是使得 $f^{(k)}(x_n^{(k)})=0(\forall n\in\mathbf{N})$ 的以 x_0 为极限的严格单调增序列,则由 $f\in C^\infty(\mathbf{R})$ 及 Rolle 定理可得一以 x_0 为极限的单调增序列 $\{x_n^{(k+1)}\}$,使得 $x_n^{(k+1)}\in(x_n^{(k)},x_{n+1}^{(k)})$, $n=1,2,\cdots$,且 $f^{(k+1)}(x_n^{(k+1)})=0$, $n=1,2,\cdots$.

对 $\forall k\geqslant 0$,由于 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n^{(k)}=x_0$, $f^{(k)}(x_n^{(k)})=0$ 及 $f^{(k)}$ 的连续性,我们有 $f^{(k)}(x_0)=\lim\limits_{n\to+\infty}f^{(k)}(x_n^{(k)})=0$, $k=0,1,2,\cdots$.

将 $f(x)$ 在 x_0 处展开成带余项的 Taylor 公式

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k\\&\quad+\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n\\&=\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n,\end{aligned}$$

$$\forall x\in\mathbf{R},\forall n\in\mathbf{N},$$

其中 $\theta\in(0,1)$,依赖于 x 和 n. 因此,对 $\forall x\in\mathbf{R}$,有

$$\begin{aligned}0&\leqslant|f(x)|\\&=\left|\frac{f^{(n)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(x-x_0)^n\right|\\&\leqslant\frac{L}{n!}|x-x_0|^n\to 0\ (n\to+\infty),\end{aligned}$$

从而 $f(x)=0$. 由于 $x\in\mathbf{R}$ 是任意的,所以,$f(x)\equiv 0$, $x\in\mathbf{R}$.

注 由 $|f^{(n)}(x)|\leqslant L$ 和要证 $f\equiv 0$ 想到,必须找到一点 x_0,使 f 在 x_0 处的各阶导数为 0,于是将 f 在 x_0 处 Taylor 展开.

1.8.16 证明函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^nx)}{n!}$ 的 Taylor 级数除 $x=0$ 外处处发散.

证 $\dfrac{\sin(2^nx)}{n!}$ 有任意阶导函数,且

$$\left|\left(\frac{\sin(2^nx)}{n!}\right)^{(k)}\right|=\left|\frac{2^{nk}\sin(2^nx+\frac{k\pi}{2})}{n!}\right|\leqslant\frac{2^{nk}}{n!},$$

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{nk}}{n!}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2^k)^n}{n!}$ 收敛于 e^{2^k},所以 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\sin(2^nx)}{n!}$ 在 $\mathbf{R}$ 上一致收敛,从而 $f(x)$ 可以逐项求导,且 $f\in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

由于

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{nk}\sin(2^nx+\frac{k\pi}{2})}{n!},$$

$$f^{(k)}(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{nk}\sin(\frac{k\pi}{2})}{n!},$$

$$\begin{aligned}f^{(2m-1)}(0)&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{(2m-1)n}(-1)^{m-1}}{n!}\\&=(-1)^{m-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2^{2m-1})^n}{n!}\\&=(-1)^{m-1}e^{2^{2m-1}},\end{aligned}$$

$$f^{(2m)}(0)=0.$$

所以,f 的 Taylor 展开式为

$$\begin{aligned}f(x)&\sim\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\\&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}e^{2^{2m-1}}}{(2m-1)!}x^{2m-1}.\end{aligned}$$

它的收敛半径为

$$\begin{aligned}R&=\lim_{m\to+\infty}\frac{a_m}{a_{m+1}}\\&=\lim_{m\to+\infty}\frac{e^{2^{2m-1}}}{(2m-1)!}\cdot\frac{(2m+1)!}{e^{2^{2m+1}}}\\&=\lim_{m\to+\infty}\frac{(2m+1)2m}{e^{2^{2m-1}(4-1)}}=0.\end{aligned}$$

由此知,$f(x)$ 的 Taylor 展式只在 $x=0$ 处收敛,而在其它点处发散.

1.8.17 设 f 及其所有导数在$[0,r]$上非负,则 f 的 Taylor 级数在$[0,r]$上收敛于 f,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(x)\ (0\leqslant x<r).$$

证法1 令 $R_n(x)=f(x)-\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$, $g(x)=\frac{R_n(x)}{x^{n+1}}$,则

$$g'(x)=\frac{xR_n{}'(x)-(n+1)R_n(x)}{x^{n+2}}.$$

再令 $h(x)=xR_n{}'(x)-(n+1)R_n(x)$,逐次求导得到

$$h'(x)=xR_n{}''(x)-nR_n{}'(x),\cdots,$$
$$h^{(n)}(x)=xR_n^{(n+1)}(x)-R_n^{(n)}(x),$$
$$h^{(n+1)}(x)=xR_n^{(n+2)}(x)=xf^{(n+2)}(x)\geqslant 0.$$

于是,$h^{(n)}(x)\geqslant h^{(n)}(0)=0$. 又得 $h^{(n-1)}(x)\geqslant h^{(n-1)}(0)=0\cdots$ 继续推出 $h(x)\geqslant 0$,进而有 $g'(x)\geqslant 0$.所以 $g(r)\leqslant g(r)$,且

$$0\leqslant\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}=R_n(x)$$
$$\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}R_n(r)$$
$$\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r)\to 0\ (n\to+\infty),$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty}R_n(x)=0$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,0\leqslant x<r.$$

证法2 令 $F(t)=f(t)+\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$,则 $F'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$.从而

$$R_n(x)=F(x)-F(0)=\int_0^x F'(t)\mathrm{d}t$$
$$=\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

特别 $R_n(r)=\int_0^r\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(r-\xi)^n\mathrm{d}\xi$

$$\xlongequal{\xi=\frac{r}{x}t}\left(\frac{r}{x}\right)^{n+1}\int_0^x\frac{f^{(n+1)}\left(\frac{r}{x}t\right)}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

因 f 的各阶导数非负,故 $f^{(n+1)}$ 单调增,从而对 $\forall t\in[0,x]$, $f^{(n+1)}(t)\leqslant f^{(n+1)}\left(\frac{r}{x}t\right)$,故有

$$R_n(r)=\left(\frac{r}{x}\right)^{n+1}\int_0^x\frac{f^{(n+1)}\left(\frac{r}{x}t\right)}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t$$
$$\geqslant\left(\frac{r}{x}\right)^{n+1}\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t$$
$$=\left(\frac{r}{x}\right)^{n+1}R_n(x),$$
$$R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}R_n(r)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r).$$

从而证明了所要的结论.

证法3 由 Taylor 公式及题设易知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$ 收敛于 $g(x)$,且 $g(x)$ 是 C^{∞} 的,并可逐项求导(事实上,由 Taylor 公式及 f 各阶导数非负知 $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\leqslant f(x)$, $\forall n\in\mathbf{N}$. 从而对 $\forall x\in[0,r]$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ 收敛,又 $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\leqslant\frac{f^{(n)}(0)}{n!}r^n$, $x\in[0,r]$,故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{n}(0)}{n!}x^n$ 在$[0,r]$上一致收敛,即 $g(x)$ 连续.至于可导性,考虑 f 的各阶导数的 Taylor 展开,重复上述证明即可).因而 $g^{(n)}(0)=f^{(n)}(0)$ 且

$$(f(x)-g(x))^n\geqslant 0.$$

令 $H(x)=f(x)-g(x)$,则

(ⅰ) $H^{(n)}(0)=0$, (ⅱ) $H^{(n)}(x)\geqslant 0$.

再设 $G(x)=xH'(x)-NH(x)$,其中 N 为充分大的自然数.对 G 逐次求导推得

$$G^{(N)}(x)=xH^{(N+1)}(x)\geqslant 0,$$
$$G^{(N-1)}(x)\geqslant G^{(N-1)}(0)=0,$$
$$\cdots\cdots$$
$$G(x)\geqslant 0.$$

从而 $0\leqslant H(x)\leqslant\frac{1}{N}H'(x)$.由 N 的任意性,令 $N\to+\infty$ 立得 $H(x)\equiv 0$.于是

$$f(x)=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

证法4 由证法1知 $R_n(x)\geqslant 0$.为证 $R_n(x)\leqslant\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r)$, $x\in[0,r)$,令

$$g(x)=R_n(x)-\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1}f(r),$$

则 $g(0)=R_n(0)=f(0)-f(0)=0$, $g'(0)=0,\cdots$, $g^{(n)}(0)=0$.

$$g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-(n+1)!\frac{1}{r^{n+1}}f(r),$$
$$g^{(n+1)}(0)=f^{(n+1)}(0)-\frac{(n+1)!}{r^{n+1}}f(r).$$

因为 $f(r)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(n)}(0)}{k!}r^k+\frac{f^{(n-1)}(0)}{(n+1)!}r^{n+1}+\frac{f^{(n+2)}(\eta_r)}{(n+2)!}r^{n+2}$, $\eta_r\in(0,r)$ 且 f 各阶导数非负,故 $f(x)\geqslant\frac{r^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{n+1}(0)$.因此

$$g^{(n+1)}(0)\leqslant 0.$$

再由 $g^{(n)}(0)=\cdots=g'(0)=0$ 得

$$g'(x)\leqslant 0,x\in[0,r),$$
$$g(x)\leqslant g(0),x\in[0,r),$$

即 $R_n(x)-(\frac{x}{r})^{n+1}f(r)\leqslant 0$.

$$0\leqslant R_n(x)$$
$$\leqslant(\frac{x}{r})^{n+1}f(r)\longrightarrow 0\ (n\to+\infty).$$

f 的 Taylor 级数在 $[0,r)$ 上收敛于 f.

证法 5 用积分余项

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t.$$

同证法 4,令 $g(x)=R_n(x)-(\frac{x}{r})^{n+1}f(r)$,因为

$$R_n^{(k)}(x)=\frac{1}{(n-k)!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^{n-k}\mathrm{d}t$$
$$(0\leqslant k\leqslant n),$$

故 $R_n^{(k)}(0)=0,0\leqslant k\leqslant n$.而

$$R_n^{(n+1)}(x)=\left(\int_0^x f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t\right)'=f^{(n+1)}(x)$$

及 $((\frac{x}{r})^{n+1}f(r))^{(k)}\Big|_{x=0}=0,\quad 0\leqslant k\leqslant n$.

$((\frac{x}{r})^{n+1}f(r))^{(n+1)}=(n+1)!\frac{f(r)}{r^{n+1}}$,所以 $g^{(k)}(0)=0,0\leqslant k\leqslant n,g^{(n+1)}(x)=f^{(n+1)}(x)-(n+1)!\frac{f(r)}{r^{n+1}}$.同证法 4 知 $g^{(n+1)}(0)\leqslant 0$.从而 $g'(x)\leqslant 0,x\in[0,r),g(x)\leqslant 0$,即

$$0\leqslant R_n(x)\leqslant(\frac{x}{r})^{n+1}f(r)\longrightarrow 0\ (n\to+\infty).$$

因而得出所要的结论.

注 要证 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(x)$,只需证明

$$0\leqslant\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\leqslant R_n(x)$$
$$=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$
$$\leqslant(\frac{x}{r})^{n+1}f(r)\longrightarrow 0\ (n\to+\infty).$$

为此,研究

$$R_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$
$$g(x)=\frac{R_n(x)}{x^{n+1}};$$

或者

$$R_n(x)=\int_0^x\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n\mathrm{d}t;$$

或者

$$g(x)=R_n(x)-(\frac{x}{r})^{n+1}f(r).$$

§1.9 无穷级数的收敛性及求和

无穷级数的收敛性和函数项级数的一致收敛性的判别法以及各种求和的方法可参阅[1].

本节涉及到的判别法主要有比较判别法、Leibniz 判别法、Dirichlet 判别法、Raabe 判别法、Cauchy 判别法、Gauss 判别法等.另外,在证题时主要采用的是综合法、反证法等方法.

裂项相消法 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-b_{n-1})=\lim_{n\to+\infty}(b_n-b_0)=\lim_{n\to+\infty}b_n-b_0$ 是求许多级数和的有效方法.其关键是将 a_n 分裂成数列 $\{b_n\}$ 的两项之差 b_n-b_{n-1}.

读者可通过学习下列具体实例来掌握和运用上述各种方法.

1.9.1 求无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$ 的和.

解
$$\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{1}{n^2+n+1}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}n]$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\operatorname{arctg}(n+1)-\operatorname{arctg}1]$$
$$=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}.$$

1.9.2 试证: $\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\frac{\pi^2}{12}$.

证 因为

$$\left|\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}\right|$$
$$=\frac{1}{n\frac{1+x+\cdots+x^{2n-1}}{x^n}}$$
$$=\frac{1}{n(x^{-n}+\cdots+1+\cdots+x^{n-1})}$$
$$\leqslant\begin{cases}\frac{1}{n(x^{-n}+\cdots+1)}, & x\in[\frac{1}{2},1]\\ \frac{1}{n(1+x+\cdots+x^{n-1})}, & x\in[1,2]\end{cases}$$
$$\leqslant\frac{1}{n\cdot n}=\frac{1}{n^2},$$

所以,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$ 在 $[\frac{1}{2},2]$ 上一致收敛,由此得

$$\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1}\frac{x^n(1-x)}{n(1-x^{2n})}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1}\frac{x^n}{n(1+x+\cdots+x^{2n-1})}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot2n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{12}.$$

注 在进行极限号与和号交换之前,一定要先验证它是可交换的,其充分条件是函数项级数的一致收敛性.

这里,还用了 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 这一结果.

1.9.3　设 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛，证明

(1) $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = 0$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_n$.

证　(1) 因 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ 收敛，故 $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S \in \mathbf{R}$. 所以

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_1 + \cdots + S_n}{n} = S.$$

于是

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} ka_k = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(S_k - S_{k-1}) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[S_n - \frac{1}{n}(S_{n-1} + S_{n-2} + \cdots + S_1)\right] \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left[S_n - \frac{S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n}\right] \\
&= S - S \cdot 1 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2)\ &\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n(n+1)} \\
&\xlongequal{\text{裂项}} \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)(a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{n} - \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + (n+1)a_{n+1}}{n+1} + a_{n+1}\right) \\
&\xlongequal{\text{相消}} \lim_{m\to+\infty}\left(a_1 - \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1} ka_k\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} \\
&= a_1 - 0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.
\end{aligned}$$

注　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 可转化为数列 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$（级数的部分和）的极限；反之，数列 S_n 又可转化为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，其中 $a_n = S_n - S_{n-1}$.（2）的证明又使用了裂项相消法.

1.9.4　设 $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \cdots$ 为依小到大排列的全体素（质）数，试证：

(1) $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}$ 当 $\alpha > 1$ 时收敛；当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时发散到 $+\infty$.

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \cdots = +\infty$.

证　当 $\alpha > 0$ 时，由等比数列求和公式得到

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = 1 + \frac{1}{p_k^\alpha} + \frac{1}{p_k^{2\alpha}} + \cdots$$

令 $p_1, \cdots, p_n$ 为不超过 N 的全体素数，则

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \cdots + \frac{1}{N^\alpha} + \frac{1}{N_1{}^\alpha} + \frac{1}{N_2{}^\alpha} + \cdots \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha},$$

其中 $N_1 > N, N_2 > N_1$（但 N, N_1, N_2 不必彼此相差 1），从而

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}.$$

另一方面，又可得

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} > \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} > \sum_{m=1}^{N} \frac{1}{m^\alpha}.$$

令 $N \to +\infty$ 得

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} \geqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}.$$

所以

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k^\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha}.$$

当 $\alpha > 1$ 时收敛，当 $0 < \alpha \leqslant 1$ 时发散.

(2) 因为（由(1)）

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = +\infty,$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \ln\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = +\infty,$$

$$+\infty = \ln\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = -\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{p_k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{p_k} = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k},$$

所以 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k} = +\infty$.

这里用到

$$\begin{aligned}
-\ln(1-\eta) &= \eta + \frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta^3}{3} + \cdots \\
&\leqslant \eta + \eta^2 + \eta^3 + \cdots \\
&= \frac{\eta}{1-\eta} \leqslant 2\eta, \quad 0 < \eta \leqslant \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

或者令 $\varphi(\eta) = 2\eta + \ln(1-\eta), 0 < \eta \leqslant \frac{1}{2}$，则

$$\varphi'(\eta) = 2 - \frac{1}{1-\eta} = \frac{1-2\eta}{1-\eta} \geqslant 0,$$

所以 φ 单调增，从而

$$0 = \varphi(0) \leqslant \varphi(\eta) = 2\eta + \ln(1-\eta),$$

$$-\ln(1-\eta) \leqslant 2\eta.$$

注 应用

$$\frac{1}{1-\frac{1}{p_k^a}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{p_k^a}\right)^n$$

推得(1),再由(1)及 $\ln(1-\frac{1}{p_k})\leqslant\frac{2}{p_k}$ 立得(2).

1.9.5 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\sqrt{n^2+1}\pi}{n^a}$.

解 (1) 因为

$$a_n=\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\frac{1}{(e^{\ln\ln n})^{\ln\ln n}}=\frac{1}{n^{\ln\ln n}},$$

所以当 $n>e^{e^2}$ 时,$a_n<\frac{1}{n^2}$,而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,由比较判别法知 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$ 收敛.

(2) 因为

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{(-1)^n\sin\sqrt{n^2+1}\pi}{n^a}\\&=\frac{\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi}{n^a}\\&=\frac{\sin\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}{n^a}\\&\sim\frac{\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}}{n^a}\sim\frac{\pi}{2n^{1+a}}(n\to+\infty),\end{aligned}$$

所以,由

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+a}}\begin{cases}收敛,a>0,\\发散,a\leqslant 0,\end{cases}$$

立即推得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n^2+1}\pi}{n^a}\begin{cases}收敛,a>0,\\发散,a\leqslant 0.\end{cases}$$

1.9.6 求下列幂级数的收敛半径和收敛点集:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}x^n$.

解 (1) 因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}\right|}=\lim_{n\to+\infty}3^{-\frac{n-1}{n}}(\sqrt[n]{n})^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{3},$$

所以收敛半径 $R=3$.

当 $x=3$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3}{\sqrt{n}}$,由 Leibniz 判别法知级数是收敛的;当 $x=-3$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{\sqrt{n}}$,此级数是发散的.因此幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}$ 的收敛点集为$(-3,3]$.

(2) 因为 $\overline{\lim_{n\to+\infty}}\sqrt[n]{\left|\frac{\sin n}{n}\right|}=1$,所以收敛半径是1.

当 $x=1$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$,由 Dirichlet 判别法,该级数收敛;当 $x=-1$ 时,幂级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n(1+\pi)}{n}$,由 Dirichlet 判别法知该级数也是收敛的.

因此,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}x^n$ 的收敛点集是$[-1,1]$.

1.9.7 设 $p\geqslant 0$,试证级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)}$$

当 $p>1$ 时收敛;当 $0\leqslant p\leqslant 1$ 时发散.

证 记 $0<\frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)}=a_n$,则

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}&=\frac{\frac{n!}{(p+1)\cdots(p+n)}}{\frac{(n+1)!}{(p+1)\cdots(p+n)(p+n+1)}}\\&=\frac{p+n+1}{n+1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)&=\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{p+n+1}{n+1}-1\right)\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{np}{n+1}=p.\end{aligned}$$

由 Raabe 判别法知,当 $p>1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;当 $0\leqslant p<1$ 时,级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.而当 $p=1$ 时,

$$a_n=\frac{n!}{(1+1)\cdots(1+n)}=\frac{1}{n+1},$$

原级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ 显然发散.

1.9.8 已知 $a_n\geqslant 0,n=1,2,\cdots,\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.求证

$$\lim_{m\to+\infty}\frac{1}{m}\sum_{\substack{n\leqslant m\\a_n>\frac{1}{n}}}1=0,$$

其中 $\sum_{\substack{n\leqslant m\\a_n>\frac{1}{n}}}1$ 表示 $a_1,\cdots,a_m$ 中满足 $a_n>\frac{1}{n}$ 的 a_n 的个数.

证 (反证)若结论不成立,则存在 $\varepsilon_0>0$,使得

$$\frac{1}{m}\sum_{\substack{n\leqslant m\\a_n>\frac{1}{n}}}1\geqslant\varepsilon_0$$

对无穷个 m 成立.另一方面,由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,对于该

$\varepsilon_0>0$，$\exists N$，使 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty}a_n<\frac{\varepsilon_0}{2}$. 固定 N，取 m 满足

$$\frac{1}{m}\sum_{\substack{n\le m\\ a_n>\frac{1}{n}}}1\geqslant\varepsilon_0,\text{且}\frac{1}{m}\sum_{1}^{N}1<\frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon_0}{2}&>\sum_{n=N+1}a_n\geqslant\sum_{\substack{a_n>\frac{1}{n}\\ N<n\le m}}a_n>\frac{1}{m}\sum_{\substack{a_n>\frac{1}{n}\\ N<n\le m}}1\\&=\frac{1}{m}\sum_{\substack{a_n>\frac{1}{n}\\ n\le m}}1-\frac{1}{m}\sum_{\substack{a_n>\frac{1}{n}\\ 1\le n\le N}}1\\&>\frac{1}{m}\sum_{\substack{a_n>\frac{1}{n}\\ n\le m}}1-\frac{\varepsilon_0}{2}>\varepsilon_0-\frac{\varepsilon_0}{2}=\frac{\varepsilon_0}{2},\end{aligned}$$

矛盾.

1.9.9　设 $\{x_n\}$ 为区间 $[0,1)$ 中的全体有理数，对任意 $x\in(0,1)$，定义

$$f(x)=\sum_{x_n<x}\frac{1}{2^n}.$$

(1) 令

$$g_n(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant x_n,\\ \frac{1}{2^n}, & x>x_n,\end{cases}$$

证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛于 $f(x)$；

(2) 证明 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1-x_n}{2^n}$.

证　(1) 因为对任意 $x\in(0,1)$，$0\leqslant g_n(x)\leqslant\frac{1}{2^n}$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 在 $(0,1)$ 上一致收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)=\sum_{x_n<x}\frac{1}{2^n}=f(x).$$

(2) 由(1)知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g_n(x)$ 可以逐项积分，于是

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}g_n(x)\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 g_n(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_n}^{1}\frac{1}{2^n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x\Big|_{x_n}^{1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-x_n}{2^n}.\end{aligned}$$

1.9.10　试证 Riemann 函数

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$$

在 $(1,+\infty)$ 上连续且有各阶导数. 问它在 $(1,+\infty)$ 上是否一致收敛？

证　设 $u_n^{(0)}(x)=u_n(x)=\frac{1}{n^x}$，则 $u_n'(x)=-\frac{\ln n}{n^x}$，$u_n''(x)=\frac{\ln^2 n}{n^x}$，…，$u_n^{(k)}(x)=(-1)^k\frac{\ln^k n}{n^x}$. 因为当 n 充分大时，对 $\forall x\in[1+\delta,+\infty)(\delta>0)$ 有

$$\begin{aligned}|U_n^{(k)}(x)|&=\left|\frac{\ln^k n}{n^x}\right|\leqslant\frac{(\ln n)^k}{n^{1+\delta}}\\&=\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}\cdot\frac{\ln n}{n^{\frac{\delta}{2}}}\leqslant\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}},\end{aligned}$$

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\frac{\delta}{2}}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^{(k)}(x)$ 关于 $x\in[1+\delta,+\infty)$ 一致收敛. $\zeta(x)$ 在 $[1+\delta,+\infty)$ 可逐项求各阶导数. 对 $\forall x_0\in(1,+\infty)$，取 $\delta=\frac{x_0-1}{2}$，则有 $x_0\in[1+\delta,+\infty)$，故 $\zeta(x)$ 在 x_0 处连续和有各阶导数.

但是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $x\in(1,+\infty)$ 内不一致收敛.

事实上(反证)，假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内一致收敛，则对 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$，由 Cauchy 收敛原理，存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>\mathbf{N}$ 时有

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}=\varepsilon_0&>\frac{1}{n^x}+\frac{1}{(n+1)^x}+\cdots+\frac{1}{(2n)^x}\\&>\frac{n}{(2n)^x}.\end{aligned}$$

令 $x\to1^+$ 得

$$\frac{1}{4}\geqslant\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

矛盾.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 不一致收敛还可以有另一个反证法. 叙述如下.

假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内一致收敛，则可以逐项求极限，所得级数必收敛，因此

$$\lim_{x\to1^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to1^+}\frac{1}{n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散是众所周知的事实，矛盾.

注　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(x)$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u'(x)$ 一致收敛是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(x)$ 可逐项求导的充分条件，但不是必要的. 本题采用的方法是，对 $\forall$ 固定的 $x_0\in(1,+\infty)$，选取特定的区间 $[\frac{x_0+1}{2},+\infty)(\ni x_0)$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^x})^{(k)}$ 在其中一致收敛，因而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n^x})^{(k-1)}$ 在 x_0 可逐项求导. 再

由 x_0 的任意性，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^x}\right)^{(k-1)}(k=1,2,\cdots)$ 在 $(1,+\infty)$ 上可逐项求导. 这个方法经常会用到.

1.9.11 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，S_n 表示它的前 n 项和.

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 也收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则当 $\alpha>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛，当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

证 (1)(方法 1) 因为

$$\frac{\frac{a_n}{S_n^\alpha}}{a_n}=\frac{1}{S_n^\alpha}\to\frac{1}{S^\alpha}(n\to+\infty),$$

其中 $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 也收敛.

(方法 2) 当 $\alpha\geqslant 1$ 时，$S_1^\alpha\leqslant S_n^\alpha$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_1^\alpha}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 也收敛.

当 $\alpha<1$ 时，$S_n^\alpha<S^\alpha$，其中 $S=\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S^\alpha}$ 收敛知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛.

(2)(方法 1) 当 $n\geqslant 2$ 时，因为 $a_n>0$，故 S_n 严格增，又 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，所以 $\lim_{n\to+\infty}S_n=+\infty$. 又

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha}=\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n^\alpha}=\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{S_n^\alpha}<\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha},$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}<\frac{a_1}{S_1^\alpha}+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{S_{n-1}}^{S_n}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}=\frac{1}{a_1^{\alpha-1}}+\int_{a_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}.$$

因为 $\alpha>1$ 时，$\int_{a_1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^\alpha}$ 收敛，所以 $\alpha>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 收敛.

当 $\alpha\leqslant 1$ 时，对充分大的 n，$S_n\geqslant 1$，所以

$$\frac{a_n}{S_n^\alpha}\geqslant\frac{a_n}{S_n}.$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，故存在 k_1，使

$$\sum_{n=2}^{k_1}a_n\geqslant a_1.$$

于是

$$\frac{a_2}{S_2}+\cdots+\frac{a_{k_1}}{S_{k_1}}\geqslant\frac{a_2+\cdots+a_{k_1}}{S_{k_1}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

以此类推，可得 $1<k_1<k_2<\cdots$ 使

$$\frac{a_{k_i+1}}{S_{k_i+1}}+\cdots+\frac{a_{k_{i+1}}}{S_{k_{i+1}}}\geqslant\frac{1}{2}.$$

所以

$$\sum_{n=1}^{k_N}\frac{a_n}{S_n}\geqslant N\cdot\frac{1}{2}.$$

令 $N\to+\infty$，就得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}=+\infty$，从而当 $\alpha\leqslant 1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

(方法 2) 由

$$\frac{a_{n+1}}{S_n}=\frac{S_{n+1}-S_n}{S_n}=\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{S_n}\geqslant\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n}\geqslant\sum_{n}^{\infty}\int_{S_n}^{S_{n+1}}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=+\infty.$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n}$ 发散.

如果 a_n 中有无穷多项使 $a_{n+1}>S_n$，则有无穷个 n 使

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+S_n}>\frac{a_{n+1}}{2a_{n+1}}=\frac{1}{2},$$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}\geqslant\sum_{a_{n_k+1}>S_{n_k}}\frac{1}{2}=+\infty$.

如果 a_n 中只有有限个 n 使 $a_{n+1}>S_n$，则存在 $N\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，$a_{n+1}<S_n$，于是

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_{n+1}+S_n}\geqslant\frac{a_{n+1}}{2S_n},$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_n}$ 发散，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}$ 也发散，即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散. 再由 $\frac{a_n}{S_n^\alpha}\geqslant\frac{a_n}{S_n}$，$\alpha\leqslant 1$，知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}(\alpha\leqslant 1)$ 发散.

(方法 3) 当 $\alpha>1$ 时，令 $f(x)=x^{1-\alpha}$，$f'(x)=\frac{1-\alpha}{x^\alpha}$，由 Lagrange 中值定理，存在 $\xi_n\in(S_n,S_{n+1})$ 使

$$\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=\frac{1-\alpha}{\xi_n^\alpha}(S_{n+1}-S_n)=\frac{1-\alpha}{\xi_n^\alpha}a_{n+1},$$

所以

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}^{\alpha-1}}<\frac{a_{n+1}}{\xi_n^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{S_{n+1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{S_k^\alpha}<\frac{a_1}{S_1^\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{S_k^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_{k-1}^{\alpha-1}}\right)$$

$$=a_1^{1-\alpha}+\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_1^{\alpha-1}}\right)$$

$$= a_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{S_1^{\alpha-1}} - \frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right)$$

$$\leqslant a_1^{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{S_1^{\alpha-1}} = M.$$

这证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 的部分和有界,因而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}(\alpha>1)$ 收敛.

当 $\alpha=1$ 时,由

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > \frac{1}{S_{n+p}}(a_{n+1}+\cdots+a_{n+p})$$

$$= 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}},$$

及 $S_n \to +\infty(n\to+\infty)$,所以对 $\forall n\in\mathbf{N}$,存在 $p\in\mathbf{N}$,使 $\frac{S_n}{S_{n+p}} < \frac{1}{2}$,从而

$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{a_{n+p}}{S_{n+p}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

由 Cauchy 收敛准则知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散,由方法 1 知,当 $\alpha \leqslant 1$ 时,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n^\alpha}$ 发散.

注 级数的比较法是本题使用的主要方法.

1.9.12 设正项级数(即 $a_n>0$)$\sum_{k=1}^{\infty}a_n$ 收敛.命 $r_n = \sum_{k=n}^{\infty}a_k$,试证级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ 发散.

证法 1 对 $\forall n\in\mathbf{N}$,

$$\sum_{k=n}^{\infty}\frac{a_k}{r_k} \geqslant \frac{1}{r_n}\sum_{k=n}^{\infty}a_k = \frac{r_n}{r_n} = 1.$$

由 Cauchy 判别法即知 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ 发散.

证法 2 (反证)假设 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ 收敛,根据Cauchy判别法,对 $\epsilon=\frac{1}{2}$,必存在 $N\in\mathbf{N}$,对 $\forall p\in\mathbf{N}$ 有

$$\left|\frac{a_N}{r_N} + \cdots + \frac{a_{N+p}}{r_{N+p}}\right| < \epsilon = \frac{1}{2}.$$

又因 $a_n>0$,$\frac{a_n}{r_n}>0$ 和当 $n<m$ 时,$r_n>r_m$,因而 $\frac{1}{r_n} < \frac{1}{r_m}$.所以

$$\frac{1}{2} > \left|\frac{a_N}{r_N} + \cdots + \frac{a_{N+p}}{r_{N+p}}\right|$$

$$= \frac{a_N}{r_N} + \cdots + \frac{a_{N+p}}{r_{N+p}} > \frac{a_N + \cdots + a_{N+p}}{r_N}.$$

令 $p\to+\infty$,得到

$$\frac{1}{2} \geqslant \frac{\sum_{k=N}^{\infty}a_k}{r_N} = \frac{r_N}{r_N} = 1,$$

矛盾.从而 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{r_k}$ 发散.

1.9.13 试证:级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-e^{\alpha})(2-e^{\frac{\alpha}{2}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$$

当 $\alpha=\ln 2$ 和 $\alpha>1$ 时收敛;

当 $\alpha\leqslant 1$,且 $\alpha\neq\ln 2$ 时发散.

证 当 $\alpha = N\ln 2$(N 为自然数)时,

$$a_n = (2-e^{\alpha})(2-e^{\frac{\alpha}{2}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{N}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$$

$$=0, n\geqslant N.$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(2-e^{\alpha})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{2}})$ 收敛.

当 $\alpha\neq\ln 2, 2\ln 2,\cdots$ 时,由 $\lim_{n\to+\infty}(2-e^{\frac{\alpha}{n}})=1$ 知,存在 $N\in\mathbf{N}$,使 $2-e^{\frac{\alpha}{N+1}}>0$.因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2-e^{\alpha})(2-e^{\frac{\alpha}{2}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$$

$$= \sum_{n=1}^{N}(2-e^{\alpha})(2-e^{\frac{\alpha}{2}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$$

$$+ (2-e^{\alpha})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{N}})\sum_{n=N+1}^{\infty}(2-e^{\frac{1}{N+1}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$$

所以原级数的敛散性等价于 $\sum_{n=N+1}^{\infty}(2-e^{\frac{\alpha}{N+1}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})$ 的敛散性.令

$$u_n = (2-e^{\frac{\alpha}{N+1}})\cdots(2-e^{\frac{\alpha}{n}})>0.$$

由 Raabe 判别法和

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{2-e^{\frac{\alpha}{n+1}}}-1\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{-1+e^{\frac{\alpha}{n+1}}}{2-e^{\frac{\alpha}{n+1}}}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{-1+1+\frac{\alpha}{n+1}+o(\frac{\alpha}{n+1})}{2-e^{\frac{\alpha}{n+1}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n+1}\alpha + n\cdot o(\frac{\alpha}{n+1})}{2-e^{\frac{\alpha}{n+1}}} = \alpha,$$

如果 $\alpha>1$,则级数收敛;而 $\alpha<1$ 时,级数发散.但当 $\alpha=1$ 时,Raabe 判别法不适用.根据

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{2-e^{\frac{1}{n}}}$$

$$= \frac{1}{2-(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}$$

$$= \frac{1}{1-(\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2}))}$$

$$= 1 + \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right] + \left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^2 + o\left(\left[\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right]^2 \right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)} + \frac{3}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$= 1 + \frac{1}{n-1} + \frac{0}{(n-1)\ln(n-1)} + o\left(\frac{1}{(n-1)\ln(n-1)}\right)$$

和 Gauss 判别法，级数发散.

注 当 $\alpha = 1$ 时，Rabbe 判别法已不能断定级数的敛散性，应采用更细致的判别法，Gauss 判别法就能判定.

1.9.14 如果对满足 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛的任意 a_n，必有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 也收敛.

证 (反证) 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 发散，则对任意 $E > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}$，当 $n > N$ 时，$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 > E$.

取 $E_1 = 1$，$\exists n_1$，使 $\sum_{k=1}^{n_1} b_k^2 = B_{n_1} > E_1 = 1$，

取 $E_2 = 2^2$，$\exists n_2 > n_1$，使 $\sum_{k=n_1+1}^{n_2} b_k^2 = B_{n_2} > E_2 = 2^2$，

取 $E_N = N^2$，$\exists n_N > n_{N-1}$，使

$$\sum_{k=n_{N-1}+1}^{n_N} b_k^2 = B_{n_N} > E_N = N^2,$$

$\cdots$

令 $a_n = \frac{b_n}{B_{n_i}}$，其中 $n_{i-1} + 1 \leqslant n \leqslant n_i$，$i = 1, 2, \cdots$，$n_0 = 0$，则

$$0 < \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{B_{n_1}^2}(b_1^2 + \cdots + b_{n_1}^2) + \frac{1}{B_{n_2}^2}(b_{n_1+1}^2 + \cdots + b_{n_2}^2) + \cdots + \frac{1}{B_{n_N}^2}(b_{n_{N-1}+1}^2 + \cdots + B_{n_N}^2) + \cdots$$

$$= \frac{1}{B_{n_1}} + \frac{1}{B_{n_2}} + \cdots + \frac{1}{B_{n_N}} + \cdots$$

$$< \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{N^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛，因此 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛. 但是，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \frac{1}{B_{n_1}}(b_1^2 + \cdots + b_{n_1}^2) + \cdots + \frac{1}{B_{n_N}^2}(b_{n_{N-1}+1}^2 + \cdots + b_{n_N}^2) + \cdots$$

$$> 1 + 1 + \cdots$$

是发散的，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 发散. 与已知条件矛盾. 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 是收敛的.

1.9.15 如果对任意满足 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛的 f，必有 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 也收敛.

证 (反证) 假设 $\int_a^{+\infty} g^2(x)\mathrm{d}x$ 发散，则存在严格增的序列 $a_1, a_2, \cdots, a_N, \cdots$ 使得

$$\int_a^{a_1} g^2(x)\mathrm{d}x > 1, \int_{a_1}^{a_2} g^2(x)\mathrm{d}x > 2^2, \cdots, \int_{a_{n-1}}^{a_n} g^2(x)\mathrm{d}x > n^2, \cdots.$$

令

$$f(x) = \frac{g(x)}{\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x},$$

$$a_i < x < a_{i+1}, i = 0, 1, \cdots, a_0 = a.$$

则

$$0 \leqslant \int_a^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x}{\left[\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x\right]^2}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x} < \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

所以 $\int_0^{+\infty} f^2(x)\mathrm{d}x$ 收敛，但

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x}{\int_{a_i}^{a_{i+1}} g^2(x)\mathrm{d}x} = \sum_{i=0}^{\infty} 1 = +\infty$$

是发散的,这与题设相矛盾.所以$\int_a^{+\infty} g^2(x)dx$ 收敛.

1.9.16 (1) 设 $a_n \geqslant 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1,且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$(实数),证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$;

(2) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1, $a_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)(n\to+\infty)$,其中 $\alpha>0$,且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$.证明 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

证 (1)(方法1)(反证)假设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$,则存在 $N\in\mathbf{N}$,使得 $\sum_{n=0}^{N} a_n > A+1$.因为 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,所以存在 $1>\delta>0$,当 $0<1-\delta<x<1$ 时,

$$A+1 > \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \geqslant \sum_{n=0}^{N} a_n x^n.$$

令 $x\to 1^-$ 就有

$$A+1 \geqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{N} a_n x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n > A+1,$$

矛盾.这就证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.再由 Abel 定理可知

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = A.$$

(方法2)令 $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$,由 $a_k \geqslant 0$ 知,S_n 单调增,再由 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \leqslant \lim_{x\to 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = A$ 知 S_n 有上界 A,所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.再由 Abel 定理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

(2)(方法1)因为

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)(n\to+\infty),$$

所以,存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n>N$ 时,

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n^{1+\alpha}},$$

从而 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛.再由 Abel 定理得

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A.$$

(方法2)(用定义) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} = \Delta > 0$.

对 $\forall \varepsilon>0$,因为 $a_n = o\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)(n\to+\infty)$,所以,存在 $N_1\in\mathbf{N}$,当 $n>N_1$ 时,

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{4\Delta n^{1+\alpha}}.$$

又因 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,故存在 $\delta>0$,当 $1-\delta<x<1$ 时,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| < \frac{\varepsilon}{4}$$

以及

$$\left|\sum_{n=0}^{N_1} a_n(1-x^n)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

于是,当 $N>N_1$ 和 $0<1-\delta<x<1$ 时,有

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{n=0}^{N} a_n - A\right| \\
&= \left|\sum_{n=0}^{N_1} a_n + \sum_{n=N_1+1}^{N} a_n - \sum_{n=0}^{N_1} a_n x^n + \sum_{n=0}^{N_1} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N_1} a_n(1-x^n)\right| + \left|\sum_{n=N_1+1}^{N} a_n\right| + \left|\sum_{n=N_1+1}^{\infty} a_n x^n\right| + \left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - A\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=N_1+1}^{N} |a_n| + \sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n||x^n| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + 2\sum_{n=N_1+1}^{\infty} |a_n| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + 2\sum_{n=N_1+1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{4\Delta n^{1+\alpha}} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\Delta}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2\Delta}\cdot\Delta = \varepsilon,
\end{aligned}$$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = A$.

1.9.17 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为1,且 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,若 $a_n = o(\frac{1}{n})$,则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$.

证 由 $a_n = o(\frac{1}{n})$ 知,对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N_0\in\mathbf{N}$,当 $n>N_0$ 时 $|a_n| \leqslant \frac{\varepsilon}{4n}$.又因为 $\lim_{N\to+\infty}[1-(1-\frac{1}{N})^n] = 0$ 及 $\lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = A$,所以存在 $N_1>N_0$,当 $N>N_1$ 时有

$$\left|\sum_{n=0}^{N_0-1} a_n[1-(1-\frac{1}{N})^n]\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - A\right| < \frac{\varepsilon}{4},$$

因此

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=0}^{N-1}a_n - A\right| &= \left|\sum_{n=0}^{N-1}a_n - \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right. \\
&\quad \left.+ \sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - A\right| \\
&\leqslant \left|\sum_{n=0}^{N_0-1}a_n - \sum_{n=0}^{N_0-1}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=N_0}^{N-1}a_n - \sum_{n=N_0}^{N-1}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=N}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - A\right| \\
&< \left|\sum_{n=0}^{N_0-1}a_n\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=N_0}^{N-1}a_n\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right]\right| \\
&\quad + \left|\sum_{n=N}^{\infty}a_n\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right| + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{n=N_0}^{N-1}|a_n|\left[1-\left(1-\frac{1}{N}\right)^n\right] \\
&\quad + \sum_{n=N}^{\infty}|a_n|\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + \frac{\varepsilon}{4} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4N}\sum_{n=N_0}^{N-1}\frac{1}{n}\left[1+\left(1-\frac{1}{N}\right)+\cdots\right. \\
&\quad \left.+\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-1}\right] + \frac{\varepsilon}{4}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4N}\sum_{n=N_0}^{N-1}\frac{1}{n}\cdot n + \frac{\varepsilon}{4N}\sum_{n=N}^{\infty}\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4N}(N-N_0) + \frac{\varepsilon}{4N}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{N}\right)} + \frac{\varepsilon}{4} \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

于是 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n = A$.

1.9.18 设 $a_n \geqslant 0, n = 1,2,\cdots, \sum_{n=1}^{\infty}a_n^2 < +\infty$,试证:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \leqslant \pi, m = 1,2,\cdots$;

(2) $\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n} \leqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

证 (1) 令 $f_m(x) = \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}(m+x)}, m = 1,2,\cdots$. 显然,对任意 $m \in \mathbf{N}$,积分

$$\int_0^{+\infty}f_m(x)\mathrm{d}x$$

收敛. 因为 $f_m(x)$ 是 x 的严格单调减函数,所以

$$\begin{aligned}
0 &< \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} < \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}f_m(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{+\infty}f_m(x)\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}(m+x)}\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{t=\sqrt{x}} \int_0^{+\infty}\frac{2\sqrt{m}}{m+t^2}\mathrm{d}t = 2\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{m}}\bigg|_0^{+\infty} \\
&= 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi, m = 1,2,\cdots.
\end{aligned}$$

(2) 对 $\forall m,n \in \mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}
a_m a_n &= a_m\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{4}}\cdot a_n\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left[a_m^2\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1}{2}} + a_n^2\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

因此,对 $\forall K \in \mathbf{N}$,有

$$\begin{aligned}
S_K &= \sum_{m,n=1}^{K}\frac{a_m a_n}{m+n} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{K}\left[a_m^2\cdot\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} + a_n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{K}a_m^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{m,n=1}^{K}a_n^2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)} \\
&= \sum_{m,n=1}^{K}a_m^2\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \\
&= \sum_{m=1}^{K}a_m^2\sum_{n=1}^{K}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \\
&\leqslant \sum_{m=1}^{K}a_m^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \\
&\leqslant \pi\sum_{m=1}^{K}a_m^2 \leqslant \pi\sum_{m=1}^{\infty}a_m^2 = \pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.
\end{aligned}$$

现在考虑正项二重级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$ 的部分和

$$S_{M,N} = \sum_{m=1}^{M}\sum_{n=1}^{N}\frac{a_m a_n}{m+n}, M,N \in \mathbf{N}.$$

令 $K = \max\{M,N\}$,则显然有

$$S_{M,N} \leqslant S_K \leqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.$$

即部分和 $S_{M,N}$ 有上界 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$,因而正项二重级数 $\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$ 收敛,并以 $\pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 为其上界,也即有

$$\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n} \leqslant \pi\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2.$$

注 从 $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} \leqslant \int_{n-1}^{n}\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{x}(m+x)}\mathrm{d}x$ 推出

(1);再由(1)和

$$\frac{a_m a_n}{m+n} \leqslant \frac{1}{2}\left[a_m^2 \cdot \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{n}(m+n)} + a_n^2 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{m}(m+n)}\right]$$

推出(2).

§ 1.10 Fourier 级数

设 f 是周期 2π 的函数,在$[-\pi,\pi]$上可积与绝对可积. f 的 Fourier 系数为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

f 的 Fourier 展开为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx).$$

如果 f 在 x_0 处有两个有限的广义单侧导数

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t) - f(x_0+0)}{t},$$

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t) - f(x_0-0)}{t},$$

则 f 的 Fourier 级数在 x_0 处收敛于$\frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)]$,即

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx_0 + b_n\sin nx_0) = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$

如果取某个特殊的 x_0,就可以得到特殊的级数和.

对$[-\pi,\pi]$上的可积和平方可积函数 f,有 Parseval 等式

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

利用这个等式,又可以得到一些特殊级数的和.

1.10.1 将 $f(x) = x(-\pi < x < \pi)$ 延拓为 $(-\infty,+\infty)$上的以2π为周期的函数,使 $f(-\pi) = f(\pi) = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = 0$. 求 f 的 Fourier 展开式,并求证:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

证 因为 $f(x)$ 为奇函数,所以

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots,$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{2(-1)^{n+1}}{n} + \frac{2}{n\pi}\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{2}{n}, n = 1,2,\cdots. \end{aligned}$$

于是, f 的 Fourier 展开式为

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, -\pi < x < \pi \end{aligned}$$

(或 $f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, -\infty < x < +\infty$).

应用 Parseval 等式就得

$$4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\mathrm{d}x = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\pi^2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

又 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n)^2}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

将 $f(x) = x(-\pi < x < \pi)$ 的 Fourier 展开式两边积分,有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^x \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos nx}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \end{aligned}$$

$(-\infty < x < \infty)$.

令 $x = \pi$,得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\pi^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{n^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \\ &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^{n+1}}{n^2} \\ &= 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}. \end{aligned}$$

即又得 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

同样得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. 于是又有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$.

代入

$$\frac{1}{2}x^2=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

得

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ -\pi<x<\pi.$$

两边再积分，有

$$\frac{x^3}{3}-\frac{\pi^2}{3}x+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\frac{\sin nx}{n},$$

$$=\frac{\pi^2}{3}\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}$$

$$+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin nx}{n^3},\ -\pi<x<\pi.$$

$$x^3=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx$$

$$+12\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx,\quad -\pi<x<\pi.$$

再两边积分，得

$$\frac{x^4}{4}=2\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1-\cos nx}{n^2}$$

$$+12\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1-\cos nx}{n^4},\ -\pi<x<\pi,$$

$$x^4=\left(8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\right)$$

$$+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos nx,\ -\pi<x<\pi,$$

其中

$$8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

为 x^4 的 Fourier 展开式的常数项，即

$$8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi}\frac{x^5}{5}\bigg|_0^{\pi}=\frac{\pi^4}{5}.$$

于是

$$x^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx$$

$$+48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nx,\ -\pi<x<\pi.$$

令 $x=0$，再移项就有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}=\frac{1}{48}\left[\frac{\pi^4}{5}-8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{48}\left[\frac{\pi^4}{5}-8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{12}\right]$$

$$=-\frac{7\pi^4}{720}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7}{720}\pi^4.$$

再令 $x=\pi$，代入得

$$\pi^4=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

$$=\frac{\pi^4}{5}+8\pi^2\cdot\frac{\pi^2}{6}-48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{48}\left(-\pi^4+\frac{1}{5}\pi^4+\frac{4}{3}\pi^4\right)$$

$$=\frac{1}{48}\cdot\frac{8\pi^4}{15}=\frac{\pi^4}{90}.$$

该结果也可从 x^2 的 Fourier 展开式的 Parseval 等式得到. 事实上，因为

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx,\ -\pi<x<\pi,$$

所以

$$\frac{\left(\frac{2}{3}\pi^2\right)^2}{2}+16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^5}{5}\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{5}\pi^4,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{1}{16}\left[\frac{2}{5}\pi^4-\frac{2}{9}\pi^4\right]=\frac{\pi^4}{90}.$$

注 除了从 $a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x$，$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x$ 得到 f 的 Fourier 展开式外，还可对某已知的 Fourier 展开式逐项积分或逐项求导得到，从展开式在某些点处的值和 Parseval 等式，得到 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^4}=\frac{7\pi^4}{720}$，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}$.

1.10.2 将函数

$$f(x)=\begin{cases}x(\pi-x), & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ (\pi-x)(2\pi-x), & \pi<x\leqslant 2\pi\end{cases}$$

展开成周期为 2π 的 Fourier 级数，然后求和

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6}.$$

解 $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x$

$+ \int_{\pi}^{2\pi}(\pi - x)(2\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x]$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x$

$- \int_{\pi}^{0}(t - \pi)t\cos n(2\pi - t)\mathrm{d}t]$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\mathrm{d}x$

$- \int_0^{\pi} t(\pi - t)\cos nt\mathrm{d}t]$

$= 0, n = 0,1,2,\cdots,$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x$

$+ \int_{\pi}^{2\pi}(\pi - x)(2\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x]$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x$

$- \int_{\pi}^{0}(t - \pi)t\sin n(2\pi - t)\mathrm{d}t]$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x$

$+ \int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin nt\mathrm{d}t]$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{\pi}[x(\pi - x)\cdot\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi}$

$+ \frac{1}{n}\int_0^{\pi}(\pi - 2x)\cos nx\mathrm{d}x]$

$= \frac{2}{n\pi}[(\pi - 2x)]\frac{\sin nx}{n}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -2\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x]$

$= \frac{4}{n^2\pi}\frac{-\cos nx}{n}\Big|_0^{\pi} = \frac{4}{n^3\pi}[1 - (-1)^n]$

$$= \begin{cases}\frac{8}{(2k+1)^3\pi}, & n = 2k+1,\\ 0, & n = 2k,\end{cases}$$

$k = 0,1,2,\cdots.$

于是

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{(2k+1)^3},$$
$$x \in (-\infty, +\infty).$$

这里$f(x)$视作延拓后的在$(-\infty, +\infty)$上以2π为周期的周期函数. 根据 Parseval 等式有

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{8}{(2k+1)^3\pi}\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\mathrm{d}x$

$+ \int_{\pi}^{2\pi}(\pi - x)^2(2\pi - x)^2\mathrm{d}x]$

$= \frac{1}{\pi}[\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\mathrm{d}x$

$+ \int_{\pi}^{0}(t - \pi)^2 t^2(-\mathrm{d}t)]$

$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2(\pi - x)^2\mathrm{d}x$

$= \frac{2}{\pi}[\pi^2\cdot\frac{x^3}{3} - 2\pi\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}]\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^4}{15}.$

从而 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{\pi^4}{15} = \frac{\pi^6}{960}.$

1.10.3 试将函数 e^{ax} 在$(0,2\pi)$上展成 Fourier 级数,并求出 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$.

解 先计算 Fourier 系数:

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a\pi}\Big|_0^{2\pi} = \frac{e^{2a\pi} - 1}{a\pi},$

$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\cos nx\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{\pi}\frac{e^{ax}}{n^2 + a^2}(a\cos nx + n\sin nx)\Big|_0^{2\pi}$

$= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\frac{a}{a^2 + n^2}, n = 1,2,\cdots;$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}\sin nx\mathrm{d}x$

$= \frac{1}{\pi}\frac{e^{ax}}{a^2 + n^2}(a\sin nx - n\cos nx)\Big|_0^{2\pi}$

$= \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}\frac{-n}{a^2 + n^2}, n = 1,2,\cdots.$

因此

$$e^{ax} = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}[\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2 + n^2}],$$
$$0 < x < 2\pi.$$

如果 $f(x) = e^{ax}, 0 < x < 2\pi$ 延拓为$(-\infty, +\infty)$上以 2π 为周期的函数,则必须有

$$f(0) = f(2\pi) = \frac{e^{2\pi a} + e^{0\cdot a}}{2} = \frac{e^{2\pi a} + 1}{2}.$$

此时

$$f(x) = \frac{e^{2\pi a} - 1}{\pi}[\frac{1}{2a}$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\cos nx - n\sin nx}{a^2 + n^2}], x \in (-\infty, +\infty).$$

令 $a = 1, x = 0$,就有

$$\frac{e^{2\pi} + 1}{2} = \frac{e^{2\pi} - 1}{\pi}[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}].$$

移项计算得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{e^{2\pi} + 1}{2}\cdot\frac{\pi}{e^{2\pi} - 1} - \frac{1}{2}.$$

注 特别应注意的是,$(0,2\pi)$上的函数 e^{ax}(延拓

为$(-\infty,+\infty)$上的周期函数)的Fourier级数在$x=0$的值应为

$$\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0^+} e^{ax}+\lim_{x\to 2\pi^-} e^{ax}]=\frac{1}{2}(e^{2\pi a}+1).$$

1.10.4 (1) 如果$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f(x)$,则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots;$$

(2) 如果f在$[-\pi,\pi]$上2阶可导,且f''可积和绝对可积及

$$f(\pi)=f(-\pi),f'(\pi)=f'(-\pi),$$

则f的Fourier级数一致收敛于f.

证 (1) 因为$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于$f$,所以

$$\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\cos nx$$

一致收敛于$f(x)\cos nx$,且

$$f(x)\cos nx$$
$$=\frac{a_0}{2}\cos nx+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\cos nx.$$

于是,可以逐项积分,就有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\cos nx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cos nx\mathrm{d}x]$$
$$=\begin{cases}\pi a_0,n=0,\\ \pi a_n,n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

所以

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,n=0,1,2,\cdots$$

同理,由

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x=\frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\mathrm{d}x$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}[a_k\int_{-\pi}^{\pi}\cos kx\sin nx\mathrm{d}x+b_k\int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\sin nx\mathrm{d}x]$$
$$=\pi b_n,n=1,2,\cdots$$

得

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

(2) 再由题1.10.5,$a_n=o(\frac{1}{n^2}),b_n=o(\frac{1}{n^2})$,因而

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leqslant|a_n|+|b_n|$$
$$\leqslant\frac{2}{n^2}(n\text{ 充分大}).$$

由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}$收敛知

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

在$[-\pi,\pi]$上一致收敛于f.

1.10.5 (1) 设f在$[-\pi,\pi]$上连续,$f(\pi)=f(-\pi)$,且有可积和绝对可积的导函数f'.则f的Fourier级数的系数a_n和b_n满足

$$a_n=o(\frac{1}{n}),b_n=o(\frac{1}{n})\quad(n\to+\infty);$$

(2) 设f在$[-\pi,\pi]$上有直到$k+1$阶导数,$f^{(k+1)}$可积和绝对可积,且

$$f(\pi)=f(-\pi),f'(\pi)=f'(-\pi),\cdots,$$
$$f^{(k)}(\pi)=f^{(k)}(-\pi).$$

则

$$a_n=o(\frac{1}{n^{k+1}}),b_n=o(\frac{1}{n^{k+1}})\ (n\to+\infty).$$

证 (1) 用$a_n^{(1)},b_n^{(1)}$记f'的Fourier系数.则有

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}(\sin nx)$$
$$=\frac{1}{n\pi}[f(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\mathrm{d}x]$$
$$=-\frac{1}{n}b_n^{(1)},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\mathrm{d}(\cos nx)$$
$$=-\frac{1}{n\pi}[f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x]$$
$$=\frac{1}{n}a_n^{(1)},\quad n=1,2,\cdots.$$

由f'可积、绝对可积和Riemann引理,$a_n^{(1)}=o(1)$,$b_n^{(1)}=o(1)$,所以

$$a_n=o(\frac{1}{n}),b_n=o(\frac{1}{n})\ (n\to+\infty).$$

(2) 用$a_n^{(l)},b_n^{(l)}$记$f^{(l)}$的Fourier系数,反复应用分部积分和条件$f^{(l)}(\pi)=f^{(l)}(-\pi),l=0,1,\cdots,k$.类似(1)得到

$$a_n=-\frac{1}{n}b_n^{(1)}=-\frac{1}{n}(\frac{1}{n}a_n^{(2)})$$
$$=-\frac{1}{n^2}(-\frac{1}{n}b_n^{(3)})=\frac{1}{n^3}b_n^{(3)}$$
$$=\cdots=\pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}(\text{或}\pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}).$$

同理

$$b_n=\pm\frac{1}{n^k}a_n^{(k)}(\text{或}\pm\frac{1}{n^k}b_n^{(k)}).$$

由于$f^{(k+1)}$可积、绝对可积和Riemann引理,

$$a_n^{(k)} = o\left(\frac{1}{n}\right), b_n^{(k)} = o\left(\frac{1}{n}\right) \quad (n \to +\infty).$$

所以

$$a_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n^{k+1}}\right) \quad (n \to +\infty).$$

1.10.6 试证级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 收敛,但不存在$[-\pi, \pi]$上的可积与平方可积函数 $f(x)$ 使得 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 为其 Fourier 级数.

证法 1 当 $x = 2k\pi(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$ 时, $\sum_{n=2}^{N} \sin nx = 0$;当 $x \neq 2k\pi(k = 0, \pm 1, \cdots)$ 时,

$$\left|\sum_{n=2}^{N} \sin nx\right| = \left|\frac{\sum_{n=2}^{N} 2\sin \frac{x}{2} \sin nx}{2\sin \frac{x}{2}}\right|$$

$$= \left|\frac{\cos \frac{3}{2}x - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{x}{2}}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

又 $\frac{1}{\ln n}$ 单调减趋于 0, 根据 Dirichlet 判别法, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 收敛.

(反证)假设存在 $f(x)$ 以 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{\ln n}$ 为其 Fourier 级数,则由 Fourie 级数逐项积分的定理有

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\ln n}\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n+1}}{n\ln n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k+1)\ln(2k+1)} = +\infty.$$

此与 $f(x)$ 可积和平方可积相矛盾,故不存在满足题设条件的函数.

证法 2 级数收敛证法同证法 1. 根据 Parseval 等式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^2},$$

f 平方可积, 上式左边是一有限数,而右边由

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{(\ln n)^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(\ln n)^2}{n} = 0$$

和比较判别法知显然发散于 $+\infty$,矛盾.

注 不是每个收敛的三角级数都是某个可积与平方可积的函数 f 的 Fourier 级数. 题中的例子就是一个反例.

1.10.7 设 f 在$[-\pi, \pi]$中连续,且在该区间上有可积和平方可积的导函数 f',如果 f 满足

$$f(-\pi) = f(\pi), \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

则有不等式

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x,$$

等号只有当 $f(x) = A\cos x + B\sin x$ 才成立.

证 因为

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{f(x)}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{b_n'}{n}, n = 1, 2, \cdots$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{-\cos nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{a_n'}{n}, n = 1, 2, \cdots$$

由 Parseval 等式就得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(b_n'^2 + a_n'^2) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2)$$

$$\leqslant \frac{a_0'^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n'^2 + b_n'^2)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\mathrm{d}x,$$

即 $\int_{-\pi}^{\pi} [f'(x)]^2\mathrm{d}x \geqslant \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$.

由上式还知,等号成立 $\Leftrightarrow$

$$a_0' = 0, a_n' = b_n' = 0, n \geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0, a_n = b_n = 0, n \geqslant 2$$

$$\Leftrightarrow f = A\cos x + B\sin x.$$

1.10.8 $f(x)$ 是$[0, \pi]$上的二阶连续可导函数,且 $f(0) = f(\pi) = 0$. 令 $f(x)$ 的 Fourier 展开式为

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx.$$

$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx, n = 1, 2, \cdots$. 证明

(1) $a_k = -\frac{2}{\pi k^2}\int_0^{\pi} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x, k = 1, 2, \cdots$;

(2) $\int_0^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2\mathrm{d}x$

$$\leqslant \frac{1}{3n^3}\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x, n = 1,2,\cdots.$$

证 (1)a_k 为 $f(x)$ 的 Fourier 系数，由 $f(0) = f(\pi) = 0$ 及分部积分就得

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin kx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{f(x)}{k}\cos kx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi} f'(x)\cos kx\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{2}{\pi k^2}\left[f'(x)\sin kx\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{2}{\pi k^2}\int_0^{\pi} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x, k = 1,2,\cdots$$

(2) $$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{k^4}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k}\frac{1}{x^4}\mathrm{d}x$$

$$= \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = -\frac{1}{3x^3}\Big|_n^{+\infty} = \frac{1}{3n^3},$$

$$f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\sin kx.$$

再由当 $m \neq l$ 时，

$$\int_0^{\pi}\sin mx\sin lx\mathrm{d}x = 0$$

得

$$\int_0^{\pi}[f(x) - S_n(x)]^2\mathrm{d}x = \int_0^{\pi}[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\sin kx]^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}[\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\sin^2 kx + \sum_{m\neq l} a_m a_l\sin mx\sin lx]\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2\int_0^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi k^2}\right)^2[\int_0^{\pi} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x]^2$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\int_0^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3n^3}\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x.$$

注 (2) 的证明中先用 Schwarz 不等式，得到

$$[\int_0^{\pi} f''(x)\sin kx\mathrm{d}x]^2$$

$$\leqslant \int_0^{\pi}\sin^2 kx\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\pi}[f''(x)]^2\mathrm{d}x;$$

再用 $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^4} \leqslant \int_n^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^4} = \frac{1}{3n^3}$ 立即推得所要的不等式.

1.10.9 设 $f(\theta)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2π 的连续函数，且 $f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)$. 试证：

(1) $u_n = \frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$ 在单位圆盘 $D = \{z\in\mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ 内的紧子集上一致收敛于一个调和函数 $u(x,y)$，其中 $z = re^{i\theta} = x + iy, i = \sqrt{-1}$；

(2) $$\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n^2 + b_n^2).$$

证 (1) 由 Fourier 级数的定义可知

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta\mathrm{d}\theta, k = 0,1,2,\cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta\mathrm{d}\theta, k = 1,2,\cdots,$$

所以

$$c_k = a_k - ib_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta,$$

$$|c_k| \leqslant \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(\theta)|\mathrm{d}\theta < M,$$

其中 M 为正常数.

另一方面，令 $z = x + iy = re^{i\theta}$，

$$g(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k = u + iv,$$

则

$$|g(z)| \leqslant \frac{|a_0|}{2} + M\sum_{k=1}^{\infty}|z|^k.$$

于是，任取 $0 < r_0 < 1$，$|z| \leqslant r_0$ 时，$g(z)$ 为解析(全纯)函数，所以记 $z = re^{i\theta}, 0 \leqslant r \leqslant r_0$ 时，

$$\mathrm{Re}\left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(c_k r^k e^{ik\theta})$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta)$$

为调和函数. 由此，u_n 在 D 的紧致子集上一致地收敛于调和函数 $\mathrm{Re}g(z) = u(x,y)$.

(2) 显然

$$\iint_D |z^j|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 r^{2j+1}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2\pi}{2j+2} = \frac{\pi}{j+1},$$

又当 $j \neq k$ 时，有

$$\iint_D z^j\bar{z}^k\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 r^{j+k+1}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi} e^{(j-k)i\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{1}{j+k+2}r^{j+k+2}\Big|_0^1\right)\frac{1}{(j-k)i}e^{(j-k)i\theta}\Big|_0^{2\pi}$$

$$= 0.$$

此外，根据 Cauchy-Riemann 方程可得

$$|g'|^2 = |u_x + iv_x|^2 = u_x^2 + v_x^2$$

$$= u_x^2 + (-u_y)^2 = u_x^2 + u_y^2.$$

于是

$$\iint_D\left(\sum_{k,j=1}^{\infty} kjc_k\bar{c}_j z^{k-1}\bar{z}^{j-1}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\stackrel{*}{=} \sum_{k,j=1}^{\infty} kj c_k \bar{c}_j \iint_D z^{k-1}\bar{z}^{j-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \iint_D |z^{k-1}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中等号 * 中求和号与积分号交换是先用 $D_r = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < r < 1\}$ 代替 D，当积分号交换后，再令 $r \to 1^-$. 因而

$$\iint_D (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \left|\frac{\mathrm{d}g(z)}{\mathrm{d}z}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \left|\sum_{k=1}^{\infty} k c_k z^{k-1}\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 |c_k|^2 \cdot \frac{\pi}{k}$$

$$= \pi\sum_{k=1}^{\infty} k |c_k|^2 = \pi\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

§ 1.11　函数实例的构造

1.11.1　函数

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p}, x = \dfrac{q}{p}, p, q \text{ 为互质的自然数}, q < p, \\ 1, \quad x = 0, 1, \\ 0, \quad x \text{ 为}(0,1)\text{ 中的无理数} \end{cases}$$

称为 Riemann 函数，试证：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0, x_0 \in [0,1]$；

(2) $R(x)$ 在无理点处连续，而在有理点处不连续；

(3) $R(x)$ 处处不可导.

证　(1) 设 $x_0 \in [0,1]$. 对 $\forall \varepsilon > 0$，选 $p_0 \in \mathbf{N}$，使得 $p_0 > \max\{2, \frac{1}{\varepsilon}\}$，此时 $\frac{1}{p_0} < \varepsilon$，取 $\delta = \min\{|x - x_0| \mid x = \frac{q}{p}, p = 1, 2, \cdots, p_0, x \neq x_0\}$，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|R(x) - 0| = \left.\begin{cases} \dfrac{1}{p}, x = \dfrac{q}{p}, \\ 0, x \text{ 为}(0,1)\text{ 中的无理数} \end{cases}\right\} \leqslant \frac{1}{p_0} < \varepsilon,$$

因此 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x) = 0$.

(2) 由于

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = 0 \begin{cases} \neq \dfrac{1}{p} = R(x_0), \text{当 } x_0 = \dfrac{q}{p} \in [0,1], \\ = R(x_0), \text{当 } x_0 \text{ 为}(0,1)\text{ 中的无理数}, \end{cases}$$

所以，$R(x)$ 在无理点连续，而在有理点都不连续.

(3) 由(2)知，$R(x)$ 在有理点处不连续，故必不可导，只须证 $R(x)$ 在任何无理数 $x_0 = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 处不可导. 事实上，从 $\frac{n}{n+1}x_0 \in (0,1)$ 也为无理数和 $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1}x_0 = x_0$，得到

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(\frac{n}{n+1}x_0) - f(x_0)}{\frac{n}{n+1}x_0 - x_0} = \lim_{n \to +\infty} \frac{0 - 0}{\frac{1}{n+1}x_0} = 0.$$

另一方面，取 $h_n = -0.0\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots$，有

$$\left|\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n}\right| = \left|\frac{f(0.a_1\cdots a_n) - 0}{-0.0\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots}\right|$$

$$= \frac{f(0.a_1\cdots a_n)}{0.0\cdots0a_{n+1}a_{n+2}\cdots} \geqslant \frac{\frac{1}{10^n}}{\frac{10}{10^{n+1}}} = 1.$$

因此

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} \neq 0 = \lim_{n \to +\infty} \frac{f(\frac{n}{n+1}x_0) - f(x_0)}{\frac{n}{n+1}x_0 - x_0}.$$

从而 $R(x)$ 在 x_0 不可导.

1.11.2　试证：不存在函数 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$，$f$ 在有理数处连续，而在无理数处不连续.

证　参阅第 7 篇题 7.3.12.

1.11.3　(1) $n \in \mathbf{N}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, x \neq 0, \\ 0, \quad x = 0. \end{cases}$$

证明：f 在 $\mathbf{R}$ 上 n 阶可导，但不是 $n+1$ 阶可导.

(2) 证明函数

$$f(x) = \underbrace{\int_0^x \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}x \cdots \int_0^x}_{n\text{ 次}} |x| \mathrm{d}x$$

在 $\mathbf{R}$ 上 n 阶连续可导，即 $f \in C^n(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = C^n(\mathbf{R})$，但非 $n+1$ 阶可导.

(3) 设

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, x > 0, \\ 0, x \leqslant 0. \end{cases}$$

证明 f 有各阶连续导函数，即 $f \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R}) = C^\infty(\mathbf{R})$，但它不是解析函数.

(4) 构造一个处处连续，但处处不可导的函数；再构造一个 C^∞ 但无处解析的函数.

证　(1) 用归纳法证. 显然

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{x^{2n}\sin\frac{1}{x} - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^{2n-1}\sin\frac{1}{x} = 0,$$

因此,

$$f'(x) = \begin{cases} 2nx^{2n-1}\sin\frac{1}{x} - x^{2n-2}\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

假设

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k(x)\sin\frac{1}{x} + Q_k(x)\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

这里 $P_k(x)$, $Q_k(x)$ 中 x 的最低幂次为 $2n-2k$. 则当 $k < n$ 时

$$f^{(k+1)}(0) = \lim_{x\to 0}\frac{P_k(x)\sin\frac{1}{x} + Q_k(x)\cos\frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0}\frac{P_k(x)\sin\frac{1}{x} + Q_k(x)\cos\frac{1}{x}}{x} = 0$$

以及

$$f^{(k+1)}(x) = \begin{cases} \left(P_k'(x) - \frac{Q_k(x)}{x^2}\right)\sin\frac{1}{x} \\ \quad + \left[Q_k'(x) - \frac{P_k(x)}{x^2}\right]\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P_{k+1}(x)\sin\frac{1}{x} + Q_{k+1}(x)\cos\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

这里 $P_{k+1}(x)$ 和 $Q_{k+1}(x)$ 中 x 的最低幂次为 $2n-2(k-1)$. 因此, f 在 $\mathbf{R}$ 上 n 阶可导,但由于 $P_n(x)$ 和 $Q_n(x)$ 中 x 的最低幂次为 $2n-2n=0$, 所以 $\lim\limits_{x\to 0} f^{(n)}(x)$ 不存在,从而 f 在 $x=0$ 不是 $n+1$ 阶可导的.

(2) 由微积分的基本定理,当 $\varphi(x)$ 连续时,必有

$$\left(\int_0^x \varphi(x)\mathrm{d}x\right)' = \varphi(x),$$

函数 $|x|$ 在 $\mathbf{R}$ 上连续,但在 $x=0$ 处不可导,由此,立即推得所要的结论.

(3) (归纳法). 显然,由 L'Hospital 法则有

$$f'(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x - 0} \xlongequal{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}\frac{y}{e^{y^2}} = \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}} = 0,$$

$$f'(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x-0} = 0,$$

所以 $f'(0) = 0$, 于是

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

假设

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

其中 $P_k(u)$ 为 u 的多项式,则

$$f^{(k+1)}(0-0) = \lim_{x\to 0^-}\frac{f^{(k)}(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{0-0}{x} = 0.$$

反复应用 L'Hospital 法则,得

$$f^{(k+1)}(0+0) = \lim_{x\to 0^+}\frac{P_k\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \xlongequal{y=\frac{1}{x}} \lim_{y\to+\infty}\frac{yP_k(y)}{e^{y^2}} = 0.$$

于是, $f^{(k+1)}(0) = 0$ 和

$$f^{(k+1)}(x) = \begin{cases} \left[-\frac{1}{x^2}P_k'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3}\right]e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} P_{k+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

其中 $P_{k+1}(u)$ 为 u 的多项式. 这就证明了对 $\forall n \in \mathbf{N}$, 有

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases}$$

其中 $P_n(u)$ 为 u 的多项式, 即 $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}) = C^\infty(\mathbf{R})$.

最后证明 f 在 $x=0$ 不是解析的. (反证) 假设 f 在 $x=0$ 解析,则存在 $\delta > 0$,使得

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{0}{n!}x^n = 0, \forall x \in (-\delta,\delta).$$

明显地,这与 $f(x) > 0, x \in (0,\delta)$ 相矛盾.

(4) 参阅第 7 篇题 7.3.23.

1.11.4 设 $r_1, r_2, \cdots$ 为 $[0,1]$ 中的有理数. 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x - r_n|}{3^n} \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

连续,且在无理点可导,但在有理点不可导.

证 因为 $\frac{|x-r_n|}{3^n} \leqslant \frac{1}{3^n}$, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$ 在

$[0,1]$ 上一致收敛，从而 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续.

当 x_0 为无理数时，由

$$\left|\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\right| \leqslant \frac{|x-r_n-x_0+r_n|}{3^n|x-x_0|}=\frac{1}{3^n},$$

故

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|x_0-r_n|}{3^n}}{x-x_0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}$$

在 $[0,1]$ 上一致收敛，且

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}.$$

由 $\lim\limits_{x\to x_0}\left|\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}\right|\leqslant\frac{1}{3^n}$，上式右边的级数收敛.

因为

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|x-r_n|-|x_0-r_n|}{3^n(x-x_0)}=\begin{cases}-\frac{1}{3^n}, & x_0<r_n,\\ \frac{1}{3^n}, & x_0>r_n,\end{cases}$$

所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\sum_{x_0<r_n}\frac{1}{3^n}+\sum_{x_0>r_n}\frac{1}{3^n},$$

即 f 在无理点 x_0 处可导.

当 x_0 为有理数时，$\exists N\in\mathbf{N}$，使 $x_0=r_N$. 显然 $\frac{|x-r_N|}{3^N}$ 在 $x_0=r_N$ 不可导，但与上面同样可证，在 $x_0=r_N$ 处

$$f(x)-\frac{|x-r_N|}{3^N}=\sum_{\substack{n=1\\ n\neq N}}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$$

可导. 从而 $f(x)$ 在 $x_0=r_N$ 不可导，即 f 在有理点处不可导.

1.11.5　平面 $\mathbf{R}^2$ 上有两个圆

$$C_1:(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=1,$$
$$C_2:(x_1+2)^2+(x_2+2)^2=4.$$

试构造 $\mathbf{R}^2$ 上的连续函数 $f(x_1,x_2)$，使得 $0\leqslant f(x_1,x_2)\leqslant 1$，且在圆 C_1 的内部取值 1，在 C_2 的内部取值 0. 又若要求将 $f(x_1,x_2)$ 连续改为 C^{∞} 函数，结论如何?(见解法 4)

解法 1　设 $x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$，$\rho$ 为 $\mathbf{R}^2$ 中的 Euclid 距离，记点 x 到集合 D 的距离为

$$\rho(x,D)=\inf_{y\in D}\rho(x,y).$$

令

$$f(x_1,x_2)=f(x)=\frac{\rho(x,D_2)}{\rho(x,D_1)+\rho(x,D_2)},$$

其中 D_j 为 C_j 的内部，$j=1,2$. 显然，$f\in C^0(\mathbf{R}^2)$，且 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，$\forall x\in\mathbf{R}^2$，$f|_{D_1}=1$，$f|_{D_2}=0$.

解法 2　根据圆 C_1 和 C_2 的几何位置，易验证 C_1 的内部在直线 $x_1+x_2=2-\sqrt{2}$ 的上方，C_2 的内部在直线 $x_1+x_2=-4+2\sqrt{2}$ 的下方，因此，令

$$g(u)=\begin{cases}0, & u\leqslant -4+2\sqrt{2},\\ \frac{u-(-4+2\sqrt{2})}{6-3\sqrt{2}}, & -4+2\sqrt{2}<u<2-\sqrt{2},\\ 1, & 2-\sqrt{2}\leqslant u,\end{cases}$$

则 $g\in C^0(\mathbf{R})$，$0\leqslant g(u)\leqslant 1$，$\forall u\in\mathbf{R}$. 容易验证

$$f(x)=f(x_1,x_2)=g(x_1+x_2)$$

对 $\forall x=(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2$ 满足所有要求.

解法 3　令

$$g(r)=\begin{cases}0, & 0\leqslant r<2,\\ \frac{\sqrt{2}+1}{2}(r-2), & 2\leqslant r\leqslant 2\sqrt{2},\\ 1, & 2\sqrt{2}<r<+\infty,\end{cases}$$

则 $g\in C^{\infty}([0,+\infty))$，$0\leqslant g(r)\leqslant 1$，$\forall r\in[0,+\infty)$. 再令

$$f(x)=f(x_1,x_2)=g(\sqrt{(x_1+2)^2+(x_2+2)^2}),\quad x=(x_1,x_2)\in R^2,$$

则 $f\in C^0(\mathbf{R})$ 满足所有要求.

解法 4　令

$$\varphi(r)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{r^2}}, & r>0,\\ 0, & r\leqslant 0,\end{cases}$$

则由题 1.11.3(3) 知 $\varphi\in C^{\infty}(\mathbf{R})$，且 $0\leqslant\varphi\leqslant 1$.

再令

$$g(r)=\frac{\varphi(r-2)}{\varphi(2\sqrt{2}-r)+\varphi(r-2)},\quad r\in\mathbf{R},$$

则 $g\in C^{\infty}(\mathbf{R})$，$0\leqslant g\leqslant 1$. $r\leqslant 2$ 时，$g(r)=0$；$r\geqslant 2\sqrt{2}$ 时，$g(r)=1$，因而

$$f(x)=f(x_1,x_2)=g(\sqrt{(x_1+2)^2+(x_2+2)^2})\in C^{\infty}(\mathbf{R}^2),$$

且 $0 \leqslant f \leqslant 1, f|_{D_1} = 1, f|_{D_2} = 0$.

注 要构造 C^∞ 函数 $f(x_1, x_2)$ 就需用到 C^∞ 函数

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0. \end{cases}$$

在近代分析中,它是构造流形上 C^∞ 单位分解的一个关键的函数.

§1.12 Riemann 可积的等价条件

设 $f: [a,b] \to \mathbf{R}$,对 $[a,b]$ 的任何分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,\cdots,n$;如果存在 $I \in \mathbf{R}$,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$,当 $\|\pi\| < \delta$ 以及 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\cdots,n$,有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon,$$

则称 I 为 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$ 当 $\|\pi\| \to 0$ 时的极限,并称它为 f 在 $[a,b]$ 上的 **Riemann 积分或定积分**. 记作

$$I = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\|\pi\| \to 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i,$$

并称 f 在 $[a,b]$ 上是 **Riemann 可积的**.

由下面的题 1.12.1, f 在 $[a,b]$ 上 **Riemann** 可积,则 f 在 $[a,b]$ 上必有界,因此,我们总假定 $|f(x)| \leqslant M, \forall x \in [a,b]$.

设 $[a,b]$ 的分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\cdots,n$. 分别记 **Riemann 和**为 $S(f,\pi,\xi)$,其中 $\xi = (\xi_1,\cdots,\xi_n)$;**Darboux 上和**为 $\overline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n \sup f([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i$;**Darboux 下和**为 $\underline{S}(f,\pi) = \sum_{i=1}^n \inf f([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i$; **上积分** $\overline{I} = \inf\{\overline{S}(f,\pi) \mid \pi$ 为 $[a,b]$ 的分割$\}$; **下积分** $\underline{I} = \sup\{\underline{S}(f,\pi) \mid \pi$ 为 $[a,b]$ 的分割$\}$.

显然,

$$\underline{S}(f,\pi) \leqslant S(f,\pi,\xi) \leqslant \overline{S}(f,\pi).$$

设 π_1, π_2 为 $[a,b]$ 的任意两分割,则称

$\pi_1 \preceq \pi_2$(π_1 粗于 π_2 或 π_2 细于 π_1)$\Leftrightarrow \pi_1$ 的分点都是 π_2 的分点.

利用 Riemann 可积的等价条件可以解决与之相关的一些问题. 本节证法主要有综合法、反证法、构造函数法等.

1.12.1 (Riemann 可积的必要条件)设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,则 f 在 $[a,b]$ 上必有界. 反之不必成立.

证 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,其积分值为 I. 取 $\varepsilon = 1$,则存在 $\delta > 0$,对 $[a,b]$ 的任何分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,当 $\|\pi\| < \delta$ 时,对 $\forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,\cdots,n$,有

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) - I \right| < 1 \qquad (*)$$

取定一个分割 π.

(反证)假设 f 在 $[a,b]$ 上无界,则至少存在一个区间记为 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, f 在其上是无界的,于是存在 $\xi_0 \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$,使

$$|f(\xi_0)\Delta x_{i_0}| > \left|\sum_{i \neq i_0} f(x_i)\Delta x_i\right| + |I| + 1.$$

但在($*$)中,如果取 $\xi_i = x_i, i \neq i_0$,则有

$$|f(\xi_{i_0})\Delta x_{i_0}| \leqslant \left|\sum_{i \neq i_0} f(x_i)\Delta x_i - I\right| + 1$$

$$\leqslant \left|\sum_{i \neq i_0} f(x_i)\Delta x_i\right| + |I| + 1.$$

这导出了矛盾. 所以 f 在 $[a,b]$ 上有界.

但反之不必成立. 例如 Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbf{Q}, \\ 0, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

是有界函数,但它在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

(方法 1)(反证)事实上,假设 D 在 $[0,1]$ 上可积,则对 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists \delta > 0$,对 $[0,1]$ 的任何分割 $\pi: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1, \forall \xi_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,\cdots,n$,有

$$\left|\sum_{i=1}^n D(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

特别对有理点 $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$,无理点 $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$,有

$$\begin{aligned} 1 &= \left|\sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^n D(\eta_i)\Delta x_i - \sum_{i=1}^n D(\zeta_i)\Delta x_i\right| \\ &\leqslant \left|\sum_{i=1}^n D(\eta_i)\Delta x_i - I\right| + \left|\sum_{i=1}^n D(\zeta_i) - I\right| \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1, \end{aligned}$$

矛盾. 故 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

(方法 2) 因为 $D(x)$ 的不连续点集为 $\mathbf{R}$, 所以 $\mathrm{meas}(\mathbf{R} \cap [0,1]) = \mathrm{meas}[0,1] = 1 \neq 0$. 根据下面的题 1.12.3(7) 知, $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不是 Riemann 可积的.

注 函数 f 在 $[a,b]$ 上有界是 f Riemann 可积的必要条件,由此,可否定一大批无界函数的可积性.

1.12.2 (1) 若 $\pi_1 \preceq \pi_2$,则

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \underline{S}(f,\pi_2) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2) \leqslant \overline{S}(f,\pi_1);$$

(2) 设 π_1 和 π_2 为任两分割,则

$$\underline{S}(f,\pi_1) \leqslant \overline{S}(f,\pi_2);$$

(3) $\underline{S}(f,\pi)\leqslant \underline{I}\leqslant \overline{I}\leqslant \overline{S}(f,\pi)$.

证 (1) 设

$$\pi_1: a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$
$$\pi_2: a=z_0<z_1<\cdots<z_n=b,$$

由 $\pi_1\preceq\pi_2$ 知 π_1 的分点都是 π_2 的分点. 任取区间 (y_{i-1},y_i),为简单起见不妨设 (y_{i-1},y_i) 中只有 π_2 的一个分点 z_j,则

$$z_{j-1}=y_{i-1},z_{j+1}=y_i.$$

显然,

$$\sup f([z_{j-1},z_j])\Delta z_j+\sup f([z_j,z_{j+1}])\Delta z_{j+1}$$
$$\leqslant \sup f([y_{i-1},y_i])\Delta z_j+\sup f([y_{i-1},y_i])\Delta z_{j+1}$$
$$=\sup f([y_{i-1},y_i])\Delta y_i,$$

按下标求和得

$$\overline{S}(f,\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1).$$

同理可证

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_2).$$

(2) 将 π_1 和 π_2 的分点合在一起,构成一个新的分割 $\pi_1\cup\pi_2$,则 $\pi_1\preceq\pi_1\cup\pi_2,\pi_2\preceq\pi_1\cup\pi_2$. 由(1)得

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2).$$

(3) 只须证 $\underline{I}\leqslant\overline{I}$. 由(2),对分割 π_1,π_2 有

$$\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2).$$

从而

$$\underline{I}=\sup\{\underline{S}(f,\pi_1)\mid \pi_1\text{ 为 }a,b\text{ 的分割}\}\leqslant\inf\{\overline{S}(f,\pi_2)\mid \pi_2\text{ 为 }a,b\text{ 的分割}\}=\overline{I}.$$

1.12.3 (Riemann 可积的等价条件)

(1) f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

$\Leftrightarrow$(2) 对 $\forall\varepsilon>0$,存在分割 π_ε,使振幅和

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}[\sup f([x_{i-1},x_i])-\inf f([x_{i-1},x_i])]\Delta x_i=\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon.$$

$\Leftrightarrow$(3) $\underline{I}=\overline{I}$.

$\Leftrightarrow$(4) $$\lim_{\|\pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=\lim_{\|\pi\|\to 0}[\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)]=0.$$

$\Leftrightarrow$(5) 存在分割 π_n,使

$$\lim_{n\to+\infty}[\overline{S}(f,\pi_n)-\underline{S}(f,\pi_n)]=0.$$

$\Leftrightarrow$(6) 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\pi_\varepsilon$,使得

$$|S(f,\pi_\varepsilon,\xi)-A|<\varepsilon,$$

对任意 $\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ 成立,其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,\cdots,n$.

$\Leftrightarrow$(7) (Lebesgue) f 在 $[a,b]$ 上有界,且几乎处处连续,

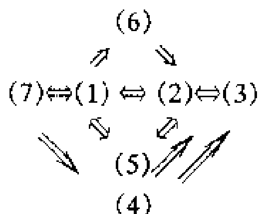
$$\text{meas}D_f=0,$$

其中 D_f 为 f 不连续点的全体. 即对 $\forall\varepsilon>0$,存在开区间 $(a_n,b_n),n\in\mathbf{N}$,使得

$$D_f\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)$$

且 $\sum_{i=0}^{n}(b_n-a_n)<\varepsilon$.

证 证明的示意图:



(1)⇒(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,则对 $\forall\varepsilon>0$,存在分割 π_ε 和 $\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i],i=1,\cdots,n$,有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$
$$I-\frac{\varepsilon}{3}<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<I+\frac{\varepsilon}{3}.$$

由 ξ_i 的任意性便得

$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3},$$
$$I-\frac{\varepsilon}{3}\leqslant\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant I+\frac{\varepsilon}{3},$$
$$0\leqslant\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant\frac{2}{3}\varepsilon<\varepsilon.$$

(2)⇒(3) 由(2),对 $\forall\varepsilon>0$,存在分割 π_ε,使得

$$\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon.$$

根据题 1.12.2(3),有

$$\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi_\varepsilon).$$

于是

$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi_\varepsilon)-\underline{S}(f,\pi_\varepsilon)<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 即得 $\overline{I}=\underline{I}$.

(1)⇐(2) 由(2)⇒(3)知,$\overline{I}=\underline{I}=I$,下证 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积,且积分值为 I. 由(2),存在分割 $\pi_{\varepsilon/2}: a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b$,使

$$\overline{S}(f,\pi_{\varepsilon/2})-\underline{S}(f,\pi_{\varepsilon/2})<\frac{\varepsilon}{2}.$$

记 $\delta=\min\left\{\frac{\varepsilon}{4mM},\min\limits_{1\leqslant j\leqslant m}\Delta y_j\right\}$. 对任何分割

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

当 $\|\pi\|<\delta$ 时,对任何开区间 (x_{i-1},x_i) 或者为第一种区间,即含有唯一的 y_j,或者为第二种区间,即不含任何 y_j. 如果是后者,则 (x_{i-1},x_i) 包含于某个 $[y_{k-1},y_k]$ 中,于是,由

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant I = I = \overline{I}\leqslant \overline{S}(f,\pi)$$

得到

$$|S(f,\pi,\xi) - I|\leqslant \overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = \sum\nolimits_1\omega_i\Delta x_i+\sum\nolimits_2\omega_i\Delta x_i$$
$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且积分为 I. 上述不等式中，第一种振幅和

$$\sum\nolimits_1\omega_i\Delta x_i\leqslant 2M\sum\nolimits_1\Delta x_i<2mM\delta$$
$$=2mM\cdot\frac{\varepsilon}{4mM}=\frac{\varepsilon}{2},$$

第二种振幅和

$$\sum\nolimits_2\omega_i\Delta x_i\leqslant\sum_{k=1}^{m}\{\sup f([y_{k-1},y_k]) - \inf([y_{k-1},y_k])\}\Delta y_k$$
$$=\overline{S}(f,\pi_{\varepsilon/2})-\underline{S}(f,\pi_{\varepsilon/2})<\frac{\varepsilon}{3}.$$

(2)⇐(3) 由确界定义，对 $\forall\varepsilon>0$，存在分割 π_1,π_2，使得

$$I-\frac{\varepsilon}{2}=\underline{I}-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(f,\pi_1),$$
$$\overline{S}(f,\pi_2)<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}=I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}(f,\pi_1)\leqslant\underline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)$$
$$\leqslant\overline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)\leqslant\overline{S}(f,\pi_2)<I+\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\overline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)-\underline{S}(f,\pi_1\cup\pi_2)<\varepsilon.$$

(3)⇐(4) 由

$$\underline{S}(f,\pi)\leqslant\underline{I}\leqslant\overline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi),$$
$$0\leqslant\overline{I}-\underline{I}\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)\to 0\ (\|\pi\|\to 0)$$

得到 $\overline{I}=\underline{I}$.

(1)⇔(7) 参阅第 7 篇题 7.3.14.

其他部分的证明是十分明显的.

注 本题证明了函数 Riemann 可积的各种等价条件，其结论和证明方法都很重要，其中等价条件(7)的证明有一定难度，但应用其结论却是十分方便的. 不过，应用其他几个可积等价条件更能显示分析功夫.

上题(3)⇔(4) 也可从下面的 Darboux 定理立即推出.

1.12.4 (Darboux定理) 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界函数，则

$$\underline{I}=\lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}(f,\pi),\ \overline{I}=\lim_{\|\pi\|\to 0}\overline{S}(f,\pi).$$

证 不失一般性，证第二式.

由 $\overline{I}=\inf\{\overline{S}(f,\pi)\mid\pi$ 为 $[a,b]$ 的分割$\}$ 和下确界的定义，存在 $[a,b]$ 的分割 π'，其相应的 Darboux 上和

$$\overline{S}(f,\pi')<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2},$$

设 π' 含 m' 个内部的分点. 令

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2m'\Omega},$$

其中 $\Omega>\sup f([a,b])-\inf([a,b])\geqslant 0$.

对于 $[a,b]$ 的任何分割 π，$\|\pi\|<\delta$，作分割 $\pi\cup\pi'$，则有

$$\overline{S}(f,\pi\cup\pi')\leqslant\overline{S}(f,\pi')<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，

$$\overline{S}(f,\pi)-\overline{S}(f,\pi\cup\pi')$$
$$\leqslant m'\Omega\delta=m'\Omega\cdot\frac{\varepsilon}{2m'\Omega}=\frac{\varepsilon}{2},$$
$$\overline{S}(f,\pi)\leqslant\overline{S}(f,\pi\cup\pi')+\frac{\varepsilon}{2}$$
$$<\overline{I}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\overline{I}+\varepsilon,$$
$$0\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\overline{I}<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\overline{S}(f,\pi)=\overline{I}.$$

类似地，可以得到 $[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]\subset R^n$ 上的 Riemann 可积的等价条件. 读者可参阅[1]第二册第 7 章 § 1.2.

1.12.5 设 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证法 1 不妨设 f 单调增，则

$$0\leqslant\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)$$
$$=\sum_{i=1}^{n}[\sup f([x_{i-1},x_i]) - \inf f([x_{i-1},x_i])]\Delta x_i$$
$$=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\Delta x_i$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})]\|\pi\|$$
$$=[f(b)-f(a)]\|\pi\|\to 0(\|\pi\|\to 0).$$

再根据题 1.12.3(4) 知，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证法 2 根据第 7 篇题 7.1.48，单调函数 f 的不连续点集 D_f 为至多可数集，因此，$\mathrm{meas}D_f=0$. 再由题 1.12.3(7) 知，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

1.12.6 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，则 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积.

证法 1 由 Carton 定理，连续函数 f 在 $[a,b]$ 上一致连续，因此，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $x',x''\in[a,b]$，$|x'-x''|<\delta$ 时，有

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

任取$[a,b]$的分割

$$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

当$\|\pi\|<\delta$时,有

$$\overline{S}(f,\pi)-\underline{S}(f,\pi)=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)$$

$$=\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

由定义知,f在$[a,b]$上Riemann可积.

证法2 因为$D_f=\varnothing$,所以$\text{meas}D_f=0$.再根据题1.12.3(7)知,f在$[a,b]$上Riemann可积.

1.12.7 设f在$[a,b]$上有界,且只有有限个不连续点,则f在$[a,b]$上Riemann可积.

证法1 设$|f(x)|<M,\forall x\in[a,b]$,且$f$的全部不连续点含在下面分割的分点内:

$$a=c_0<c_1<c_2<\cdots<c_n=b.$$

对$\forall\varepsilon>0$,作$[a,b]$的分割

$$\pi_0: a=c_0<a_1<b_1<c_1<a_2<b_2<c_2<\cdots<c_{n-1}<a_n<b_n<c_n=b,$$

使得

$$a_j-c_{j-1}<\frac{\varepsilon}{6nM},c_j-b_j<\frac{\varepsilon}{6nM},j=1,\cdots,n.$$

显然,f在$[a_j,b_j]$中连续,$j=1,\cdots,n$.由题1.12.3和1.12.6存在$[a_j,b_j]$的分割π_j,使其振幅和$\sum_j<\frac{\varepsilon}{3n}$.于是,

$$\overline{S}(f,\pi_0\cup\pi_1\cup\cdots\cup\pi_n)-\underline{S}(f,\pi_0\cup\pi_1\cup\cdots\cup\pi_n)$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{6nM}\cdot 2M\cdot 2n+\sum_1+\cdots+\sum_n$$

$$<\frac{2}{3}\varepsilon+n\cdot\frac{\varepsilon}{3n}=\varepsilon.$$

再由定义知,f在$[a,b]$上Riemann可积.

证法2 因为f有界,且不连续点只有有限个,故$\text{meas}D_f=0$.根据题1.12.3(7)知,f在$[a,b]$上Riemann可积.

1.12.8 设f,g都在$[a,b]$上Riemann可积.证明$f\pm g$,$|f|$和fg都在$[a,b]$上Riemann可积.

证法1 因为f,g在$[a,b]$上Riemann可积,所以由题1.12.3(7)知f,g在$[a,b]$上几乎处处连续,从而,$f\pm g$,$|f|$,fg都在$[a,b]$上几乎处处连续.再由题1.12.3(7),$f\pm g$,$|f|$,fg在$[a,b]$上Riemann可积.

证法2 因为f,g在$[a,b]$上Riemann可积,所以,存在$M>0$,使得对$\forall x\in[a,b]$,

$$|f(x)|<M,\ |g(x)|<M,$$

并且对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,对$[a,b]$的任何分割$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,当$\|\pi\|<\delta$时有

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M},$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{f+g}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{|f|}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i<\varepsilon,$$

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_{fg}([x_{i-1},x_i])\Delta x_i$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|(fg)(x')-(fg)(x'')|\Delta x_i$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|[f(x')-f(x'')]g(x')+f(x'')[g(x')-g(x'')]|\Delta x_i$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}[\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|f(x')-f(x'')|+\sup_{x',x''\in[x_{i-1},x_i]}|g(x')-g(x'')|]\Delta x_i$$

$$\leqslant M[\sum_{i=1}^{n}\omega_f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_g([x_{i-1},x_i])\Delta x_i]$$

$$<M(\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2M})=\varepsilon.$$

根据题1.12.3,$f\pm g$,$|f|$,fg在$[a,b]$上都Riemann可积.

1.12.9 设f在$[a,b]$上Riemann可积.证明f在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$上也Riemann可积.

证法1 显然,由题1.12.3(7)知,f在$[a,b]$上Riemann可积$\Leftrightarrow f$在$[a,b]$上几乎处处连续,因而f在$[\alpha,\beta]\subset[a,b]$上也几乎处处连续$\Leftrightarrow f$在$[\alpha,\beta]$上也Riemann可积.

证法2 由f在$[a,b]$上Riemann可积$\Leftrightarrow$对$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,对$[a,b]$的任何分割$\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$,当$\|\pi\|<\delta$时,有

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_f([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i < \varepsilon.$$

对 $[\alpha,\beta]$ 上的任何分割 $\pi': \alpha = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = \beta$，当 $\|\pi'\| < \delta$ 时，π' 可扩张为 $[a,b]$ 上的一个分割 π，使得 $\|\pi\| < \delta$，则

$$\sum_{j=1}^{m} \omega_f([y_{j-1}, y_j])\Delta y_j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \omega_f([x_{i-1}, x_i])\Delta x_i < \varepsilon.$$

于是，由题 1.12.3，f 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积.

1.12.10　证明 Riemann 函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的，且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0.$$

证法 1　由题 1.11.1(2)，$R(x)$ 在无理点连续，在有理点不连续，因此 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是几乎处处连续的. 由由题 1.12.3(7) 知，$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的，且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = \underline{I} = \sup\{\underline{S}(f,\pi) \mid \pi \text{ 为}[0,1]\text{的分割}\} = \sup\{0\} = 0.$$

证法 2　$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}$，使得 $\frac{1}{N} < \frac{\varepsilon}{2}$. 显然，集合 $\left\{\frac{q}{p} \mid \frac{1}{p} \geqslant \frac{1}{N}\right\}$ 为有限集，记它的个数为 K_N. 取 $0 < \delta = \frac{\varepsilon}{4(K_N+2)}$，则对 $[0,1]$ 的任何分割 $\pi: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = 1$，当 $\|\pi\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1})$ 时，有

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \underline{S}(f,\pi) \leqslant \overline{S}(f,\pi) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sup R([x_{i-1},x_i])\Delta x_i \\ &< \frac{1}{N}\cdot 1 + 2(K_N+2)\|\pi\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2(K_N+2)\cdot\frac{\varepsilon}{4(K_N+2)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\|\pi\|\to 0}\overline{S}(f,\pi) = \lim_{\|\pi\|\to 0}\underline{S}(f,\pi) = 0,$$

$R(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积，且

$$\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x = 0.$$

1.12.11　设函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且当 $x \in [a,b]$ 时，$f(x) > 0$，证明 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证法 1　f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积 $\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续，则存在 $x_0 \in (a,b)$，使 f 在 x_0 连续. 因为 $f(x_0) > 0$，所以有 $\delta, 0 < \delta < \min\{|x_0 - a|, |x_0 - b|\}$，满足

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2},$$
$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

由此得到

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 2\delta\cdot\frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

证法 2　显然，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.（反证）假设 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_\varepsilon > 0$，当 $[a,b]$ 的分割 $\pi_\varepsilon: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$\|\pi_\varepsilon\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i - x_{i-1}) < \delta_\varepsilon$ 时，有

$$0 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sup f([x_{i-1},x_i])\Delta x_i < \varepsilon(b-a).$$

于是，存在某个闭区间 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 使得（再用反证法）

$$0 \leqslant \sup f([x_{i_0-1}, x_{i_0}]) < \varepsilon.$$

取 $\varepsilon = 1, 0 < \delta_1 < 1$，记 $[x_{i_0-1}, x_{i_0}]$ 为 $[a_1,b_1]$，则

$$0 < f(x) \leqslant 1, x \in [a_1,b_1]，且 b_1 - a_1 < 1.$$

又因为 $0 \leqslant \int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = 0$，故可推得 $\int_{a_1}^{b_1} f(x)\mathrm{d}x = 0$. 同理存在 $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$，$b_2 - a_2 < \frac{1}{2}$，$0 < f(x) \leqslant \frac{1}{2}$，$x \in [a_2,b_2]$，$\cdots$，得 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = 0$. 由区间套原理，存在 $x_0 \in [a_n, b_n]$，$n = 1,2,\cdots$，满足 $0 < f(x_0) \leqslant \frac{1}{n}$，$n = 1,2,\cdots$. 令 $n \to +\infty$，得 $f(x_0) = 0$. 这与题设 $f(x_0) > 0$ 相矛盾. 所以

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

证法 3　因为 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，根据题 1.12.3，存在 $0 < \delta < \frac{b-a}{2}$，对 $[a,b]$ 上的任何分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，当 $\|\pi\| < \delta$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\{\sup f([x_{i-1},x_i]) - \inf f([x_{i-1},x_i])\}(x_i - x_{i-1}) < b - a,$$

则必有（反证法）$[x_{i-1}, x_i]$ 使得

$$\sup f([x_{i-1},x_i]) - \inf f([x_{i-1},x_i]) < 1.$$

取 $[a_1,b_1] \subset (x_{i-1}, x_i)$，类似可得 $[a_n,b_n]$ 使得

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset \cdots \supset [a_n,b_n] \supset \cdots,$$
$$[a_n,b_n] \subset (a_{n-1},b_{n-1}),$$
$$b_n - a_n < \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2},$$
$$\sup f([a_n,b_n]) - \inf f([x_{i-1},x_i]) < \frac{1}{n}.$$

根据区间套原理，存在 $x_0 \in [a_n,b_n]$，$n = 1,2,\cdots$，且 $x_0 \in (a_n,b_n)$，易见 $\omega_f(x_0) = 0$，即 x_0 为 f 的连续点.

类似证法 1 中后半部分有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

证法 4 在证法 3 中,必有 n_0,使得 $\frac{1}{n_0} < \frac{f(x_0)}{2}$,且对 $\forall x \in [a_{n_0}, b_{n_0}]$ 有

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{n_0} < \frac{f(x_0)}{2},$$

$$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2},$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{a_{n_0}}^{b_{n_0}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$> \frac{f(x_0)}{2}(b_{n_0} - a_{n_0}) > 0.$$

注 证法 1 应用 f 函数可积的充要条件(7)(题 1.12.3),显得简便,证法 2 和 3 都应用了反证法和区间套原理,它是常规证法. 特别有意思的是证法 3 用区间套"套"出的点 x_0 竟是 f 的连续点(振幅为零).

1.12.12 设函数 f 和 g 在区间 $[a,b]$ 上有 Riemann 可积的导函数,证明:分部积分公式

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

成立.

证 从 f', g' 可积,f, g 连续(当然也可积)知,$f'g, fg', (fg)' = f'g + fg'$ 也可积. 所以再由 Newton-Leibniz 公式(参阅[1]261 页微积分基本公式)得到

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f'(x)g(x) + f(x)g'(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b [f(x)g(x)]'\mathrm{d}x$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b,$$

$$\int_a^b f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$= f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x.$$

1.12.13 设函数 $x(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 上严格增,有 Riemann 可积的导函数,$x(\alpha) = a, x(\beta) = b$. 又函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明:$f(x(t))x'(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上 Riemann 可积(几乎处处连续),且换元公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x(t))x'(t)\mathrm{d}t$$

成立.

证 因为

$$|f(x(t_i''))x'(t_i'') - f(x(t_i'))x'(t_i')|\Delta t_i$$

$$\leqslant [|f(x(t_i'')) - f(x(t_i'))||x'(t_i'')| + |f(x(t_i'))||x'(t_i'') - x'(t_i')|]\Delta t_i$$

$$\leqslant |f(x(t_i'')) - f(x(t_i'))||x'(t_i'')\Delta t_i - x'(\theta_i)\Delta t_i| + |f(x(t_i'')) - f(x(t_i'))|\Delta x_i + |f(x(t_i'))||x'(t_i'') - x'(t_i')|\Delta t_i$$

$$\leqslant 2M\omega_i(x')\Delta t_i + \omega_i(f)\Delta x_i + M\omega_i(x')\Delta t_i$$

$$= 3M\omega_i(x')\Delta t_i + \omega_i(f)\Delta x_i,$$

其中 $|f(x)| < M, \forall x \in [a,b], \Delta x_i = x_i - x_{i-1} = x(t_i) - x(t_{i-1}) = x'(\theta_i)\Delta t_i, \theta_i \in (t_{i-1}, t_i)$. 由于 f, x' 可积和题 1.12.3,对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当 $[\alpha,\beta]$ 的分割 π 的模 $\|\pi\| < \delta$ 时有

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(f \circ x')\Delta t_i \leqslant 3M\sum_{i=1}^n \omega_i(x')\Delta t_i$$

$$+ \sum_{i=1}^n \omega_i(f)\Delta x_i < \varepsilon,$$

即 $f \circ x'$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上可积.

于是,

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \sum_{i=1}^n f(x(\theta_i))\Delta x_i$$

$$= \lim_{\substack{\max\Delta t_i \to 0 \\ 1 \leqslant i \leqslant n}} \sum_{i=1}^n f(x(\theta_i))x'(\theta_i)\Delta t_i$$

$$= \int_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\mathrm{d}t.$$

1.12.14 设 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积. 证明:$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in C^0([a,b])$,即 φ 为连续函数,使得

$$\int_a^b |f(x) - \varphi(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon.$$

证 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积,所以对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists [a,b]$ 的分割 $\pi: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$,使得

$$\left|\sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\Delta x_i - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^n [\sup f([x_{i-1}, x_i]) - \inf f([x_{i-1}, x_i])]\Delta x_i$$

$$< \frac{\varepsilon}{2}.$$

作阶梯函数

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}), & x \in [x_{i-1}, x_i), i = 1, \cdots, n, \\ f(b), & x = b. \end{cases}$$

则 $$\int_a^b |f(x) - \tilde{f}(x)|\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^n [\sup f([x_{i-1}, x_i]) - \inf f([x_{i-1}, x_i])]\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

再作折线函数

$$\varphi(x)$$

$$=\begin{cases} f(x_{i-1}), x\in[x_{i-1},x_i-\delta], \\ \dfrac{x_i-x}{x_i-(x_i-\delta)}f(x_{i-1})+\dfrac{x-(x_i-\delta)}{x_i-(x_i-\delta)}f(x_i), \\ \quad x\in[x_i-\delta,x_i], i=1,\cdots,n, \end{cases}$$

其中 $0<\delta<\min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4nM},\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i\right\}$，$|f(x)|<M$，$\forall x\in[a,b]$，则

$$\int_a^b|\tilde{f}(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x\leqslant 2M\cdot n\delta<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b|f(x)-\tilde{f}(x)|\mathrm{d}x+\int_a^b|\tilde{f}(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

1.12.15 设 $\Delta\subset\mathbf{R}^2$ 有面积，$f:\Delta\to\mathbf{R}$ 为有界二元函数. 证明：f 在 Δ 上 Riemann 可积 $\Leftrightarrow f$ 在 Δ 上几乎处处连续，即

$$D_f=\{(x,y)\in\Delta\mid f\text{ 在}(x,y)\text{ 不连续}\}$$

为零测集(记作 $\mathrm{meas}D_f=0$).

如果删去条件"$\Delta\subset\mathbf{R}^2$ 有面积"，结论如何？

证 因 $\Delta\subset\mathbf{R}^2$ 有面积，故 $\partial\Delta$ 和 $\partial\Delta\cap\Delta$ 为零面积集，当然也为零测集.

设 $\Delta=\mathring{\Delta}\cup(\partial\Delta\cap\Delta)$，$I\supset\Delta$ 为闭区间(即闭矩形)，则

$$I=\mathring{\Delta}\cup\partial\Delta\cup(I-\Delta)^\circ\cup\partial I.$$

显然，∂I 为零面积集，当然也为零测集. 设

$$f_\Delta(x)=\begin{cases}f(x), x\in\Delta,\\ 0, x\in I-\Delta.\end{cases}$$

易见

f 在 $p\in\Delta$ 不连续 $\Rightarrow f_\Delta$ 在 $p\in\Delta$ 不连续；

f 在 $p\in\mathring{\Delta}$ 不连续 $\Rightarrow f_\Delta$ 在 $p\in\mathring{\Delta}$ 不连续；

f_Δ 在 $(I-\Delta)^0$ 上恒为 0，故连续.

于是，f 在 Δ 上的不连续点集 D_f 和 f_Δ 在 I 上的不连续点集 D_{f_Δ} 之间有关系：

$$(*)\begin{cases}D_f\subset D_{f_\Delta}\\ D_{f_\Delta}\subset D_f\cup\partial\Delta\cup\partial I.\end{cases}$$

因此可推出

f 在 Δ 上 Riemann 可积，即 f_Δ 在 I 上 Riemann 可积 $\Leftrightarrow f_\Delta$ 在 I 上几乎处处连续(不连续点集为零测集)，即 $\mathrm{meas}D_{f_\Delta}\overset{\text{由}(*)}{\Leftrightarrow}\mathrm{meas}D_f=0$，即 f 在 Δ 上几乎处处连续.

如果删去条件"$\Delta\subset\mathbf{R}^2$ 有面积"，则 f 在 Δ 上几乎处处连续. 但反之不成立. 举反例如下：

$f=1$ 在 $\mathbf{Q}^2\cap[0,1]^2=\Delta$ 上连续，故 $\mathrm{meas}D_f=0$，但根据 Riemann 可积的定义，f_Δ 在 I 上非 Riemann 可积，原因在于 $\Delta\subset R^2$ 不是有面积的或者 $\partial\Delta=[0,1]^2$ 不是零面积集.

1.12.16 设函数 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，证明

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

证 因为 f 在 $[a,b]$ 上可积，故 f 有界，$|f(x)|<M$，且对 $\forall\varepsilon>0$，存在分割 $\pi: a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，$x_i',x_i''\in[x_i,x_{i+1}]$，

$$\left|\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i')\Delta x_i-\sum_{i=0}^{m-1}f(x_i'')\Delta x_i\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

即

$$\sum_{i=0}^{m-1}\sup_{x_i',x_i''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x_i')-f(x_i'')|\Delta x_i\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

取 $N\in\mathbf{N}$，使 $N>\dfrac{4Mm}{\varepsilon}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\left|\int_a^b f(x)\sin x\mathrm{d}x-0\right|$$

$$=\left|\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}[f(x)-f(x_i)]\sin nx\mathrm{d}x\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}f(x_i)\sin nx\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{m-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}|f(x)-f(x_i)|\mathrm{d}x$$

$$+M\sum_{i=0}^{m-1}\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}}\sin nx\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{m-1}\sup_{x_i',x_i''\in[x_i,x_{i+1}]}|f(x_i')-f(x_i'')|\Delta x_i$$

$$+M\sum_{i=0}^{m-1}\frac{|\cos(nx_{i+1})|+|\cos(nx_i)|}{n}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+M\cdot\frac{2}{N}\cdot m<\frac{\varepsilon}{2}+2mM\frac{\varepsilon}{4mM}$$

$$=\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

同理有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0.$$

1.12.17 设函数 f 在 $[0,\pi]$ 上 Riemann 可积，$n\in\mathbf{N}$，证明：

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi f(x)|\sin nx|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\mathrm{d}x.$$

证 对于整数 k 有

$$\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x \xlongequal{u=nx} \frac{1}{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin u| \mathrm{d}u = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin u \mathrm{d}u = \frac{2}{n}.$$

以及

$$\inf\{f(x) \mid x \in ((k-1)\frac{\pi}{n}, k\frac{\pi}{n})\} \times \int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x$$

$$\leqslant \sup\{f(x) \mid x \in ((k-1)\frac{\pi}{n}, k\frac{\pi}{n})\} \times \int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x,$$

$$\inf\{f(x) \mid x \in ((k-1)\frac{\pi}{n}, k\frac{\pi}{n})\} \leqslant f_{kn} = \frac{\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x}{\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x} \leqslant \sup\{f(x) \mid x \in ((k-1)\frac{\pi}{n}, k\frac{\pi}{n})\},$$

因此

$$\int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} f_{kn}\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n} f_{kn}\cdot\left(\frac{2\pi}{n}\right) \xlongequal{f\text{可积}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 f 在 $[0,\pi]$ 上连续,则可应用积分中值定理得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\pi} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} f(x) |\sin nx| \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\int_{(k-1)\frac{\pi}{n}}^{k\frac{\pi}{n}} |\sin nx| \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f(\xi_k) = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f(\xi_k) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

1.12.18 设函数 f 在区间 $[-1,1]$ 上连续,试证

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

更一般地,如果 f 在 $[-1,1]$ 上 Riemann 可积,且 f 在 0 连续,则上述结论仍成立.

证 因为 f 在 $[-1,1]$ 上连续,所以对 $\forall\varepsilon>0$,可选 $\eta>0$,使当 $|x|<\eta$ 时,$|f(x)-f(0)|<\frac{\varepsilon}{4\pi}$,固定 η,设 $M = \sup\limits_{x\in[-1,1]}\|f(x)\|$,则存在 $\delta>0$,当 $|h|<\delta$ 时,

$$\left|\int_{-1}^{-\eta}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_{-1}^{-\eta}\frac{|h|}{h^2+x^2}\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|\int_{\eta}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant M\int_{\eta}^{1}\frac{|h|}{h^2+x^2}\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\left|2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{h} - \pi\right|\cdot|f(0)| < \frac{\varepsilon}{4},$$

于是,

$$\left|\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x - \pi f(0)\right|$$

$$\leqslant \left|\int_{-1}^{-\eta}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\eta}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-\eta}^{\eta}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x - \pi f(0)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} + \left|f(\xi_\eta)\int_{-\eta}^{\eta}\frac{h}{h^2+x^2}\mathrm{d}x - \pi f(0)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} + \left|f(\xi_\eta)2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{h} - \pi f(0)\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} + |f(\xi_\eta)-f(0)|\,2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{h} + |f(0)|\left|2\operatorname{arctg}\frac{\eta}{h} - \pi\right|$$

$$< \frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

因此

$$\lim_{h\to 0}\int_{-1}^{1}\frac{h}{h^2+x^2}f(x)\mathrm{d}x = \pi f(0).$$

如果 f 在 $[-1,1]$ 上 Riemann 可积,且 f 在 0 连续,则只须将上述证明中的 $f(\xi_\eta)$ 改为 f_η,其中

$$\inf_{x\in[-\eta,\eta]}|f(x)| \leqslant f_\eta \leqslant \sup_{x\in[-\eta,\eta]}|f(x)|.$$

1.12.19 设 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)x^n\mathrm{d}x = 0$, $n=0,1,2,\cdots$,则 $f(x)\equiv 0$, $x\in[a,b]$.

证 对 $\forall \varepsilon > 0$,由 Weierstrass 逼近定理,存在多项式 $P(x)$,使得

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

因为$\int_a^b f(x)x^n \mathrm{d}x = 0, n = 0,1,2,\cdots$,所以

$$\int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x = 0.$$

设 $M = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x)|$,则

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \left|\int_a^b f(x)[f(x) - P(x)]\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)P(x)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\int_a^b f(x)[f(x) - P(x)]\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \int_a^b |f(x)||f(x) - P(x)|\mathrm{d}x \\
&\leqslant M(b-a)\varepsilon.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得到$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0$,又因 $f(x)$ 及 $f^2(x)$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数,所以在$[a,b]$ 上 $f^2(x) \equiv 0$ 及 $f(x) \equiv 0$.

1.12.20 设 f 为$[a,b]$ 上的连续函数,且对任一满足 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = 0$ 的连续函数 $g(x)$ 有 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0$,则 f 为常值函数.

证 令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$,则

$$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \cdot (b-a) = 0.$$

由题设

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = 0,$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b g(x)\left[f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 = 0.
\end{aligned}$$

再由 g 连续知

$$f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = g(x) = 0, \quad \forall x \in [a,b],$$

即

$$f(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x, \forall x \in [a,b]$$

为常值函数.

§1.13 定积分和广义积分的计算

计算一元函数的积分的方法除用定义外,还有

(1) 初等数学的公式和技巧.

(2) 积分的基本公式和 Newton-Leibniz 公式.

(3) 分部积分.

(4) 变量代换.

(5) 应用参变量积分中积分次序的交换和对参变量求导的方法.有时为验证一致收敛性还需引进适当的积分因子.

(6) 展开为函数项级数,然后逐项积分.

(7) 利用上述方法将积分化为下列积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x = \begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n \text{ 为奇数};\end{cases}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2};$$

B 函数、Γ 函数及余元公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi}, 0 < \alpha < 1.$$

(8) 化为复变量积分,然后应用留(残)数定理.

本节将通过实例说明在什么条件下使用上述的何种方法,并且对于同一题尽量使用多种解法,以显示在一定条件下使用哪种方法更具优越性.同时,变量代换法将贯穿本节的始终,请读者细心体会其妙处之所在.

1.13.1 求积分$\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty}\frac{1-e^{-x^2}}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int_0^{+\infty}(1-e^{-x^2})\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\frac{1-e^{-x^2}}{x}\bigg|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{-e^{-x^2}(-2x)}{x}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

1.13.2 设 $f(x) = \int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,计算

$$I = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

解法 1

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\
&= xf(x)\bigg|_0^1 - \int_0^1 x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$= -\int_0^1 x\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} - \frac{\sin x}{x}\right)dx$$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^1 \sin\sqrt{x}\,dx + \int_0^1 \sin x\,dx$$
$$= -\int_0^1 t\sin t\,dt - \cos x\Big|_0^1$$
$$= t\cos t\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos t\,dt + 1 - \cos 1$$
$$= \cos 1 - \sin t\Big|_0^1 + 1 - \cos 1$$
$$= 1 - \sin 1.$$

解法 2 $I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 [\int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin t}{t}dt]dx$

$$= \int_0^1 \frac{\sin t}{t}(\int_{t^2}^{t}dx)dt = \int_0^1 (1-t)\sin t\,dt$$
$$= \int_0^1 (t-1)d\cos t$$
$$= (t-1)\cos t\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos t\,dt$$
$$= 1 - \sin t\Big|_0^1 = 1 - \sin 1.$$

1.13.3 试求定积分

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$$

的值.

解法 1 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}e^x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}e^x dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{tg}\frac{x}{2}e^x dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}e^x dx + \mathrm{tg}\frac{x}{2}e^x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$
$$- \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}e^x dx$$
$$= \mathrm{tg}\frac{\pi}{4}e^{\frac{\pi}{2}} - \mathrm{tg}\frac{\pi}{8}e^{\frac{\pi}{4}}$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - (\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{4}}.$$

解法 2 由

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{1+\cos x}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^x}{2}\sec^2\frac{x}{2}dx$$
$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x d\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$$
$$= e^x\mathrm{tg}\frac{x}{2}\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x\cdot\mathrm{tg}\frac{x}{2}dx$$
$$= e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{tg}\frac{\pi}{8} - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} e^x\frac{\sin x}{1+\cos x}dx$$

得到 $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx = e^{\frac{\pi}{2}} - (\sqrt{2}-1)e^{\frac{\pi}{4}}$.

1.13.4 试计算积分

(1) $\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}dx$;

(2) $\int_a^{+\infty} x^2 e^{-x^2+2ax}dx$.

解 (1) 作变换 $u = \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$,则 $x = e^{-u^2}$,有

$$\int_0^1 (\ln\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}dx = \int_{+\infty}^0 u(-2ue^{-u^2})du$$
$$= 2\int_0^{+\infty} u^2 e^{-u^2}du = -\int_0^{+\infty} u\,de^{-u^2}$$
$$= -ue^{-u^2}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-u^2}du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(2) $\int_a^{+\infty} x^2 e^{-x^2+2ax}dx$

$$= \int_a^{+\infty} x^2 e^{-(x-a)^2+a^2}dx$$
$$\xlongequal{x=u+a} \int_0^{+\infty} (u+a)^2 e^{-u^2+a^2}du$$
$$= e^{a^2}[\int_0^{+\infty} u^2e^{-u^2}du + 2a\int_0^{+\infty} ue^{-u^2}du + a^2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du]$$
$$\xlongequal{\text{由(1)}} e^{a^2}[\frac{\sqrt{\pi}}{4} - ae^{-u^2}\Big|_0^{+\infty} + a^2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}]$$
$$= e^{a^2}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{4} + a + \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^2\right).$$

1.13.5 计算

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}.$$

解法 1 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$

$$\xlongequal{x=\mathrm{tg}t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 t}{\sec^2 t(1+\mathrm{tg}^a t)}dt$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^a t+\sin^a t}{\sin^a t+\cos^a t}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1dt = \frac{\pi}{4}.$$

解法 2 作变换 $x = \frac{1}{u}$,得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^a)}$$
$$= \int_{+\infty}^0 \frac{-\frac{1}{u^2}}{(1+\frac{1}{u^2})(1+\frac{1}{u^a})}du$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u^2)(1+u^a)}du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{(1+u^\alpha)-1}{(1+u^2)(1+u^\alpha)} du$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^2} - \int_0^{+\infty} \frac{du}{(1+u^2)(1+u^\alpha)},$$

移项,整理得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

解法 3 作变换 $x = \operatorname{tg} t$ 得

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\operatorname{tg}^\alpha t}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \frac{1}{1+\operatorname{ctg}^\alpha t}) dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\operatorname{ctg}^\alpha t},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{1+\operatorname{ctg}^\alpha t} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{d(\frac{\pi}{2}-u)}{1+\operatorname{tg}^\alpha(\frac{\pi}{2}-u)}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1+\operatorname{tg}^\alpha u} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)}.$$

故 $$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(1+x^\alpha)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

1.13.6 证明:

(1) Dirichlet 积分 $\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx = \pi, n = 0,1,2,\cdots$;

(2) Fejér 积分 $\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx = n\pi, n = 0,1,2,\cdots$.

证 (1)(方法 1)因为

$$\sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n} 2\sin\frac{x}{2}\cos kx$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\sin(k+\frac{1}{2})x + \sin(\frac{1}{2}-k)x]$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sum_{k=1}^{n}[\sin(k+\frac{1}{2})x - \sin(k-\frac{1}{2})x]$$

$$= \sin\frac{x}{2} + \sin(n+\frac{1}{2})x - \sin\frac{x}{2}$$

$$= \sin(n+\frac{1}{2})x,$$

所以

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi [1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos kx] dx$$

$$= \pi + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\Big|_0^\pi = \pi.$$

(方法 2,归纳法) 当 $n = 0$ 时,

$$\int_0^\pi \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int_0^\pi dx = \pi.$$

设当 $n = k$ 时,结论正确,即

$$\int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx = \pi,$$

则当 $n = k+1$ 时,有

$$\int_0^\pi \frac{\sin(k+1+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x\cos x + \cos(k+\frac{1}{2})x\sin x}{\sin\frac{x}{2}} dx$$

$$= \int_0^\pi [\frac{\sin(k+\frac{1}{2})x(1-2\sin^2\frac{x}{2})}{\sin\frac{x}{2}} + \frac{\cos(k+\frac{1}{2})x\cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}] dx$$

$$= \int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx + 2\int_0^\pi (-\sin(k+\frac{1}{2})x\sin\frac{x}{2} + \cos(k+\frac{1}{2})x\cos\frac{x}{2}) dx$$

$$= \pi + 2\int_0^\pi \cos(k+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})x dx$$

$$= \pi + \frac{2}{k+1}\sin(k+1)x \Big|_0^\pi = \pi.$$

结论也对,故对 $n = 0,1,2,\cdots$

$$\int_0^\pi \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}} dx = \pi.$$

(2) 因为

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2\sin\frac{x}{2}\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\sin x^2\frac{x}{2}}\sum_{k=0}^{n-1}[\cos kx - \cos(k+1)x]$$

$$= \frac{1-\cos nx}{2\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{\sin^2\frac{n}{2}x}{\sin^2\frac{x}{2}} = \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2,$$

所以,由(1)得

$$\int_0^\pi \left(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2 dx = \int_0^\pi \frac{\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin(k+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}dx = \sum_{k=0}^{n-1}\pi = n\pi.$$

1.13.7 设 f 为连续函数,证明:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$;

(2) $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx$,并应用于积分 $\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$.

证 (1) 作变换 $x = \frac{\pi}{2} - t$,有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 f(\sin(\frac{\pi}{2}-t))d(\frac{\pi}{2}-t)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx.$$

(2) 作变换 $x = \pi - t$,有

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx$$

$$= \int_\pi^0 (\pi - t)f(\sin(\pi - t))d(\pi - t)$$

$$= \int_0^\pi (\pi - t)f(\sin t)dt$$

$$= \pi\int_0^\pi f(\sin x)dx - \int_0^\pi xf(\sin x)dx,$$

移项就得

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

由此得到

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx = \int_0^\pi x\cdot\frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{\sin x}{2-\sin^2 x}dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi \frac{-d\cos x}{1+\cos^2 x}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\operatorname{arctg}(\cos x)\Big|_0^\pi$$

$$= -\frac{\pi}{2}[\operatorname{arctg}(-1) - \operatorname{arctg}1]$$

$$= -\frac{\pi}{2}(-\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) = \frac{\pi^2}{4}.$$

1.13.8 设 $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos t dt$, $|x| \leqslant \frac{\pi}{2}$,试证:

$$\varphi(x) = -x\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}),$$

并计算 $\varphi(\frac{\pi}{2})$,进而计算下列积分:

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x dx$; (2) $\int_0^\pi x\ln\sin x dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\operatorname{ctg} x dx$; (4) $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

(5) $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}dx$.

证法 1 $\varphi(x) = -\int_0^x \ln\cos t dt$

$$= -\int_0^x \ln[\cos\frac{\pi}{2} + \cos t]dt$$

$$= -\int_0^x \ln\left(2\cos\frac{\frac{\pi}{2}+t}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{2}-t}{2}\right)dt$$

$$= -\int_0^x [\ln 2 + \ln\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2}) + \ln\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})]dt$$

$$= -x\ln 2 - \int_0^x \ln\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2})dt - \int_0^x \ln\cos(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2})dt$$

$$= -x\ln 2 - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln\cos u\cdot 2du - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln\cos v(-2)dv$$

$$= -x\ln 2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos u du - 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln\cos u du + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos v dv + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln\cos v dv$$

$$= -x\ln 2 - 2\int_0^{\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}} \ln\cos u du + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}} \ln\cos v dv$$

$$= -x\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}).$$

因为

$$\varphi(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{\frac{\pi}{2}}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{\frac{\pi}{2}}{2})$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{2}) - 2\varphi(0)$$

$$= -\frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{2}),$$

因而有 $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}\ln 2$.

证法 2 因为

$$[-x\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})]'$$

$$= -\ln 2 + \varphi'(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}) + \varphi'(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2})$$

$$= -\ln 2 - \ln\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - \ln\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$$

$$= -\ln[2\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})]$$

$$= -\ln(\cos\frac{\pi}{2}+\cos x) = -\ln\cos x = \varphi'(x),$$

而 $\varphi(0)=0$,所以有

$$\varphi(x) = -x\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}) + \varphi(0)$$

$$= -x\ln 2 + 2\varphi(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}) - 2\varphi(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}).$$

下面计算(1)～(5)

(1) 有二种算法.(方法 1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos(\frac{\pi}{2}-x)dx$$

$$\xlongequal{u=\frac{\pi}{2}-x} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\ln\cos u(-du)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos u\,du = -\varphi(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(方法 2) 由

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx \xlongequal{x=2t} \int_0^{\frac{\pi}{4}}2\ln\sin 2t\,dt$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln 2\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos t\,dt$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt$$

$$+ 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{2}-u)d(\frac{\pi}{2}-u)$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin t\,dt + 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin u\,du$$

$$= \frac{\pi}{2}\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx,$$

移项得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$

(2) $\int_0^{\pi}x\ln\sin x\,dx$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}x\ln\sin x\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(\pi-t)\ln\sin(\pi-t)(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\ln\sin x\,dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}}t\ln\sin t\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = \pi\cdot(-\frac{\pi}{2}\ln 2) = -\frac{\pi^2}{2}\ln 2.$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,\mathrm{ctg}\,x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,d(\ln\sin x)$

$$= x\ln\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,dx = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(4) $\int_0^1\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

$$\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin t\,dt = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

(5) $\int_0^1\frac{\arcsin x}{x}dt \xlongequal{t=\arcsin x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{t}{\sin t}\cos t\,dt$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}t\,\mathrm{ctg}\,t\,dt = \frac{\pi}{2}\ln 2.$$

1.13.9 设 $|r|\neq 1$,求

(1) $\int_0^{\pi}\frac{r-\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx$;

(2) S.D.Poisson 积分 $\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)dx$.

解 (1) 由

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{(r^2+1)-2r\cos x}$$

$$\xlongequal{t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\int_0^{+\infty}\frac{\frac{2}{1+t^2}dt}{(r^2+1)-2r\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(r^2+1)(1+t^2)-2r(1-t^2)}$$

$$= 2\int_0^{+\infty}\frac{dt}{(r-1)^2+(r+1)^2t^2}$$

$$= \frac{2}{r^2-1}\mathrm{arctg}\frac{r+1}{r-1}t\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \begin{cases}\frac{2}{1-r^2}\cdot\frac{\pi}{2}, & |r|<1\\ \frac{2}{r^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}, & |r|>1\end{cases}$$

$$= \frac{\pi}{|r^2-1|}\quad(|r|\neq 1)$$

得

$$\int_0^{\pi}\frac{r-\cos x}{1-2r\cos x+r^2}dx$$

$$\xlongequal{r\neq 0}\frac{1}{2r}\int_0^{\pi}\frac{2r^2-2r\cos x+1-1}{r^2-2r\cos x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2r}\int_0^{\pi}(1+\frac{r^2-1}{r^2-2r\cos x+1})dx$$

$$= \frac{1}{2r}[\pi+(r^2-1)\int_0^{\pi}\frac{dx}{(r^2+1)-2r\cos x}]$$

$$= \frac{1}{2r}[\pi+(r^2-1)\frac{\pi}{|1-r^2|}]$$

$$= \begin{cases}0, & |r|<1,\\ \frac{\pi}{r}, & |r|>1.\end{cases}$$

又 $r=0$ 时,有

$$\int_0^{\pi}(-\cos x)\mathrm{d}x=-\sin x\Big|_0^{\pi}=0.$$

所以

$$\int_0^{\pi}\frac{r-\cos x}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & |r|<1,\\ \dfrac{\pi}{r}, & |r|>1.\end{cases}$$

(2)(方法1)设

$$I(r)=\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x.$$

将 r 视作参数,因为

$$\ln(1-2r\cos x+r^2)$$

与

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\ln(1-2r\cos x+r^2)]=\frac{2(r-\cos x)}{1-2r\cos x+r^2}$$

当 $|r|<1$ 时均连续,所以

$$I'(r)=\int_0^{\pi}\frac{2(r-\cos x)}{1-2r\cos x+r^2}\mathrm{d}x=0,\quad |r|<1.$$

从而

$$I(r)=I(0)=\int_0^{\pi}\ln 1\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}0\mathrm{d}x=0,\ |r|<1.$$

当 $|r|>1$ 时,由

$$1-2r\cos x+r^2=r^2(1-2\frac{1}{r}\cos x+\frac{1}{r^2})$$

得

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\pi}[2\ln|r|+\ln(1-2\frac{1}{r}\cos x+\frac{1}{r^2})]\mathrm{d}x$$

$$\overset{|\frac{1}{r}|<1}{=\!=\!=\!=}2\pi\ln|r|+0$$

$$=2\pi\ln|r|,\ |r|>1.$$

二者合起来即是

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$$

$$=\begin{cases}0, & |r|<1,\\ 2\pi\ln|r|, & |r|>1.\end{cases}$$

(方法2)由恒等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}(\cos kx+i\sin kx)=\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}(e^{ix})^k$$

$$=e^{ix}\sum_{k=1}^{\infty}(re^{ix})^{k-1}=e^{ix}\cdot\frac{1}{1-re^{ix}}$$

$$=e^{ix}\frac{1-re^{-ix}}{(1-re^{ix})(1-re^{-ix})}$$

$$=\frac{e^{ix}-r}{(1+r^2)-r(e^{ix}+e^{-ix})}$$

$$=\frac{\cos x-r}{1-2r\cos x+r^2}+i\frac{\sin x}{1-2r\cos x+r^2},$$

得

$$\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}\cos kx=\frac{\cos x-r}{1-2r\cos x+r^2}.$$

从而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[\ln(1-2r\cos x+r^2)]$$

$$=\frac{-2\cos x+2r}{1-2r\cos x+r^2}=-2\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}\cos kx.$$

所以

$$\ln(1-2r\cos x+r^2)$$

$$=-2\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{r}r^{k-1}\cos kx\mathrm{d}r$$

$$=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cos kx,\ |r|<1.$$

于是

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$$

$$=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\int_0^{\pi}\cos kx\mathrm{d}x=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cdot\frac{\sin k\pi}{k}$$

$$=-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^k}{k}\cdot 0=0,\ |r|<1.$$

(方法3) 因为

$$(1-|r|)^2\leqslant 1-2r\cos x+r^2,$$

所以,当 $|r|\neq 1$ 时,$\ln(1-2r\cos x+r^2)$ 是连续的,从而积分存在.将区间 $[0,\pi]$ 分成 n 个相等的部分,则由

$$z^{2n}-1=\prod_{k=0}^{n-1}(z-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n})$$

$$=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}(z-\cos\frac{k\pi}{n}-i\sin\frac{k\pi}{n})$$

$$\times(z-\cos\frac{k\pi}{n}+i\sin\frac{k\pi}{n})$$

$$=(z^2-1)\prod_{k=1}^{n}(1-2z\cos\frac{k\pi}{n}+z^2)$$

得到

$$\sigma_n=\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2)$$

$$=\frac{\pi}{n}\ln[(1+r)^2\prod_{k=1}^{n-1}(1-2r\cos k\frac{\pi}{n}+r^2)]$$

$$=\frac{\pi}{n}\ln[\frac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1)],$$

从而

$$\int_0^{\pi}\ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\sigma_n$$

$$=\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{n}\ln[\dfrac{r+1}{r-1}(r^{2n}-1)], & |r|<1\\ \lim\limits_{n\to+\infty}[\dfrac{\pi}{n}\ln(\dfrac{r+1}{r-1}\cdot\dfrac{r^{2n}-1}{r^{2n}})\\ \quad+2\pi\ln|r|], & |r|>1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & |r|<1,\\ 2\pi\ln|r|, & |r|>1.\end{cases}$$

(方法4)利用一个巧妙的方法来计算这个积分.

在这个方法中变量代换起着重要的作用.

由显然的不等式

$$(1-|r|)^2 \leqslant 1-2r\cos x+r^2 \leqslant (1+|r|)^2,$$

$$2\pi\ln(1-|r|) \leqslant \int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x \leqslant 2\pi\ln(1+|r|),$$

及夹逼定理,当 $r\to 0$ 时,有

$$I(r)=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x\to 0.$$

再考虑积分

$$I(-r)=\int_0^\pi \ln(1+2r\cos x+r^2)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{x=\pi-t}\int_\pi^0 \ln[1+2r\cos(\pi-t)+r^2]\mathrm{d}(\pi-t)$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2r\cos t+r^2)\mathrm{d}t=I(r),$$

于是有

$$2I(r)=I(r)+I(-r)$$

$$=\int_0^\pi \ln[(1-2r\cos x+r^2)(1+2r\cos x+r^2)]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \ln[(1+r^2)^2-4r^2\cos^2 x]\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2r^2\cos 2x+r^4)\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{t=2x}\int_0^{2\pi}\ln(1-2r^2\cos t+r^4)\frac{\mathrm{d}t}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \ln(1-2r^2\cos t+r^4)\mathrm{d}t+\int_\pi^{2\pi}\ln(1-2r^2\cos t+r^4)\mathrm{d}t\right]$$

$$\xlongequal{t=2\pi-u}\frac{1}{2}\int_0^\pi \ln(1-2r^2\cos t+r^4)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\int_\pi^0 \ln(1-2r^2\cos u+r^4)(-\mathrm{d}u)$$

$$=\int_0^\pi \ln(1-2r^2\cos t+r^4)\mathrm{d}t=I(r^2),$$

$$I(r)=\frac{1}{2}I(r^2).$$

依次类推得到

$$I(r)=\frac{1}{2^n}I(r^{2^n}),\quad n=1,2,3,\cdots.$$

于是当 $|r|<1$ 时, $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{2^n}=0$ 及

$$I(r)=\lim_{n\to+\infty} I(r)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}I(r^{2^n})=0\cdot I(0)=0.$$

1.13.10 试证 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

证法 1 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2-(\sqrt{2}u)^2}$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2-\sqrt{2}u+1)(u^2+\sqrt{2}u+1)}$$

$$=\int_0^{+\infty}\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{4}u+\frac{1}{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}u+\frac{1}{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2(u+\frac{\sqrt{2}}{2})+\sqrt{2}}{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}-\frac{2(u-\frac{\sqrt{2}}{2})-\sqrt{2}}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\frac{(u+\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}{(u-\frac{\sqrt{2}}{2})^2+\frac{1}{2}}+2\operatorname{arctg}\frac{u+\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}+2\operatorname{arctg}\frac{u-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}}\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}+2\cdot\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证法 2 由

$$\int\frac{1+u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=\int\frac{\frac{1}{u^2}+1}{\frac{1}{u^2}+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(u-\frac{1}{u})}{(u-\frac{1}{u})^2+2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u-\frac{1}{u}}{\sqrt{2}}+C_1$$

和

$$\int\frac{1-u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=\int\frac{\frac{1}{u^2}-1}{\frac{1}{u^2}+u^2}\mathrm{d}u$$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(u+\frac{1}{u})}{(u+\frac{1}{u})^2-2}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{u+\frac{1}{u}+\sqrt{2}}{u+\frac{1}{u}-\sqrt{2}}+C_2$$

得

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1+u^2}{1+u^4}+\frac{1-u^2}{1+u^4}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u^2-1}{\sqrt{2}u}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}+C,$$

$$\int\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1+u^2}{1+u^4}-\frac{1-u^2}{1+u^4}\right)\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u^2-1}{\sqrt{2}u}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}+D.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{u^2-1}{\sqrt{2}u}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{u^2+\sqrt{2}u+1}{u^2-\sqrt{2}u+1}\Big]\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

顺便还可得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证法 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} \xlongequal{\theta=u^4} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}\theta}{\theta^{\frac{3}{4}}(1+\theta)}$

$$\xlongequal{t=(1+\theta)^{-1}} \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{3}{4}-1}(1-t)^{\frac{1}{4}-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right) \xlongequal{\text{余元公式}} \frac{\pi}{4\sin\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证法 4 应用留(残)数定理得

$$2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$$

$$= \lim_{R\to+\infty}\left[\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}+\int_{\overset{\frown}{C}_R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}\frac{z-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+z^4}\right.$$

$$\left.+\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\frac{z-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{1+z^4}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}\frac{1}{4z^3}+\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\frac{1}{4z^3}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}\frac{z}{4z^4}+\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}\frac{z}{4z^4}\right]$$

$$= 2\pi i\left[\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)}{-4}+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)}{-4}\right]$$

$$= 2\pi i\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}i\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

其中 $\overset{\frown}{C}_R$ 为以原点为中心，R 为半径的反时针方向的上半圆周. 显然

$$\int_{\overset{\frown}{C}_R}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^4} = 0.$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

1.13.11 试证 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$

证法 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\int_0^{+\infty}\left[\frac{(2u-\sqrt{2})+\sqrt{2}}{u^2-\sqrt{2}u+1}\right.$$

$$\left.-\frac{(2u+\sqrt{2})-\sqrt{2}}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[\ln\frac{u^2-\sqrt{2}u+1}{u^2+\sqrt{2}u+1}+2\mathrm{arctg}\frac{2u-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right.$$

$$\left.+2\mathrm{arctg}\frac{2u+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left[0+2\cdot\frac{\pi}{2}+2\cdot\frac{\pi}{2}-2\left(-\frac{\pi}{4}\right)-2\cdot\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

证法 2 见题 1.13.10 证法 2.

证法 3 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$

$$\xlongequal{\theta=u^4} \frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\theta^{\frac{1}{4}}(1+\theta)^{-1}\mathrm{d}\theta$$

$$\xlongequal{t=(1+\theta)^{-1}} \frac{1}{4}\int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1}(1-t)^{\frac{3}{4}-1}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{4}B\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$$

$$\xlongequal{\text{余元公式}} \frac{1}{4}\,\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

1.13.12 试证 Fresnel 积分

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证法 1 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{难验证}} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\sin t\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+u^4}\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

由于第 3 个等式交换积分次序难验证，我们引入收敛因子 $e^{-\alpha t}(\alpha>0)$. 为此，考虑积分

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{*} \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+\alpha)^2}\quad(\alpha>0).$$

所以，由题 1.13.10,

$$\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x \xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{\text{Abel判别法}} \frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+\alpha)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$$（因为 $\frac{1}{1+(u^2+\alpha)^2}\leqslant\frac{1}{1+u^4}$，故积分关于 α 一致收敛）

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

* 的证明. 固定 α，显然

$$\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}|e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t|\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

收敛. 因为 $|e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t|\leqslant e^{-t\alpha}$，所以 $\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,\mathrm{d}t$ 关于 $u\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 此外，对任给 $\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}\sqrt{t}=0$，所以存在 $\delta=\delta(\varepsilon)>0$，当 $|t|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t\alpha}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right|\leqslant\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right|<\varepsilon.$$

取定 $\delta=\delta(\varepsilon)$，存在 $\Delta=\Delta(\varepsilon)>0$，使

$$\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t\alpha}\int_{\sqrt{\delta}\Delta}^{+\infty}e^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{\sqrt{\delta}}\int_{\sqrt{\delta}\Delta}^{+\infty}e^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta<\varepsilon\ (t\in[\delta,+\infty)).$$

于是，当 $A>\Delta$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,\mathrm{d}u\right|$$

$$\xlongequal{\theta=\sqrt{t}u}\left|\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty}e^{-\theta^2-t\alpha}\frac{\sin t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$=\left|\frac{\sin t}{\sqrt{t}}e^{-t\alpha}\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty}e^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta\right|<\varepsilon\ (t\in[0,+\infty)).$$

这就证明了 $\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\sin t\,\mathrm{d}u$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的，因而关于 $t\in[0,a](\forall a>0)$ 也一致收敛. 从而就证明了满足积分号交换的条件.

对于 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，能否类似 $\int_0^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ 来证明呢？应用 Dirichlet 判别法知

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x\xlongequal{t=x^2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{2\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

是收敛的. 再乘收敛因子 $e^{-\alpha t}$ 并应用 $\frac{1}{\sqrt{t}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-tu^2}\mathrm{d}u$ 得到

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$\xlongequal{**}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2+\alpha}{1+(u^2+\alpha)^2}\mathrm{d}u.$$

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 收敛，$e^{-\alpha t}$ 对固定 α 关于 t 单调且关于 α 一致有界（$|e^{-\alpha t}|\leqslant 1$），故由 Abel 判别法，$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$ 关于 $\alpha\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 再由

$$\left|\frac{u^2+\alpha}{1+(u^2+\alpha)^2}\right|\leqslant\frac{u^2+1}{1+u^4}\ (0\leqslant\alpha\leqslant 1)$$

知 $\int_0^{+\infty}\frac{u^2+\alpha}{1+(u^2+\alpha)^2}\mathrm{d}u$ 关于 $\alpha\in[0,1]$ 一致收敛. 于是，

$$\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha t}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\alpha\to 0^+}\int_0^{+\infty}\frac{u^2+\alpha}{1+(u^2+\alpha)^2}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\pi}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

需要验证 ** 积分号交换次序的条件是否成立. 不幸的是，回答是否定的！

易见，由 $|e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t|\leqslant e^{-t\alpha}(\alpha>0)$ 知

$$\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}t$$

关于 $u\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的，但是

$$\int_0^{+\infty}e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}u$$

关于 $t\in[0,a]$ 是非一致收敛的. 事实上（反证），假设该积分关于 $t\in[0,a]$ 一致收敛，则对 $\varepsilon_0=1$，存在 $\Delta=\Delta(\varepsilon_0)=\Delta(1)>0$，当 $A>\Delta$ 时，对 $\forall t\in[0,a]$ 有

$$\left|\int_A^{+\infty}e^{-t(u^2-\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}u\right|<\varepsilon_0=1.$$

作变换 $\theta=\sqrt{t}u$，得

$$\left|\int_A^{\infty}e^{-t(u^2-\alpha)}\cos t\,\mathrm{d}u\right|=\left|\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty}e^{-\theta^2-t\alpha}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}\theta\right|$$

$$=\left|e^{-t\alpha}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\int_{\sqrt{t}A}^{+\infty}e^{-\theta^2}\mathrm{d}\theta\right|<1.$$

令 $t\to 0^+$ 得到 $+\infty\leqslant 1$. 矛盾.

为了正确地证明 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$，我们应该更细致地估计.

对 $\forall \delta > 0$(固定 δ),由

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\mathrm{d}t$$

关于 $u \in [0, +\infty)$ 一致收敛;

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\mathrm{d}u$$

关于 $t \in [\delta + \infty)$ 一致收敛;及

$$\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)} \mid \cos t \quad \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

收敛可知下面的积分次序可交换:

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\delta}^{+\infty}\left[\int_{0}^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\left[\int_{\delta}^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)}\cos t\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{(u^2+\alpha)e^{-\delta(u^2+\alpha)}\cos\delta - e^{-\delta(u^2+\alpha)}\sin\delta}{(u^2+\alpha)^2+1}\mathrm{d}u \tag{1}$$

从$\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{(u^2+\alpha)^2+1}$和$\int_{0}^{+\infty}\frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha)^2+1}\mathrm{d}u$ 均收敛推得(1)式关于 $\delta \in [0,1]$ 是一致收敛的. 令 $\delta \to 0^+$ 得到

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}\frac{\cos t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{+\infty}\frac{u^2+\alpha}{(u^2+\alpha)^2+1}\mathrm{d}u.$$

由此式及前面的论证结果,立即有

$$\int_{0}^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

证法2 设 $C_1 = \{x + i0 \mid 0 \leqslant x \leqslant R\}$, $C_2 = \{Re^{i\theta} \mid 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\}$, $C_3 = \{re^{i\frac{\pi}{4}} \mid 0 \leqslant r \leqslant R\}$, $\vec{C} = \vec{C_1} \cup \vec{C_2} \cup \vec{C_3}$,其定向按逆时针方向. 因为 e^{iz^2} 为复解析函数,所以

$$0 = \int_{\vec{C}} e^{iz^2}\mathrm{d}z = \int_{\vec{C_1}} e^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{\vec{C_2}} e^{iz^2}\mathrm{d}z + \int_{\vec{C_3}} e^{iz^2}\mathrm{d}z$$

$$= \int_{0}^{R} e^{ix^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta + \int_{R}^{0} e^{ir^2e^{i\frac{\pi}{2}}} e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r$$

$$= \int_{0}^{R} e^{ix^2}\mathrm{d}x + \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\theta}} Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta - \int_{0}^{R} e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r \tag{2}$$

又因$\frac{4\theta}{\pi} \leqslant \sin 2\theta, \theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$,所以

$$\left|\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{iR^2e^{2i\theta}} \cdot Rie^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leqslant \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{iR^2e^{2i\theta}} \cdot Rie^{i\theta}\right| \mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant R\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left| e^{-R^2\sin 2\theta + iR^2\cos 2\theta}\right| \mathrm{d}\theta = R\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant R\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\cdot\frac{4\theta}{\pi}}\mathrm{d}\theta = -\frac{R\pi}{4R^2}e^{-R^2\cdot\frac{4\theta}{\pi}}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4R}(1 - e^{-R^2}) \longrightarrow 0 \ (R \to +\infty).$$

因此,令 $R \to +\infty$,(2) 式就成为

$$0 = \int_{0}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x - \int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r,$$

从而

$$\int_{0}^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x + i\int_{0}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x$$

$$= \int_{0}^{+\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty} e^{-r^2} e^{i\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}r$$

$$= (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\int_{0}^{+\infty} e^{-r^2}\mathrm{d}r$$

$$= (\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(1 + i),$$

即$\int_{0}^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_{0}^{+\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

证法3 在证法2中,设解析函数 $f(z) = u + iv$,则

$$0 = \oint_{\vec{C}} f(z)\mathrm{d}z = \oint_{\vec{C}} (u + iv)(\mathrm{d}x + i\mathrm{d}y)$$

$$= \oint_{\vec{C}} (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + i(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \oint_{\vec{C}} u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y = 0 \\ \oint_{\vec{C}} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y$ 和 $v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y$ 均为 C^∞ 恰当形式

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \mathrm{d}(u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) = -(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ 0 = \mathrm{d}(v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y) = (\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y})\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \quad \text{(Cauchy-Riemann 方程)}.$$

设 $f(z) = ie^{iz^2} = ie^{i(x+iy)^2} = ie^{i(x^2-y^2+2xyi)}$

$$= ie^{-2xy}[\cos(x^2 - y^2) + i\sin(x^2 - y^2)]$$

$$= e^{-2xy}[-\sin(x^2 - y^2) + i\cos(x^2 - y^2)]$$

$$= e^{-2xy}[\sin(y^2 - x^2) + i\cos(y^2 - x^2)],$$

$$\begin{cases} u = e^{-2xy}\sin(y^2 - x^2), \\ v = e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2). \end{cases}$$

于是

$$\int_{\vec{C}} e^{-2xy}\cos(y^2 - x^2)\mathrm{d}x + e^{-2xy}\sin(y^2 - x^2)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{\vec{C}} v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y = I_m\int_{\vec{C}} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

也可对 1 次的 C^∞ 形式

$$\omega = e^{-2xy}\cos(y^2-x^2)\mathrm{d}x + e^{-2xy}\sin(y^2-x^2)\mathrm{d}y$$

直接验证

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega &= \{-2xe^{-2xy}\cos(y^2-x^2) - 2ye^{-2xy}\sin(y^2-x^2)\}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x + \{-2ye^{-2xy}\sin(y^2-x^2) - 2xe^{-2xy}\cos(y^2-x^2)\}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ &= 0,\end{aligned}$$

于是,对平面上由 $\vec{C}$ 围成的 2 维定向区域 $\vec{M}$,应用 Stokes(或 Green)公式,就得到

$$\begin{aligned}0 &= \int_{\vec{M}} d\omega = \int_{\partial\vec{M}} \omega - \int_{\vec{C}} \omega \\ &= \int_0^R \cos x^2\mathrm{d}x + \int_{\overset{\rightarrow}{C_2}} \omega + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}R}^0 e^{-2t^2}\mathrm{d}t. \qquad (3)\end{aligned}$$

因为$\frac{2\varphi}{\pi} \leqslant \sin\varphi \leqslant \varphi, \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,所以

$$\begin{aligned}\left|\int_{\overset{\rightarrow}{C_2}} \omega\right| &\leqslant 2R\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R^2\sin 2\theta}\mathrm{d}\theta \\ &\xlongequal{\varphi = 2\theta} R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi \\ &\leqslant R\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2\frac{2}{\pi}\varphi}\mathrm{d}\varphi = -R\Big/\frac{2R^2}{\pi}\cdot e^{-\frac{2R^2}{\pi}\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{2R}(1-e^{-R^2}) \to 0\ (R\to+\infty).\end{aligned}$$

因此,在(3)式中,令 $R\to+\infty$,就有

$$\begin{aligned}0 &= \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x + \int_{+\infty}^0 e^{-2x^2}\mathrm{d}x, \\ \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} e^{-2x^2}\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{t = \sqrt{2}x} \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

证法 4 $\int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\frac{1}{2x}\mathrm{d}\sin x^2$

$$\begin{aligned}&= \frac{\sin x^2}{2x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{1}{2x^2}\sin x^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x^2}{x^2}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

令

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\frac{\sin x^2}{x^2}\mathrm{d}x.$$

根据 Abel 判别法,$I(\alpha)$ 关于 $\alpha\in[0,\alpha)$ 一致收敛,因此

$$\begin{aligned}I'(\alpha) &= -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\sin x^2\mathrm{d}x \\ &\xlongequal{y = x^2} -\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\ &= -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha y}\frac{\sin y}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y \\ &\xlongequal{\text{开始已证}} -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+\alpha)^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I(\alpha) - I(0) &= \int_0^{\alpha} I'(\alpha)\mathrm{d}\alpha \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\alpha}\left[\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}u}{1+(u^2+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}\alpha \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\left[\int_0^{\alpha}\frac{\mathrm{d}\alpha}{1+(u^2+\alpha)^2}\right]\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}[\mathrm{arctg}(u^2+\alpha) - \mathrm{arctg}u^2]\mathrm{d}u \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\pi}}u[\mathrm{arctg}(u^2+\alpha) - \mathrm{arctg}u^2]\Big|_0^{+\infty} \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u\left[\frac{2u}{1+(u^2+\alpha)^2} - \frac{2u}{1+u^4}\right]\mathrm{d}u \\ &= 0 + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty} u^2\left[\frac{1}{1+(u^2+\alpha)^2} - \frac{1}{1+u^4}\right]\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

令 $\alpha\to+\infty$ 得

$$\begin{aligned}-I(0) &= 0 - I(0) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{u^2}{1+u^4}\mathrm{d}u \\ &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ I(0) &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\ \int_0^{+\infty}\cos x^2\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}I(0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\end{aligned}$$

1.13.13 计算定积分

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

解法 1 作变换 $x = \mathrm{tg}\theta$,得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\ln(1+\mathrm{tg}\theta)}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\sec^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\{\ln[\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})] - \ln\cos\theta\}\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin(\theta+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}\theta \\ &\quad - \int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\varphi\mathrm{d}\varphi - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin\eta(-\mathrm{d}\eta) \\ &= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\varphi\mathrm{d}\varphi - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\eta\mathrm{d}\eta \\ &= \frac{\pi}{4}\ln\sqrt{2} = \frac{\pi}{8}\ln 2.\end{aligned}$$

解法 2 令

$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$$

则

$$I'(\alpha)=\int_0^1\frac{x}{(1+x^2)(1+\alpha x)}dx$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^1\left(\frac{-\alpha}{1+\alpha x}+\frac{x+\alpha}{1+x^2}\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha x)+\frac{1}{2(1+\alpha^2)}\ln(1+x^2)+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan x\right]\Big|_0^1$$

$$=-\frac{1}{1+\alpha^2}\ln(1+\alpha)+\frac{\ln2}{2(1+\alpha^2)}+\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\cdot\frac{\pi}{4}.$$

因此

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=I(1)$$

$$=I(1)-0=I(1)-I(0)=\int_0^1 I'(\alpha)d\alpha$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}d\alpha+\frac{\ln2}{2}\int_0^1\frac{d\alpha}{1+\alpha^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{\alpha}{1+\alpha^2}d\alpha$$

$$=-\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx+\frac{\ln2}{2}\arctan\alpha\Big|_0^1+\frac{\pi}{8}\ln(1+\alpha^2)\Big|_0^1,$$

移项即有

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx=\frac12\left[\frac{\ln2}{2}\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\ln2\right]=\frac{\pi}{8}\ln2.$$

1.13.14 试证

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha},\alpha\geqslant0.$$

证法1 由

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx$$

$$\xlongequal[\alpha>0]{u=\frac{\alpha}{x}}\int_{+\infty}^0 e^{-(\frac{\alpha^2}{u^2}+u^2)}\left(-\frac{\alpha}{u^2}\right)du$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\alpha}{x^2}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx$$

得到

$$2I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x^2}\right)e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx$$

$$=e^{-2\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-(x-\frac{\alpha}{x})^2}d\left(x-\frac{\alpha}{x}\right)$$

$$\xlongequal{v=x-\frac{\alpha}{x}}e^{-2\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-v^2}dv$$

$$=2e^{-2\alpha}\int_0^{+\infty}e^{-v^2}dv=2\cdot e^{-2\alpha}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$=\sqrt{\pi}e^{-2\alpha}(\alpha>0).$$

于是 $I(\alpha)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha},\alpha\geqslant0$(当 $\alpha=0$ 时,$I(0)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,等式也成立).

证法2 因为

$$\left|e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}\right|\leqslant e^{-x^2}$$

和

$$\left|\frac{2\alpha}{x^2}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}\right|\leqslant\frac{2b}{x^2}e^{-x^2}$$

关于 $\alpha\in[a,b]$ 一致收敛(其中 $a>0$),所以有

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}\frac{2\alpha}{x^2}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx$$

$$\xlongequal[\alpha>0]{y=\frac{\alpha}{x}}2\int_{+\infty}^0 e^{-(y^2+\frac{\alpha^2}{y^2})}dy$$

$$=-2\int_0^{+\infty}e^{-(x^2+\frac{\alpha^2}{x^2})}dx=-2I(\alpha).$$

于是

$$\frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)}=-2,$$

$$\ln|I(\alpha)|=-2\alpha+\ln C_1,C_1>0,$$

$I(\alpha)=Ce^{-2\alpha}$,C 为任意常数.

$$I(\alpha)=I(0)e^{-2\alpha}=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx\cdot e^{-2\alpha}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-2\alpha}\quad(\alpha\geqslant0).$$

1.13.15 试证明:

$$I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\alpha x\,dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2};$$

$$J(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\sin2\alpha x\,dx=e^{-\alpha^2}\int_0^{\alpha}e^{x^2}dx.$$

证法1 因为

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\alpha x\,dx\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

及

$$\left|\int_0^{+\infty}e^{-x^2}2x\sin2\alpha x\,dx\right|\leqslant2\int_0^{+\infty}xe^{-x^2}dx$$

$$=-e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

所以 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\alpha x\,dx$ 和 $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}2x\sin2\alpha x\,dx$ 关于 $\alpha\in(-\infty,+\infty)$ 都是一致收敛的.于是

$$I'(\alpha)=-\int_0^{+\infty}2xe^{-x^2}\sin2\alpha x\,dx$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin2\alpha x\,de^{-x^2}$$

$$=e^{-x^2}\sin2\alpha x\Big|_0^{+\infty}-2\alpha\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos2\alpha x\,dx$$

$$= 2\alpha\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx = 2\alpha I(\alpha).$$

所以有

$$(\ln|I(\alpha)|)' = \frac{I'(\alpha)}{I(\alpha)} = -2\alpha,$$

$$\ln|I(\alpha)| = -\alpha^2 + \ln C_1, C_1 > 0,$$

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}, C \text{ 为任意常数}.$$

进而

$$I(\alpha) = I(0)e^{-\alpha^2} = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx \cdot e^{-\alpha^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}$$

类似地，有

$$J'(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} 2x\cos 2\alpha x\,dx$$

$$= -\int_0^{+\infty} \cos 2\alpha x\,de^{-x^2}$$

$$= -e^{-x^2}\cos 2\alpha x\Big|_0^{+\infty} - 2\alpha\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin 2\alpha x\,dx$$

$$= 1 - 2\alpha J(\alpha),$$

$$J'(\alpha) + 2\alpha J(\alpha) = 1,$$

$$(e^{\alpha^2}J(\alpha))' = e^{\alpha^2}J'(\alpha) + 2\alpha J(\alpha)e^{\alpha^2}$$

$$= e^{\alpha^2}(J'(\alpha) + 2\alpha J(\alpha)) = e^{\alpha^2},$$

$$e^{\alpha^2}J(\alpha) = \int_0^{\alpha} e^{\alpha^2}d\alpha + J(0) = \int_0^{\alpha} e^{\alpha^2}d\alpha,$$

所以 $J(\alpha) = e^{-\alpha^2}\int_0^{\alpha} e^{t^2}dt$.

证法 2 易见有递推公式

$$I_k = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2k}dx = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{2k-1}de^{-x^2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2}x^{2k-1}\Big|_0^{+\infty}$$

$$+ \frac{2k-1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2k-2}dx$$

$$= \frac{2k-1}{2}I_{k-1}$$

和

$$I_k = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi}.$$

因此，有

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos 2\alpha x\,dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\alpha x)^{2k}}{(2k)!}dx$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\alpha)^{2k}}{(2k)!}\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x^{2k}dx$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\alpha)^{2k}}{(2k)!}\cdot\frac{(2k-1)!!}{2^k}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-\alpha^2)^k}{k!}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{-\alpha^2}.$$

其中第三个等式逐项积分的可行性是由于

$$e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2\alpha x)^{2k}}{(2k)!}$$

在任何区间 $[0, A]$ 上有优级数

$$e^{-x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\alpha x)^{2k}}{(2k)!} = e^{-x^2}\operatorname{ch}2\alpha x.$$

1.13.16 计算积分

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx.$$

解法 1 因为

$$\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-x)^n = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n},$$

所以 $\frac{\ln(1-x)}{x} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}$，该幂级数收敛半径为 1，因此对 $\forall a \in (0,1)$，可以从 0 到 a 逐项积分. 再由 Abel 定理得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = \lim_{a\to 1^-}\int_0^a \frac{\ln(1-x)}{x}dx$$

$$= \lim_{a\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a \frac{x^{n-1}}{n}dx = -\lim_{a\to 1^-}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n^2}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6}.$$

解法 2 作变换 $1 - x = t$，得

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx = \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}(-dt)$$

$$= \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n \ln t\,dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \sum_{n=0}^{\infty} t^n\ln t\,dt = \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\int_\delta^1 t^n\ln t\,dt$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t\Big|_\delta^1 - \frac{1}{n+1}\int_\delta^1 t^{n+1}\cdot\frac{1}{t}dt\right]$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{\delta^{n+1}}{n+1}\ln\delta - \frac{1-\delta^{n+1}}{(n+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\delta\ln\delta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^n}{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2}\right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\delta^2}{(n+1)^2}\right]$$

$$= 0 - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^2} + 0 = -\frac{\pi^2}{6}.$$

1.13.17 设 $I_\alpha = \int_0^1 (1-x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}dx$.

(1) 试确定使得积分 I_α 收敛的 α 的取值范围；

(2) 试证：$I_\alpha = \dfrac{\pi}{\alpha\sin\dfrac{\pi}{\alpha}}$.

证 (1) 显然，当 $\alpha \leqslant 0$ 时 $(1-x^\alpha)^{-\frac{1}{\alpha}}$ 无意义或发散.

当 $\alpha > 0$ 时有

$$\lim_{x\to1^-}\frac{(1-x^{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}}{(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}}}=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{1-x^{\alpha}}{1-x}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\left(\lim_{x\to1^-}\frac{1-x^{\alpha}}{1-x}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$$

$$\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}}\left[\lim_{x\to1^-}\frac{-\alpha x^{\alpha-1}}{-1}\right]^{-\frac{1}{\alpha}}=\alpha^{-\frac{1}{\alpha}},$$

所以,由

$$\int_0^1(1-x)^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛,0<\dfrac{1}{\alpha}<1,\\ 发散,\dfrac{1}{\alpha}\geqslant1.\end{cases}$$

立知

$$I_{\alpha}=\int_0^1(1-x^{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛,0<\dfrac{1}{\alpha}<1,\\ 发散,\dfrac{1}{\alpha}\geqslant1.\end{cases}$$

于是得

$$I_{\alpha}=\int_0^1(1-x^{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛,\alpha>1,\\ 发散,\alpha\leqslant1.\end{cases}$$

即使 I_{α} 收敛的 α 的取值范围为 $(1,+\infty)$.

(2) $I_{\alpha}=\int_0^1(1-x^{\alpha})^{-\frac{1}{\alpha}}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(1-y)^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot\frac{1}{\alpha}y^{\frac{1}{\alpha}-1}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\alpha}\int_0^1y^{\frac{1}{\alpha}-1}(1-y)^{(1-\frac{1}{\alpha})-1}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\alpha}B\left(\frac{1}{\alpha},1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=\frac{1}{\alpha}\frac{\Gamma(\frac{1}{\alpha})\Gamma(1-\frac{1}{\alpha})}{\Gamma(\frac{1}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha})}$$

$$=\frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$\xlongequal{\text{余元公式}}\frac{1}{\alpha}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{\alpha}}.$$

1.13.18 证明 $\int_0^{+\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{8\sqrt{2}}$.

证 作变换 $t=x^4$ 就得

$$\int_0^{+\infty}e^{-x^4}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x^2e^{-x^4}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{4}}e^{-t}\mathrm{d}t\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}t^{-\frac{1}{4}}e^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{16}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{16}\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{8\sqrt{2}}.$$

1.13.19 求 $E=\Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-1}{n})$,其中 n 为自然数,$\Gamma(a)=\int_0^{+\infty}t^{a-1}e^{-t}\mathrm{d}t$ 为 Γ 函数.

解法 1 在

$$z^{n-1}+z^{n-2}+\cdots+z+1=\frac{z^n-1}{z-1}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}\left(z-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right)$$

中,令 $z\to1$ 得到

$$n=\lim_{z\to1}\frac{z^n-1}{z-1}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right),$$

$$n=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\cos\frac{2k\pi}{n}-i\sin\frac{2k\pi}{n}\right|$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)^2+\left(\sin\frac{2k\pi}{n}\right)^2}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}\sqrt{2\left(1-\cos\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

$$=\prod_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

$$E=\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

$$=\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{n}\right)\right]\cdots,$$

当 $n=2m$ 时,由余元公式得

$$E=\left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdots\left[\Gamma\left(\frac{m-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\right]\Gamma\left(\frac{m}{n}\right)$$

$$=\frac{\pi^{m-1}}{\prod\limits_{k=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi^{m-1}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\pi}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

(这里用到了 $\sin\frac{k\pi}{n}=\sin(\pi-\frac{k\pi}{n})=\sin\frac{n-k}{n}\pi$).

当 $n=2m+1$ 时,同理可得

$$E=\frac{\pi^m}{\prod\limits_{k=1}^{m}\sin\frac{k\pi}{n}}=\frac{\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

解法 2 由余元公式得

$$E=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{n}\Gamma(\frac{n-1}{n})}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2\pi}{n}\cdot\Gamma(\frac{n-2}{n})}\cdots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n-1}{n}\pi\Gamma(\frac{1}{n})}$$

$$=\frac{\pi^{n-1}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\right)\cdot E},$$

$$E=\left[\frac{\pi^{n-1}}{\prod\limits_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}}\right]^{\frac{1}{2}}=\left[\frac{\pi^{n-1}}{\frac{n}{2^{n-1}}}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}.$$

1.13.20 求 $I = \int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x$.

解 因为

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x},$$

所以

$$\ln\Gamma(x) + \ln\Gamma(1-x) = \ln\pi - \ln\sin x\pi,\ 0 < x < 1,$$

$$\begin{aligned}
2\int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x - \int_1^0 \ln\Gamma(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 \ln\Gamma(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \ln\Gamma(x)\Gamma(1-x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (\ln\pi - \ln\sin x\pi)\mathrm{d}x \\
&= \ln\pi - \int_0^1 \ln(\sin x\pi)\mathrm{d}x \\
&\xlongequal{u = x\pi} \ln\pi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \ln\sin u\mathrm{d}u \\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln\sin u\mathrm{d}u\right] \\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\mathrm{d}u + \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \ln\sin(\pi - t)(-\mathrm{d}t)\right] \\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin u\mathrm{d}u + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\mathrm{d}t\right] \\
&= \ln\pi - \frac{1}{\pi}\left[2\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\ln 2\right)\right] = \ln 2\pi.
\end{aligned}$$

§1.14 积分等式与不等式的证明技巧

1.14.1 证明积分

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = 0.$$

证法 1 应用分部积分得

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\
&= x\int_x^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\Big|_{x=0}^{2\pi} - \int_0^{2\pi} x\left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\right)'\mathrm{d}x \\
&= 0 - \int_0^{2\pi} x\cdot\left(-\frac{\sin x}{x}\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \sin x\mathrm{d}x = -\cos x\Big|_0^{2\pi} \\
&= -1 - (-1) = 0.
\end{aligned}$$

证法 2 交换积分次序得

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\left(\int_x^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\int_0^y \mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{\sin y}{y}\cdot y\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \sin y\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

1.14.2 设 f 为连续函数,试证

$$\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u.$$

证法 1 用分部积分法,有

$$\begin{aligned}
&\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u \\
&= u\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\Big|_{u=0}^{u=x} - \int_0^x u\left(\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right)'\mathrm{d}u \\
&= x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u \\
&= x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u \\
&= \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

证法 2 令 $F(x) = \int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u$,

$$G(x) = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u,$$

则

$$F'(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(\int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u\right)' \\
&= \left[x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u - \int_0^x uf(u)\mathrm{d}u\right]' \\
&= \int_0^x f(u)\mathrm{d}u + xf(x) - xf(x) \\
&= \int_0^x f(u)\mathrm{d}u = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

所以 $F'(x) = G'(x)$,再由 $F(0) = 0 = G(0)$,立即可得

$$F(x) = G(x),$$

即

$$\int_0^x\left[\int_0^u f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}u = \int_0^x f(u)(x-u)\mathrm{d}u.$$

1.14.3 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x$.

证法 1 对 $\forall\varepsilon > 0$,取 $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\pi}{2}$,因为 $0 < \sin(\frac{\pi}{2} - \delta) < 1$,所以存在 $N\in\mathbf{N}$,当 $n > N$ 时有 $0 < \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) < \frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{2} - \delta}$,于是

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x - 0\right| &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x \\
&< \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1}{\frac{\pi}{2} - \delta} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) + \delta$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

所以

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = 0.$$

证法 2 用分部积分法和递推公式得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, n = 2k, \\ \frac{2k!!}{(2k+1)!!}, n = 2k+1. \end{cases}$$

又用归纳法可证

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}},$$

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} < \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

(或$\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2 \leqslant \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k}{2k+1} = \frac{1}{2k+1}$;$\left[\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}\right]^2 < \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{1}{k+1}$). 再由夹逼定理得

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = 0 = \lim_{k \to +\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}.$$

从而

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = 0.$$

注 证法 1 中,由于考虑到极限和积分号不能交换,所以应直接用数列极限的定义来解决. 先将$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$ 分成两部分: $\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x$ 区间很短; $\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} \sin^n x \mathrm{d}x$ 当 n 充分大时,被积函数 $\sin^n x$ 也可充分地小. 这是一种常用的方法.

1.14.4 设函数 f 在点 x_0 附近有连续的 $n+1$ 阶导数,试对微积分基本公式

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) \mathrm{d}t$$

迭次进行分部积分,得出 Taylor 公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f^{(k)}(x_0) \frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x),$$

其中 $R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$, 称作 Taylor 公式的**积分余项**. 试再由积分余项得到 Taylor 公式的 Lagrange 余项.

证 应用分部积分法得

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x f'(t) \mathrm{d}t$$

$$= -\int_{x_0}^x f'(t) \mathrm{d}(x-t)$$

$$= -(x-t)f'(t) \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x (x-t) f''(t) \mathrm{d}t$$

$$= (x-x_0) f'(x_0) - \frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \Big|_{x_0}^x$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{x_0}^x f'''(t) \cdot (x-t)^2 \mathrm{d}t$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$$

$$- \frac{1}{3!} \int_{x_0}^x f'''(t) \mathrm{d}(x-t)^3$$

$$= \cdots$$

$$= f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$+ \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n \mathrm{d}t$$

即得 f 的 Taylor 公式

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x),$$

其中

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$$

就是 Taylor 公式的积分余项.

应用积分中值定理,有

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot f^{(n+1)}(\xi) \int_{x_0}^x (x-t)^n \mathrm{d}t$$

$$(x_0 < \xi < x \quad (\text{或 } x < \xi < x_0))$$

$$= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \left[-\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1}\right] \Bigg|_{x_0}^x$$

$$= \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

1.14.5 设函数 f 在区间 I 上连续, $a, b \in \mathring{I}$, 试证

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^b [f(x+h) - f(x)] \mathrm{d}x$$

$$= f(b) - f(a).$$

证法 1 $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_a^b [f(x+h) - f(x)] \mathrm{d}x$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_a^b f(x+h) \mathrm{d}x - \int_a^b f(x) \mathrm{d}x\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[\int_{a+h}^{b+h} f(u) \mathrm{d}u - \int_a^b f(t) \mathrm{d}t\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\int_{a+h}^{b} f(t)\mathrm{d}t + \int_{b}^{b+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a}^{a+h} f(t)\mathrm{d}t - \int_{a+h}^{b} f(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(\xi_2)h - f(\xi_1)h]$$

$$(a < \xi_1 < a+h, b < \xi_2 < b+h)$$

$$= \lim_{h\to 0}[f(\xi_2) - f(\xi_1)]$$

$$= f(b) - f(a).$$

证法 2 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}\displaystyle\int_a^b [f(x+h) - f(x)]\mathrm{d}x$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\int_{a+h}^{b+h} f(u)\mathrm{d}u - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t}{h}$$

$$\xlongequal{\text{L'Hospital 法则}} \lim_{h\to 0}\frac{f(b+h) - f(a+h)}{1}$$

$$= f(b) - f(a).$$

证法 3 因 f 在 I 上连续，故可令 $F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$，则 F 在 I 上可导，且有 $F'(x) = f(x)$，于是

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_a^b [f(x+h) - f(x)]\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[F(x+h) - F(x)]\Big|_a^b$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{F(b+h) - F(b)}{h} - \frac{F(a+h) - F(a)}{h}\right]$$

$$= F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a).$$

1.14.6 f 是 $[-1,1]$ 上的连续函数，试证

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x = f(0).$$

证法 1 设 $M = \max\limits_{x\in[-1,1]} |f(x)|$，则

$$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{-\sqrt{\lambda}} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{M}{2\lambda}\int_{-1}^{-\sqrt{\lambda}} e^{\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{M}{2}e^{\frac{x}{\lambda}}\Big|_{-1}^{-\sqrt{\lambda}} = \frac{M}{2}(e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}} - e^{-\frac{1}{\lambda}})$$

$$\to 0(\lambda\to 0^+).$$

同理

$$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{\sqrt{\lambda}}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x\right| \to 0\ (\lambda\to 0^+).$$

于是

$$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x - f(0)\right|$$

$$\xlongequal{\text{积分中值定理}} \left|\frac{f(\xi(\lambda))}{2\lambda}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x - f(0)\right|$$

$$= \left| f(\xi(\lambda))e^{\frac{x}{\lambda}}\Big|_{-\sqrt{\lambda}}^{0} - f(0)\right|$$

$$= |f(\xi(\lambda))(1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}) - f(0)|$$

$$\leqslant |f(\xi(\lambda)) - f(0)| + Me^{-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}}$$

$$\to 0\ (\lambda\to 0^+),$$

$$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x - f(0)\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{-\sqrt{\lambda}} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{2\lambda}\int_{\sqrt{\lambda}}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x\right|$$

$$+ \left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-\sqrt{\lambda}}^{\sqrt{\lambda}} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}} - f(0)\right|$$

$$\to 0\ (\lambda\to 0^+).$$

故

$$\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x = f(0).$$

证法 2 因为 f 在 $[-1,1]$ 上连续，所以对 $\forall x\in[-1,1]$，$|f(x)| < M$，对 $\forall 0 < \varepsilon < M$，$\exists\delta > 0$，当 $|x| < \delta$ 时，$|f(x) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{3}$. 固定 δ，取 $0 < \delta' < \delta$，当 $0 < \lambda < \delta'$ 时，有

$$|e^{-\frac{\delta}{\lambda}} - e^{-\frac{1}{\lambda}}| < \frac{\varepsilon}{6M},\quad |e^{-\frac{1}{\lambda}}f(0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

所以

$$\left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x - f(0)\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{1}[f(x) - f(0)]e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x - e^{-\frac{1}{\lambda}}f(0)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\lambda}\int_{-1}^{-\delta}|f(x) - f(0)|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{2\lambda}\int_{\delta}^{1}|f(x) - f(0)|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x$$

$$+ \frac{1}{2\lambda}\int_{-\delta}^{\delta}|f(x) - f(0)|e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x$$

$$+ |e^{-\frac{1}{\lambda}}f(0)|$$

$$\leqslant \frac{2M}{2}\left[\frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{-\delta}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x + \frac{1}{\lambda}\int_{\delta}^{1}e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x\right]$$

$$+ \frac{1}{2\lambda}\cdot\frac{\varepsilon}{3}\cdot 2\int_0^{\delta}e^{-\frac{x}{\lambda}}\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$= 2M|e^{-\frac{\delta}{\lambda}} - e^{-\frac{1}{\lambda}}| + \frac{\varepsilon}{3}(1 - e^{-\frac{\delta}{\lambda}}) + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< 2M\cdot\frac{\varepsilon}{6M} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

从而 $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\dfrac{1}{2\lambda}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)e^{-\frac{|x|}{\lambda}}\mathrm{d}x = f(0).$

注 应用函数极限的 ε-δ 法，将 $[-1,1]$ 上的积分分成三部分 $[-1,-\sqrt{\lambda}]$，$[-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}]$ 及 $[\sqrt{\lambda},1]$ 上的积分；或分成 $[-1,-\delta]$，$[-\delta,\delta]$ 及 $[\delta,1]$ 上的三部分积分.

1.14.7 试证：$2\int_a^b |\sin x|\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |\cos x|\mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2$.

证法 1 由 $2AB \leqslant A^2 + B^2$ 和 Schwarz 不等式即得

$$2\int_a^b |\sin x|\mathrm{d}x\cdot\int_a^b |\cos x|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant \left(\int_a^b 1\cdot|\sin x|\,dx\right)^2+\left(\int_a^b 1\cdot|\cos x|\,dx\right)^2$$

$$\leqslant \int_a^b 1^2dx\cdot\int_a^b\sin^2 x\,dx+\int_a^b 1^2dx\cdot\int_a^b\cos^2 x\,dx$$

$$=(b-a)\int_a^b(\sin^2 x+\cos^2 x)dx$$

$$=(b-a)\int_a^b 1dx=(b-a)^2.$$

证法 2 由 $2ab\leqslant\frac{(a+b)^2}{2}$ 得到

$$2\int_a^b|\sin x|\,dx\int_a^b|\cos x|\,dx$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[\int_a^b|\sin x|\,dx+\int_a^b|\cos x|\,dx\right]^2$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_a^b(|\sin x|+|\cos x|)dx\right]^2$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\int_a^b\sqrt{2}dx\right)^2=(b-a)^2.$$

1.14.8 设 f 在 $[a,b]$ 上连续可导，$f(a)=0$. 试证

$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx.$$

证 由 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)=\int_a^x f'(t)dt$ 及 Schwarz 不等式得

$$f^2(x)=\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2$$

$$\leqslant\left(\int_a^x 1^2dt\right)\left(\int_a^x[f'(t)]^2dt\right)$$

$$\leqslant(x-a)\int_a^x[f'(t)]^2dt$$

$$\leqslant(x-a)\int_a^b[f'(x)]^2dx.$$

于是

$$\int_a^b f^2(x)dx\leqslant\int_a^b(x-a)dx\int_a^b[f'(x)]^2dx$$

$$=\frac{(x-a)^2}{2}\Big|_a^b\int_a^b[f'(x)]^2dx$$

$$=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b[f'(x)]^2dx.$$

注 由结论中有 $f'(x)$，就联想到 Newton-Leibniz 公式 $f(x)=\int_a^x f'(t)dt+f(a)$，再由不等式右边有 $\int_a^b[f'(x)]^2dx$，又提醒我们应用 Schwarz 不等式

$$\left(\int_a^x f'(t)dt\right)^2\leqslant\left(\int_a^x 1^2dx\right)\cdot\left(\int_a^x[f'(x)]^2dx\right).$$

1.14.9 设 f 在 $[a,b]$ 上连续，且对任意 $x\in[a,b]$，$f(x)>0$，证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

证 设 $D=[a,b]\times[a,b]=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid a\leqslant x,y\leqslant b\}$，则

$$2\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$$

$$=\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dy}{f(y)}+\int_a^b f(y)dy\int_a^b\frac{dx}{f(x)}$$

$$=\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy$$

$$\geqslant\iint_D 2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}dxdy$$

$$=2\iint_D dxdy=2(b-a)^2,$$

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b\frac{dx}{f(x)}\geqslant(b-a)^2.$$

1.14.10 设 f 为 $[0,1]$ 上的正连续函数，试证

$$1\leqslant\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx\leqslant\frac{(m+M)^2}{4mM},$$

其中 M 和 m 分别为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最大、最小值.

证法 1 因为 f 是 $[0,1]$ 上的正连续函数，所以，对 $\forall x,y\in[0,1]$ 有

$$\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}-2\geqslant2\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}\cdot\frac{f(y)}{f(x)}}-2=0.$$

于是

$$2\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx-2$$

$$=\int_0^1 f(x)dx\int_0^1\frac{dy}{f(y)}+\int_0^1 f(y)dy\int_0^1\frac{dx}{f(x)}-2$$

$$=\int_0^1\int_0^1\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}-2\right]dxdy\geqslant0,$$

即

$$\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx\geqslant1.$$

另一方面，有

$$1+\frac{m}{M}-m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}-\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx$$

$$=\int_0^1[f(x)-m][\frac{1}{f(x)}-\frac{1}{M}]dx$$

$$\geqslant0.$$

因此

$$1+\frac{m}{M}\geqslant m\int_0^1\frac{dx}{f(x)}+\frac{1}{M}\int_0^1 f(x)dx$$

$$\geqslant2\sqrt{\frac{m}{M}\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx},$$

$$\int_0^1\frac{dx}{f(x)}\int_0^1 f(x)dx\leqslant\frac{(1+\frac{m}{M})^2}{4\cdot\frac{m}{M}}=\frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

证法 2 显然有

$$\frac{[f(x)-m][f(x)-M]}{f(x)}\leqslant0,0\leqslant x\leqslant1,$$

$$f(x)-(m+M)+\frac{mM}{f(x)}\leqslant0,$$

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + mM\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)} \leqslant m + M.$$

令 $u = mM\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}$,则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + u \leqslant m + M$$

或

$$u\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant (m+M)u - u^2.$$

因为函数 $g(u) = (m+M)u - u^2$ 在 $u = \frac{m+M}{2}$ 处达到最大值 $\frac{(m+M)^2}{4}$,所以

$$u\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4}.$$

即 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{(m+M)^2}{4mM}$,不等式的另一边同证法 1.

注 $[f(x) - m][\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{M}] \geqslant 0$ 或 $(f(x) - m)(f(x) - M) \leqslant 0$ 是证明右边不等式的关键.

1.14.11 设 f 在 $[a,b]$ 内连续,且 $f(x) > 0$,试证:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$$

在 (a,b) 内有一根且仅有一根.

证 因为 f 在 $[a,b]$ 上连续,故 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - \int_x^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}$ 在 $[a,b]$ 上也连续. 此外由

$$F(a) = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)} < 0, F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t > 0,$$

根据连续函数的零值定理,存在 $\xi \in (a,b)$,使得

$$0 = F(\xi) = \int_a^\xi f(t)\mathrm{d}t - \int_\xi^b \frac{\mathrm{d}t}{f(t)}.$$

又因为

$$F'(x) = f(x) - \frac{1}{f(x)}\cdot(-1)$$
$$= f(x) + \frac{1}{f(x)} > 0,$$

所以 $F(x)$ 严格增,从而 $\exists_1 \xi$ 使 $F(\xi) = 0$.

这就证明了 $F(x) = 0$ 在 (a,b) 内有一根且只有一根.

1.14.12 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上具有 1 阶连续导函数,$f(a) = f(b) = 0$. 证明:$\exists \xi \in [a,b]$,使得

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 1 先证 $\exists \xi_1 \in [a, \frac{a+b}{2}]$,使得

$$|f'(\xi_1)| \geqslant \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x.$$

(反证) 假设对 $\forall x \in [a,b]$,

$$|f'(x)| < \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

则由中值定理,对 $\forall y \in [a, \frac{a+b}{2}]$,$\exists \eta_1 \in (a, \frac{a+b}{2})$,使得

$$f(y) = f(y) - f(a) = f'(\eta_1)(y-a)$$
$$< \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x \cdot (y-a).$$

将上述不等式对 y 积分得到

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(y)\mathrm{d}y$$
$$< \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x\int_a^{\frac{a+b}{2}} (y-a)\mathrm{d}y$$
$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x,$$

矛盾.

同理 $\exists \xi_2 \in [\frac{a+b}{2}, b]$,使得

$$|f'(\xi_2)| \geqslant \frac{8}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x.$$

不妨设 $|f'(\xi_1)| \geqslant |f'(\xi_2)|$,并令 $\xi = \xi_1$,则

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{1}{2}[|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|]$$
$$\geqslant \frac{1}{2}[\frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$$
$$+ \frac{8}{(b-a)^2}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x]$$
$$= \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证法 2 令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$,则 $F(a) = 0$,$F(b) = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$,$F'(a) = F'(b) = 0$. 由 Taylor 公式得到

$$F(\frac{a+b}{2}) = F(a) + F'(a)(\frac{b-a}{2})$$
$$+ \frac{1}{2}F''(\xi_1)(\frac{b-a}{2})^2, \xi_1 \in (a, \frac{a+b}{2}),$$
$$F(\frac{a+b}{2}) = F(b) + F'(b)(\frac{a-b}{2})$$
$$+ \frac{1}{2}F''(\xi_2)(\frac{a-b}{2})^2, \xi_2 \in (\frac{a+b}{2}, b).$$

两式相减移项得

$$\frac{1}{2}[F''(\xi_1) - F''(\xi_2)] = \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

因为 $|f'(x)|$ 连续,故它在 $[a,b]$ 上达最大值 $|f'(\xi)|$,$\xi \in [a,b]$,则

$$|f'(\xi)| \geqslant \frac{1}{2}[|f'(\xi_1)| + |f'(\xi_2)|]$$
$$= \frac{1}{2}[|F''(\xi_1)| + |F''(\xi_2)|]$$

$$\geqslant \frac{1}{2}[\,|F''(\xi_1) - F''(\xi_2)|\,]$$
$$= \frac{4}{(b-a)^2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

注 不等式右边的积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$暗示我们设立一个新函数$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，由$F(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$F'(a) = F'(b) = 0$，联想到将$F(\frac{a+b}{2})$在$a$和$b$处Taylor展开. 这是证法2的思路. 另外，利用反证法假设$|f'(x)| < \frac{8}{(b-a)^2}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x$和对$f$应用中值定理也是证明这不等式的一种方法. 从问题的条件和结论产生联想的能力就是洞察力.

1.14.13 设f在$[a,b]$上2阶连续可导，证明：存在$\xi \in (a,b)$使
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f(\frac{a+b}{2}) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

证法1 令$F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则$F'(x) = f(x)$，$F$3阶连续可导. 根据Taylor公式，存在$\xi_1 \in (\frac{a+b}{2}, b)$，$\xi_2 \in (a, \frac{a+b}{2})$，使得
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b)$$
$$= F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{b-a}{2} + \frac{F''(\frac{a+b}{2})}{2!}(\frac{b-a}{2})^2 + \frac{F'''(\xi_1)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3,$$
$$0 = F(a) = F\left(\frac{a+b}{2}\right) + F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2} + \frac{F''\left(\frac{a+b}{2}\right)}{2!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 + \frac{F'''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3,$$
所以
$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$
$$= F'\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) + \frac{F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)}{3!}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3.$$
由f''连续及介值定理(或Darboux定理)，存在$\xi \in [\xi_2, \xi_1]$使
$$f''(\xi) = \frac{f''(\xi_1) + f''(\xi_2)}{2} = \frac{F'''(\xi_1) + F'''(\xi_2)}{2},$$
因此
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

证法2 由Taylor公式，存在$\eta(x) \in (a,b)$使得
$$f(x) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\eta(x))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2.$$
两边积分得到
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta(x))\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu\int_a^b\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$
$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2}f''(\xi)\cdot\frac{(b-a)^3}{24}\cdot 2$$
$$= (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$
其中$\min\limits_{x\in[a,b]} f''(x) \leqslant \mu \leqslant \max\limits_{x\in[a,b]} f''(x)$，由$f''$的连续性，必存在$\xi \in [a,b]$使$f''(\xi) = \mu$.

证法3 记M为满足
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}M$$
的实数. 令
$$F(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x - (x-a)f\left(\frac{a+x}{2}\right) - \frac{(x-a)^3}{24}M,$$
则$F(x)$连续可导，且$F(a) = F(b) = 0$. 根据Rolle定理，存在$\eta \in (a,b)$使
$$0 = F'(\eta) = f(\eta) - f\left(\frac{a+\eta}{2}\right) - (\eta - a)f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right)\cdot\frac{1}{2} - \frac{(\eta-a)^2}{8}M.$$
$$f(\eta) = f\left(\frac{a+\eta}{2}\right) + \frac{(\eta-a)}{2}f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) + \frac{(\eta-a)^2}{8}M.$$
再由Taylor公式得
$$f(\eta) = f\left(\frac{a+\eta}{2}\right) + \frac{(\eta-a)}{2}f'\left(\frac{a+\eta}{2}\right) + \frac{(\eta-a)^2}{8}f''(\xi),$$
$$\xi \in \left(\frac{a+\eta}{2}, \eta\right) \subset (a,b).$$
将两式作比较，就有
$$M = f''(\xi).$$
因此，$\exists\, \xi \in (a,b)$，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

注 1 上题中，如果将"f 2 阶连续可导"改成"2 阶可导"，结论仍正确。事实上，证法 1 中可以不对 2 阶导数用介值定理，而用 Dauboax 定理即可。证法 3 中也未用到 2 阶导数的连续性。

注 2 等式左边的积分提示我们设新函数 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$。再由 F 3 阶可导及 $F'\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 联想到 $F(a)$，$F(b)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ Taylor 展开。先将 $f(x)$ 在 $\frac{a+b}{2}$ 2 阶 Taylor 展开，再两边积分产生另一证法。如果还记得题 1.6.7，自然会用待定系数法，并令 $F(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t - (x-a)f(\frac{a+x}{2}) - \frac{(x-a)^3}{24}M$。

1.14.14 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续，若 $\int_a^b f\cdot g\mathrm{d}x = 0$ 对 $[a,b]$ 上一切满足条件 $g(a) = g(b) = 0$ 的连续函数 g 成立，则在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。

证法 1 显然，$g(x) = (x-a)^2(x-b)^2 f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $g(a) = g(b) = 0$。故有

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (x-a)^2(x-b)^2 f^2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

因此，对 $\forall x\in[a,b]$，$(x-a)^2(x-b)^2f^2(x) = 0$，从而 $f^2(x) = 0$，即 $f(x) = 0$，$x\in(a,b)$。由 f 连续立知在 $[a,b]$ 上，$f(x)\equiv 0$。

证法 2 对 $\forall\delta > 0$，且 $\delta < \frac{b-a}{2}$，构造

$$g_\delta(x) = \begin{cases} \frac{f(a+\delta)}{\delta}(x-a), & x\in[a,a+\delta], \\ f(x), & x\in(a+\delta,b-\delta), \\ \frac{f(b-\delta)}{\delta}(b-x), & x\in[b-\delta,b]. \end{cases}$$

显然，$g_\delta(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$g_\delta(a) = g_\delta(b) = 0$。由题设条件 $\int_a^b f(x)g_\delta(x)\mathrm{d}x = 0$。即

$$\int_a^{a+\delta} fg_\delta\mathrm{d}x + \int_{a+\delta}^{b-\delta} fg_\delta\mathrm{d}x + \int_{b-\delta}^b fg_\delta\mathrm{d}x = 0.$$

令 $\delta\to 0^+$，得到

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0.$$

所以，在 $[a,b]$ 上 $f^2(x) = 0$，从而 $f(x)\equiv 0$。

1.14.15 求出满足下列条件的所有函数 $f(x)$。

(1) $f\in C[0,1]$（即 f 为 $[0,1]$ 上的连续函数），且 $f(x)\geqslant 0$；

(2) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$；

(3) 存在 α，使得

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \alpha, \int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x = \alpha^2.$$

证法 1 从 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ 知，在 $[0,1]$ 上 $f(x)\not\equiv 0$，又 $f(x)\geqslant 0$，故 $(x-\alpha)^2f(x)\geqslant 0$ 且在 $[0,1]$ 上，$(x-\alpha)^2f(x)\not\equiv 0$。因此

$$\begin{aligned} 0 &< \int_0^1 (x-\alpha)^2 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^2f(x)\mathrm{d}x - 2\alpha\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x + \alpha^2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \\ &= \alpha^2 - 2\alpha\cdot\alpha + \alpha^2 = 0, \end{aligned}$$

矛盾。因此不存在同时满足三条件的函数。

证法 2 由积分中值定理知

$$\alpha = \int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x = \xi\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \xi\cdot 1 = \xi,$$

其中 $0<\xi<1$。

由 $f(x)\geqslant 0$，可以令

$$\varphi(x) = \frac{x\sqrt{f(x)}}{\alpha}, x\in[0,1],$$
$$\psi(x) = \sqrt{f(x)}, x\in[0,1].$$

因为 $f\in C[0,1]$，故 $\varphi,\psi,\varphi\cdot\psi,\frac{\varphi^2+\psi^2}{2}\in C[0,1]$。显然，$\varphi(x)\geqslant 0$，$\psi(x)\geqslant 0$，于是

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \frac{[\varphi(x)-\psi(x)]^2}{2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1[\varphi^2(x)+\psi^2(x)-2\varphi(x)\psi(x)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1[\frac{x^2}{\alpha^2}f(x)+f(x)-\frac{2}{\alpha}xf(x)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}[\frac{\alpha^2}{\alpha^2}+1-2\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\alpha] = 0. \end{aligned}$$

由 $[\varphi(x)-\psi(x)]^2$ 在 $[0,1]$ 上连续得 $\varphi(x)-\psi(x) = 0$，即

$$\frac{x\sqrt{f(x)}}{\alpha} = \sqrt{f(x)}, x\in[0,1],$$
$$(x-\alpha)\sqrt{f(x)} = 0, x\in[0,1].$$

于是当 $x\in[0,1]-\{\alpha\}$ 时有 $f(x) = 0$，再根据 f 的连续性，$f(\alpha) = 0$。故对任意 $x\in[0,1]$，$f(x) = 0$，所以 $f(x)\equiv 0$，$x\in[0,1]$。进而有 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0$，这与 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = 1$ 矛盾。故不存在满足条件的函数。

证法 3 因为

$$\alpha^2 = [\int_0^1 xf(x)dx]^2$$
$$\leqslant \int_0^1 [x\sqrt{f(x)}]^2 dx \int_0^1 [\sqrt{f(x)}]^2 dx$$
$$= \alpha^2 \cdot 1 = \alpha^2,$$

所以

$$[\int_0^1 xf(x)dx]^2 = \int_0^1 x^2 f(x)dx \int_0^1 f(x)dx,$$
$$x\sqrt{f(x)} = k\sqrt{f(x)}.$$

于是,当 $x \in [0,1]$ \ $\{k\}$ 时,$f(x)=0$.再由 f 的连续性,$f(x)=0, \forall x \in [0,1]$,这与$\int_0^1 f(x)dx = 1$ 相矛盾.故不存在满足条件的函数.

1.14.16 设 $f(x)$ 为$[0,+\infty)$上的非负一致连续函数.且$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛,证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

如果将"一致连续"改为"连续",结论如何?

证 (反证)假设 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$,则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和严格单调增趋于 $+\infty$ 的点列 $x_n \in [0,+\infty)$,使得 $x_n > x_{n-1}+1, f(x_n) \geqslant \varepsilon_0$.又因为 f 在$[0,+\infty)$ 上一致连续,所以对 $\varepsilon_0 > 0, \exists \delta > 0$,当 $x', x'' \in [0,+\infty), |x'-x''| < \delta < \frac{1}{2}$ 时,有

$$|f(x')-f(x'')| < \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

于是,有

$$f(x) > f(x_n) - \frac{\varepsilon_0}{2} \geqslant \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2} = \frac{\varepsilon_0}{2},$$
$$\forall x \in (x_n - \delta, x_n + \delta),$$
$$+\infty > \int_0^{+\infty} f(x)dx$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)dx$$
$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2} \cdot 2\delta = +\infty,$$

矛盾.这就证明了 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

如果将"一致连续"改为"连续",结论就不一定成立.举反例如下:令

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1], \\ 4n^4(x-n), & x \in [n, n+\frac{1}{2n^3}], \\ -4n^4(x-n-\frac{1}{n^3}), & x \in [n+\frac{1}{2n^3}, n+\frac{1}{n^3}], \\ 0, & x \in [n+\frac{1}{n^3}, n+1], \end{cases}$$
$$n = 1,2,\cdots,$$

则显然有 $f(x) \geqslant 0$,$f(x)$ 在$[0,+\infty)$ 上连续,且

$$0 \leqslant \int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \cdot 2n \cdot \frac{1}{n^3}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty,$$

即$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 收敛.但是

$$f(n+\frac{1}{n^3}) = 4n^4 \cdot \frac{1}{n^3} = 4n \to +\infty \ (n \to +\infty),$$

当然 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$.

注 积分值$\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 就是由 $y=f(x)$,x 轴,y 轴围成的开口图形的面积.考虑一个分段函数 $y=f(x)$,使面积$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx (x_0 = 0)$ 为一个收敛的级数,但 $\exists \xi_n \to +\infty (n \to +\infty)$ 使 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\xi_n) \neq 0$.

1.14.17 函数 $u(x,y)$ 在 $\mathbf{R}^2$ 内有连续的 2 阶偏导数,$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,并且 $u(x,y)$ 的 1 阶偏导数对任意固定的 $y \in \mathbf{R}$,是 x 的以 2π 为周期的函数,试证:函数

$$f(y) = \int_0^{2\pi} [(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dx$$
$$\equiv C(\text{常数}), y \in \mathbf{R}.$$

证 因为$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$,且对固定的 $y \in \mathbf{R}$,$u(x,y)$ 的 1 阶偏导数是 x 的以 2π 为周期的函数,所以

$$f'(y) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial y}[(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - (\frac{\partial u}{\partial y})^2]dx$$
$$= \int_0^{2\pi} [2\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]dx$$
$$= 2\int_0^{2\pi} [\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}]dx$$
$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right]dx$$
$$= 2\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=0}^{x=2\pi} = 0,$$

从而 f 在 $\mathbf{R}$ 上为常值函数.

1.14.18 设 $f(x,y)$ 定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上,且对 $\forall y \in [0,1]$,

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbf{Q} \\ 3y^2, & x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^C. \end{cases}$$

证明:(1) f 在D 上二重积分不存在;

(2) 累次积分$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$ 存在;

(3) 累次积分$\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx$ 不存在.

证 (1) 设 $y_0 \neq \sqrt{\frac{1}{3}}$,即 $3y_0^2 \neq 1$,$(x_0,y_0) \in D = [0,1]\times[0,1]$.如果 $x_0 \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$,选

$$x_n \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^C,\ x_n \to x_0,$$

则

$$f(x_n, y_0) = 3y_0^2 \nrightarrow 1 = f(x_0, y_0).$$

所以 f 在 (x_0, y_0) 不连续.

如果 $x_0 \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^C$,选

$$x_n \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, x_n \to x_0,$$

则

$$f(x_n, y_0) = 1 \nrightarrow 3y_0^2 = f(x_0, y_0).$$

所以 f 在 (x_0, y_0) 必不连续. 于是 f 的不连续点集

$$D_f \supset \{(x_0, y_0) \in D \mid y_0 \neq \sqrt{\frac{1}{3}}\}$$

不为零测集. 这证明 $f(x, y)$ 在 D 上二重积分不存在.

(2) 因为

$$\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \begin{cases} \int_0^1 1\mathrm{d}y, x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \\ \int_0^1 3y^2\mathrm{d}y, x \in [0,1] \cap \mathbf{Q}^C \end{cases}$$

$$= 1,$$

所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 1\mathrm{d}x = 1,$$

即累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y$ 存在.

(3) 当 $3y^2 \neq 1$ 且固定时, $f(x,y)$ 关于 x 处处不连续, 故 $\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在, 从而累次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$ 不存在.

1.14.19 试证

$$\left(\iint_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{\frac{\pi t^2}{4}}\mathrm{d}t,$$

其中 $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

证 令 $Q = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid |x| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}, |y| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\}$. 由于面积 $S_{Q-D} = S_{D-Q}$,故有

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D \cap Q} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D-Q} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint_{D \cap Q} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D-Q} e^1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\leqslant \iint_{D \cap Q} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{Q-D} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_Q e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\left(\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} e^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2$$

$$\xlongequal{x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}t} 4\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1 e^{\frac{\pi}{4}t^2}\mathrm{d}t\right)^2$$

$$= \left(\sqrt{\pi}\int_0^1 e^{\frac{\pi}{4}t^2}\mathrm{d}t\right)^2,$$

即

$$\left(\iint_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\pi}\int_0^1 e^{\frac{\pi t^2}{4}}\mathrm{d}t.$$

注 粗看可利用极坐标变换证明题中不等式,其实不然. 一个巧妙的想法是根据两个面积相等的图形 D 和 Q 上的积分不等式:

$$\iint_D e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leqslant \iint_Q e^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

与 1.14.19 类似的还有题 1.14.20.

1.14.20 试证不等式

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} < \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 - e^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac{1}{2}},$$

其中 a 为任一正数.

证 因为

$$\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x = \left(\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_0^a e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\iint_{0 \leqslant x, y \leqslant a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}},$$

所以,考虑二元函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 在平面上三个区域 $D_1 = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant a\}$, $D_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 及 $D_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \frac{4}{\pi}a^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$ 上的二重积分. 显然 $D_1 \supset D_2$, $e^{-(x^2+y^2)} > 0$,故

$$\iint_{0 \leqslant x, y \leqslant a} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$> \iint_{D_2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^a e^{-r^2}r\mathrm{d}r$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\bigg|_0^a = \frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}).$$

另一方面,

$$\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_1 \cap D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_1 - D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$< \iint_{D_1 \cap D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_1 - D_3} e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \quad (1)$$

这是因为在 $D_1 - D_3$ 上 $x^2+y^2 > \frac{4}{\pi}a^2$. D_1 的面积 $A_1 = a^2 = \frac{1}{4}\pi\cdot(\frac{2}{\sqrt{\pi}}a)^2 = D_3$ 的面积 A_3. 又因为在 $D_3 - D_1$ 上, $x^2+y^2 \leqslant \frac{4}{\pi}a^2$, 故

$$\begin{aligned}\iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D_3\cap D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3-D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &> \iint_{D_3\cap D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_3-D_1} e^{-\frac{4}{\pi}a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{D_3\cap D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + e^{-\frac{4}{\pi}a^2}A_{D_3-D_1} \qquad (2)\end{aligned}$$

其中 $A_{D_3-D_1} = (D_3-D_1)$ 的面积 $= (D_1-D_3)$ 的面积 $= A_{D_1-D_3}$. 于是, 比较(1)(2)二式就得

$$\begin{aligned}\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &< \iint_{D_1\cap D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + e^{-\frac{4}{\pi}a^2}A_{D_1-D_3} \\ &< \iint_{D_3} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} re^{-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{e^{-r^2}}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{2}{\sqrt{\pi}}a} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-a^2})^{\frac{1}{2}} \\ &< \left(\iint_{D_1} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x < \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1-e^{-\frac{4}{\pi}a^2})^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

1.14.21 设 $B = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$ 为闭单位圆盘, 且开集 $\Omega\supset B$. 又设 $f\in C^1(\Omega,\mathbf{R})$(即 f 在 Ω 上有连续偏导数), 且满足 $f|_{\partial B}\equiv 0$, 其中 $\partial B = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}$ 为 B 的边界. 证明

$$\left|\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \leqslant \frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in B}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}.$$

证 作极坐标变换 $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$, 得

$$\begin{aligned}&\left|\iint_B f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \\ &= \left|\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right| \\ &= \left|\iint_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}[f_x'(r^*\cos\theta, r^*\sin\theta)\cos\theta + f_y'(r^*\cos\theta, r^*\sin\theta)\sin\theta](r-1)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\right| \\ &\leqslant \max_{(x,y)\in B}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\cdot 2\pi\int_0^1(r-r^2)\mathrm{d}r \\ &= \max_{(x,y)\in B}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}\cdot 2\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{3}\max_{(x,y)\in B}\sqrt{[f_x'(x,y)]^2+[f_y'(x,y)]^2}.\end{aligned}$$

1.14.22 设 $f\in L^2(0,\pi)$. 证明: 不能同时有

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4},$$
$$\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4}.$$

证 (反证)假设

$$\int_0^\pi |f(x)-\sin x|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4},$$
$$\int_0^\pi |f(x)-\cos x|^2\mathrm{d}x \leqslant \frac{3}{4}$$

同时成立, 则

$$\begin{aligned}3 < \pi &= \left(x+\frac{\cos 2x}{2}\right)\Bigg|_0^\pi \\ &= \int_0^\pi(1-\sin 2x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi(\sin^2x+\cos^2x-2\sin x\cos x)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi|\sin x-\cos x|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_0^\pi[|f(x)-\sin x|+|f(x)-\cos x|]^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\int_0^\pi|f(x)-\sin x|^2\mathrm{d}x + 2\int_0^\pi|f(x)-\cos x|^2\mathrm{d}x \\ &\leqslant 2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{4} = 3.\end{aligned}$$

矛盾. 所以题中两个不等式不能同时成立.

1.14.23 设 $a>0$, f 在 $[0,a]$ 上连续可导, 试证:

$$|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a|f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法1 因 f 连续, 由积分中值定理, $\exists\xi\in[0,a]$, 使得

$$\int_0^a f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)a.$$

又因 $f(\xi)-f(0) = \int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x$, 所以

$$\begin{aligned}|f(0)| &= \left|f(\xi)-\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant |f(\xi)| + \left|\int_0^\xi f'(x)\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$$\leqslant \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法 2 因为 $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x$,所以

$$|f(0)| = \left|f(x) - \int_0^x f'(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant |f(x)| + \int_0^x |f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant |f(x)| + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x,$$
$$a|f(0)| = \int_0^a |f(0)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_0^a |f(t)|\mathrm{d}t + \int_0^a\left[\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + a\int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$$

从而 $|f(0)| \leqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x.$

证法 3 因为 $|f(x)|$ 在 $[0,a]$ 上连续,所以必存在 $c \in [0,a]$ 使

$$|f(c)| = \min_{x\in[0,a]} |f(x)|.$$

于是

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant |f(c)| + \int_0^c |f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant |f(c)| + \left|\int_0^c f'(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$= |f(c)| + |f(c) - f(0)|$$
$$\geqslant |f(0)|.$$

证法 4 $\frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^a |f'(x)|\mathrm{d}x$

$$\geqslant \frac{1}{a}\int_0^a |f(x)|\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_0^a |x-a||f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$\geqslant \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{a}\int_0^a (x-a)f'(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$= \left|\frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{a}(x-a)f(x)\Big|_0^a - \frac{1}{a}\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right| = |f(0)|.$$

1.14.24 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上可导,$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且满足:

(i) 当 $|x| \geqslant 1$ 时,$g(x) = 0$;

(ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x = 0$;

(iii) $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\mathrm{d}x = 1$.

试证:$\lim\limits_{t\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2}g\left(\frac{y-x}{t}\right)f(y)\mathrm{d}y = f'(x)$.

证 记 $M = \max\limits_{|u|\leqslant1}|g(u)|$. 对 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,使得 $|tu|<\delta$ 时,

$$\left|\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu} - f'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

故当 $|t|<\delta$ 时,若 $|u|\leqslant 1$,则有 $|tu|<\delta$,于是

$$\left|\int_{-1}^1 ug(u)\left[\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu} - f'(x)\right]\mathrm{d}u\right|$$
$$\leqslant \int_{-1}^1 |u||g(u)|\left|\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu} - f'(x)\right|\mathrm{d}u$$
$$< 1\cdot M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2 = \varepsilon,$$

从而

$$\lim_{t\to+0}\int_{-1}^1 ug(u)\left[\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu} - f'(x)\right]\mathrm{d}u = 0.$$

令 $u = \frac{y-x}{t}$,$y = x+tu$,则

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2}g\left(\frac{y-x}{t}\right)f(y)\mathrm{d}y$$
$$= \lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{t^2}g(u)f(x+tu)t\mathrm{d}u$$
$$\overset{(\text{ii})}{=\!=} \lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(u)}{t}[f(x+tu)-f(x)]\mathrm{d}u$$
$$\overset{(\text{i})}{=\!=} \lim_{t\to+0}\int_{-1}^{1}\frac{g(u)}{t}[f(x+tu)-f(x)]\mathrm{d}u$$
$$= \lim_{t\to+0}\int_{-1}^1 ug(u)\left[\frac{f(x+tu)-f(x)}{tu}\right.$$
$$\left. - f'(x)\right]\mathrm{d}u + f'(x)\lim_{t\to+0}\int_{-1}^1 ug(u)\mathrm{d}u$$
$$\overset{(\text{iii})}{=\!=} 0 + f'(x) = f'(x).$$

1.14.25 给定 $\mathbf{R}^1$ 上的实值连续函数 f,g,且对 $\mathbf{R}^1$ 上具有紧支集的所有 1 阶可导的实值函数 h(所谓 h 具有紧支集,指的是 $\overline{\{x\in\mathbf{R}^1 \mid h(x)\neq 0\}}$ 为 $\mathbf{R}^1$ 的紧致子集),都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\mathrm{d}x.$$

试证:g 为 1 阶连续可导函数,且对 $x\in\mathbf{R}^1$ 有

$$g'(x) = f(x).$$

证 令 $F(x) = \int_0^x f(s)\mathrm{d}s$,则 $F\in C^1(\mathbf{R}) = C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$,且对任何 $h\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$($\mathbf{R}^1$ 上具有紧支集的 1 阶连续可导的实值函数的全体),有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\mathrm{d}F(x)$$
$$= F(x)h(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)h'(x)\mathrm{d}x$$
$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)h'(x)\mathrm{d}x.$$

结合题设条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)h(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)h'(x)\mathrm{d}x$$

得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(x)h'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}[g(x)-F(x)]h'(x)\mathrm{d}x=0$$

对任何 $h\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 成立. 显然,对任何常数 C,也有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} Ch'(x)\mathrm{d}x=Ch(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0.$$

现证 $G(x)=g(x)-F(x)$ 为常值函数.(反证)假设 $G(x)$ 不是常值函数,则存在 $x_1,x_2\in\mathbf{R},x_1<x_2$,使 $G(x_1)\neq G(x_2)$. 不失一般性,设 $G(x_1)>G(x_2)$. 取 C 满足:$G(x_1)>C>G(x_2)$,即 $G(x_1)-C>0>G(x_2)-C$. 由 $G(x)-C$ 的连续性,存在 $\delta>0$,使 $(x_1-\delta,x_1+\delta)\cap(x_2-\delta,x_2+\delta)=\varnothing$,且对 $\forall x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)$ 及 $\forall y\in(x_2-\delta,x_2+\delta)$,有

$$G(x)-C>0>G(y)-C.$$

构造函数 $h_1\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. 令

$$h_1'(x)=\begin{cases}-|x-x_1|+\delta, & x\in(x_1-\delta,x_1+\delta),\\ |x-x_2|-\delta, & x\in(x_2-\delta,x_2+\delta),\\ 0, & x\overline{\in}\bigcup\limits_{j=1}^{2}(x_j-\delta,x_j+\delta),\end{cases}$$

则 $h_1(x)=\int_{-\infty}^{x}h'(s)\mathrm{d}s\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$. 由于对任何 $x\in(x_1-\delta,x_1+\delta)\cup(x_2-\delta,x_2+\delta)$,有 $[G(x)-C]h'(x)>0$,所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[G(x)-C]h_1'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_1-\delta}^{x_1+\delta}[G(x)-C]h_1'(x)\mathrm{d}x+\int_{x_2-\delta}^{x_2+\delta}[G(x)-C]h_1'(x)\mathrm{d}x>0,$$

这与对 $h_1\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$,有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[G(x)-C]h_1'(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}G(x)h_1'(x)\mathrm{d}x-\int_{-\infty}^{+\infty}h_1'(x)\mathrm{d}x=0-0=0,$$

相矛盾. 因此 $G(x)=g(x)-F(x)=g(x)-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s$ 为常值函数,即

$$g(x)-\int_0^x f(s)\mathrm{d}s=g(x)-F(x)$$

$$=G(x)=G(0)=g(0)-\int_0^0 f(s)\mathrm{d}s$$

$$=g(0).$$

$$g(x)=g(0)+\int_0^x f(s)\mathrm{d}s,$$

即 $g\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$,且对任意 $x\in\mathbf{R}$,$g'(x)=f(x)$.

1.14.26 在题1.14.25中,如果将 $h\in C_C^1(\mathbf{R},\mathbf{R})$ 改为 $h\in C_C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$,则结论仍成立.

证 (反证)假设 $G(x)=g(x)-F(x)$ 不为常值函数. 根据题1.14.25的证明,只须构造函数 $h_1\in C_C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. 为此,先设

$$\rho(x)=\begin{cases}\exp(-\frac{1}{x}), & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\varphi(x)=\frac{\rho(1-x^2)}{\rho(1-x^2)+\rho(x^2)},x\in\mathbf{R}.$$

则 $\rho\in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R}),\varphi\in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$,且

$$\varphi(x)\begin{cases}>0, & |x|<1,\\ =0 & |x|\geqslant 1\end{cases}$$

及 $0\leqslant\varphi\leqslant 1,x\in\mathbf{R}$. 令

$$h_1'(x)=\varphi(\frac{x-x_1}{\delta})-\varphi(\frac{x-x_2}{\delta}),$$

$$h_1(x)=\int_{-\infty}^{x}h_1'(s)\mathrm{d}s,x\in\mathbf{R}.$$

显然,$h_1\in C_C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$,且

$$h_1(x)\begin{cases}>0,x\in(x_1-\delta_1,x_1+\delta_1),\\ <0,x\in(x_2-\delta_2,x_2+\delta_2),\\ =0,x\overline{\in}\bigcup\limits_{j=1}^{2}(x_j-\delta,x_j+\delta).\end{cases}$$

1.14.27 设 $f(x)>0$ 连续,

$$V(t)=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\leqslant t^2\},$$

$$D(t)=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid x^2+y^2\leqslant t^2\}.$$

试证

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{V(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

当 $t\in(0,+\infty)$ 时严格增.

证 对 $F(t)$ 的分子和分母的积分分别作球坐标和极坐标变换,得

$$F(t)=\frac{\iiint\limits_{V(t)}f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iint\limits_{D(t)}f(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}$$

$$=\frac{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r}{\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}$$

$$=\frac{2\pi\cdot 2\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r}{2\pi\cdot\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r}=\frac{2\int_0^t r^2f(r^2)\mathrm{d}r}{\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r},$$

于是

$$F'(t)=\frac{1}{\left(\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right)^2}[2t^2f(t^2)\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r$$

$$-2tf(t^2)\int_0^t r^2 f(r^2)\mathrm{d}r]$$

$$=\frac{1}{\left(\int_0^t rf(r^2)\mathrm{d}r\right)^2}\cdot 2tf(t^2)\int_0^t (t-r)rf(r^2)\mathrm{d}r$$

$$>0,\ t>0.$$

这就意味着 $F(t)$ 当 $t>0$ 时(即 $t\in(0,+\infty)$)是严格增的.

1.14.28 设 f 在 $[0,1]$ 上 2 阶连续可导,则

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)-\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x].$$

证 对 $\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$ 用分部积分法有

$$\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x$$

$$=x(1-x)f'(x)\Big|_0^1-\int_0^1(1-2x)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(2x-1)f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=(2x-1)f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2f(x)\mathrm{d}x$$

$$=f(1)-(-f(0))-2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)-\int_0^1 x(1-x)f''(x)\mathrm{d}x].$$

1.14.29 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续,且

$$g(x)=f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

为 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数. 试证: $f(x)\equiv 0$.

证 令 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$, 则 $F\in C^1((-\infty,+\infty))$.

$$[F^2(x)]'=2F(x)F'(x)=2f(x)\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=2g(x)$$

为 $(-\infty,+\infty)$ 上的减函数. 又因

$$[F^2(x)]'\Big|_{x=0}=2f(0)\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0,$$

故

$$[F^2(x)]'\begin{cases}\geqslant [F^2(x)]'\Big|_{x=0}=0, & x\leqslant 0,\\ \leqslant [F^2(x)]'\Big|_{x=0}=0, & x>0.\end{cases}$$

从而,当 $x\leqslant 0$ 时, $F^2(x)$ 单调增;当 $x>0$ 时, $F^2(x)$ 单调减. 因此,对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$0\leqslant F^2(x)\leqslant F^2(0)=0,$$

$$0=F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t,$$

$$f(x)=F'(x)=0.$$

1.14.30 求出所有 $[0,+\infty)$ 上的正值连续函数 $g(x)$,使得对任意 $x>0$,

$$\frac{1}{2}\int_0^x [g(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2. \tag{1}$$

解 (1)式两边对 x 求导得

$$\frac{1}{2}[g(x)]^2=\frac{2}{x}\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\cdot g(x)-\frac{1}{x^2}\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2.$$

由题设 $g(x)>0$,故对 $x\in(0,+\infty)$,

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t>0.$$

方程

$$\left(\int_0^x g(t)\mathrm{d}t\right)^2-2xg(x)\int_0^x g(t)\mathrm{d}t+\frac{x^2}{2}[g(x)]^2=0$$

是关于 $\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ 的一元二次方程,故

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t$$

$$=xg(x)\pm\sqrt{x^2[g(x)]^2-\frac{x^2}{2}[g(x)]^2}$$

$$=xg(x)\pm\frac{1}{\sqrt{2}}xg(x)=(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}})xg(x).$$

因此 $g(x)$ 连续,所以

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=(1+\frac{1}{\sqrt{2}})xg(x),$$

或者

$$\int_0^x g(t)\mathrm{d}t=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})xg(x).$$

再对 x 求导得

$$g(x)=(1+\frac{1}{\sqrt{2}})[g(x)+xg'(x)]$$

$$(\text{或 } g(x)=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})[g(x)+xg'(x)]).$$

移项化简成

$$-g(x)=(\sqrt{2}+1)xg'(x)$$

$$(\text{或 } g(x)=(\sqrt{2}-1)xg'(x)).$$

注意到 $g(x)>0$,有

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=-\frac{1}{(\sqrt{2}+1)x}$$

$$\left(\text{或 } \frac{g'(x)}{g(x)}=\frac{1}{(\sqrt{2}-1)x}\right).$$

因此

$$\ln g(x)=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}+1}\ln x+\ln C,\ C>0$$

或

$$\ln g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\ln x+\ln C, C>0.$$

即 $g(x)=Cx^{1-\sqrt{2}}$ 或 $g(x)=Cx^{1+\sqrt{2}}$.

由于要求 $g(x)$ 在$[0,+\infty)$上连续，而 $x^{1-\sqrt{2}}$ 在 $x=0$ 处不连续，所以 $g(x)=Cx^{1+\sqrt{2}}, C>0$. 将其代入①式，知确实是解. 故满足(1)的所有正值连续函数为 $Cx^{1-\sqrt{2}}, C>0$.

1.14.31 设

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt, x\in(0,+\infty).$$

试证：(1) $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上一致收敛且可导；

(2) $f(x)-f'(x)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$.

证 (1) 因为

$$\left|\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+t^2},$$

而$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt$ 收敛，所以 $f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$ 关于 $x\in(0,+\infty)$ 一致收敛. 又因为对 $\forall x\in[\delta,+\infty)$, $\delta>0$,

$$\left|\frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}\right|\leqslant e^{-\delta t^2},$$

及

$$\int_0^{+\infty}e^{-\delta t^2}dt$$

收敛，所以

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right)dt=\int_0^{+\infty}\frac{-t^2e^{-xt^2}}{1+t^2}dt$$

关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 从而 $f(x)$ 在$[\delta,+\infty)$上可导，由 $\delta>0$ 的任意性知 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$上可导.

(2) 由(1)知

$$\begin{aligned}f'(x)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\right)dt\\&=\int_0^{+\infty}-\frac{t^2}{1+t^2}e^{-xt^2}dt\\&=\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-1\right)e^{-xt^2}dt\\&=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}e^{-xt^2}dt-\int_0^{+\infty}e^{-xt^2}dt\\&\xlongequal{u=\sqrt{x}t}f(x)-\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\frac{1}{\sqrt{x}}du\\&=f(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{+\infty}e^{-u^2}du\\&=f(x)-\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}.\end{aligned}$$

移项即得

$$f(x)-f'(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}.$$

1.14.32 求极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}dxdy$.

解 因为

$$\begin{aligned}e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}dx&=\int_0^t\frac{1-e^{x-t}}{t-x}dx\\&\xlongequal{z=t-x}\int_t^0\frac{1-e^{-z}}{z}(-dz)\\&=\int_0^t\frac{1-e^{-z}}{z}dz\\&>\int_1^t\frac{1-e^{-z}}{z}dz\left(z>0\text{ 时}\frac{1-e^{-z}}{z}>0\right)\\&>\int_1^t\frac{1-e^{-1}}{z}dz>\frac{1}{2}\int_1^t\frac{1}{z}dz=\frac{1}{2}\ln t,\end{aligned}$$

又 $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{2}\ln t=+\infty$，所以

$$\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}dx=+\infty.$$

由此及推广的 L'Hospital 法则(见题 1.6.24)得到

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to+\infty}\left(e^{-t}\int_0^t\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}dxdy\right)\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t\left[\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}dx\right]dy}{e^t}\\&=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{d}{dt}\int_0^t\left[\int_0^t\frac{e^x-e^y}{x-y}dx\right]dy}{e^t}\\&=\lim_{t\to+\infty}e^{-t}\left[\int_0^t\frac{e^x-e^t}{x-t}dx+\int_0^t\frac{e^t-e^y}{t-y}dy\right]\\&=\lim_{t\to+\infty}2e^{-t}\int_0^t\frac{e^t-e^x}{t-x}dx=+\infty.\end{aligned}$$

注 从 $\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$ 立即想到推广的 L'Hospital 法则.

§1.15 重积分的各种计算方法

计算重积分的方法有：

(1) 化为累次积分

根据被积函数是否好积、积分区域形状的复杂和简单决定积分变量的次序.

(2) 变量代换

通过作变量代换将一个难积的重积分变成容易的积分，关键在于选好变量代换. 变量代换的选择有时根据函数，有时根据积分区域决定. 特别是，在 $\mathbf{R}^2$ 中有极坐标代换，$\mathbf{R}^3$ 中有柱坐标代换和球坐标代换，$\mathbf{R}^n$ 中有正交变换等等.

(3) 归纳和递推

应用归纳和递推以及(1)、(2)将积分化为 B 函数和 Γ 函数，然后求出其值.

1.15.1 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 为由曲线 $y^2=16-8x$，$y^2=1-2x$，$y^2=81+18x$，$y^2=1+2x$ 围成在 $y>0$ 的那部分区域.

解法 1 易解出四条曲线的交点为

$$P_1(-4,3),\ P_2\left(-\frac{5}{2},6\right),\ P_3\left(\frac{3}{2},2\right),\ P_4(0,1).$$

于是，

$$\begin{aligned}
&\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_1^2\mathrm{d}y\int_{\frac{1-y^2}{2}}^{\frac{y^2-1}{2}}\mathrm{d}x+\int_2^3\mathrm{d}y\int_{\frac{1-y^2}{2}}^{\frac{16-y^2}{8}}\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_3^6\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2-81}{18}}^{\frac{16-y^2}{8}}\mathrm{d}x\\
&=\int_1^2\left(\frac{y^2-1}{2}-\frac{1-y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_2^3\left(\frac{16-y^2}{8}-\frac{1-y^2}{2}\right)\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_3^6\left(\frac{16-y^2}{2}-\frac{y^2-81}{18}\right)\mathrm{d}y\\
&=\left(\frac{y^3}{3}-y\right)\Big|_1^2+\left(\frac{3}{2}y+\frac{1}{8}y^3\right)\Big|_2^3\\
&\quad+\left(\frac{13}{2}y-\frac{13}{216}y^3\right)\Big|_3^6\\
&=\frac{7}{3}-1+\frac{3}{2}+\frac{27-8}{8}+\frac{13}{2}\cdot 3\\
&\quad-\frac{13(216-27)}{216}=\frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

解法 2 由解法 1 知四交点，先对 y 积分，得

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_{-4}^{-\frac{5}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-2x}}^{\sqrt{81+18x}}\mathrm{d}y\\
&\quad+\int_{-\frac{5}{2}}^{0}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1-2x}}^{\sqrt{16-8x}}\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sqrt{1+2x}}^{\sqrt{16-8x}}\mathrm{d}y\\
&=\int_{-4}^{-\frac{5}{2}}(\sqrt{81+18x}-\sqrt{1-2x})\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_{-\frac{5}{2}}^{0}(\sqrt{16-8x}-\sqrt{1-2x})\mathrm{d}x\\
&\quad+\int_0^{\frac{3}{2}}(\sqrt{16-8x}-\sqrt{1+2x})\mathrm{d}x\\
&=\int_{-4}^{-\frac{5}{2}}\sqrt{81+18x}\,\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{3}{2}}(-\sqrt{1+2x})\mathrm{d}x\\
&\quad-\int_{-4}^{0}\sqrt{1-2x}\,\mathrm{d}x+\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}}\sqrt{16-8x}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{(81+18x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 18}\Bigg|_{-4}^{-\frac{5}{2}}-\frac{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times 2}\Bigg|_0^{\frac{3}{2}}\\
&\quad-\frac{(1-2x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times(-2)}\Bigg|_{-4}^{0}+\frac{(16-8x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\times(-8)}\Bigg|_{-\frac{5}{2}}^{\frac{3}{2}}\\
&=(4^{\frac{3}{2}}-1)-\frac{1}{3}(4^{\frac{3}{2}}-1)+\frac{1}{3}(1-9^{\frac{3}{2}})\\
&\quad-\frac{2}{3}(1-9^{\frac{3}{2}})=\frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

解法 3 作变换

$$\begin{cases}y^2=u^2-2ux, & 1\leqslant u\leqslant 4,\\ y^2=v^2+2vx, & 1\leqslant v\leqslant 9.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x=\dfrac{u-v}{2},\\ y=\sqrt{uv}\ (\text{因 } y>0).\end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{v}{u}}+\sqrt{\frac{u}{v}}\right).$$

因此

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint\limits_{D^*}\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\frac{1}{4}\int_1^4\mathrm{d}u\int_1^9\left(\sqrt{\frac{v}{u}}+\sqrt{\frac{u}{v}}\right)\mathrm{d}v\\
&=\frac{1}{4}\int_1^4\left(\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}u^{-\frac{1}{2}}+2(uv)^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_{v=1}^{9}\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{2}\int_1^4\left(\frac{26}{3}u^{-\frac{1}{2}}+2u^{\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}u\\
&=\left(\frac{26}{3}u^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_1^4\\
&=\frac{26}{3}+\frac{14}{3}=\frac{40}{3}.
\end{aligned}$$

1.15.2 设 Ω 为由 $x=0$，$y=0$，$z(x+y)=1$ 与 $x+y+z=4$ 围成的区域.

(1) 计算 Ω 的体积；

(2) 试证

$$\iiint\limits_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leqslant 2^{\frac{7}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

解法 1 (1) 将 Ω 投影到 Oxy 平面是区域 D，它满足：

$$\frac{1}{z}\leqslant x+y\leqslant 4-z,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

此时，$z^2-4z-1\leqslant 0$，$2-\sqrt{3}\leqslant z\leqslant 2+\sqrt{3}$. 所以

$$D=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid 2-\sqrt{3}\leqslant x+y\leqslant 2+\sqrt{3},\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0\}.$$

设 $z_1=4-(x+y)$，$z_2=\dfrac{1}{x+y}$，则

$$z_1-z_2=4-(x+y)-\frac{1}{x+y}$$

$$= -\frac{[(x+y)^2-4(x+y)+1]}{x+y}$$
$$= -\frac{[x+y-(2+\sqrt{3})][x+y-(2-\sqrt{3})]}{x+y}$$
$$>0.$$

为求 Ω 的体积,作变换代换

$$\begin{cases} u = x+y, \\ v = \dfrac{y}{x}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \dfrac{u}{1+v}, \\ y = \dfrac{uv}{1+v}, \end{cases}$$
$$2-\sqrt{3} \leqslant u \leqslant 2+\sqrt{3}, 0 \leqslant v < +\infty.$$

则

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{1+v} & -\dfrac{u}{(1+v)^2} \\ \dfrac{v}{1+v} & \dfrac{u}{(1+v)^2} \end{vmatrix} = \frac{u}{(1+v)^2}.$$

于是,就有

$$V = \iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D (z_1 - z_2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_D [4-(x+y) - \frac{1}{x+y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{(1+v)^2}\int_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}(4-u-\frac{1}{u})u\mathrm{d}u$$
$$= -\frac{1}{1+v}\Big|_0^{+\infty}(2u^2-\frac{u^3}{3}-u)\Big|_{2-\sqrt{3}}^{2+\sqrt{3}}$$
$$= 1\cdot\{2(2+\sqrt{3})^2 - 2(2-\sqrt{3})^2 - \frac{(2+\sqrt{3})^3}{3} + \frac{(2-\sqrt{3})^3}{3} - (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})\}$$
$$= 4\sqrt{3}.$$

(2) 先计算 $u = x^2+y^2+z^2$ 在有界区域 Ω 上的最小值,从而得 $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{u}}$ 的最大值. 就可估计积分 $\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的范围. 为此,令

$$(u_x', u_y', u_z') = (2x, 2y, 2z) = (0,0,0),$$

但 $(0,0,0) \notin \Omega$,所以 u 的最小值必在 Ω 的边界上达到. 分别求 u 在 Ω 的边界上的最小值.

(a) 在 $x=0$ 上,D_1 由 $yz=1$ 及 $y+z=4$ 围成,即

$$\begin{cases} y+z \leqslant 4, \\ yz \geqslant 1, x = 0, y, z \geqslant 0, \end{cases}$$

则 $u = y^2+z^2 \geqslant 2yz \geqslant 2$.

(b) 在 $y=0$ 上,同(a)有 $u = x^2+y^2 \geqslant 2$.

(c) 在平面 $x+y+z=4$ 上,$2-\sqrt{3} \leqslant z \leqslant 2+\sqrt{3}$,

$$u = x^2+y^2+z^2$$
$$= x^2+y^2+(4-x-y)^2$$
$$= 2x^2+2y^2-8x-8y+16+2xy.$$
$$\begin{cases} u_x' = 4x-8+2y = 2(2x+y-4) = 0, \\ u_y' = 4y-8+2x = 2(x+2y-4) = 0, \end{cases}$$

所以 $x = y = \frac{4}{3}$. 再由 $u_{xx}'' = 4 > 0$,

$$\begin{vmatrix} u_{xx}'' & u_{xy}'' \\ u_{yx}'' & u_{yy}'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

知当 $x = y = z = \frac{4}{3}$ 时,u 达到最小值 $u = 3\cdot(\frac{4}{3})^2 = \frac{16}{3}$.

(d) 在曲面 $z(x+y) = 1$ 上,有

$$u = x^2+y^2+\frac{1}{(x+y)^2},$$

由

$$\begin{cases} u_x' = 2x - \dfrac{2}{(x+y)^3} = 0, \\ u_y' = 2y - \dfrac{2}{(x+y)^3} = 0 \end{cases}$$

解得 $x = y$,及 $x = \frac{1}{(2x)^3}$ 知 $x^2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$. 从而 u 在该曲面上的最小值为

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}} = \sqrt{2}.$$

(e) 在曲线 $\begin{cases} x+y+z=4 \\ z(x+y)=1 \end{cases}$ 上,

$$\frac{1}{z} = (x+y) = 4-z, z^2-4z+1 = 0,$$
$$z = 2\pm\sqrt{3}.$$
$$x+y = 2\mp\sqrt{3}.$$

于是,

$$u = x^2+y^2+z^2$$
$$= x^2+[2\mp\sqrt{3}-x]^2+(2\pm\sqrt{3})^2$$

达最小值为 $\frac{1}{2}(21\pm4\sqrt{3})$.

比较在各界面、线上的最小值:$2, \frac{16}{3}, \sqrt{2}, \frac{1}{2}(21\pm4\sqrt{3})$ 得出当 $(x,y,z) = (\frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}})$ 时,$u = x^2+y^2+z^2$ 取到在 Ω 上的最小值 $\sqrt{2}$,此时 $\frac{1}{\sqrt{u}} = 2^{-\frac{1}{4}}$,从而

$$\iiint_\Omega \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \leqslant 2^{-\frac{1}{4}}\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= 2^{-\frac{1}{4}}\cdot 4\sqrt{3} = 2^{\frac{7}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

解法 2 $\forall P(x,y,z) \in \Omega$,$OP$ 交曲面 $z(x+y) = 1$

于 $Q(x',y',z')$,

$$|OP|\geq|OQ|\geq\sqrt{x'^2+y'^2+\frac{1}{(x'+y')^2}}$$
$$\geq\sqrt{\frac{(x'+y')^2}{2}+\frac{1}{(x'+y')^2}}$$
$$\geq 2^{\frac{1}{4}},$$
$$\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\leqslant 2^{-\frac{1}{4}}V$$
$$=2^{\frac{7}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{2}}.$$

1.15.3 设 $z=f(x,y)$ 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续,且满足

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\iint_D xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1.$$

试证:存在 $(\xi,\eta)\in D$,使得 $|f(\xi,\eta)|\geqslant\frac{1}{A}$,其中

$$A=\iint_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2$$

证 由 f 在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续可知,一定存在 $(\xi,\eta)\in D$,使得

$$|f(\xi,\eta)|=\max_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}|f(x,y)|=M.$$

于是,

$$MA=M\iint_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\iint_D|f(x,y)|\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$\geqslant\left|\iint_D f(x,y)\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$=\left|\iint_D f(x,y)xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{4}\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|$$
$$=\left|1-\frac{1}{4}\cdot 0\right|=1,$$

从而 $|f(\xi,\eta)|=M\geqslant\frac{1}{A}$.

剩下的是计算 $A=\iint_{\substack{0\le x\le 1\\0\le y\le 1}}\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

$$\iint_D\left|xy-\frac{1}{4}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_{D_+}\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_-}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_{\frac{1}{4x}}^1\left(xy-\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}y+\int_0^{\frac{1}{4}}\mathrm{d}x\int_0^1\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y$$
$$+\int_{\frac{1}{4}}^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4x}}\left(\frac{1}{4}-xy\right)\mathrm{d}y$$
$$=\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{xy^2}{2}-\frac{y}{4}\right)\Big|_{\frac{1}{4x}}^1\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{y}{4}-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^1\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{y}{4}-\frac{xy^2}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4x}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{32x}+\frac{1}{16x}\right)\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{\frac{1}{4}}^1\left(\frac{1}{16x}-\frac{1}{32x}\right)\mathrm{d}x$$
$$=\left(\frac{x^2}{4}-\frac{x}{4}+\frac{\ln x}{32}\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^1+\left(\frac{x}{4}-\frac{x^2}{4}\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}}+\frac{\ln x}{32}\Big|_{\frac{1}{4}}^1$$
$$=\frac{1-\frac{1}{16}}{4}-\frac{1-\frac{1}{4}}{4}+2\cdot\frac{1}{32}\left(-\ln\frac{1}{4}\right)$$
$$+\frac{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4}=\frac{3}{32}+\frac{1}{8}\ln 2.$$

1.15.4 设 $V=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$, a,b,c 是不全为零的常数. 试计算三重积分

$$\iiint_V\cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

解 作正交变换:

$$\begin{cases}\xi=\dfrac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\\ \eta=\cdots\\ \zeta=\cdots\end{cases}$$

记 $\mu=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,并使变换的 Jacobi 行列式为

$$J=\begin{vmatrix}\frac{a}{\mu}&\frac{b}{\mu}&\frac{c}{\mu}\\ \cdots&\cdots&\cdots\\ \cdots&\cdots&\cdots\end{vmatrix}=1$$

则

$$\iiint_V\cos(ax+by+cz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$=\iiint_{V\text{的像}}\cos(\mu\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$
$$=\int_{-1}^1\cos(\mu\xi)\mathrm{d}\xi\iint_{\eta^2+\zeta^2\le 1-\xi^2}\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$
$$=4\pi\int_0^1\cos(\mu\xi)(1-\xi^2)\mathrm{d}\xi$$
$$=2\pi\int_0^1(1-\xi^2)\cos(\mu\xi)\mathrm{d}\xi(1-\xi^2)\frac{\sin\mu\xi}{\mu}$$
$$=2\pi\left[(1-\xi^2)\frac{\sin\mu\xi}{\mu}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{2\xi}{\mu}\sin(\mu\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$
$$=2\pi\left[0-\frac{2\xi\cos(\mu\xi)}{\mu^2}\Big|_0^1+\frac{2}{\mu^2}\int_0^1\cos(\mu\xi)\mathrm{d}\xi\right]$$
$$=-\frac{4\pi}{\mu^2}\left[\cos\mu-\frac{\sin(\mu\xi)}{\mu}\Big|_0^1\right]$$
$$=\frac{4\pi}{\mu^2}\left(\frac{\sin\mu}{\mu}-\cos\mu\right)$$

$$= \frac{4\pi}{a^2+b^2+c^2} \cdot \left(\frac{\sin\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} - \cos\sqrt{a^2+b^2+c^2} \right).$$

1.15.5　求曲面$(a_1x+b_1y+c_1z+d_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2z+d_2)^2+(a_3x+b_3y+c_3z+d_3)^2=R^2$所围立体的体积$V$，其中

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \neq 0.$$

解　作变换

$$\begin{cases} u = a_1x+b_1y+c_1z+d_1, \\ v = a_2x+b_2y+c_2z+d_2, \\ w = a_3x+b_3y+c_3z+d_3, \end{cases}$$

则已知曲面变成球面$u^2+v^2+w^2=R^2$，变换的Jacobi行列式为

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}} = 1/\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

于是

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant 1} 1/\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$= \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}} = \frac{4\pi R^3}{3\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}}.$$

1.15.6　设$f:[0,1]\to\mathbf{R}$连续，$0\leqslant x_k\leqslant 1, k=1,2,\cdots,n+1$. 证明：

$$\int_0^{x_{n+1}}\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}\mathrm{d}x_2\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int_0^{x_{n+1}}f(x_1)\frac{(x_{n+1}-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x_1.$$

证法1　积分区域为

$$\begin{cases} 0\leqslant x_1\leqslant x_2, \\ 0\leqslant x_2\leqslant x_3, \\ \cdots \\ 0\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n, \\ 0\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 0\leqslant x_1\leqslant x_{n+1}, \\ x_1\leqslant x_2\leqslant x_{n+1}, \\ \cdots \\ x_{n-2}\leqslant x_{n-1}\leqslant x_{n+1}, \\ x_{n-1}\leqslant x_n\leqslant x_{n+1}, \end{cases}$$

因此

$$\int_0^{x_{n+1}}\mathrm{d}x_n\int_0^{x_n}\mathrm{d}x_{n-1}\cdots\int_0^{x_3}\mathrm{d}x_2\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_0^{x_{n+1}}f(x_1)\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^{x_{n+1}}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}\mathrm{d}x_n$$

$$= \int_0^{x_{n+1}}f(x_1)\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^{x_{n+1}}\mathrm{d}x_2\cdots \int_{x_{n-2}}^{x_{n+1}}(x_{n+1}-x_{n-1})\mathrm{d}x_{n-1}$$

$$= \cdots = \int_0^{x_{n+1}}f(x_1)\frac{(x_{n+1}-x_1)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{d}x_1.$$

证法2　（归纳法）

当$n=1$时，

$$\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int_0^{x_2}f(x_1)\frac{(x_2-x_1)^0}{0!}\mathrm{d}x_1$$

显然成立，假设当$n=k$时，有

$$\int_0^{x_{k+1}}\mathrm{d}x_k\int_0^{x_k}\mathrm{d}x_{k-1}\cdots\int_0^{x_3}\mathrm{d}x_2\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1 = \int_0^{x_{k+1}}f(x_1)\frac{(x_{k+1}-x_1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}x_1,$$

则当$n=k+1$时，就有

$$\int_0^{x_{k+2}}\mathrm{d}x_{k+1}\int_0^{x_{k+1}}\mathrm{d}x_k\cdots\int_0^{x_3}\mathrm{d}x_2\int_0^{x_2}f(x_1)\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_0^{x_{k+2}}\mathrm{d}x_{k+1}\int_0^{x_{k+1}}f(x_1)\frac{(x_{k+1}-x_1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_0^{x_{k+2}}f(x_1)\mathrm{d}x_1\int_{x_1}^{x_{k+2}}\frac{(x_{k+1}-x_1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathrm{d}x_{k+1}$$

$$= \int_0^{x_{k+2}}\left(f(x_1)\cdot\frac{(x_{k+1}-x_1)^k}{k!}\Bigg|_{x_{k+1}=x_1}^{x_{k+2}}\right)\mathrm{d}x_1$$

$$= \int_0^{x_{k+2}}f(x_1)\frac{(x_{k+2}-x_1)^k}{k!}\mathrm{d}x_1.$$

1.15.7　证明4重积分

$$\int_{Q(x)\leqslant 1}e^{Q(x)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4 = \frac{\pi^2}{\sqrt{\det A}},$$

其中$Q(x)=\sum_{i,j=1}^4 a_{ij}x_ix_j$是正定的二次型，$A=(a_{ij})$.

证　因为4×4实对称方阵$A=(a_{ij})$正定，所以存在非异方阵P使得$A=P'P$，其中P'为P的转置，作坐标变换

$$y = Px$$

就得

$$Q = \sum_{i,j=1}^{4} a_{ij}x_ix_j = x'Ax = x'P'Px$$
$$= (Px)'(Px) = y'y = \sum_{i=1}^{4} y_i^2.$$

因此,应用球坐标变换

$$\begin{cases} y_1 = r\cos\theta, \\ y_2 = r\sin\theta\cos\varphi, \\ y_3 = r\sin\theta\sin\varphi\cos\psi, \\ y_4 = r\sin\theta\sin\varphi\sin\psi, \end{cases}$$

$$0 \leqslant \psi < 2\pi, 0 \leqslant \varphi, \theta \leqslant \pi,$$

$$\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4 = r^3\sin^2\theta\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi.$$

就得到

$$\int_{Q(x)\leqslant 1} e^{Q(x)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4$$
$$= \int_{|y|\leqslant 1} e^{|y|^2}(\det P^{-1})\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_{|y|\leqslant 1} e^{|y|^2}\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\mathrm{d}y_3\mathrm{d}y_4$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int\limits_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1 \\ 0\leqslant\theta,\varphi\leqslant\pi \\ 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi}} r^3e^{r^2}\sin^2\theta\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\psi$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\int_0^1 r^3e^{r^2}\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{2\pi}{\sqrt{\det A}}\int_0^1 \frac{t}{2}e^t\mathrm{d}t \cdot (-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi} \cdot \int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\theta}{2}\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}(te^t - e^t)\Big|_0^1 \cdot 2 \cdot \frac{\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta}{2}\Bigg|_0^{\pi}$$
$$= \frac{\pi^2}{\sqrt{\det A}}.$$

1.15.8 设 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ 为实正定二次型,证明:

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant r^2} e^{-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(a_{ij})}}.$$

证法 1 由线性代数知,对正定二次型 $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$,存在正交矩阵 P 使得

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$$
$$= (x_1,\cdots,x_n)P\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}P'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},$$

$$\lambda_i > 0, i = 1,\cdots,n.$$

令

$$(y_1,\cdots,y_n) = (x_1\cdots,x_n)P,$$

则

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant r^2} e^{-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} y_i^2\leqslant r^2} e^{-\sum_{i=1}^{n}\lambda_iy_i^2}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\int_{|y_1|\leqslant r} e^{-\lambda_1y_1^2}\mathrm{d}y_1\cdots\int_{|y_n|\leqslant r} e^{-\lambda_ny_n^2}\mathrm{d}y_n$$
$$= 2^n\lim_{r\to+\infty}\int_0^r e^{-\lambda_1y_1^2}\mathrm{d}y_1\cdots\int_0^r e^{-\lambda_ny_n^2}\mathrm{d}y_n$$
$$\xrightarrow{\xi_i = \sqrt{\lambda_i}y_i} \frac{2^n}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}$$
$$\cdot\lim_{r\to+\infty}\int_0^{\sqrt{\lambda_1}r} e^{-\xi_1^2}\mathrm{d}\xi_1\cdots\int_0^{\sqrt{\lambda_n}r} e^{-\xi_n^2}\mathrm{d}\xi_n$$
$$= \frac{2^n}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}\left[\int_0^{+\infty} e^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi\right]^n$$
$$= \frac{2^n}{\sqrt{\lambda_1\cdots\lambda_n}}\cdot\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(a_{ij})}}.$$

证法 2 设 $A = (a_{ij})$,由线性代数知,存在 n 阶可逆矩阵 P,使 $A = PP'$. 则 $\det A = \det P \cdot \det P' = (\det P)^2$,因而 $|\det P| = \sqrt{\det A} = \sqrt{\det(a_{ij})}$. 令

$$(y_1,\cdots,y_n) = (x_1,\cdots,x_n)P,$$

则

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = (x_1\cdots x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$
$$= (x_1\cdots x_n)PP'\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix}$$
$$= yy' = \sum_{i=1}^{n} y_i^2,$$
$$\left|\frac{\partial(x_1\cdots x_n)}{\partial(y_1\cdots y_n)}\right| = |\det P^{-1}|$$
$$= \frac{1}{|\det P|} = \frac{1}{\sqrt{\det A}}.$$

于是,

$$\lim_{r\to+\infty}\int\limits_{\sum_{i=1}^{n} x_i^2\leqslant r^2} e^{-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \lim_{r\to+\infty}\int\limits_{|(y_1\cdots y_n)P^{-1}|\leqslant r}\frac{1}{\sqrt{\det A}}e^{-(y_1^2+\cdots+y_n^2)}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\cdots\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{\det A}}e^{-(y_1^2+\cdots+y_n^2)}\mathrm{d}y_1\cdots\mathrm{d}y_n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\left(2\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^n$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\det A}}\left(2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(a_{ij})}}.$$

1.15.9 试证 $n+1$ 面体

$$A_n=\{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n\mid\sum_{i=1}^n x_i^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1,\ x_i\geqslant 0,i=1,\cdots,n\}$$

的体积为

$$V_n=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^n}{\Gamma(n\alpha+1)},$$

其中 α 为正数, $\Gamma(t)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{t-1}\mathrm{d}x$ 为 Euler 积分 Γ 函数.

证法1 显然, $\alpha=1$ 是最简单的情形,此时, A_n 是 n 维单形,其体积为

$$\begin{aligned}V_n&=\underset{\substack{\sum_{i=1}^n x_i\leqslant 1\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^1\mathrm{d}x_1\underset{\substack{x_2+\cdots+x_n\leqslant 1-x_1\\ x_2,\cdots,x_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&\xlongequal[j=2,\cdots,n]{x_j=(1-x_1)\xi_j}\int_0^1\mathrm{d}x_1\underset{\substack{\xi_2+\cdots+\xi_n\leqslant 1\\ \xi_2,\cdots,\xi_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}(1-x_1)^{n-1}\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n\\&=\int_0^1(1-x_1)^{n-1}\mathrm{d}x_1\cdot V_{n-1}\\&=-\frac{(1-x_1)^n}{n}\Big|_0^1\cdot V_{n-1}\\&=\frac{1}{n}V_{n-1}=\frac{1}{n!}V_1=\frac{1}{n!}=\frac{[\Gamma(2)]^n}{\Gamma(n+1)}.\end{aligned}$$

对任何 $\alpha>0$,先证明

$$\int_0^1(1-x^{\frac{1}{\alpha}})^{(n-1)\alpha}\mathrm{d}x=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}.\qquad ①$$

事实上,有

$$\begin{aligned}&\int_0^1(1-x^{\frac{1}{\alpha}})^{(n-1)\alpha}\mathrm{d}x\\&\xlongequal{x^{\frac{1}{\alpha}}=t}\int_0^1(1-t)^{(n-1)\alpha}\cdot\alpha t^{\alpha-1}\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{(n-1)\alpha}\mathrm{d}t\\&=\alpha B(\alpha,(n-1)\alpha+1)\\&=\alpha\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+(n-1)\alpha+1)}\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)},\end{aligned}$$

其中应用了 Euler 积分、B 函数的定义和 B 函数与 Γ 函数的关系式

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

及 Γ 函数的递推公式 $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$.

此时, A_n 的体积为

$$\begin{aligned}V_n&=\underset{\substack{x_1^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots+x_n^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1\\ x_1,\cdots,x_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n\\&=\int_0^1\mathrm{d}x_1\underset{\substack{x_2^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots+x_n^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1-x_1^{\frac{1}{\alpha}}\\ x_2,\cdots,x_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\&\xlongequal[j=2,\cdots,n]{x_j=(1-x_1^{\frac{1}{\alpha}})^{\alpha}\xi_j}\int_0^1\mathrm{d}x_1\underset{\substack{\xi_2^{\frac{1}{\alpha}}+\cdots+\xi_n^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1\\ \xi_2,\cdots,\xi_n\geqslant 0}}{\int\cdots\int}(1-x_1^{\frac{1}{\alpha}})^{(n-1)\alpha}\mathrm{d}\xi_2\cdots\mathrm{d}\xi_n\\&=\int_0^1(1-x_1^{\frac{1}{\alpha}})^{(n-1)\alpha}\mathrm{d}x_1\,V_{n-1}\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}V_{n-1}\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}\times\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-2)\alpha+1)}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}V_{n-2}\\&=\cdots\\&=[\Gamma(\alpha+1)]^{n-1}\cdot\frac{\Gamma((n-1)\alpha+1)\Gamma((n-2)\alpha+1)\cdots\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)\cdots\Gamma(2\alpha+1)}V_1\end{aligned}$$

其中因为 $A_1=\{x_1\in\mathbf{R}\mid x_1\geqslant 0,x_1^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant 1\}=\{x_1\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x_1\leqslant 1\}$,所以 $V_1=1$. 于是

$$V_n=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.$$

证法2 利用证法1中 V_n 的表达式,再用归纳法可证. 事实上,由证法1知 $V_1=1$,而 $\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^1}{\Gamma(1\cdot\alpha+1)}=1$ 等式成立.

假设 $V_{n-1}=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}$,则由证法1中的推导得

$$\begin{aligned}V_n&=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}V_{n-1}\\&=\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma((n-1)\alpha+1)}{\Gamma(n\alpha+1)}\cdot\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^{n-1}}{\Gamma((n-1)\alpha+1)}=\frac{[\Gamma(\alpha+1)]^n}{\Gamma(n\alpha+1)}.\end{aligned}$$

§1.16 外微分形式与场论

熟悉 $\mathbf{R}^n$ 中的外微分形式 ω 和外微分运算 d 以及闭形式 $\omega(\mathrm{d}\omega=0)$,恰当形式 $\omega=\mathrm{d}\eta$, Stokes 定理 $\int_M\mathrm{d}\omega=\int_{\partial M}\omega$,一方面为了进一步学习近代数学,尤其

是流形上的外微分形式和外微分运算 d 提供具体实例;另一方面为了和场论中的梯度、旋度与散度相呼应,本节还将外微分形式的概念和结论翻译成相应的场论的概念和结论.关于外微分的进一步知识,读者可参阅《流形》([5]).

本节主要介绍如何运用定理、公式等解题,同时注意综合法、反证法、参数法、构造法等解题方法的运用.

举例之前先明确一些相关的概念.

设 $(x_1,\cdots,x_n)$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中的直角坐标,规定

$$dx_i \wedge dx_j = -dx_j \wedge dx_i,$$

因而

$$dx_i \wedge dx_i = 0.$$

再设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为开区域,$\omega_{i_1\cdots i_k}$ 为 Ω 上的 C^r 函数 ($r = 0,1,2,\cdots,\infty,\omega$ (C^ω 表示解析)),我们称

$$\omega = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

为 k 次 C^r (外) **微分形式**.易见

$k=0, \omega = f$.

$k=1, \omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx_i$ 称为 Pfaff **形式**.

$k=n-1, \omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} p_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ ($\hat{dx_i}$ 表示删去 dx_i).

$k=n, \omega = P dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

$k>n, \omega = 0$ ($n+1$ 个 dx_i 中必有两个相同,而 $dx_i \wedge dx_i = 0$).

记 Ω 上 k 次 C^r $(r \geqslant 1)$ 微分形式的全体为 $C^r(\wedge^k(\Omega))$,我们定义**外微分** d 为

$$d: C^r(\wedge^k(\Omega)) \to C^{r-1}(\wedge^{k+1}(\Omega)),$$
$$\omega \mapsto d\omega,$$

其中

$$k=0, d\omega = df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i,$$

$$k \geqslant 1, d\omega = d\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \omega_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big)$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} d\omega_{i_1\cdots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k})$$

$$= \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \sum \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

$$k=n-1, d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \Big(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_j} dx_j\Big) \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n)$$

$$= \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}\Big) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n,$$

$k \geqslant n, d\omega = 0$.

如果存在 $\theta \in C^{r-1}(\wedge^{k-1}(\Omega))$,使得 $d\theta = \omega$,则称 ω 为 Ω 上的**恰当微分形式(全微分)**;如果 $d\omega = 0$ $(r \geqslant 1)$,则称 ω 为 Ω 上的**闭形式**.

1.16.1 ω 为开区域 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 上的 $k+1$ 次恰当 C^1 微分形式 $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow}$ ω 为闭形式.

证 ($\Rightarrow$) 设 $\omega = d\theta$, θ 为 k 次 C^2 微分形式,则

$$d\omega = d^2\theta = d\Big(\sum d\theta_{i_1\cdots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big)$$

$$= d\Big(\sum \frac{\partial \theta_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}\Big)$$

$$= \sum \frac{\partial^2 \theta_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i \partial x_j} dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{i<j} \Big(\frac{\partial^2 \theta_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \theta_{i_1\cdots i_k}}{\partial x_j \partial x_i}\Big) dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

$$= \sum_{i<j} 0 dx_j \wedge dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} = 0,$$

即 ω 为闭形式.

($\not\Leftarrow$) 反例:设 $\Omega = \mathbf{R}^2 - \{(0,0)\}$, $\omega = \frac{x dy - y dx}{x^2+y^2}$, $(x,y) \in \Omega$.

$$d\omega = \Big(\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}\Big) dx \wedge dy$$

$$= \Big[\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\Big] dx \wedge dy$$

$$= 0,$$

即 ω 为闭形式.但 ω 却不是恰当微分形式.(反证)假设 ω 为恰当微分形式,则由题 1.16.2(2),

$$\int_{\vec{C}} \omega = 0,$$

其中 $\vec{C}$ 为反时针方向的圆 $x^2+y^2=R^2$.这与

$$\int_{\vec{C}} \omega = \int_{\vec{C}} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$$

$$\xlongequal{(x,y)=(R\cos\theta, R\sin\theta)} \int_0^{2\pi} \Big[\frac{-R\sin\theta}{R^2}(-R\sin\theta) + \frac{R\cos\theta}{R^2}(R\cos\theta)\Big] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

相矛盾.

1.16.2 设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 为开区域.

(1) ω 为 Ω 上的 1 次 C^1 恰当微分形式.

$\Leftrightarrow$ (2) $\int_{\vec{C}} \omega = 0$,其中 $\vec{C}$ 为 Ω 中的任何分段 C^1 有向

简单闭曲线.

$\Leftrightarrow$(3) $\int_{\vec{C}}\omega$ 在 Ω 上与道路 $\vec{C}$ 选取无关,而只与 $\vec{C}$ 的起点 p 和终点 q 有关.

证 (1)$\Rightarrow$(2) 设闭曲线 $\vec{C}$ 的参数表示为 $x(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $x(\alpha)=x(\beta)$. 因为 ω 为恰当微分形式,故 $\omega=\mathrm{d}\theta$, θ 为 0 次微分形式. 于是

$$\int_{\vec{C}}\omega=\int_{\vec{C}}\mathrm{d}\theta=\int_{\vec{C}}\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}'\mathrm{d}x_i$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\sum_{i=1}^{n}\theta_{x_i}'\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$=\theta(x(\beta))-\theta(x(\alpha))=0.$$

(2)$\Rightarrow$(3) 设 $\vec{C}_1$ 和 $\vec{C}_2$ 为从 p 到 q 的两条定向 C^1 曲线,则 $\vec{C}_1\cup(-\vec{C}_2)$ 为定向闭曲线,由(2)

$$0=\int_{\vec{C}_1\cup(-\vec{C}_2)}\omega=\int_{\vec{C}_1}\omega+\int_{-\vec{C}_2}\omega=\int_{\vec{C}_1}\omega-\int_{\vec{C}_2}\omega$$

得到

$$\int_{\vec{C}_1}\omega=\int_{\vec{C}_2}\omega.$$

(3)$\Rightarrow$(1) 由(3),积分 $\int_{\vec{C}}\omega$ 与道路 $\vec{C}$ 的选取无关,而只与 $\vec{C}$ 的起点 p 和终点 q 有关. 固定起点 p,就得到 Ω 上的函数

$$\theta(q)=\int_p^q\omega,\ q\in\Omega.$$

则有 $\omega=\mathrm{d}\theta$. 事实上,设 $q=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$, $q'=(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)$,

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{1}{\Delta x_i}[\theta(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)-\theta(x_1,\cdots,x_n)]$$
$$=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\int_q^{q'}\omega}{\Delta x_i}=\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\int_q^{q'}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i}{\Delta x_i}=$$
$$\lim_{\Delta x_i\to 0}\frac{\int_0^1\omega_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\cdots,x_n)\Delta x_i\mathrm{d}t}{\Delta x_i}$$
$$=\omega_i(x_1,\cdots,x_n),\ i=1,\cdots,n,$$

即

$$\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mathrm{d}x_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}\theta$$

为恰当微分形式.

1.16.3 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开区域, ω 为 Ω 上的 C^1 恰当微分形式. 如果存在 0 次微分形式 θ,使得 $\mathrm{d}\theta=\omega$,则

$$\theta(q)=\int_p^q\omega+C,\ \forall q\in\Omega,$$

其中 $p\in\Omega$ 为固定点, C 为常数.

证 因为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i=\mathrm{d}\theta=\omega=\sum_{i=1}^{n}\omega_i\mathrm{d}x_i,$$

所以 $\frac{\partial\theta}{\partial x_i}=\omega_i$,于是

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\theta-\int_p^q\omega\right)=\frac{\partial\theta}{\partial x_i}-\omega_i=0.$$

根据题 1.6.34 知

$$\theta=\int_p^q\omega+C,$$

其中 C 为常数.

1.16.4 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 为单连通开区域(即 Ω 中任一条封闭 C^1Jordan 曲线的内部全在 Ω 之中或任一封闭 C^1Jordan 曲线可在 Ω 中缩成一点), ω 为 Ω 上的 1 次 C^1 微分形式. 如果 ω 为闭形式,即 $\mathrm{d}\omega=0$,则 ω 为恰当微分形式.

证 设 $\vec{C}$ 为 Ω 中任一封闭有向曲线. 因 Ω 是单连通的,所以 $\vec{C}$ 围成有向闭区域 $\vec{D}$, $D\subset\Omega$. 由 Stokes 定理有

$$\int_{\vec{C}}\omega=\int_{\partial\vec{C}}\omega=\int_{\vec{D}}\mathrm{d}\omega=\int_{\vec{D}}0=0.$$

再由题 1.16.2(2), ω 是恰当微分形式.

注 上面通过利用定义、定理等来导出一些结论,下面介绍两个通过构造法来解题的例子.

1.16.5 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ 为开区域,且对 $\forall p,q\in\Omega$,任何连结 p 和 q 的平行于坐标轴的一固定顺序的折线(例如,先平行 x_1 轴,再平行于 x_2 轴等等)全在 Ω 中, ω 为 Ω 上的 C^1 闭 1 形式,即 $\mathrm{d}\omega=0$. 则 ω 为恰当微分形式,即 $\omega=\mathrm{d}\theta$.

证 具体构造 θ. 令

$$\theta(x)=\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i}\omega_i(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)\mathrm{d}x_i,$$

其中 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)\in\Omega$ 为固定点. 则

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i}\omega_i(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)\mathrm{d}x_i\right)$$
$$=\omega_j(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0)$$
$$+\sum_{i=j+1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i}\frac{\partial\omega_i(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_j}\mathrm{d}x_i$$
$$\xlongequal[\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}=\frac{\partial\omega_i}{\partial x_j}]{\mathrm{d}\omega=0}\omega_j(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0)$$
$$+\sum_{i=j+1}^{n}\int_{x_i^0}^{x_i}\frac{\partial\omega_j(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$$

$$
\begin{aligned}
&= \omega_j(x_1,\cdots,x_j,x_{j+1}^0,\cdots,x_n^0)\\
&\quad + \sum_{i=j+1}^{n}[\omega_i(x_1,\cdots,x_i,x_{i+1}^0,\cdots,x_n^0)\\
&\qquad - \omega_i(x_1,\cdots,x_{i-1},x_i^0,\cdots,x_n^0)]\\
&= \omega_j(x_1,\cdots,x_n).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\mathrm{d}\theta = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j = \sum_{j=1}^{n}\omega_j\mathrm{d}x_j = \omega.
$$

1.16.6 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为开区域，且点 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 使得对 $\forall(x,y,z)\in\Omega$，连 (x_0,y_0,z_0) 和 (x_0,y,z_0)，连 (x_0,y,z_0) 和 (x,y,z_0)，连 (x,y,z_0) 和 (x,y,z) 得到的折线全在 Ω 中(如 Ω 为开长方体)．如果 $\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为 Ω 上的 2 次 C^1 闭微分形式，即 $\mathrm{d}\omega = 0$，则 ω 是恰当微分形式．

证 我们通过具体求出形如

$$
\theta = u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y(\mathrm{d}z\text{ 的系数为 }0)
$$

的 1 次 C^2 微分形式使得

$$
\begin{aligned}
&P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&= \omega = \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}(u\mathrm{d}x + v\mathrm{d}y)\\
&= -\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x\\
&\quad + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}
$$

从而 ω 是恰当微分形式．

上式成立

$$
\Leftrightarrow\begin{cases}
-\dfrac{\partial v}{\partial z} = P & (1)\\
\dfrac{\partial u}{\partial z} = Q & (2)\\
\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = R & (3)
\end{cases}
$$

设 $(x_0,y_0,z_0)\in\Omega$ 为固定点．$\forall(x,y,z)\in\Omega$，由题设和(1)(2)可取

$$
v(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\mathrm{d}z, \tag{4}
$$

$$
u(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\mathrm{d}z + f(x,y), \tag{5}
$$

其中，f 为 Ω 上任意的 C^1 函数，将(4)、(5)代入(3)，并由

$$
\begin{aligned}
0 = \mathrm{d}\omega &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\\
\therefore\quad & \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{\partial R}{\partial z}
\end{aligned}
$$

得到

$$
\begin{aligned}
R(x,y,z) &= -\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}z - \frac{\partial f}{\partial y}\\
&= \int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z - \frac{\partial f}{\partial y}\\
&= R(x,y,z) - R(x,y,z_0) - \frac{\partial f}{\partial y}.
\end{aligned}
$$

所以，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -R(x,y,z_0)$，取 $f(x,y) = -\displaystyle\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\mathrm{d}y$，再将此式代入(5)就得

$$
u(x,y,z) = -\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\mathrm{d}z - \int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\mathrm{d}y.
$$

验证上述 u,v 满足(1)(2)(3)，即得 $\mathrm{d}\theta = \omega$．

注 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为开区域，θ,P,Q,R 为 Ω 上的 C^r 函数，则称 $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ 或 (P,Q,R) 为 Ω 上的 C^r **向量场**．

记算符：

$$
\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}\quad(\text{假向量}),
$$

$$
\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad(\textbf{Laplace 算符}).
$$

而对 $r\geqslant 1$ 有

$$
\mathrm{grad}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\theta}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\theta}{\partial z}\boldsymbol{k} = \nabla\theta
$$

称为 θ 的**梯度场**；

$$
\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix} = \nabla\times\boldsymbol{F}
$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的**旋度场**；

$$
\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \nabla\cdot\boldsymbol{F}
$$

称为 $\boldsymbol{F}$ 的**散度场**．

对 $r\geqslant 2$，有

$$
\triangle\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = \nabla\cdot\nabla\theta
$$

称为 θ 的 **Laplace**．

设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为开区域，θ 为 Ω 上的 C^2 函数，$P,Q,R;B_1,B_2,B_3$ 为 Ω 上的 C^1 函数．$\vec{C}$ 为任意封闭的分段 C^1 曲线．将外微分 ω 与相应的向量场对应起来，就有下列结果：

(1) $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$

$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 向量场

$\omega = \mathrm{d}\theta$ 为恰当微分形式

$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}\theta = \left(\dfrac{\partial\theta}{\partial x},\dfrac{\partial\theta}{\partial y},\dfrac{\partial\theta}{\partial z}\right)$ 为**有势场**(θ 为 $\boldsymbol{F}$ 的**势函数**)

$$\Leftrightarrow (P,Q,R) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x},\frac{\partial\theta}{\partial y},\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)$$

它们都等价于

$$\oint_C \omega = \int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \oint_{\vec{C}} \boldsymbol{F}\mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0,$$

即 $\boldsymbol{F}$ 为保守场.

(2) $\omega = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 为闭形式,即

$$\mathrm{d}\omega = \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 为无旋场,即

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \end{cases}$$

(3) $\eta = B_1\mathrm{d}x + B_2\mathrm{d}y + B_3\mathrm{d}z$

$\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$

为恰当 2 形式,即 $\omega = \mathrm{d}\eta$

$$= \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

$\boldsymbol{B} = (B_1,B_2,B_3)$,$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 有向量势,即

$\boldsymbol{F} = \mathrm{rot}\boldsymbol{B}$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

$$\Leftrightarrow (P,Q,R) = \left(\frac{\partial B_3}{\partial y} - \frac{\partial B_2}{\partial z}, \frac{\partial B_1}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial x}, \frac{\partial B_2}{\partial x} - \frac{\partial B_1}{\partial y}\right).$$

(4) $\omega = P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 为闭 2 形式,即

$$\mathrm{d}\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0$$

$\boldsymbol{F} = (P,Q,R)$ 为无源场,即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

根据题 1.16.1 和 1.16.2,立即有

$\boldsymbol{F}$ 为有势场 $\Leftrightarrow \boldsymbol{F}$ 为保守场 $\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\boldsymbol{F}$ 为无旋场.

$\boldsymbol{F}$ 有向量势 $\overset{\Rightarrow}{\Leftarrow}$ $\boldsymbol{F}$ 为无源场.

根据题 1.16.5,可求势函数 θ,根据题 1.16.6,可求向量势 B.

一般的 Stokes 定理:

$$\int_{\vec{M}} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial\vec{M}} \omega,$$

其中 ∂M 为 M 的边界,$\partial\vec{M}$ 为 $\vec{M}$ 的诱导定向.

Stokes 定理:

$$\int_{\vec{M}} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= \int_{\partial\vec{M}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

$$\iint_{\vec{M}} (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \iint_M \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oint_{\partial M} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中,$\boldsymbol{n}$ 为决定 M 定向的连续单位法向量场.

Stokes 定理的特例为 Green 定理:

$$\int_{\vec{M}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \int_{\partial\vec{M}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

$$\iint_{\vec{M}} (\nabla\times\boldsymbol{F})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \int_M \mathrm{rot}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

$$= \int_{\partial M} \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

Gauss 定理:

$$\int_{\vec{M}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\partial\vec{M}} P\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

$$\iiint_M \nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}v = \iiint_M \mathrm{div}\boldsymbol{F}\mathrm{d}v = \oiint_{\partial M} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma.$$

Newton-Leibniz 定理:

$$\theta(q) - \theta(p) = \int_{\partial\vec{M}} \theta$$

$$= \int_{\vec{M}} \frac{\partial\theta}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial\theta}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial\theta}{\partial z}\mathrm{d}z,$$

$$\int_{\partial\vec{M}} \theta = \int_{\vec{M}} \mathrm{grad}\theta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_{\vec{M}} \nabla\theta\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

1.16.7 设 $\Omega\subset\mathbf{R}^3$ 为 Gauss 定理中的闭区域,f,g 为 Ω 上的 C^2 函数,$\boldsymbol{n}$ 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量场.证明:

(1) $\displaystyle\oiint_{\partial\Omega} \frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \triangle f\mathrm{d}v.$

(2) Green 第一公式

$$\oiint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\mathrm{d}v + \iiint_\Omega g\triangle f\mathrm{d}v.$$

(3) Green 第二公式

$$\oiint_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} & \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\\ f & g\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega\begin{vmatrix}\triangle f & \triangle g\\ f & g\end{vmatrix}\mathrm{d}v.$$

证 (1) $\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$

$$= \oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oiint_{\partial\Omega}\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma \xlongequal{\text{Gauss 定理}} \iiint_\Omega \nabla\cdot\nabla f\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega \triangle f\mathrm{d}v.$$

或者

$$\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}$$

$$= \oiint_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{Gauss 定理}} \iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega \triangle f\mathrm{d}v.$$

(2) $\oiint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$

$$= \oiint_{\partial\Omega} g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oiint_{\partial\Omega} g\nabla f\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{Gauss 定理}} \iiint_\Omega \nabla\cdot(g\nabla f)\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega \nabla g\cdot\nabla f\mathrm{d}v + \iiint_\Omega g\nabla\cdot\nabla f\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\mathrm{d}v + \iiint_\Omega g\triangle f\mathrm{d}v.$$

或者

$$\oiint_{\partial\Omega} g\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \oiint_{\partial\Omega} g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{\partial\Omega} g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial z}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\right)$$

$$\xlongequal{\text{Gauss 定理}} \iiint_\Omega g\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$+ \iiint_\Omega\left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_\Omega g\triangle f\mathrm{d}v + \iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\mathrm{d}v.$$

(3) 由(2),

$$\oiint_{\partial\Omega}\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}} & \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{n}}\\ f & g\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \left(\iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla g\mathrm{d}v + \iiint_\Omega g\triangle f\mathrm{d}v\right)$$

$$- \left(\iiint_\Omega \nabla g\cdot\nabla f\mathrm{d}v + \iiint_\Omega f\triangle g\mathrm{d}v\right)$$

$$= \iiint_\Omega\begin{vmatrix}\triangle f & \triangle g\\ f & g\end{vmatrix}\mathrm{d}v.$$

1.16.8 设 f 在闭区域 Ω 的内部 Ω 有 $\triangle f = 0$,则称 f 为 Ω 上的调和函数.则

(1) $\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = 0$;

(2) $\oiint_{\partial\Omega} f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \|\nabla f\|^2\mathrm{d}v$.

证 (1) 由题 1.16.7(1) 和 $\triangle f = 0$ 得

$$\oiint_{\partial\Omega}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma = \iiint_\Omega \triangle f\mathrm{d}v = 0.$$

(2) 在题 1.16.7(2) 中,令 $g = f$,且由 $\triangle f = 0$,有

$$\oiint_{\partial\Omega} f\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iiint_\Omega \nabla f\cdot\nabla f\mathrm{d}v + \iiint_\Omega f\triangle f\mathrm{d}v$$

$$= \iiint_\Omega \|\nabla f\|^2\mathrm{d}v.$$

1.16.9 设 Ω 为 Gauss 定理中的闭区域,f 在 Ω 内部调和,即 $\Delta f = 0$,证明:

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi}\oiint_{\overline{\partial\Omega}}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma,$$

其中 p_0 为 Ω 内部任一点,$\boldsymbol{P}$ 为由 p_0 到 $\partial\Omega$ 上的向量,$p = \|\boldsymbol{P}\|$,$\boldsymbol{n}$ 为决定 $\partial\Omega$ 的定向的单位外法向量场,记 $\overline{\partial\Omega}$ 为相应的定向曲面.这就是说调和函数由其在边界上的值完全确定.

证 设 S_ε 为以 p_0 为中心,ε 为半径的球面,它的定向是由指向 p_0 相反方向的单位法向量场所决定.根据 Green 第二公式和 $\Delta f = 0$ 得到

$$\left(\oiint_{\partial\Omega} - \oiint_{S_\varepsilon}\right)\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2} + \frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$-\left(\oiint\limits_{\partial\Omega}-\oiint\limits_{S_\varepsilon}\right)\left[f\frac{\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}}{p^3}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$-\left(\oiint\limits_{\partial\Omega}\quad\oiint\limits_{S_\varepsilon}\right)\left[-\frac{\partial(\frac{1}{p})}{\partial\boldsymbol{n}}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$-\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\begin{vmatrix}\Delta f & \Delta(\frac{1}{p})\\ f & \frac{1}{p}\end{vmatrix}\mathrm{d}v$$

$$-\iiint\limits_{\Omega_\varepsilon}\begin{vmatrix}0 & 0\\ f & \frac{1}{p}\end{vmatrix}\mathrm{d}v=0$$

因此

$$\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial\Omega}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\left[f\cdot\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{S_\varepsilon}f\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{f(p_\varepsilon)}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{S_\varepsilon}\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\iiint\limits_{B_p(\varepsilon)}\Delta f\mathrm{d}\sigma$$

$$=f(p_\varepsilon)\to f(p_0)(\varepsilon\to0^+).$$

于是就证明了

$$f(p_0)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\partial\Omega}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma.$$

注 因为 p_0 为

$$\oiint\limits_{\partial\Omega}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

的被积函数的奇异点，必须挖去一个以 p_0 为中心 ε 为半径的小开球 $B(p_0,\varepsilon)$，才能在 $\overline{\Omega-B(p_0,\varepsilon)}$ 上应用 Green 第二公式，为得到题中公式，还应令 $\varepsilon\to0^+$，这种论证方式是经常要用到的.

1.16.10 （平均值定理）设 Ω 为 Gauss 定理中的闭区域，f 在 Ω 的内部 $\mathring{\Omega}$ 调和，$p_0\in\mathring{\Omega}$，$\sum$ 为 Ω 上以 p_0 为球心，R 为半径的球面，则

$$f(p_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}\sigma.$$

证 由题 1.16.8(1)，$\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma=0$，于是，再应用题 1.16.9，因为 $p=R$，$\partial\Omega=\sum$，$\boldsymbol{P}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$，故有

$$f(p_0)=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma}\left[f\frac{\cos(\boldsymbol{P},\boldsymbol{n})}{p^2}+\frac{1}{p}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\right]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{f}{p^2}\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{4\pi R}\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\partial f}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{\Sigma}f\mathrm{d}\sigma.$$

1.16.11 设 Ω 为 Gauss 公式中的闭区域，f 在 Ω 的内部 $\mathring{\Omega}$ 内调和，在 Ω 上连续且非常值，则 f 只能在 $\partial\Omega$（Ω 的边界点集）上达到最大值和最小值.

证 （反证）假设 f 在 $p_0\in\Omega$ 达到最大值. 作以 p_0 为中心，δ 为半径的小闭球 $\overline{B_{p_0}(\delta)}\subset\Omega$，则对 $\forall p\in\overline{B_{p_0}(\delta)}$，

$$f(p)\leqslant f(p_0).$$

可以证明，$f|_{\partial B_{p_0}(\delta)}\equiv f(p_0)$. 事实上（反证），假设 $\exists p_1\in\partial B_{p_0}(\delta)$，使 $f(p_1)<f(p_0)$，从 f 连续知，$\exists p_1$ 在 $\partial B_{p_0}(\delta)$ 中的开邻域 U，使 $f|_U<f(p_0)$，故由题 1.16.10（平均值定理），

$$f(p_0)=\frac{1}{4\pi\delta^2}\iint\limits_{\partial B_{p_0}(\delta)}f(p)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{4\pi\delta^2}\left[\iint\limits_{U}f(p)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_{\partial B_{p_0}(\delta)-U}f(p)\mathrm{d}\sigma\right]$$

$$<f(p_0)$$

矛盾. 由于 δ 是任取的，所以，恒有

$$f|_{\overline{B_{p_0}(\delta)}}\equiv f(p_0).$$

从而 f 为局部常值函数. 令

$$U=\{p\mid p\in\mathring{\Omega},f(p)=f(p_0)\},$$

$$V=\{p\mid p\in\mathring{\Omega},f(p)\neq f(p_0)\},$$

易见，U 和 V 都为开集，且 $p_0\in U$，故 U 非空. 因为区域 $\mathring{\Omega}$ 是连通的，所以必有 $V=\varnothing$，$U=\mathring{\Omega}$. 即 $f|_{\mathring{\Omega}}\equiv f(p_0)$. 再由 f 在 Ω 上连续知 $f|_\Omega\equiv f(p_0)$ 为常值. 与已知 f 非常值矛盾. 故 f 只能在 $\partial\Omega$ 上达到最大值和最小值.

注 题 1.16.10 中的平均值定理和题 1.16.11 中的最值定理是调和函数的两个重要性质，它们有广泛的应用.

1.16.12 计算

$$I=\int\limits_{\overset{\frown}{AMO}}(e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y,$$

其中 m 为常数，$\overset{\frown}{AMO}$ 为以 $(\frac{a}{2},0)$ 为中心，$\frac{a}{2}$ 为半径的上半圆周，方向为逆时针.

解 $I=\int\limits_{\overset{\frown}{AMO}}(e^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(e^x\cos y-m)\mathrm{d}y$

$$= \left(\int_{\widehat{AMO}} + \int_{\overrightarrow{OA}} \right) (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

$$- \int_{\substack{\overrightarrow{OA} \\ y=0 \\ 0 \le x \le 1}} (e^x \sin y - my) dx + e^x (\cos y - m) dy$$

$$\xlongequal{\text{Green 定理}} \iint_{\vec{D}} (e^x \cos y - m) dy \wedge dx + (e^x \cos y) dx \wedge dy + 0$$

$$= m \iint_{\vec{D}} dx \wedge dy = m \iint_D dx dy$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{\pi m}{8} a^2.$$

注 $\widehat{AMO}$ 不组成闭道路，但若拼接上一条线段 $\widehat{OA}$ 就组成了一条有向闭道路了，从而可应用 Green 定理.

1.16.13 求第二型曲线积分

$$I = \oint_{\vec{C}} \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy],$$

其中 $\vec{C}$ 为任意包围原点 O 的逆时针方向的简单 C^∞ 闭曲线.

解法1 设 $\vec{C}_\varepsilon$ 为 C 内部的以原点 O 为中心，ε 为半径的圆，其方向为逆时针方向.

因为

$$d\left\{ \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy] \right\} = 0,$$

所以，由 Green 公式得到

$$I = \iint_{\vec{D}_\varepsilon} d\left\{ \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy] \right\}$$

$$+ \oint_{\vec{C}_\varepsilon} \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]$$

$$\xlongequal[y = \varepsilon \sin\theta]{x = \varepsilon \cos\theta} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\varepsilon \cos\theta}}{\varepsilon^2} \{ [\varepsilon \cos\theta \sin(\varepsilon \sin\theta) - \varepsilon \sin\theta \cos(\varepsilon \sin\theta)](-\varepsilon \sin\theta) + [\varepsilon \cos\theta \cos(\varepsilon \sin\theta) + \varepsilon \sin\theta \sin(\varepsilon \sin\theta)](\varepsilon \cos\theta) \} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} e^{\varepsilon \cos\theta} \cos(\varepsilon \sin\theta) d\theta.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得到

$$I = \int_0^{2\pi} \{ d\theta \} = 2\pi.$$

解法2 因为

$$\frac{e^z}{z} dz = \frac{e^z \cdot \bar{z}}{z \cdot \bar{z}} dz$$

$$= \frac{e^x (\cos y + i \sin y)(x - iy)}{x^2+y^2} (dx + i dy)$$

$$= \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \cos y + y \sin y) + i (x \sin y - y \cos y)] (dx + i dy)$$

$$= \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \cos y + y \sin y) dx - (x \sin y - y \cos y) dy]$$

$$+ i \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy],$$

所以

$$I = \oint_{\vec{C}} \frac{e^x}{x^2+y^2} [(x \sin y - y \cos y) dx + (x \cos y + y \sin y) dy]$$

$$= \frac{1}{i} I_m \oint_{\vec{C}} \frac{e^z}{z} dz = \frac{1}{i} I_m \oint_{\vec{C}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z} dz$$

$$= \frac{1}{i} I_m \oint_{\vec{D}} \frac{dz}{z} = \frac{1}{i} I_m \oint_{|z|=\varepsilon} \frac{dz}{z}$$

$$= \frac{1}{i} I_m \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon i e^{i\theta}}{\varepsilon e^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{i} I_m (2\pi i) = 2\pi.$$

注 因为原点 O 为闭形式的奇点，所以必须挖去一个以 O 为中心，ε 为半径的小开圆，才能应用 Green 公式，从而将 $\vec{C}$ 上的积分化为小开圆圆周上的积分，而该积分利用极角 θ 作参数很容易被直接算出.

选择好定向曲线、定向曲面的参数或应用 Green 公式、Stokes 公式和 Gauss 公式是计算第二型曲线、曲面积分的两种重要的方法.

1.16.14 计算第二型曲线积分

$$\int_{\vec{C}} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz$$

其中 $\vec{C}$ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1 (x, y, z \geqslant 0)$ 的边界，球面的外侧在 $\vec{C}$ 方向的左边.

解法1 设 $\vec{C}_1, \vec{C}_2, \vec{C}_3$ 是曲线 $\vec{C}$ 分别在平面 $y = 0$，$z = 0$，以及 $x = 0$ 上的定向曲线部分. 由对称性

$$\oint_{\vec{C}} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - z^2) dz$$

$$= 3 \oint_{\vec{C}} (y^2 - z^2) dx$$

$$= 3 \left[\int_{\vec{C}_1} + \int_{\vec{C}_2} + \int_{\vec{C}_3} \right] (y^2 - z^2) dx$$

$$= 3\left[\int_{\vec{C}_1}(-z^2)\mathrm{d}x + \int_{\vec{C}_2} y^2\mathrm{d}x + \int_{\vec{C}_3} 0\mathrm{d}x\right]$$

$$= 3\left[-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$

$$= -6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\mathrm{d}\theta = -6\cdot\frac{2}{3\cdot 1} = -4.$$

解法 2

$$\oint_{\vec{C}_1}(y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\vec{C}_1} -z^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}z + \int_{\vec{C}_2} y^2\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y + \int_{\vec{C}_3} z^2\mathrm{d}y - y^2\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}[-\cos^2\theta\cdot\cos\theta + \sin^2\theta(-\sin\theta)]\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta(-\sin\theta) - \cos^2\theta\cdot\cos\theta]\mathrm{d}\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}}[\sin^2\theta(-\sin\theta) - \cos^2\theta\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= -3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta + \sin^3\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= -3\cdot 2\cdot\frac{2}{3\cdot 1} = -4.$$

解法 3 设 $\vec{S}$ 为由 $\vec{C}$ 围成的单位球面在第 1 卦限部分，其定向指向球面的外侧. 由 Stokes 定理得

$$\oint_{\vec{C}}(y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z$$

$$= \iint_{\vec{S}}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2 - z^2 & z^2 - x^2 & x^2 - y^2\end{vmatrix}$$

$$= \iint_{\vec{S}}(-2y - 2z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - (2x + 2z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - (2x + 2y)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_S[(y + z)x + (x + z)y + (x + y)z]\mathrm{d}\sigma$$

$$= -4\iint_S(xy + yz + zx)\mathrm{d}\sigma = -12\iint_S xy\mathrm{d}\sigma$$

$$= -12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\varphi\sin\theta\sin\varphi\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\mathrm{d}\theta$$

$$= -12\cdot\frac{\sin^2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{2}{3\cdot 1} = -4.$$

1.16.15 求第二型曲线积分

$$\oint_{\vec{C}}(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z,$$

其中 C 为椭圆

$$\begin{cases}x^2 + y^2 = 1,\\ x + z = 1.\end{cases}$$

从 x 轴正向看去，$\vec{C}$ 是顺时针方向.

解法 1 设 $\vec{D}$ 为平面 $x + z = 1$ 上由椭圆 C 围成的 2 维区域，它的定向由单位法向量场 $\vec{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ 确定，从而 $\vec{C}$ 的定向为由 $\vec{D}$ 的定向所诱导.

由于 $(0,0,1)$ 在平面 $x + z = 1$ 上，且 $(x,y,z)\in C$ 到 $(0,0,1)$ 的距离

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 1)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + (-x)^2}$$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta + (-\cos\theta)^2} = \sqrt{1 + \cos^2\theta}$$

的最小值为 1，最大值为 $\sqrt{2}$，故椭圆 C 的长半轴为 $\sqrt{2}$，短半轴为 1.

根据 Stokes 定理得到

$$\oint_{\vec{C}}(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$$

$$= \oint_{\vec{D}}(-1 - 1)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - (1 + 1)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - (1 + 1)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -2\oint_{\vec{D}}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= -2\iint_D\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}}\cdot\pi\cdot\sqrt{2}\cdot 1 = 4\pi.$$

解法 2 $\vec{C}$ 可用参数方程 $(x,y,z) = (\cos\theta, \sin\theta, 1 - \cos\theta)$ 来表示，且 θ 从 $2\pi\to 0$ 正好是 $\vec{C}$ 的定向，所以

$$\oint_{\vec{C}}(y - z)\mathrm{d}x + (z - x)\mathrm{d}y + (x - y)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{2\pi}^0[(\sin\theta - 1 + \cos\theta)(-\sin\theta) + (1 - \cos\theta - \cos\theta)\cos\theta + (\cos\theta - \sin\theta)\sin\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta + \sin\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos\theta - 2\cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(2 - \sin\theta - \cos\theta)\mathrm{d}\theta = 4\pi.$$

解法 3 在椭圆 C 所在平面上选取规范正交基 $\{e_1, e_2\} = \left\{(0,1,0), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$，$\varphi$ 为 C 上动点 (x,y,z) 与 e_1 的正向的夹角，则

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) &= \vec{r}(\varphi) \\
&= (0,0,1) + \cos\varphi\, e_1 + \sqrt{2}\sin\varphi\, e_2 \\
&= (0,0,1) + (0,\cos\varphi,0) + (-\sin\varphi,0,\sin\varphi) \\
&= (-\sin\varphi,\cos\varphi,1+\sin\varphi).
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\vec{C}} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= \int_{2\pi}^{0} [(\cos\varphi - \sin\varphi - 1)(-\cos\varphi) + (1+\sin\varphi \\
&\quad + \sin\varphi)(-\sin\varphi) + (-\sin\varphi - \cos\varphi)\cos\varphi]\mathrm{d}\varphi \\
&= -\int_0^{2\pi} (-\cos^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi + \cos\varphi - \sin\varphi \\
&\quad - 2\sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi - \cos^2\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\int_0^{2\pi} (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + \sin\varphi - \cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = 4\pi.
\end{aligned}
$$

1.16.16 计算曲线积分

$$
\oint_{\vec{C}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2},
$$

其中 $\vec{C}$ 为逆时针方向的圆周 $(x-1)^2 + y^2 = R^2, R \neq 1$.

解 因为

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left(\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2}\right) \\
&= \frac{(4x^2+y^2 - x\cdot 8x) + (4x^2+y^2 - y\cdot 2y)}{(4x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

故当 $R<1$ 时,记 $\vec{M}$ 为由 $\vec{C}$ 围成的定向区域,根据 Green 定理

$$
\oint_{\vec{C}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \iint_{\vec{M}} 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0;
$$

当 $R>1$ 时,再用 Green 定理得

$$
\left(\oint_{\vec{C}} - \oint_{\vec{C}_\varepsilon}\right)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \iint_{\vec{M}_\varepsilon} 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = 0,
$$

其中 $\vec{C}_\varepsilon$ 为逆时针方向的椭圆 $4x^2+y^2=\varepsilon^2$,含在 $\vec{C}$ 的内部,$\vec{M}_\varepsilon$ 为由 $\vec{C}_\varepsilon^-$ 与 $\vec{C}$ 围成的定向区域,于是有

$$
\begin{aligned}
&\oint_{\vec{C}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \oint_{\vec{C}_\varepsilon} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} \\
&\xlongequal[y=\varepsilon\sin\theta]{x=\frac{1}{2}\varepsilon\cos\theta} \int_0^{2\pi} \frac{\frac{1}{2}\varepsilon^2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \pi.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\oint_{\vec{C}} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{4x^2+y^2} = \begin{cases} 0, R<1, \\ \pi, R>1. \end{cases}
$$

1.16.17 求第二型曲线积分

$$
\int_{\vec{\Gamma}} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z,
$$

其中 Γ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与平面 $y = x\mathrm{tg}\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$ 的交线,方向:从 x 轴正向看去,Γ 为逆时针方向.

解法 1 设 $\vec{\Sigma}$ 为有向平面 $y = x\mathrm{tg}\varphi\left(0<\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$,使得 $\vec{\Gamma}$ 的定向为 $\vec{\Sigma}$ 的诱导定向,即由该平面的法向量场 $(\mathrm{tg}\varphi,-1,0)/\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}$ 决定的定向. 根据 Stokes 定理,有

$$
\begin{aligned}
&\int_{\vec{\Gamma}} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= \iint_{\vec{\Sigma}} -\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z - \mathrm{d}x\wedge \\
&\quad \mathrm{d}y - \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z \\
&= -2\iint_{\vec{\Sigma}} \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y \\
&= -2\iint_{\vec{\Sigma}} \frac{\mathrm{tg}\varphi - 1 + 0}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\varphi}}\mathrm{d}\sigma = \frac{2(1-\mathrm{tg}\varphi)}{\sec\varphi}\pi R^2 \\
&= 2\pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi).
\end{aligned}
$$

解法 2 应用球面坐标,曲线 Γ 可由参数 θ 来表示:

$$
(x,y,z) = (R\sin\theta\cos\varphi, R\sin\theta\sin\varphi, R\cos\theta).
$$

将 Γ 分成 Γ_1 与 Γ_2 两部分,$\Gamma_1: \varphi_1 = \varphi, \Gamma_2: \varphi_2 = \varphi + \pi$,于是,第二型曲线积分

$$
\begin{aligned}
&\int_{\vec{\Gamma}_1} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= R^2\int_{\pi}^{0} [(\sin\theta\sin\varphi - \cos\theta)\cos\theta\cos\varphi \\
&\quad + (\cos\theta - \sin\theta\cos\varphi)\cos\theta\sin\varphi \\
&\quad + \sin\theta(\cos\varphi - \sin\varphi)(-\sin\theta)]\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\int_{\pi}^{0} (\sin\varphi - \cos\varphi)(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\int_{\pi}^{0} (\sin\varphi - \cos\varphi)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi).
\end{aligned}
$$

同理

$$
\begin{aligned}
&\int_{\vec{\Gamma}_2} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{\pi} [\sin(\pi+\varphi) - \cos(\pi+\varphi)]\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

$$= \pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

因此

$$\int_{\vec{r}} (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

$$= \left(\int_{\vec{r}_1} + \int_{\vec{r}_2}\right)(y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi R^2(\cos\varphi - \sin\varphi).$$

1.16.18 设 f 为 $\mathbf{R}$ 上的 C^1 函数，$f(0) = -\frac{1}{2}$，求 $f(x)$，使

$$\int_A^B [e^x + f(x)]y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y$$

与路径无关，只与起点 A 和终点 B 有关，并求当 A、B 分别为 $(0,0)$、$(1,1)$ 时此线积分的值.

解 因要求积分 $\int_A^B [e^x + f(x)]y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，只与起点 A 和终点 B 有关，所以有

$$0 = \mathrm{d}[(e^x + f(x))y\mathrm{d}x - f(x)\mathrm{d}y]$$
$$= [-(e^x + f(x)) - f'(x)]\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

即

$$f'(x) + f(x) = -e^x$$

（或由

$$e^x + f(x) = \frac{\partial[(e^x + f(x))y]}{\partial y}$$
$$= \frac{\partial[-f(x)]}{\partial x} = -f'(x)$$

得出），其解为

$$f(x) = e^{-\int \mathrm{d}x}\left[\int -e^x e^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x + c\right]$$
$$= e^{-x}\left[-\frac{1}{2}e^{2x} + c\right]$$
$$= -\frac{1}{2}e^x + ce^{-x}.$$

再由 $f(0) = -\frac{1}{2}$ 得到

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(e^0 + ce^0) = -\frac{1}{2} + c,$$
$$c = 0.$$

所以 $f(x) = -\frac{1}{2}e^x$.

或者由

$$[e^x f(x)]' = e^x[f'(x) + f(x)] = -e^{2x}$$

得

$$e^x f(x) = -\int_0^x e^{2x}\mathrm{d}x + f(0)$$
$$= -\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2} + f(0),$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}e^x + \left(\frac{1}{2} + f(0)\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^x.$$

当 $A = (0,0)$，$B = (1,1)$ 时，有

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} \left(e^x - \frac{1}{2}e^x\right)y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x$$
$$= \int_{(0,0)}^{(1,1)} \frac{1}{2}e^x y\mathrm{d}x + \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}y$$
$$= \int_{(0,0)}^{(1,0)} \frac{1}{2}e^x \cdot 0\mathrm{d}x + \int_{(1,0)}^{(1,1)} \frac{1}{2}e^1 \cdot \mathrm{d}y$$
$$= 0 + \frac{e}{2} = \frac{e}{2}.$$

1.16.19 设 f,g 为连续可导的函数，$f(0) = g(0) = 1$，且第二型曲线积分

$$\int_A^B yf(x)\mathrm{d}x + (f(x) + zg(y))\mathrm{d}y + g(y)\mathrm{d}z$$

与路径无关，只与起点 A、终点 B 有关.求出 f,g 以及向量场 $\vec{F}(x,y,z) = (yf(x), f(x) + zg(y), g(y))$ 的势函数 u.

解 由题设积分

$$\int_A^B yf(x)\mathrm{d}x + (f(x) + zg(y))\mathrm{d}y + g(y)\mathrm{d}z$$

与路径无关知

$$\begin{cases} \dfrac{\partial(f(x) + zg(y))}{\partial x} = \dfrac{\partial(yf(x))}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial(yf(x))}{\partial z} = \dfrac{\partial(g(y))}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial(g(y))}{\partial y} = \dfrac{\partial(f(x) + zg(y))}{\partial z}, \end{cases}$$

于是有

$$\begin{cases} f'(x) = f(x), \\ 0 = 0, \\ g'(y) = g(y). \end{cases}$$

再由 $f(0) = g(0) = 1$ 推出方程

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = \mathrm{d}x, \frac{\mathrm{d}g}{g} = \mathrm{d}y$$

有解 $f(x) = e^x$，$g(y) = e^y$.因此得向量场

$$\vec{F} = (ye^x, e^x + ze^y, e^y).$$

其势函数

$$u = \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} ye^x\mathrm{d}x + (e^x + ze^y)\mathrm{d}y + e^y\mathrm{d}z + C$$
$$= \int_0^x 0 \cdot e^x\mathrm{d}x + \int_0^y (e^x + 0 \cdot e^y)\mathrm{d}y + \int_0^z e^y\mathrm{d}z + C$$
$$= 0 + ye^x\Big|_0^y + ze^y\Big|_0^z + C$$
$$= ye^x + ze^y + C,$$

其中 C 为任意常数.

1.16.20 求第二型曲面积分

$$\iint_{\vec{M}} x^2\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y,$$

其中 $\vec{M}$ 为球面 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$，方向朝外.

解法 1 由 Gauss 定理,

$$\iint_{\vec{M}} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\vec{V}} 2(x+y+z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint_{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\leqslant R^2}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=2\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2}[(u+v+w)+(a+b+c)]\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=2(a+b+c)\iiint_{u^2+v^2+w^2\leqslant R^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

$$=\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3,$$

其中作了变换:

$$\begin{cases}u=x-a,\\v=y-b,\\w=z-c.\end{cases}$$

解法 2 作上述变换,得

$$\iint_{\vec{M}} x^2\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\vec{M}^*}(u+a)^2\mathrm{d}v\wedge\mathrm{d}w+(v+b)^2\mathrm{d}w\wedge\mathrm{d}u+(w+c)^2\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

$$=\iint_{M^*}[(u+a)^2\frac{u}{R}+(v+b)^2\frac{v}{R}+(w+c)^2\frac{w}{R}]\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{1}{R}\iint_{M^*}[(u^3+v^3+w^3)+2(au^2+bv^2+cw^2)+(a^2u+b^2v+c^2w)]\mathrm{d}\sigma$$

$$\xlongequal{\text{由对称性}}\frac{2}{R}\iint_{M^*}(au^2+bv^2+cw^2)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{2}{R}(a+b+c)\iint_{M^*}u^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=\frac{2}{R}(a+b+c)\cdot\frac{4\pi}{3}R^4$$

$$=\frac{8}{3}(a+b+c)\pi R^3,$$

其中

$$\iint_{M^*}u^2\mathrm{d}\sigma=\iint_{M^*}v^2\mathrm{d}\sigma=\iint_{M^*}w^2\mathrm{d}\sigma$$

$$=8\iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}}R^2\cos^2\theta R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$=8R^4\cdot\frac{-\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^4.$$

1.16.21 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\vec{S}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

这里 $\vec{S}$ 是由圆柱面 $x^2+y^2=1$、三个坐标平面及上半球面 $x^2+y^2+z^2=2z(z\geqslant1)$ 所围立体在第一卦限部分的外侧面.

解法 1 由 Gauss 定理得到

$$\oint_{\vec{S}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_{\vec{V}}(1+1+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\cdot(1\cdot\frac{\pi\cdot1^2}{4}+\frac{1}{8}\frac{4\pi\cdot1^3}{3})$$

$$=\frac{3}{4}\pi+\frac{\pi}{2}=\frac{5}{4}\pi.$$

解法 2 $z=0$ 时,$\mathrm{d}z=0$,有

$$\int_{\vec{S}_{下}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

同理,还有

$$\int_{\vec{S}_{左}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0,$$

$$\int_{\vec{S}_{后}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=0.$$

此外,在 $S_{侧}:x^2+y^2=1(x\geqslant0,y\geqslant0,0\leqslant z\leqslant1)$ 上有

$$\int_{\vec{S}_{侧}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\int_{S_{侧}}(x,y,z)\cdot(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{S_{侧}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\int_{S_{侧}}\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\cdot2\pi\cdot1\cdot1=\frac{\pi}{2}.$$

其中 $(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0)$ 是 $S_{侧}$ 的单位法向量,而 $\sqrt{x^2+y^2}=1$. $S_{上}$ 即为上半球面,故有

$$\int_{S_{上}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{S_上} [x^2 + y^2 + z(z-1)]\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{S_上} (2z - z)\mathrm{d}z = \iint_{S_上} z\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_{\substack{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\\0\leqslant\varphi\leqslant\frac{\pi}{2}}} (1+\cos\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(-\cos\theta + \frac{\sin^2\theta}{2}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\pi.$$

所以

$$\oiint_{\vec{S}} x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= 0+0+0+\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}\pi = \frac{5}{4}\pi.$$

1.16.22 计算第二型曲面积分

$$\iint_{\vec{S}} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 $\vec{S}$ 为曲面 $(x-a)^2+2(y-b)^2+3(z-c)^2=1$ 的外侧, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 且常数 a,b,c 满足 $a^2+2b^2+3c^2\neq 1$.

解 由题设知

$$(0-a)^2+2(0-b)^2+3(0-c)^2$$
$$= a^2+2b^2+3c^2\neq 1.$$

故原点 $(0,0,0)\overline{\in} S$.

如果 $(0,0,0)$ 在 S 外, 则由 Stokes(或 Gauss) 公式

$$\iint_{\vec{S}} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\vec{V}} \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\vec{V}} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3x\cdot\frac{x}{r}}{r^4} - \frac{3y\cdot\frac{y}{r}}{r^4} - \frac{3z\cdot\frac{z}{r}}{r^4}\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\vec{V}} \left[\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^5}(x^2+y^2+z^2)\right]\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\vec{V}} 0\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = 0.$$

如果 $(0,0,0)$ 在 S 内, 作小球面 $S_\varepsilon: x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2$ 含于 S 内, 并用 $\vec{S}_\varepsilon$ 表示指向 S_ε 外侧的方向. 再一次根据 Stokes(或 Gauss) 公式得

$$0 = \left(\iint_{\vec{S}} - \iint_{\vec{S}_\varepsilon}\right)\frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$

于是

$$\iint_{\vec{S}} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\vec{S}_\varepsilon} \frac{x}{r^3}\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z + \frac{y}{r^3}\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + \frac{z}{r^3}\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{S_\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon^3}\cdot\frac{x}{\varepsilon}+\frac{y}{\varepsilon^3}\cdot\frac{y}{\varepsilon}+\frac{z}{\varepsilon^3}\cdot\frac{z}{\varepsilon}\right)\mathrm{d}s$$

$$= \iint_{S_\varepsilon}\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 4\pi\varepsilon^2 = 4\pi.$$

1.16.23 设 Γ 为右半 yz 平面中的 C^1 简单曲线, 让 Γ 绕 z 轴旋转一周得到旋转曲面 S, 其参数表示为

$$\vec{r}(u,v) = (x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$
$$= (\psi(u)\cos v,\psi(u)\sin v,\varphi(u)), a\leqslant u\leqslant b, \psi > 0, 0\leqslant v < 2\pi.$$

求面积元 $\mathrm{d}\sigma$, 并证明 S 的面积为

$$\sigma(S) = 2\pi\int_a^b \psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u.$$

证法 1 $\vec{r}_u' = (\psi'(u)\cos v,\psi'(u)\sin v,\varphi'(u))$,

$$\vec{r}_v' = (-\psi(u)\sin v,\psi(u)\cos v,0),$$

$$E = \vec{r}_u'^2 = \psi^{2'}(u)+\varphi'^2(u),$$

$$F = \vec{r}_u\cdot\vec{r}_v = 0, G = \vec{r}_v'^2 = \psi^2(u).$$

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
$$= \psi(u)\sqrt{\psi'^2(u)+\varphi'^2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

$$\sigma(S) = \iint_{\substack{a\leqslant u\leqslant b\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_{\substack{a\leqslant u\leqslant b\\0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}} \psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}v\int_a^b\psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u$$

$$= 2\pi\int_a^b\psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

证法 2 $\mathrm{d}\sigma = \psi(u)\mathrm{d}v\mathrm{d}l$

$$= \psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

$$\sigma(S) = \int_0^l\left(\int_0^{2\pi}\psi(u)\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}l$$

$$= 2\pi\int_a^b\psi(u)\sqrt{\varphi'^2(u)+\psi'^2(u)}\mathrm{d}u.$$

1.16.24 设向量场 $\vec{F}$ 在 $\mathbf{R}^3$ 中是 C^2 类的, 证明在

$\mathbf{R}^3$ 上存在 C^2 数量场 u 和 C^1 向量场 $\vec{B}$，使得

$$\vec{F} = \mathrm{grad}u + \mathrm{rot}\vec{B}.$$

证 由 Poisson 方程 $\Delta u = \mathrm{div}\vec{F}$ 有解知，存在函数 u 满足上述方程. 又因

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(\vec{F} - \mathrm{grad}u) &= \mathrm{div}\,\vec{F} - \mathrm{div}\mathrm{grad}u \\ &= \mathrm{div}\,\vec{F} - \Delta u = 0,\end{aligned}$$

所以 $\vec{F} - \mathrm{grad}u$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中的无源场，因而它有向量势 $\vec{B}$，即

$$\vec{F} - \mathrm{grad}u = \mathrm{rot}\,\vec{B},$$

$$\vec{F} = \mathrm{grad}u + \mathrm{rot}\,\vec{B}.$$

参考文献

[1] 何琛、史济怀、徐森林，数学分析，高等教育出版社，1985 年.

[2] Γ·M·菲尔金哥尔茨，微积分学教程，高等教育出版社，1957 年.

[3] 邹应，数学分析，高等教育出版社，1995 年.

[4] 裴礼文，数学分析中的典型问题与方法，高等教育出版社，1993 年.

[5] 徐森林、薛春华，流形，高等教育出版社，1991 年.

第2篇　解析几何与矢量代数

§2.1　矢量代数概念与运算

矢量代数自成独立系统，它不仅是解析几何有力的解题工具，而且在工程学、物理学中也有广泛的应用．矢量代数除矢量的加法、减法和数乘矢量运算外，矢量的内积、外积、混合积和双重外积的运算已成为最基本的数学知识．

已给直角坐标系$[O:\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$中三个矢量$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}-a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{b}=b_1\boldsymbol{i}+b_2\boldsymbol{j}+b_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=c_1\boldsymbol{i}+c_2\boldsymbol{j}+c_3\boldsymbol{k}$，$\theta=\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$之间的角度，则矢量的内积、外积、混合积依次定义为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta,$$
$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta\boldsymbol{v}_0,$$
$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c},$$

或者

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}).$$

这里$|\boldsymbol{v}_0|=1$，$\boldsymbol{v}_0$既垂直于$\boldsymbol{a}$又垂直于$\boldsymbol{b}$，并且$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{v}_0$构成右手系．

内积、外积、混合积的坐标表示式分别为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\sum_{i=1}^{3}a_ib_i,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right),$$

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}.$$

本节要求能熟练应用上述公式进行计算，并善于利用一些已证得的结论解决问题．

2.1.1　设$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}$，试求$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})$和$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$．

解　因为$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$为直角坐标系底矢量，故$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=1$，$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0$．因此，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\cdot(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=1.\end{aligned}$$

当然，利用坐标表示式可立得$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(1,1,0)\cdot(0,1,1)=1$．

同样，利用

$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$
$$\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j},$$

可知

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\\&=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\\&=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}+\boldsymbol{i}=(1,-1,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times\{(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\times(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i})\}\\&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times\{\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}\}\\&=(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})\times(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j})\\&=\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}-\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}+\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}\\&=-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{k}\\&=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

直接利用坐标表示式计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(1,1,0)\times(0,1,1)\\&=\left(\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}\right)\\&=(1,-1,1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(1,-1,1)\times(1,0,1)\\&=(-1,0,1).\end{aligned}$$

注　计算矢量的内积、外积可直接利用坐标表示式的公式，或可根据底矢量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$的内积与外积的运算规律加以计算．

2.1.2　试证：

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.$$

证明

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2&=(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\sin\theta)^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2(1-\cos^2\theta)\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{a}|^2\cdot|\boldsymbol{b}|^2\cos^2\theta\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta)^2\\&=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2.\end{aligned}$$

注1　本例可用于解题．比如，已知$|\boldsymbol{a}|=10$，$|\boldsymbol{b}|=2$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=12$，则根据本例可知

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|&=(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2)^{\frac{1}{2}}\\&=[|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2]^{\frac{1}{2}}\\&=\sqrt{400-144}=16.\end{aligned}$$

注2　本例若用坐标表出，可得

$$\begin{aligned}&(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_2b_3-a_3b_2)^2\\&+(a_3b_1-a_1b_3)^2\\&=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-(a_1b_1\\&+a_2b_2+a_3b_3)^2.\end{aligned}$$

这就是拉普拉斯恒等式．

2.1.3　试证：双重外积公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

证法1 若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$，于是 $\mathbf{b}=k\mathbf{a}$，易见本题成立. 若 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\neq\mathbf{0}$，可取 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ 具有共同的始点，按照矢量加法的定义，可设

$$\mathbf{c}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

此式两边与 $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ 作外积，得

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}+\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{b}.$$

因为 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，$\mathbf{a}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，$\mathbf{b}\perp\mathbf{a}\times\mathbf{b}$，所以 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a},\mathbf{a},\mathbf{b}$ 三个矢量共面. 再由矢量加法的定义，可记

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=k_1\mathbf{a}+k_2\mathbf{b}.$$

此式两边与 $\mathbf{a}$ 作内积，因为左边矢量垂直于 $\mathbf{a}$，所以作内积后左边为0，即

$$0=k_1(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+k_2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}).$$

$k_1:k_2=-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}):(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})$. 因此，可设

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=k[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}].$$

上式两边与 $\mathbf{b}$ 作内积，根据混合积的轮换性质，有

$$\begin{aligned}[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}]\cdot\mathbf{b}&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{b})\\&=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{a}\times\mathbf{b})\\&=(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}&k[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}]\cdot\mathbf{b}\\&=k[|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2],\end{aligned}$$

于是

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|^2=k[|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2].$$

由 2.1.2 知 $k=1$. 因此

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{a}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}$$

同样可得

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{b}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}.$$

这样

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}&=\lambda[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}]\\&\quad+\mu[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})\mathbf{a}]\\&=[\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})+\mu(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})]\mathbf{b}\\&\quad-[\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\mu(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})]\mathbf{a}\\&=[\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}-\nu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}]\mathbf{b}\\&\quad-[\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}-\nu(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}]\mathbf{a}\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}.\end{aligned}$$

证法2

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}&=\left(\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)\times(c_1,c_2,c_3)\\&=\left(\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}c_3-\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}c_2,\right.\\&\qquad\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}c_1-\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}c_3,\\&\qquad\left.\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}c_2-\begin{vmatrix}a_3&a_1\\b_3&b_1\end{vmatrix}c_1\right)\\&=(a_3b_1c_3-a_1b_3c_3-a_1b_2c_2+a_2b_1c_2,\\&\qquad a_1b_2c_1-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3+a_3b_2c_3,\\&\qquad a_2b_3c_2-a_3b_2c_2-a_3b_1c_1+a_1b_3c_1).\end{aligned}$$

另一方面，

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}\\&=(a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)(b_1,b_2,b_3)\\&\quad-(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)(a_1,a_2,a_3)\\&=(a_2b_1c_2+a_3b_1c_3-a_1b_2c_2-a_1b_3c_3,\\&\qquad a_1b_2c_1+a_3b_2c_3-a_2b_1c_1-a_2b_3c_3,\\&\qquad a_1b_3c_1+a_2b_3c_2-a_3b_1c_1-a_3b_2c_2).\end{aligned}$$

显然，$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{a}$.

注1 双重外积公式的记忆方法：双重外积是中间的矢量 $\mathbf{b}$ 乘以余下的两个矢量的内积，减去括号中余下的另一矢量 $\mathbf{a}$ 乘以另外两个矢量 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的内积.

注2

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})&=-(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{a}\\&=-[(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}]\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c},\end{aligned}$$

即

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}.$$

此公式也符合注1中的记忆方法. 从本题与注2可见，一般情形下，$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}\neq\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$，即对外积，运算结合律 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ 不成立.

2.1.4 试证：拉格朗日恒等式：

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\\&=(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}).\end{aligned}$$

证明

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})&=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d})\\&=(\mathbf{b},\mathbf{c}\times\mathbf{d},\mathbf{a})\\&=[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\cdot\mathbf{a}\\&=[(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})\mathbf{c}-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{d}]\cdot\mathbf{a}\\&=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{d}).\end{aligned}$$

注1 拉格朗日恒等式不仅在微分几何等几何学科中要用到，而且在矢量代数中也属一个重要的公式.

注2 在拉格朗日恒等式中，取 $\mathbf{c}=\mathbf{a}$，$\mathbf{d}=\mathbf{b}$，即得 2.1.2.

2.1.5 假设 $\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 共面，试证：$\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a}$ 共线.

证明 因为 $(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})$，利用双重外积公式，有

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\\&=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{b}-[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{a}\\&=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathbf{b}=(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{b}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&(\mathbf{a}\times\mathbf{b},\mathbf{b}\times\mathbf{c},\mathbf{c}\times\mathbf{a})\\&=[(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\mathbf{b}]\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\end{aligned}$$

$= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})[\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]$

$= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2.$

今后，将 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}$ 记作$\boldsymbol{a}^2$.

由题设知$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}) = 0$，故$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2 = 0$，即$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = 0$. 因此 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面. 依外积的定义，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 都垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$这三个矢量所在的平面，故 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$ 共线.

2.1.6 已知三个单位向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 满足条件$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，试求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$ 之值，并证明 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$.

解 因为

$$\begin{aligned}&|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2\\ &= (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\ &= \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ &\quad+2\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}\\ &= \frac{1}{2}[|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}|^2-(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2)]\\ &= -\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$，两边与 $\boldsymbol{b}$ 作外积，得

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

同样，若两边与 $\boldsymbol{c}$ 作外积，就有 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$. 于是

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c} = \boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}.$$

2.1.7 如果三个矢量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$满足$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$，试问这三个矢量有何特点？

解 因为

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c},$$
$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

所以

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$$

成立，必须

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

即

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

如果 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{c}$，则 $\boldsymbol{c} = \lambda\boldsymbol{a}$，上式显然成立.

如果 $\boldsymbol{a}\nparallel\boldsymbol{c}$，则必须有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} = 0$. 即 $\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\perp\boldsymbol{c}$ 同时成立，也就是 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

综上所述，当 $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$ 时，必有 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 共线，或者 $\boldsymbol{b}\parallel\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}$.

2.1.8 设 $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，试用 $\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 表出λ,μ,ν.

解 因为 $\boldsymbol{v} = \lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}+\nu\boldsymbol{c}$，两边与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 作内积，得

$$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \lambda\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),$$

解出

$$\lambda = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

同样，与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 分别作内积，依次可以解出

$$\mu = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},\nu = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.$$

因此

$$\boldsymbol{v} = \frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{a}+\frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{b}+\frac{(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}\boldsymbol{c}.$$

注 1 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面时，

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

注 2 若 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 分别取作直角坐标系的三个底矢量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，则

$$(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}) = 1,$$
$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i}.$$

同样

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j},(\boldsymbol{v},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}.$$

因此

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{i})\boldsymbol{i}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{j})\boldsymbol{j}+(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}.$$

2.1.9 试证：

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix}\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}.$$

证法 1 右边 $= (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})[(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b})]$
$+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})[(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a})-(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c})]$
$+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c})[(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b})-(\boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a})]$.

利用题 2.1.4，我们有

$$\begin{aligned}\text{右边} &= (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})[(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})]+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})[(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})]+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c})[(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})]\\ &= (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b})(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})+(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\ &= \boldsymbol{x}\cdot[(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}].\end{aligned}$$

根据题 2.1.8，

$$\begin{aligned}\text{右边} &= \boldsymbol{x}\cdot[(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})]\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})[\boldsymbol{x}\cdot(\boldsymbol{y}\times\boldsymbol{z})]\\ &= (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \text{左边}.\end{aligned}$$

证法 2 利用行列式的乘法. 设 $\boldsymbol{x} = (x_1,x_2,x_3)$，$\boldsymbol{y} = (y_1,y_2,y_3)$，$\boldsymbol{z} = (z_1,z_2,z_3)$，则

$$\text{左边} = (\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) = \begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{3} a_i x_i & \sum_{i=1}^{3} a_i y_i & \sum_{i=1}^{3} a_i z_i \\ \sum_{i=1}^{3} b_i x_i & \sum_{i=1}^{3} b_i y_i & \sum_{i=1}^{3} b_i z_i \\ \sum_{i=1}^{3} c_i x_i & \sum_{i=1}^{3} c_i y_i & \sum_{i=1}^{3} c_i z_i \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}
= \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{z}\cdot\boldsymbol{c} \end{vmatrix}.
$$

2.1.10 设$\boldsymbol{l}=l_1\boldsymbol{a}+l_2\boldsymbol{b}+l_3\boldsymbol{c},\boldsymbol{m}=m_1\boldsymbol{a}+m_2\boldsymbol{b}+m_3\boldsymbol{c},\boldsymbol{n}=n_1\boldsymbol{a}+n_2\boldsymbol{b}+n_3\boldsymbol{c}$,试证:

$$
(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).
$$

证明 $\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m}$

$$
\begin{aligned}
&=(l_1\boldsymbol{a}+l_2\boldsymbol{b}+l_3\boldsymbol{c})\times(m_1\boldsymbol{a}+m_2\boldsymbol{b}+m_3\boldsymbol{c})\\
&=(l_1\boldsymbol{a})\times(m_1\boldsymbol{a})+(l_1\boldsymbol{a})\times(m_2\boldsymbol{b})\\
&\quad+(l_1\boldsymbol{a})\times(m_3\boldsymbol{c})+(l_2\boldsymbol{b})\times(m_1\boldsymbol{a})\\
&\quad+(l_2\boldsymbol{b})\times(m_2\boldsymbol{b})+(l_2\boldsymbol{b})\times(m_3\boldsymbol{c})\\
&\quad+(l_3\boldsymbol{c})\times(m_1\boldsymbol{a})+(l_3\boldsymbol{c})\times(m_2\boldsymbol{b})\\
&\quad+(l_3\boldsymbol{c})\times(m_3\boldsymbol{c})\\
&=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\
&\quad+\begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ m_3 & m_1 \end{vmatrix}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}).
\end{aligned}
$$

因为$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$,所以

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{l},\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})=(\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{n}\\
&=\left\{\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})+\begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix}(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\right.\\
&\quad\left.+\begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ m_3 & m_1 \end{vmatrix}(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\right\}\cdot(n_1\boldsymbol{a}+n_2\boldsymbol{b}+n_3\boldsymbol{c})\\
&=\left(\begin{vmatrix} l_1 & l_2 \\ m_1 & m_2 \end{vmatrix}n_3+\begin{vmatrix} l_2 & l_3 \\ m_2 & m_3 \end{vmatrix}n_1\right.\\
&\quad\left.+\begin{vmatrix} l_3 & l_1 \\ m_3 & m_1 \end{vmatrix}n_2\right)\times(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\\
&=\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{vmatrix}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).
\end{aligned}
$$

2.1.11 设矢量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面,求解向量方程组

$$
\begin{cases} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\alpha, \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{x}=\beta, \\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{x}=\gamma. \end{cases}
$$

解 因为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$不共面,故$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})\neq 0$,根据2.1.5知

$$
(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^2\neq 0.
$$

从而$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$不共面.把$\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$取作共同始点,将向量$\boldsymbol{x}$以$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b},\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}$作为棱进行平行六面体的分解,故可设

$$
\boldsymbol{x}=x_1\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}+x_2\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}+x_3\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}. \qquad ①
$$

此式两边与$\boldsymbol{a}$作内积,得

$$
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=x_1(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}).
$$

求出$x_1=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}=\dfrac{\alpha}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}$.如果相应地将①两边分别与$\boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{c}$作内积,依次可得

$$
x_2=\frac{\beta}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})},x_3=\frac{\gamma}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}.
$$

于是

$$
\boldsymbol{x}=\frac{1}{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})}[\alpha(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})+\beta(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})+\gamma(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})].
$$

注 向量运算是没有除法的.为此,由$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}=\alpha$绝不能求出$\boldsymbol{x}=\dfrac{\alpha}{\boldsymbol{a}}$.

2.1.12 已给$\boldsymbol{a}=(-3,6,2),\boldsymbol{b}=(7,-14,21)$,试求$\boldsymbol{a}$的大小、方向余弦,以及$\boldsymbol{b}$在$\boldsymbol{a}$上的投影,即求$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}$.

解 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{(-3)^2+6^2+2^2}=7$.设$\boldsymbol{a}$的方向角分别为$\alpha,\beta,\gamma$,则$\cos\alpha=\dfrac{-3}{7},\cos\beta=\dfrac{6}{7},\cos\gamma=\dfrac{2}{7}$.查表求得$\alpha=115.4°,\beta=31°,\gamma=73.4°$.$\boldsymbol{a}$的方向余弦为$-\dfrac{3}{7},\dfrac{6}{7},\dfrac{2}{7}$.

令$\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$表示矢量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$之间的角度,则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}&=|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\\
&=\frac{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle}{|\boldsymbol{a}|}\\
&=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right)\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

这里$\boldsymbol{a}_0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$是$\boldsymbol{a}$方向上的单位向量,即

$$
\boldsymbol{a}_0=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(-\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right).
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}\\
&=\boldsymbol{a}_0\cdot\boldsymbol{b}=\left(-\frac{3}{7},\frac{6}{7},\frac{2}{7}\right)\cdot(7,-14,21)\\
&=(-3,6,2)\cdot(1,-2,3)=-9.
\end{aligned}
$$

2.1.13 设$M_1(\boldsymbol{r}_1),M_2(\boldsymbol{r}_2),\cdots,M_n(\boldsymbol{r}_n)$表示空间中$n$个质点,它们的位置矢量分别为$\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\cdots,\boldsymbol{r}_n$,它们的质量依次为$m_1,m_2,\cdots,m_n$.此质点组的质量中心$C$的位置矢量定义为

$$
\overrightarrow{OC}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+\cdots+m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.
$$

试证：质量中心 C 与 O 点的选择无关.

证明 假设 $O'\neq O$（表示两点不重合）是异于原点 O 的另一个原点，则 n 个质点对 O' 的位置矢量依次记为 $\boldsymbol{r}_1',\boldsymbol{r}_2',\cdots,\boldsymbol{r}_n'$. 作矢量

$$\overrightarrow{O'C'}=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1'+m_2\boldsymbol{r}_2'+\cdots+m_n\boldsymbol{r}_n'}{m_1+m_2+\cdots+m_n}.$$

只要证明 $C'=C$ 即可.

事实上，

$$\boldsymbol{r}_1'=\overrightarrow{O'M_1}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{O'O}+\boldsymbol{r}_1,$$

同样地有

$$\boldsymbol{r}_i'=\overrightarrow{O'O}+\boldsymbol{r}_i(i=1,2,\cdots,n).$$

于是

$$\begin{aligned}\overrightarrow{O'C'}&=\frac{m_1\boldsymbol{r}_1'+m_2\boldsymbol{r}_2'+\cdots+m_n\boldsymbol{r}_n'}{m_1+\cdots+m_n}\\&=\frac{m_1(\overrightarrow{O'O}+\boldsymbol{r}_1)+\cdots+m_n(\overrightarrow{O'O}+\boldsymbol{r}_n)}{m_1+\cdots+m_n}\\&=\overrightarrow{O'O}+\frac{m_1\boldsymbol{r}_1+\cdots+m_n\boldsymbol{r}_n}{m_1+\cdots+m_n}\\&=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{O'C}.\end{aligned}$$

故 $C'=C$.

注 若不考虑本题的物理意义，当 $\sum\limits_{i=1}^{n}m_i\neq 0$ 时，本题结论依然成立.

2.1.14 给空间中 n 个点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 以及 $n+1$ 个实数 $k,a_1,a_2,\cdots,a_n$. 若点 M 满足

$$\sum_{i=1}^{n}a_i|MM_i|^2=k,\qquad ①$$

试求点 M 的轨迹.

解 任意取定 O 作原点，则

$$\begin{aligned}|MM_i|^2&=\overrightarrow{MM_i}\cdot\overrightarrow{MM_i}\\&=(\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OM})\cdot(\overrightarrow{OM_i}-\overrightarrow{OM})\\&=\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i}-2\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM}.\end{aligned}$$

式 ① 化为

$$(\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM})\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)-2\overrightarrow{OM}\cdot\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{OM_i}\Big)+\sum_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i})=k.\qquad ②$$

下面分两种情形加以讨论：

情形 1：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i=0$.

记常矢量 $\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{OM_i}$. 由式 ② 得

$$\overrightarrow{OM}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{1}{2}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i})-k\Big],$$

即

$$\overrightarrow{OM}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=\frac{1}{2}\frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\Big[\sum_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i})-k\Big].$$

令右边为 k^*，则有

$$\overrightarrow{OM}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{v}|}=k^*,$$

即

$$\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{v}}\overrightarrow{OM}=k^*.$$

在 $\boldsymbol{v}$ 所在有向线段上，取 $\overrightarrow{OM_0}$ 在有向线段上的

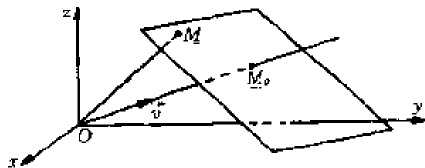


图 2.1

代数长恰为 k^*，则过点 M_0 且垂直于此有向线段的平面就是点 M 的轨迹. 当然，若 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$，那么当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i})\neq 0$ 时，就无实的几何轨迹；当 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{OM_i}\cdot\overrightarrow{OM_i})=0$ 时，所求轨迹充满整个空间（参阅图 2.1）.

情形 2：$\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\neq 0$.

作 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}$，此式等价于

$$\sum_{i=1}^{n}a_i\overrightarrow{CM_i}=\boldsymbol{0}.$$

由题2.1.13知：点 C 与原点 O 的选取无关. 如果一开始所选择的点 O 就是 C 点，则有

$$(\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CM})\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i\Big)+\sum_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{CM_i}\cdot\overrightarrow{CM_i})=k,$$

即

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CM}=\frac{k-\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(\overrightarrow{CM_i}\cdot\overrightarrow{CM_i})}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i}.$$

令右边为 k，则有

$$\overrightarrow{CM}\cdot\overrightarrow{CM}=k.$$

当 $k>0$ 时，M 点几何轨迹是以点 C 为球心，以 $\sqrt{k}$ 为半径的球面；当 $k=0$ 时，M 点几何轨迹仅是一点 C；当 $k<0$ 时，无实的几何轨迹.

2.1.15 试证：$|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|$，并说明等号何时才能成立.

证明 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 之间的角为 θ，$\theta\in[0,\pi]$. 因为

$$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta,$$

$$|(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}||\cos\theta|,$$

所以

$$|a\times b|\leqslant |a|\cdot|b|,$$
$$|(a\cdot b)|\leqslant |a|\cdot|b|.$$

现在,

$$|(a,b,c)|=|(a\times b)\cdot c|\leqslant |a\times b|\cdot|c|\leqslant |a|\cdot|b|\cdot|c|.$$

当 a,b,c 中有一为 0 时,等号显然成立.

当 a,b,c 全不为 0 时,则由

$$|a\times b|\cdot|c|=|a|\cdot|b|\cdot|c|,$$

即由

$$|a\times b|=|a|\cdot|b|$$

可推出 $a\perp b$.又由 $|(a\times b)\cdot c|=|a\times b|\cdot|c|$ 可推得 $c\,/\!/\,a\times b$.故 $c\perp a$ 与 $c\perp b$.

综上所述,等号成立的条件是 a,b,c 中只要有一为 0、或者 a,b,c 三个矢量互相垂直.

2.1.16　已给两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,位置矢量依次为 r_1,r_2.试证:以线段 P_1P_2 为直径的球面方程是 $(r-r_1)\cdot(r-r_2)=0$.

证明　根据矢量加法运算的涵义,球心的位置矢量为 $\frac{r_1+r_2}{2}$.因为 $\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=r_2-r_1$,故球面的半径为 $\frac{|r_2-r_1|}{2}$.因此,球面的方程是

$$\left(r-\frac{r_1+r_2}{2}\right)\cdot\left(r-\frac{r_1+r_2}{2}\right)=\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{r_2-r_1}{2}\right),$$

$$r\cdot r-(r_1+r_2)\cdot r+\frac{(r_1+r_2)\cdot(r_1+r_2)}{4}=\frac{(r_2-r_1)\cdot(r_2-r_1)}{4},$$

$$r\cdot r-(r_1+r_2)\cdot r+r_1\cdot r_2=0.$$

即

$$(r-r_1)\cdot(r-r_2)=0.$$

注1　设 $P(x,y)$ 是所求球面上任意一点,其位置矢量为 r.根据球面的性质,$\overrightarrow{P_1P}\perp\overrightarrow{P_2P}$,于是

$$\overrightarrow{P_1P}\cdot\overrightarrow{P_2P}=0.$$

球面方程是

$$(r-r_1)\cdot(r-r_2)=0.$$

注2　用坐标写出:

$$r-r_1=(x-x_1,y-y_1,z-z_1),$$
$$r-r_2=(x-x_2,y-y_2,z-z_2).$$

因此,球面方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0.$$

§2.2　矢量代数的几何应用

矢量代数的运算与性质具有一定的几何解释与几何意义,因此,作为矢量代数的几何应用可以求解一些几何问题.

大家知道,$|a\times b|$ 的数值等于以 a,b(取共同始点)为边的平行四边形的面积,并且 $a+b$,$a-b$ 分别是这平行四边形的两条对角线矢量.

$|(a,b,c)|$ 等于以 a,b,c(取共同始点)为棱的平行六面体的体积.

根据内积、外积、混合积的几何意义可以知道:$a\perp b$ 当且仅当 $a\cdot b=0$;$a\,/\!/\,b$ 当且仅当 $a\times b=0$;a,b,c 共面当且仅当 $(a,b,c)=0$.

在 $\triangle ABC$ 中,若记 $\overrightarrow{BC}=a$,$\overrightarrow{CA}=b$,$\overrightarrow{AB}=c$,那么 $a+b+c=0$.即三条闭折线段总可写成三个矢量之和.同样,n 条闭折线段也可写成 n 个矢量之和.

2.2.1　设三个矢量 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 满足

$$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=0,\quad ①$$

试证:(1) $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 共面;

(2) A,B,C 三点共线.

证明　(1) 式①两边与 $\overrightarrow{OA}$ 作内积,得 $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})=0$.由混合积几何意义,知 $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$,$\overrightarrow{OC}$ 共面.

(2)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}&=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB})\times(\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC})\\&=\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{AO}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\\&=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}=0.\end{aligned}$$

即 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=0$,因此 A,B,C 三点共线.

2.2.2　如图2.2,给定 $\triangle ABC$,A,B,C 三点的位置矢量依次为 r_1,r_2,r_3,点 D,E,F 分别为 BC,CA,AB 的中点,试证:$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3)$,其中 G 为 $\triangle ABC$ 的重心.

证明　如图所示,利用矢量的加法,得

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OF},\quad ①$$
$$\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GF},\quad ②$$
$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GC}.\quad ③$$

因为 G 为重心,所以 $2\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{GC}=0$.现在①+2②+③,就有

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG},$$

即

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3).$$

注　$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$,$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})$,

$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$,三式相加得$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\boldsymbol{0}$,两边乘以$-\frac{2}{3}$,可知$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\boldsymbol{0}$.

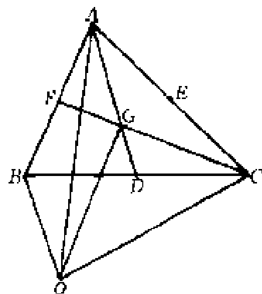


图2.2

2.2.3 设 S 是 $\triangle ABC$ 的面积,p 是 $\triangle ABC$ 周长之半,试证

(1) 正弦定理;

(2) 三角形面积的海伦公式:

$$S^2=p(p-a)(p-b)(p-c),$$

式中 a,b,c 代表三边之长;

(3) 如果 $A(1,-1,2),B(5,-6,2),C(1,3,-1)$,试求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 (1) 如图2.2所示,

$$2S_{\triangle ABC}=|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}|=|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|,$$

即

$$ab\sin C=ac\sin B=bc\sin A.$$

同时除以 abc,即得

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}.$$

正弦定理成立.

(2) 根据内积的定义以及余弦定理,有

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2,$$

$$|\boldsymbol{a}|=a,\ |\boldsymbol{b}|=b.$$

因此,由例2.2.1可知

$$\begin{aligned}S^2&=\frac{1}{4}|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2\\&=\frac{1}{4}(a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2)\\&=\frac{1}{4}[a^2b^2-\frac{1}{4}(a^2+b^2-c^2)^2]\\&=\frac{1}{16}(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)\\&=\frac{1}{16}[(a+b)^2-c^2]\cdot[c^2-(a-b)^2]\\&=\frac{1}{16}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c-a+b)\\&=p(p-a)(p-b)(p-c).\end{aligned}$$

(3) $\overrightarrow{BA}=(4,-5,0),\overrightarrow{BC}=(-4,9,-3),\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=(15,12,16)$,$|\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}|=\sqrt{15^2+12^2+16^2}=25$,故 $S_{\triangle ABC}=12.5$.

2.2.4 如图2.3,在 $\triangle ABC$ 中,点 D 和 E 分别在 BC 和 CA 上,且 $BD=\frac{1}{3}BC,CE=\frac{1}{3}CA$,$AD$ 和 BE 交于点 F.试证:$FD=\frac{1}{7}AD,FE=\frac{4}{7}BE$.

证明 设$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,则$\overrightarrow{BD}=\frac{\boldsymbol{a}}{3},\overrightarrow{CE}=\frac{\boldsymbol{b}}{3}$.因为$\overrightarrow{FD}\ /\!/\ \overrightarrow{AD},\overrightarrow{FE}\ /\!/\ \overrightarrow{BE}$,故可设

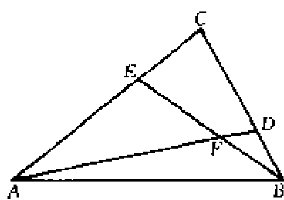


图2.3

$$\overrightarrow{FD}=x\overrightarrow{AD},$$

$$\overrightarrow{FE}=y\overrightarrow{BE}.$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{b}-\frac{2}{3}\boldsymbol{a},$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{b}}{3},$$

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

即

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).\qquad ①$$

$$\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{AD}-x\overrightarrow{AD}=(1-x)\overrightarrow{AD},$$

$\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}=(y-1)\overrightarrow{BE}$,代入式①得

$$(1-x)\overrightarrow{AD}+(y-1)\overrightarrow{BE}=-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}).$$

以$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BE}$表达式代入上式,化简整理得

$$(\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3})\boldsymbol{a}+(x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3})\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

因为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,所以$\frac{2}{3}x+y-\frac{2}{3}=0,x+\frac{1}{3}y-\frac{1}{3}=0$.求出$x=\frac{1}{7},y=\frac{4}{7}$.于是$FD=\frac{1}{7}AD,FE=\frac{4}{7}BE$.

2.2.5 如图2.2,三角形三条中线长度的平方和等于它的三边长度的平方和的$\frac{3}{4}$.即求证:

$$AD^2+BE^2+CF^2=\frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

证明 因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$,

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}),$$

$$\overrightarrow{CF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}).$$

所以

$$\begin{aligned}&AD^2+BE^2+CF^2\\&=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}\cdot\overrightarrow{CF}\\&=\frac{1}{4}[(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})]\\&=\frac{1}{2}[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}]\\&\quad-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\\&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)+\frac{1}{4}[\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\\&\quad-(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)$$
$$= \frac{3}{4}(a^2+b^2+c^2).$$

2.2.6 试证:四面体中连接对棱中点的三条直线交于一点,且互相平分.

证明 如图 2.4 所示,6 条棱的中点分别为 M,N,P,Q,R,S. 因为 $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{RN}$, 所以 $MSNR$ 是平行四边形. 两条对角线 MN,RS 互相等分,同理可得 MN,PQ 互相等分,因此,三条连线 MN,RS,PQ 交于一点,且互相平分.

图 2.4

2.2.7 试证:四面体中连接各顶点和对面三角形重心的四条直线交于一点,且此点分每一线段之比为 3 : 1.

证明 如图 2.5,设四面体的四个顶点为 A_1,A_2,A_3,A_4,它们的位置矢量依次为 $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3,\boldsymbol{r}_4$. 假设 $\triangle A_1A_2A_3$ 的重心为 A_4', $\triangle A_2A_3A_4$ 的重心为 A_1', $\triangle A_3A_4A_1$ 的重心为 A_2', $\triangle A_4A_1A_2$ 的重心为 A_3'. 根据题 2.2.2, A_4' 点的位置矢量为 $\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3)$.

现在,考虑直线段 A_4A_4'. 在其上取一点 M, 使得 $\overrightarrow{A_4M} = 3\overrightarrow{MA_4'}$, 即点 M 分线段 A_4A_4' 成 3 : 1 之比. 于是

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_4 = 3\left[\frac{1}{3}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3) - \boldsymbol{r}\right].$$

点 M 的位置矢量 $\boldsymbol{r} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)$. 它只依赖于四面体四个顶点的位置. 同样,在 A_3A_3', A_2A_2' 和 A_1A_1' 上也可找到位置矢量为 $\frac{1}{4}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)$ 的点,故知四条直线交于一点,且此点分每一线段之比为 3 : 1.

图 2.5

2.2.8 试证:如果一个四面体有两对对棱互相垂直,则第三对对棱也必互相垂直,并且三对对棱平方和相等.

证明 假设 $A_1A_2 \perp A_3A_4$, $A_1A_4 \perp A_2A_3$, 欲证 $A_1A_3 \perp A_2A_4$. 事实上,

$$\overrightarrow{A_1A_3}\cdot\overrightarrow{A_2A_4}$$
$$= (\overrightarrow{A_2A_3} - \overrightarrow{A_2A_1})\cdot(\overrightarrow{A_3A_4} - \overrightarrow{A_3A_2})$$
$$= \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_4} - \overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_4} - \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_2} + \overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}$$
$$= \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}$$
$$= \overrightarrow{A_2A_3}\cdot(\overrightarrow{A_3A_4} + \overrightarrow{A_2A_3}) + \overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}$$
$$- \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_2A_4} - \overrightarrow{A_2A_1}\cdot\overrightarrow{A_3A_2}$$
$$= \overrightarrow{A_2A_3}\cdot(\overrightarrow{A_2A_4} - \overrightarrow{A_2A_1})$$
$$= \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} = 0.$$

于是 $A_1A_3 \perp A_2A_4$.

$$A_1A_2^2 + A_3A_4^2$$
$$= \overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4}\cdot\overrightarrow{A_3A_4} + 2\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_3A_4}$$
$$= (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4})\cdot(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4}).$$

而

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_3A_4}$$
$$= (\overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_4A_2}) + \overrightarrow{A_3A_4}$$
$$= \overrightarrow{A_1A_4} + (\overrightarrow{A_4A_2} + \overrightarrow{A_3A_4})$$
$$= \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_3A_2}.$$

因此

$$A_1A_2^2 + A_3A_4^2$$
$$= (\overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_2A_3})\cdot(\overrightarrow{A_1A_4} - \overrightarrow{A_2A_3})$$
$$= \overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_1A_4} - 2\overrightarrow{A_1A_4}\cdot\overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_2A_3}$$
$$= A_1A_4^2 + A_2A_3^2.$$

同理可证

$$A_1A_4^2 + A_2A_3^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2.$$

最后,

$$A_1A_2^2 + A_3A_4^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 = A_1A_3^2 + A_2A_4^2.$$

2.2.9 已知四面体顶点 $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(-5,-4,8)$. 试求从顶点 A_4 所引的高 h 之长.

解 $\overrightarrow{A_1A_4} = (-7,-7,7) = -7(1,1,-1)$, $\overrightarrow{A_2A_4} = (-9,-5,10)$, $\overrightarrow{A_3A_4} = (-11,-7,1)$.

$$(\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_2A_4},\overrightarrow{A_3A_4}) = -7\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -9 & -5 & 10 \\ -11 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 308.$$

$$四面体的体积 = \frac{1}{6}\left|(\overrightarrow{A_1A_4},\overrightarrow{A_2A_4},\overrightarrow{A_3A_4})\right| = \frac{154}{3}.$$

$$四面体的底面积 = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left|(2,-2,-3)\times(4,0,6)\right|$$
$$= \left|(2,-2,-3)\times(2,0,3)\right|$$
$$= 2\left|(-3,-6,2)\right| = 14.$$

因为四面体的体积 $= \frac{1}{3} \times h \times$ 底面积，故

$$\frac{154}{3} = \frac{1}{3} \times h \times 14, h = \frac{11}{9}.$$

2.2.10 假设 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ 都为非零矢量，试问 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 与 $\begin{cases} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} \end{cases}$ 是否等价？

解 因为 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$，显然推出 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$. 反之，如果 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$，则有

$$\begin{cases} (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0, \\ (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

故 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$. 又 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \parallel \boldsymbol{c}$，因为 $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$，所以 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

综上讨论，两者是等价的.

注 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 不是等价的. 这是因为 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$，有 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 0$ 能推出 $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) \perp \boldsymbol{c}$，未必定为 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. 同样理由，$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$ 也不是等价的. 从刚才讨论，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$ 不能推出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ 可知，矢量是没有除法运算的. 通俗地说，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$，不能约去矢量 $\boldsymbol{c}$，而推出 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

2.2.11 设 A, B, C 是不共线三点，它们决定一个平面 π，则点 M 在平面 π 上的充要条件是：存在唯一的一组实数 x, y, z，使得

$$\begin{cases} \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

而点 M 在 $\triangle ABC$ 内的充要条件是 $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$ 同时成立，其中 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{r}$ 分别是点 A, B, C, M 的位置矢量.

证明 必要性. 如果点 M 在平面 π 上，那么 $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 共面. 根据矢量加法的定义，存在唯一的一组实数 λ, μ，使得

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}. \quad ①$$

因此

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} = \lambda(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + \mu(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}),$$

即

$$\boldsymbol{r} = (1 - \lambda - \mu)\boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b} + \mu \boldsymbol{c}.$$

令 $x = 1 - \lambda - \mu, y = \lambda, z = \mu$ 即可，而且 x, y, z 是唯一的. 如若不然，设 $\boldsymbol{r}$ 有两种表达式：

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c}, x + y + z = 1;$$

$$\boldsymbol{r} = x'\boldsymbol{a} + y'\boldsymbol{b} + z'\boldsymbol{c}, x' + y' + z' = 1.$$

倘若 $z' \neq z$，两种 $\boldsymbol{r}$ 表达式相减，且令 $x - x' = \lambda'$, $y - y' = \mu', z - z' = \nu' (\neq 0)$，就可得到

$$\lambda'\boldsymbol{a} + \mu'\boldsymbol{b} + \nu'\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}, \lambda' + \mu' + \nu' = 0.$$

从而 $\boldsymbol{c} = -\frac{\lambda'}{\nu'}\boldsymbol{a} - \frac{\mu'}{\nu'}\boldsymbol{b}$，而 $(-\frac{\lambda'}{\nu'}) + (-\frac{\mu'}{\nu'}) = 1$. 此表明 A, B, C 三点共线，与假定 A, B, C 是不共线三点相矛盾. 唯一性得证.

其次，当点 M 在 $\triangle ABC$ 内时，延长 CM 与 AB 边交于 D，可设 $\overrightarrow{AD} = l\overrightarrow{AB} (0 \leqslant l \leqslant 1)$.

由于 C, D, M 三点共线，设 $\overrightarrow{CM} = k\overrightarrow{CD}$，则

$$\overrightarrow{MD} = (1 - k)\overrightarrow{CD} (0 \leqslant k \leqslant 1),$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AM} - k\overrightarrow{CD}, \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AM} + (1 - k)\overrightarrow{CD}. \end{cases}$$

由此得

$$\overrightarrow{AM} = (1 - k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AD} = kl\overrightarrow{AB} + (1 - k)\overrightarrow{AC}.$$

此式与 ① 式相比较，根据表达式的唯一性知

$$\lambda = kl, \mu = 1 - k.$$

从而 $\lambda + \mu = kl + 1 - k = 1 - k(1 - l) \leqslant 1, 0 \leqslant \lambda$, $\mu \leqslant 1$. 所以 $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

充分性.
$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \boldsymbol{r} - \boldsymbol{a} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a} \\ &= x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} - (x + y + z)\boldsymbol{a} \\ &= y(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) + z(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}) \\ &= y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$

即

$$\overrightarrow{AM} = y\overrightarrow{AB} + z\overrightarrow{AC}. \quad ②$$

此式表明点 M 在平面 π 上. 进一步，如果 $0 \leqslant x$, $y, z \leqslant 1$ 同时成立，那么从 ② 和 $0 \leqslant y, z \leqslant 1$ 不难看出，点 M 在 $\angle BAC$ 内. 并且同样由 $\overrightarrow{CM} = x\overrightarrow{CA} + y\overrightarrow{CB}$，以及 $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ 又知点 M 在 $\angle ACB$ 内. 所以点 M 应在 $\triangle ABC$ 之内.

2.2.12 已知 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$, $P_3(x_3, y_3, z_3)$ 为不共线三点，三点的位置矢量依次为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{r}_3$. 试求由 P_1, P_2, P_3 三点所决定的平面 π 的方程.

解 介绍六种所推导的平面方程.

1. 所求平面 π 的法向量可取作 $\boldsymbol{n} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$. 若所求平面上任意一点 $P(x, y, z)$ 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，则平面 π 的点法式方程为

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0.$$

记 $\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$，则称

$$\boldsymbol{n}_0 \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0$$

是平面的法方程.

2. 由假设知 P_1, P_2, P_3, P 都在平面 π 上，故 $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P}$ 共面. 于是，混合积

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P}) = 0.$$

用坐标写出，有

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

这就是由不共线三点所决定的平面 π 的坐标表示式.

3. 展开上述三阶行列式，可以写成下述形式：

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

因为 P_1, P_2, P_3 三点不共线，所以 A, B, C 不全为0. 称此方程为平面 π 的一般方程.

反过来，当 A, B, C 不全为0时，$Ax + By + Cz + D = 0$ 代表一个平面.

事实上，可任取一点 (x_1, y_1, z_1)，使得

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$

即

$$D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

于是

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

即

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1) = 0.$$

这里记法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$. 因此，它代表过点 (x_1, y_1, z_1)，且以 $\boldsymbol{n}$ 为法向量的一个平面.

4. 因为 P_1, P_2, P_3 三点不共线，故 $\overrightarrow{P_1P_2} \not\parallel \overrightarrow{P_1P_3}$. 根据矢量加法的定义可知，必定存在 t_1, t_2，使得对于任意取定 P，我们有

$$\overrightarrow{P_1P} = t_1 \overrightarrow{P_1P_2} + t_2 \overrightarrow{P_1P_3}.$$

因为 $\overrightarrow{P_1P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$，故

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1 \overrightarrow{P_1P_2} + t_2 \overrightarrow{P_1P_3}.$$

称此为平面 π 的矢量方程. 又称 t_1, t_2 为参数，当然，t_1, t_2 的取值依赖于点 P 的选择.

从上述推导可见：如果给定一点 $P_1(\boldsymbol{r}_1)$，而且给定两个不共线矢量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$，那么，过点 P_1 与 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ 平行的平面的矢量方程为

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t_1\boldsymbol{v}_1 + t_2\boldsymbol{v}_2.$$

5. 如果将矢量方程用坐标给出，那么有

$$\begin{cases} x = x_1 + t_1(x_2 - x_1) + t_2(x_3 - x_1), \\ y = y_1 + t_1(y_2 - y_1) + t_2(y_3 - y_1), \\ z = z_1 + t_1(z_2 - z_1) + t_2(z_3 - z_1), \end{cases}$$

这就是平面 π 的参数方程.

6. 如果取特殊的不共线三点 $P_1(a, 0, 0), P_2(0, b, 0), P_3(0, 0, c)$，这里 $abc \neq 0$，那么根据第2段中的讨论，平面的方程为 $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$. 称它为平面的截距式方程，又分别称 a, b, c 是平面在 x 轴、y 轴、z 轴上的截距.

如果在上述讨论中，已给的三点中有一点取作原点 O，比如 $P_1 = 0$. 由于原点 $(0,0,0)$ 的坐标满足平面方程，所以平面一般方程 $Ax + By + Cz + D = 0$ 中的常数项 $D = 0$.

进一步，若平面 π 的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$ 中有一个分量，比如 $A = 0$，即 $\boldsymbol{n} = (0, B, C)$，则由内积公式

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{i} = (0, B, C) \cdot (1, 0, 0) = 0.$$

此表明 $\boldsymbol{n} \perp \boldsymbol{i}$，即 $\boldsymbol{n} \perp x$ 轴. 于是，平面与 x 轴相平行.

此外，如果 $A = D = 0$，那么平面 π 既平行 x 轴又过原点，故平面过 x 轴.

又如果 $A = B = 0$，则平面既平行 x 轴又平行 y 轴，故平行 xy 平面，也就是垂直 Oz 轴，平面方程为 $z = -\dfrac{D}{C}$，它在 y 轴的截距为 $-\dfrac{D}{C}$.

最后，若 $A = B = D = 0$，显然，那就是 xy 平面了.

2.2.13 已给不同两点 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$，它们的位置矢量分别为 $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$，试求由 P_1, P_2 两点所决定的直线 L 的方程.

解 介绍五种所推导的直线方程.

1. 由 P_1, P_2 两点所决定的直线 L 的方向矢量为 $\boldsymbol{l} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$. 设 $P(x, y, z)$ 为直线 L 上任意一点，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}$，则 $\overrightarrow{P_1P} \parallel \boldsymbol{l}$. 于是，$\overrightarrow{P_1P} = t\boldsymbol{l}$，其中 t 是参数. t 的值依赖于点 P 在直线 L 上的位置.

因为 $\overrightarrow{P_1P} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$，故

$$\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = t\boldsymbol{l}，即\ \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 + t\boldsymbol{l}.$$

这就是直线 L 的矢量方程.

2. 将直线的矢量方程用坐标给出，就有

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \\ z = z_1 + t(z_2 - z_1). \end{cases}$$

这就是直线 L 的参数方程.

特别，若取其中一点为原点，比如 $P_1 = 0$，则直线 L 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x_2 t, \\ y = y_2 t, \\ z = z_2 t. \end{cases}$$

3. 在第1段推导中，因为 P_1, P_2, P 三点共线，所以 $\overrightarrow{P_1P} \parallel \overrightarrow{P_1P_2}$. 于是，对应分量成比例.

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

这就是两点式方程.

4. 在上一段讨论中，一般地，设直线 L 的方向矢量为 $\boldsymbol{l} = (m, n, p)$，则过点 P_1 的直线方程为

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

称它为直线的对称方程或标准方程.

在这个方程的表达式中，可以列出三个方程，但独立的只有两个，我们不妨取

$$\frac{x - x_1}{m} = \frac{y - y_1}{n}\ 与\ \frac{y - y_1}{n} = \frac{z - z_1}{p}.$$

于是直线 L 的方程是

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}, \\ \dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}. \end{cases}$$

它作为两个平面的交线.

进一步,在 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ 中,因为 z 的系数为 0,故这个平面与 z 轴相平行. 同理,平面 $\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 与 x 轴相平行. 这样,我们称平面 $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}$ 是直线 L 在 xy 平面上的投影平面,而称

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n} \\ z=0 \end{cases}$$

为直线 L 在 xy 平面上的投影直线. 同样,$\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$ 是直线 L 在 yz 平面上的投影平面.

5. 根据第 4 段中的讨论,一般地,一条直线 L 可以作为两个不平行平面 π_1 和 π_2 的交线. 设 π_i:

$$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1,2,$$

则直线

$$L:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{cases}$$

直线 L 的方向矢量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{l} &= (A_1,B_1,C_1)\times(A_2,B_2,C_2) \\ &= \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right). \end{aligned}$$

§ 2.3 平面、直线之间的位置关系

已给两个平面 $\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ 和 $\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$,它们的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$ 和 $\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$. 又给出两条直线 $L_1: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t_1\boldsymbol{l}_1$ 和 $L_2: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+t_2\boldsymbol{l}_2$,它们的方向矢量分别为 $\boldsymbol{l}_1=(m_1,n_1,p_1)$ 和 $\boldsymbol{l}_2=(m_2,n_2,p_2)$,这里 $\boldsymbol{r}_1$ 和 $\boldsymbol{r}_2$ 分别为 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 点的位置矢量. 则平面、直线之间的位置关系可分下述三种情形加以讨论.

情形 1:平面和平面之间的位置关系.

(1) 平面 $\pi_1 /\!/ \pi_2$,当且仅当 $\boldsymbol{n}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_2$,即 $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$. 与平面 π_1 平行的任一平面都可写成 $A_1x+B_1y+C_1z+k=0$. 这里对于固定的 k,它代表一个与 π_1 相平行的平面;对于变动的 k,它代表一族平面,族内每一平面都与平面 π_1 平行. 称为由平面 π_1 所生成的平行平面束.

(2) 平面 π_1 与平面 π_2 相交,即 π_1 与 π_2 相交成一条直线,不妨就记作 L_1,那么过直线 L_1 的所有平面均可写成

$$\begin{aligned} &A_1x+B_1y+C_1z+D_1 \\ &\quad +k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \end{aligned}$$

这里对于固定的 k,它代表一个过直线 L_1 的平面;对于变动的 k,它代表一族平面,族内每一平面都过直线 L_1,称为以 L_1 为轴的有轴平面束.

特别,平面 π_1 垂直平面 π_2 当且仅当 $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

情形 2:直线与平面之间的关系.

(1) 直线 $L_1 /\!/$ 平面 π_1,当且仅当 $\boldsymbol{l}_1 \perp \boldsymbol{n}_1$,即

$$A_1m_1+B_1n_1+C_1p_1=0. \quad ①$$

(2) 直线 $L_1 \perp$ 平面 π_1,当且仅当 $\boldsymbol{l}_1 /\!/ \boldsymbol{n}_1$,即

$$\frac{A_1}{m_1}=\frac{B_1}{n_1}=\frac{C_1}{p_1}.$$

(3) 直线 L_1 在平面 π_1 内,除 ① 成立外,还需点 P_1 在平面 π_1 上.

情形 3:直线与直线之间的位置关系.

(1) 直线 $L_1 /\!/$ 直线 L_2,当且仅当 $\boldsymbol{l}_1 /\!/ \boldsymbol{l}_2$,即 $\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$.

(2) 直线 L_1 与直线 L_2 相交.

不论 L_1 与 L_2 是相交还是平行,都表示 L_1 与 L_2 共面,即 $\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2$ 共面,故 $(\overrightarrow{P_1P_2}, \boldsymbol{l}_1, \boldsymbol{l}_2)=0$,用坐标表示是

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

利用上述所列各种情形的等价条件,可以判定平面、直线之间的位置关系,反之,也可根据平面、直线之间的位置关系,求出相应的轨迹方程. 同时,还可利用上述各种等价关系解决一些相关问题.

2.3.1 试确定 λ 的值,使得平面 $\pi: x+\lambda y-2z-9=0$

(1) 经过点 $(5,-4,6)$;

(2) 平行于平面 $3x+y-6z=0$;

(3) 垂直于平面 $2x+4y+3z=0$.

解 (1) 以 $(5,-4,6)$ 代入平面 π 的方程,得 $5-4\lambda-2\times6-9=0$,确定 $\lambda=-4$,故所求平面为 $x-4y-2z-9=0$.

(2) 两个法向量$(1,\lambda,-2)$和$(3,1,-6)$互相平行,即

$$\frac{1}{3}=\frac{\lambda}{1}=\frac{-2}{-6}.$$

求得 $\lambda=\frac{1}{3}$.

(3) 根据题意$(1,\lambda,-2)$与$(2,4,3)$互相正交,即

$1\times 2+4\times\lambda-2\times 3=0$,求得 $\lambda=1$.

2.3.2 试求两个平面 $\pi_1: 4x+4y-5z-12=0$ 和 $\pi_2: 8x+12y-13z-32=0$ 的交线在 xy 平面上的投影.

解 经过 π_1 和 π_2 交线的平面可写成

$$4x+4y-5z-12+\lambda(8x+12y-13z-32)=0,$$

即

$$(4+8\lambda)x+(4+12\lambda)y+(-5-13\lambda)z-12-32\lambda=0. \quad ①$$

利用投影的性质,要求上述平面与 xy 平面相互正交.故

$$(4+8\lambda,4+12\lambda,-5-13\lambda)\cdot(0,0,1)=0.$$

求得 $\lambda=-\frac{5}{13}$. 代入①得

$$3x-2y+1=0.$$

因此,所求投影为

$$\begin{cases}3x-2y+1=0,\\ z=0.\end{cases}$$

注 从

$$\begin{cases}4x+4y-5z-12=0\\ 8x+12y-13z-32=0\end{cases}$$

消去 z 即得 $3x-2y+1=0$.

2.3.3 试求直线

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-3}{4}$$

在平面

$$\pi: x+2y+z-6=0$$

上的投影.

解 直线 L 可写成

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1},\\[2mm] \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{z-3}{4}.\end{cases}$$

$$L:\begin{cases}x+2y+1=0,\\ 2x-z+1=0.\end{cases}$$

过直线 L 的平面可写作

$$x+2y+1+\lambda(2x-z+1)=0.$$

即

$$(1+2\lambda)x+2y-\lambda z+1+\lambda=0.$$

要求确定 λ 的值,使此平面与平面 π 正交.由

$$(1+2\lambda,2,-\lambda)\cdot(1,2,1)=0$$

求出 $\lambda=-5$,得平面

$$9x-2y-5z+4=0.$$

故所求投影为

$$\begin{cases}9x-2y-5z+4=0,\\ x+2y+z-6=0.\end{cases}$$

注1 若要求直线 L 在 xy 平面上的投影.因为题中 L 用对称方程给出,而 $x+2y+1=0$ 不出现 z,所以,L 在 xy 平面上的投影为

$$\begin{cases}x+2y+1=0,\\ z=0.\end{cases}$$

注2 前面几题用到了有轴平面束,希读者能掌握利用有轴平面束的解题方法.

2.3.4 过四面体 A-BCD 三个面的重心所作的平面必与第四个平面平行.试证之.

证法1 设 $A(a_1,a_2,a_3)$, $B(b_1,b_2,b_3)$, $C(c_1,c_2,c_3)$, $D(d_1,d_2,d_3)$,而 $\triangle ABC$, $\triangle DAB$, $\triangle CDA$ 的重心依次记作 G_1,G_2,G_3,则

$$G_1\left(\frac{a_1+b_1+c_1}{3},\frac{a_2+b_2+c_2}{3},\frac{a_3+b_3+c_3}{3}\right),$$

$$G_2\left(\frac{a_1+b_1+d_1}{3},\frac{a_2+b_2+d_2}{3},\frac{a_3+b_3+d_3}{3}\right),$$

$$G_3\left(\frac{a_1+c_1+d_1}{3},\frac{a_2+c_2+d_2}{3},\frac{a_3+c_3+d_3}{3}\right).$$

于是

$$\overrightarrow{G_1G_2}=\left(\frac{d_1-c_1}{3},\frac{d_2-c_2}{3},\frac{d_3-c_3}{3}\right),$$

$$\overrightarrow{G_1G_3}=\left(\frac{d_1-b_1}{3},\frac{d_2-b_2}{3},\frac{d_3-b_3}{3}\right).$$

因为

$$\overrightarrow{CD}=(d_1-c_1,d_2-c_2,d_3-c_3),$$

$$\overrightarrow{BD}=(d_1-b_1,d_2-b_2,d_3-b_3),$$

故

$$\overrightarrow{CD}=3\overrightarrow{G_1G_2},\ \overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{G_1G_3}.$$

从而

$$\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{BD}=9\overrightarrow{G_1G_2}\times\overrightarrow{G_1G_3}.$$

由$\overrightarrow{CD}\nparallel\overrightarrow{BD}$,知平面 BCD 与平面 $G_1G_2G_3$ 的法向量是平行的,得证.

证法2 适当选择坐标系,使 $\triangle BCD$ 所在平面就是 xy 平面.故可设 $B(b_1,b_2,0)$, $C(c_1,c_2,0)$, $D(d_1,d_2,0)$,而 $A(a_1,a_2,a_3)$.这里 G_1,G_2,G_3 的含义同证法1.显然,G_1,G_2,G_3 的第3个分量都是$\frac{a_3}{3}$,因此,G_1,G_2,G_3 都位于平面 $z=\frac{a_3}{3}$ 上.显然,此平面平行 xy 平面.

2.3.5 试找出三个平面 $\pi_1: x=cy+bz$, $\pi_2: y=az+cx$, $\pi_3: z=bx+ay$ 通过一条直线的条件.

解 $\pi_1: -x+cy+bz=0$；$\pi_2: cx-y+az=0$. 根据题意，π_3 应属于由 π_1,π_2 交线所生成的有轴平面束，即存在 λ，使得

$$-x+cy+bz-\lambda(cx-y+az)=0$$

与 $z=bx+ay$ 相重合. 根据两个平面重合的条件，有

$$\frac{\lambda c-1}{b}=\frac{c-\lambda}{a}=\frac{b+a\lambda}{-1}. \quad ①$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\lambda c-1}{b}=\dfrac{c-\lambda}{a},\\ \dfrac{c-\lambda}{a}=\dfrac{b+a\lambda}{-1}.\end{cases} \quad ②$$

下面分两种情形加以考虑：

情形 1：$a\neq 0$.

如果 $b\neq 0$，那么由 ② 可以消去参数 λ，得到题中条件 $a^2+b^2+c^2+2abc-1=0$. ③

如果 $b=0$，那么由 ① 可得条件 $a^2+c^2=1$. 仍然满足 ③ 式.

情形 2：$a=0$.

此时，$b\neq 0$（见 ① 式）. 由 $c-\lambda=0$ 及 $\dfrac{\lambda c-1}{b}=\dfrac{b}{-1}$，得条件 $b^2+c^2=1$，仍满足 ③ 式. 故 ③ 即为所求的条件.

2.3.6 以定直线

$$L:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\ (mnp\neq 0)$$

为轴线的有轴平面束方程可写作且仅可写作

$$\lambda\left(\frac{x-x_0}{m}\right)+\mu\left(\frac{y-y_0}{n}\right)+\nu\left(\frac{z-z_0}{p}\right)=0, \quad ①$$

这里 λ,μ,ν 为参数，且满足 $\lambda+\mu+\nu=0$ 与 $\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0$.

证明 因直线 $L:\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n},\\ \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{p},\end{cases}$

故通过直线 L 的平面可写成：

$$\alpha\left(\frac{x-x_0}{m}-\frac{y-y_0}{n}\right)+\beta\left(\frac{x-x_0}{m}-\frac{z-z_0}{p}\right)=0$$

（将有轴平面束中的 λ 写成 $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha}$），

即

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{x-x_0}{m}\right)-\alpha\frac{y-y_0}{n}-\beta\cdot\frac{z-z_0}{p}=0.$$

取 $\lambda=\alpha+\beta,\mu=-\alpha,\nu=-\beta$. 显然 $\lambda+\mu+\nu=0$. 又因 α,β 不能同时为 0，故

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2\neq 0.$$

反之，若已给

$$\lambda\left(\frac{x-x_0}{m}\right)+\mu\left(\frac{y-y_0}{n}\right)+\nu\left(\frac{z-z_0}{p}\right)=0.$$

因为 $\lambda=-(\mu+\nu)$，故

$$-(\mu+\nu)\left(\frac{x-x_0}{m}\right)+\mu\left(\frac{y-y_0}{n}\right)+\nu\left(\frac{z-z_0}{p}\right)=0.$$

即

$$\mu\left(\frac{y-y_0}{n}-\frac{x-x_0}{m}\right)+\nu\left(\frac{z-z_0}{p}-\frac{x-x_0}{m}\right)=0.$$

由此表达式可知，它属于以直线 L 为轴的有轴平面束.

2.3.7 假设三个平面两两相交，试证：通过每一交线而垂直于第三个平面的所作三个平面是共轴面.

证明 假设已给的三个平面为

$$\pi_i: f_i\equiv A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0\ (i=1,2,3).$$

因为三个平面两两相交，故三个法向量 $\boldsymbol{n}_i=(A_i,B_i,C_i)$，$i=1,2,3$ 彼此互不平行.

假设过 π_1,π_2 交线的平面为 π_4，则

$$\pi_4: f_4\equiv f_1+\lambda_3 f_2=0$$

即

$$(A_1+\lambda_3A_2)x+(B_1+\lambda_3B_2)y+(C_1+\lambda_3C_2)z+(D_1+\lambda_3D_2)=0.$$

依题设，平面 π_3 与平面 π_4 互相垂直，故

$$A_3(A_1+\lambda_3A_2)+B_3(B_1+\lambda_3B_2)+C_3(C_1+\lambda_3C_2)=0.$$

求得

$$\lambda_3=-\frac{A_1A_3+B_1B_3+C_1C_3}{A_2A_3+B_2B_3+C_2C_3}.$$

同样，过 π_2,π_3 的交线且垂直于平面 π_1 的平面 π_5，可写成

$$f_5\equiv f_2+\lambda_1 f_3=0.$$

过 π_3,π_1 的交线且垂直于平面 π_2 的平面 π_6 可写成

$$f_6\equiv f_3+\lambda_2 f_1=0.$$

仿上讨论可得

$$\lambda_1=-\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{A_3A_1+B_3B_1+C_3C_1},$$

$$\lambda_2=-\frac{A_3A_2+B_3B_2+C_3C_2}{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}.$$

易见 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，故 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 全不为 0. 还有

$$f_5=\lambda_1 f_6-\lambda_1\lambda_2 f_4.$$

于是，π_5 属于由 π_4 和 π_6 的交线所构成的有轴平面束.

2.3.8 当参数 B 和 D 取何值时，才能使直线

$$L:\begin{cases}x-2y+z-9=0,\\ 3x+By+z+D=0\end{cases}$$
位于 xy 平面内.

解 直线 L 的方向矢量为 $l=(1,-2,1)\times(3,B,1)=(-2-B,2,B+6)$. 要使直线 L 位于 xy 平面内，直线 L 应与 $(0,0,1)$ 矢量正交. 由

$$(-2-B,2,B+6)\cdot(0,0,1)=0,$$

得 $B=-6$. 因此

$$L:\begin{cases}x-2y+z-9=0, & ①\\ 3x-6y+z+D=0. & ②\end{cases}$$

要使直线位于 xy 平面内，必须 $z=0$ 属于以 L 为轴的有轴平面束. ② 减去 $3\times$①，得 $2z=27+D$. 于是 $D=-27$. 最后求得 $B=-6$, $D=-27$.

注1 从逆向思路加以考虑. 平面 $3x+By+z+D=0$ 属于以 $x-2y+z-9=0$ 与 $z=0$ 的交线所生成的有轴平面束，故有

$$3x+By+z+D=\alpha(x-2y+z-9)+\beta z.$$

比较 x 的系数，得 $\alpha=3$；比较 z 的系数，得 $\beta=1$. 根据 $\alpha=3$, $\beta=1$ 的值，比较 y 的系数与常数项，立得

$$B=-6,\ D=-27.$$

注2 根据注1的思想，可以考虑更为一般的情形：直线方程

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的系数应满足什么条件，才能使该直线位于 xz 平面内？类似地，可令

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=\alpha(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)+\beta y.$$

比较两边系数得

$$A_1=\alpha A_2,\ B_1=\alpha B_2+\beta,\ C_1=\alpha C_2,\ D_1=\alpha D_2.$$

由此得条件：

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}\neq\frac{B_1}{B_2}\quad(\because\ \beta\neq 0).$$

2.3.9 试求下列直线的方程：

(1) 过点 $P_0(2,3,-1)$，且与直线 $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$ 和直线 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$ 同时正交.

(2) 过点 $P_0(-4,-5,3)$，且与直线 $\frac{x+1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{-1}$ 和直线 $\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{-5}$ 同时相交.

(3) 过点 $P_0(a,b,c)$ 与 Oz 轴相交，且与直线 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ 正交.

(4) 过点 $P_0(-1,0,4)$，且平行于平面

$$3x-4y+z-10=0,$$

又与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$$

相交的直线方程.

解 (1) 因为已给两条直线不平行，故所求直线的方向矢量为 $l=(1,1,1)\times(2,3,4)=(1,-2,1)$. 因此直线 L 的对称方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+1}{1}.$$

(2) 设所求直线为 $\frac{x+4}{m}=\frac{y+5}{n}=\frac{z-3}{p}$. 按题意得两个共面条件：

$$\begin{vmatrix}-1-(-4) & -3-(-5) & 2-3\\ m & n & p\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}=0$$

和

$$\begin{vmatrix}2-(-4) & -1-(-5) & 1-3\\ m & n & p\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}=0.$$

展开行列式，得

$$\begin{cases}m+3p=0,\\ 7m-13n-5p=0.\end{cases}$$

于是

$$m:n:p=3:2:-1.$$

故所求直线为

$$\frac{x+4}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

(3) 假设所求直线为

$$L:\frac{x-a}{m'}=\frac{y-b}{n'}=\frac{z-c}{p'}.$$

由条件 L 与 Oz 轴相交，得

$$\begin{vmatrix}a & b & c\\ m' & n' & p'\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0.$$

即

$$an'-bm'=0. \qquad ①$$

由条件 L 与直线 $\frac{x}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z}{p}$ 正交，得

$$mm'+nn'+pp'=0. \qquad ②$$

由 ①, ② 推出

$$m':n':p'=-ap:-bp:bn+am.$$

故所求直线为

$$\frac{x-a}{-ap}=\frac{y-b}{-bp}=\frac{z-c}{bn+am}.$$

(4) 根据平行平面束，过点 $(-1,0,4)$ 与平面 $3x-4y+z-10=0$ 平行的平面为

$$3x-4y+z-1=0. \qquad ①$$

因为所求直线与直线$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1}=\frac{z}{2}$相交，即与直线

$$\begin{cases}\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{1},\\ \frac{x+1}{3}=\frac{z}{2}\end{cases}$$

相交，所以所求直线位于由该直线为轴的有轴平面束的某一平面内.作

$$x+1-3(y-3)+\lambda[2(x+1)-3z]=0. \quad ②$$

以$(-1,0,4)$代入，求得$\lambda=\frac{3}{4}$.代入②得

$$10x-12y-9z+46=0. \quad ③$$

所求直线既在平面①上，又在平面③上，故其方程为

$$\begin{cases}3x-4y+z-1=0,\\ 10x-12y-9z+46=0.\end{cases}$$

2.3.10 试证：两直线：

$$L_1:\begin{cases}2x-y+3z+3=0,\\ x+10y-21=0.\end{cases}$$

$$L_2:\begin{cases}2x-y=0,\\ 7x+z-6=0.\end{cases}$$

有一公共点，找出这点坐标，和包含这两条直线的平面.

解 直线L_1的方向矢量为$\boldsymbol{l}_1=3(-10,1,7)$，过点$M_1(21,0,-15)$；直线$L_2$的方向矢量为$\boldsymbol{l}_2=(-1,-2,7)$，过点$M_2(0,0,6)$.因为

$$\begin{vmatrix}21 & 0 & -21\\ -10 & 1 & 7\\ -1 & -2 & 7\end{vmatrix}=0,$$

所以L_1与L_2共面.又$\boldsymbol{l}_1 \not\parallel \boldsymbol{l}_2$，故$L_1$与$L_2$相交，必有一个公共点.由

$$\begin{cases}2x-y+3z+3=0,\\ x+10y-21=0,\\ 2x-y=0\end{cases}$$

可求得$x=1,y=2,z=-1$.又$(1,2,-1)$在平面$7x+z-6=0$上，所以L_1和L_2相交于点$(1,2,-1)$，并且，所求平面为

$$\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z+1\\ -10 & 1 & 7\\ -1 & -2 & 7\end{vmatrix}=0,$$

即

$$x+3y+z-6=0.$$

2.3.11 试说明直线

$$L: x=x_0+t\cos\alpha,\ y=y_0+t\cos\beta,$$
$$z=z_0+t\cos\gamma$$

中参数t的几何意义.这里$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为直线$L$的方向矢量的方向余弦.

解 记$P_0(x_0,y_0,z_0)$，并设直线L上的动点为$P(x,y,z)$，则$\overrightarrow{P_0P}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$.于是

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{P_0P}|^2&=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\\ &=(t\cos\alpha)^2+(t\cos\beta)^2+(t\cos\gamma)^2\\ &=t^2,\end{aligned}$$

即 $$|\overrightarrow{P_0P}|=|t|.$$

由此可见，参数方程中参数t的绝对值$|t|$等于直线L上动点$P(x,y,z)$与定点$P_0(x_0,y_0,z_0)$之间的距离.若$\overrightarrow{P_0P}$与$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$方向相同，则$t>0$；若$\overrightarrow{P_0P}$与$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$方向相反，则$t<0$.

注 对于任给的直线参数方程$x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt$.我们总可根据参数方程表达式不是唯一的这一断言，可把此直线写成2.3.11中的形式：

$$\begin{cases}x=x_0+\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}t,\\ y=y_0+\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}t,\\ z=z_0+\frac{p}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}}t.\end{cases}$$

2.3.12 试求点$P_0(1,0,2)$关于

(1) 平面$\pi: x=y$的对称点$P'(x',y',z')$（图2.6）；

(2) 直线$L: x=y=z$的对称点$P''(x'',y'',z'')$（图2.7）.

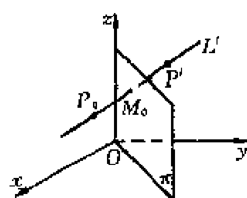


图2.6

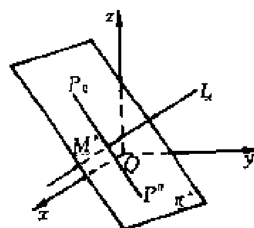


图2.7

解 (1) 过点$P_0(1,0,2)$作平面π的垂线L'，它交平面π于点M_0.直线L'的方向矢量就是平面π的法矢量$(1,-1,0)$，故直线L'：

$$\begin{cases}x=1+\frac{1}{\sqrt{2}}t,\\ y=-\frac{1}{\sqrt{2}}t,\\ z=2.\end{cases}$$

以此代入$x=y$，求得$t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$，再代入L'的方程，得$M_0(\frac{1}{2},\frac{1}{2},2)$.因为线段$P_0P'$的中点为$M_0$，故由中点公式得

$$\frac{1+x'}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{0+y'}{2}=\frac{1}{2},\ \frac{2+z'}{2}=2.$$

求出 $x'=0,y'=1,z'=2$,故 $P'(0,1,2)$.

事实上,当 $t=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ 求得后,根据2.3.11题中的讨论,P' 点所对应的参数值 $t=2\times(-\frac{\sqrt{2}}{2})=-\sqrt{2}$,代入 L' 的方程,立得 $P'(0,1,2)$.

(2) 过点 $P_0(1,0,2)$ 作直线 L 的垂直平面 π^*,交直线 L 于点 M^*,平面 π^* 的法矢量就是直线 L 的方向矢量 $l=(1,1,1)$.故平面

$$\pi^*:1\times(x-1)+1\times(y-0)+1\times(z-2)=0,$$

即

$$\pi^*:x+y+z-3=0.$$

以 $x=y=z$ 代入此方程,得 $M^*(1,1,1)$.因为线段 P_0P'' 的中点为 M^*,故

$$\frac{1+x''}{2}=1,\ \frac{0+y''}{2}=1,\ \frac{2+z''}{2}=1.$$

由此求得 $x''=1,y''=2,z''=0$,最后,$P''(1,2,0)$.

事实上,利用 P_0P'' 的中点 $\left(\frac{1+x''}{2},\frac{0+y''}{2},\frac{2+z''}{2}\right)$ 在直线 L 上,以及 $\overrightarrow{P_0P''}\perp(1,1,1)$.可以列出方程

$$\begin{cases}\dfrac{1+x''}{2}=\dfrac{y''}{2}=\dfrac{2+z''}{2},\\ (x''-1)\times1+(y''-0)\times1+(z''-2)\times1=0.\end{cases}$$

解得 $x''=1,y''=2,z''=0$,即 $P''(1,2,0)$.

2.3.13 求与三条直线

$$\begin{cases}x=0,\\ y=0,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ z=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y-1=0,\\ z+1=0\end{cases}$$

相交的动直线的轨迹方程.

解 根据题意,动直线与已给三条直线相交,故动直线分别位于由 $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 为轴的有轴平面束和以 $\begin{cases}x-1=0\\ z=0\end{cases}$ 为轴的有轴平面束的平面上,即动直线既在平面 $x+k_1y=0$ 上,又在 $x-1+k_2z=0$ 的平面上.设动直线与直线 $\begin{cases}y-1=0\\ z+1=0\end{cases}$ 交于点 $(x_0,1,-1)$,则有

$$\begin{cases}x_0+k_1=0,\\ x_0-1-k_2=0.\end{cases}$$

消去 x_0,得 $k_1+k_2+1=0$.以 $k_1=-\frac{x}{y},k_2=\frac{1-x}{z}$ 代入该方程,化简整理得

$$xy+xz-yz-y=0,$$

即为所求.

2.3.14 求与

$$\begin{cases}x=0,\\ y+z=0,\end{cases}\quad\begin{cases}y=1,\\ z=-1,\end{cases}$$
$$\begin{cases}x=-1,\\ z=1,\end{cases}\quad\begin{cases}x=1,\\ y=-1,\end{cases}$$

4条直线相交的直线方程.

解 过直线 $\begin{cases}x=0\\ y+z=0\end{cases}$ 的平面为

$$y+z+tx=0.$$

考虑此平面与另外三条直线的交点:

与

$$\begin{cases}y+z+tx=0,\\ y=1,\\ z=-1\end{cases}$$

的交点为 $P_1(0,1,-1)$.

与

$$\begin{cases}y+z+tx=0,\\ x=-1,\\ z=1\end{cases}$$

的交点为 $P_2(-1,t-1,1)$.

与

$$\begin{cases}y+z+tx=0,\\ x=1,\\ y=-1\end{cases}$$

的交点为 $P_3(1,-1,1-t)$.

易见,从 P_1,P_2,P_3 三点可得两条直线:

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{t-2}=\frac{z+1}{2},$$
$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{2-t}.$$

按题意要使这两条直线重合,则 $-\frac{1}{1}=\frac{t-2}{-2}=\frac{2}{2-t}$,求得 $t=4$,因此,所求直线为

$$\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{2}.$$

此时,三个交点为 $P_1(0,1,-1),P_2(-1,3,1),P_3(1,-1,-3)$,它们都在所求的直线上.

2.3.15 试求圆周

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-2x+2y=14, & ①\\ 2x-2y+z=1 & ②\end{cases}$$

的圆心和半径.

解 ①代表一个球面 Σ,其方程可写作 $(x-1)^2+(y+1)^2+z^2=16$.故球心 $B(1,-1,0)$,半径为4.

②代表一个平面 π,法矢量为 $\boldsymbol{n}=(2,-2,1)$.球心 B 不在平面 π 上,过球心 B 作平面 π 的垂线 L,则

$$L:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{1}=t. \quad ③$$

以 $x=1+2t, y=-1-2t, z=t$ 代入②得 $t=-\frac{1}{3}$. 代入③,得 $x=\frac{1}{3}, y=-\frac{1}{3}, z=-\frac{1}{3}$,故圆心 $M(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$.

$$|\overrightarrow{BM}|=\sqrt{(1-\frac{1}{3})^2+(-1+\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=1.$$

所以圆心半径为

$$\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}.$$

注 计算圆的半径时,亦可利用球心 B 到平面 π 的距离等于 $\frac{|2\times1+(-2)\times(-1)+1\times0-1|}{3}=1$ 算出 BM 之长.

2.3.16 试求与 xy 平面平行,且与两条异面直线 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 和 $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{b}(ab\neq0)$ 都相交的动直线所生成的轨迹.

解 依题设,动直线落在与 xy 平面相平行的平面 $z=k$ 上,因它与直线 $\begin{cases}x=0,\\y=0\end{cases}$ 相交,故必属于以此直线为轴的有轴平面束 $mx+ny=0$ 中,因此,可设动直线为 $\begin{cases}z=k,\\mx+ny=0.\end{cases}$

由题设,动直线又与直线 $\frac{x-a}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{b}$ 相交,即与直线 $\begin{cases}x-a=0,\\by-z=0\end{cases}$ 相交. 所以四个平面 $z=k, mx+ny=0, x-a=0, by-z=0$ 有交点. 它们的解 $x=a, y=\frac{k}{b}, z=k$ 满足 $mx+ny=0$. 即 $am+\frac{nk}{b}=0$. 以 $k=z, \frac{n}{m}=-\frac{x}{y}$ 代入上述方程,可得

$$ab-\frac{xz}{y}=0,$$

即

$$xz=aby.$$

它代表双曲抛物面.

2.3.17 试求平行于平面 $y+z=0$,且和两个圆周

$$\Gamma_1:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\z=0.\end{cases}$$

$$\Gamma_2:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\y=0\end{cases}$$

相交的动直线的轨迹.

解 设所求动直线分别与 Γ_1 和 Γ_2 交于点 $M_0(x_0,y_0,0)$ 和 $M_1(x_1,0,z_1)$,则直线 M_0M_1:

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{-y_0}=\frac{z-0}{z_1}. \quad ①$$

因为直线 M_0M_1 与平面 $y+z=0$ 平行,所以 $(x_1-x_0,-y_0,z_1)$ 与 $(0,1,1)$ 正交,故有

$$y_0=z_1. \quad ②$$

又

$$\begin{cases}x_0^2+y_0^2=a^2, & ③\\x_1^2+z_1^2=a^2, & ④\end{cases}$$

由②代入③得

$$x_0^2=x_1^2. \quad ⑤$$

分两种情形加以讨论:

情形 1: $y_0=z_1, x_0=x_1$.

由①得

$$x_0=x, y_0=y+z.$$

以此代入③,得轨迹方程

$$x^2+(y+z)^2=a^2.$$

情形 2: $y_0=z_1, x_0=-x_1$.

由①得

$$y_0=y+z, \frac{x-x_0}{-2x_0}=\frac{y-y_0}{-y_0}=\frac{z}{y+z}.$$

由此求得

$$x_0=\frac{x(y+z)}{y-z}.$$

由③知轨迹方程为

$$(y+z)^2[x^2+(y-z)^2]=a^2(y-z)^2.$$

注 本题共设4个参数 x_0,y_0,x_1,y_1,但有5个方程:①中两个方程,还有方程②,③,④. 从这5个方程中消去4个参数,可建立轨迹方程.

§2.4 平面、直线之间的距离和角度

已给点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$;两条直线

$$L_1: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_1+t_1\boldsymbol{l}_1, L_2: \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_2+t_2\boldsymbol{l}_2;$$

两个平面

$$\pi: Ax+By+Cz+D=0,$$

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0.$$

这里 π 和 π_1 的法矢量依次为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$ 和 $\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1)$. $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2$ 分别是 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 点和 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 点的位置矢量,列出计算公式如下:

1. 点 P_0 到平面 π 的距离是

$$\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

2. 点 P_0 到直线 L_1 的距离是

$$\frac{|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{l}_1|}{|\boldsymbol{l}_1|}=|\overrightarrow{P_0P_1}\times\boldsymbol{l}_0|.$$

这里 $\boldsymbol{l}_0=\frac{\boldsymbol{l}_1}{|\boldsymbol{l}_1|}$.

3. 如果直线 L_1 平行平面 π,则 L_1 与 π 之间的距

离就是 L_1 上任意一点到平面 π 的距离(见第1段中讨论).

4. 如果平面 π_1 与平面 π 平行,根据§2.3知,π_1 可写成

$$Ax + By + Cz + k = 0.$$

则两个平行平面之间的距离是

$$\frac{|k - D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5. 设 L_1 与 L_2 是异面直线,则 L_1 与 L_2 之间的距离是

$$\frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2)|}{|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2|} = |\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \boldsymbol{u}_0|,$$

这里 $\boldsymbol{u}_0 = \dfrac{\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2|}$.

6. 设 θ 是两个平面 π 与 π_1 之间的角度,则

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_1|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{n}_1|},$$

且 $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$.

7. 设 θ' 是两条直线 L_1 与 L_2 之间的角度,则

$$\cos\theta' = \frac{|\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_1| \cdot |\boldsymbol{l}_2|},$$

且 $0 \leqslant \theta' \leqslant \frac{\pi}{2}$.

8. 设 φ 是直线 L_1 和平面 π 之间的角度,则

$$\sin\varphi = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{l}_1|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{l}_1|},$$

且 $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$(图2.8).

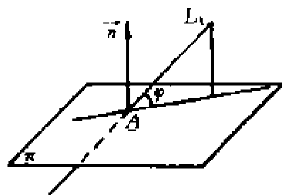


图2.8

灵活运用以上各公式,可以解决相关的一些问题.

2.4.1 自点 $P_0(1,2,-1)$ 到平面 $\pi: 3x - 5y + 4z - 5 = 0$ 作垂线,试找出垂线之长、垂线方程和垂足坐标.

解 平面 π 的法方程为

$$\frac{3x - 5y + 4z - 5}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 4^2}} = 0,$$

即

$$\frac{3x - 5y + 4z - 5}{5\sqrt{2}} = 0.$$

所以垂线之长是

$$\frac{|3 \times 1 + (-5) \times 2 + 4 \times (-1) - 5|}{5\sqrt{2}} = \frac{8}{5}\sqrt{2}.$$

因为垂线的方向矢量是法平面的法矢量(3,-5,4),故垂线方程为

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z+1}{4} (= t).$$

写成参数方程:

$$\begin{cases} x = 1 + 3t, \\ y = 2 - 5t, \\ z = -1 + 4t, \end{cases}$$

以此代入 $3x - 5y + 4z - 5 = 0$,求得 $t = \frac{8}{25}$. 当参数方程中,参数 t 取 $\frac{8}{25}$ 值时,所对应的点就是垂足,故垂足为 $\left(1\frac{24}{25}, \frac{2}{5}, \frac{7}{25}\right)$.

注 垂足 $\left(1\frac{24}{25}, \frac{2}{5}, \frac{7}{25}\right)$ 与 $P_0(1,2,-1)$ 之间的距离是

$$\sqrt{\left(1\frac{24}{25} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{5} - 2\right)^2 + \left(\frac{7}{25} + 1\right)^2} = \frac{8\sqrt{2}}{5},$$

即是垂线之长.

2.4.2 由原点引与定直线

$$L: \frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

垂直相交的直线 L',试求 L' 的方程,并求原点到定直线 L 的距离.

解 为解题方便,可以假设直线方程 L 中的方向数 m, n, p 是方向余弦,即 $m^2 + n^2 + p^2 = 1$.

过原点 O 与直线 L 垂直的平面 π 为

$$mx + ny + pz = 0.$$

由

$$mx + ny + pz = 0$$

与

$$\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n} = \frac{z-c}{p}$$

求出直线 L 与平面 π 的交点

$P_0(a - m(ma + nb + pc), b - n(ma + nb + pc), c - p(ma + nb + cp))$.

因此,直线 L' 的方程为

$$\frac{x}{a - m(ma + nb + pc)} = \frac{y}{b - n(ma + nb + pc)} = \frac{z}{c - p(ma + nb + pc)}.$$

原点 O 到定直线 L 的距离就是 $|\overrightarrow{OP_0}|$.

$$OP_0^2 = [a - m(ma + nb + pc)]^2 + [b - n(ma + nb + pc)]^2 + [c - p(ma + nb + pc)]^2$$

$$= a^2+b^2+c^2+(ma+nb+cp)^2-2am(ma+nb+pc)-2bn(ma+nb+pc)-2cp(ma+nb+pc)$$
$$= a^2+b^2+c^2-(ma+nb+pc)^2$$
$$= (1-m^2)a^2+(1-n^2)b^2+(1-p^2)c^2-2mnab-2npbc-2mpac$$
$$= (n^2+p^2)a^2+(m^2+p^2)b^2+(m^2+n^2)c^2-2mnab-2npbc-2mpac$$
$$= (bp-cn)^2+(cm-ap)^2+(an-bm)^2.$$

∴ 原点到直线 L 的距离为

$$[(bp-cn)^2+(cm-ap)^2+(an-bm)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

注 本题也可用点到直线的距离公式来做. 因为直线 L 过点 $M_0(a,b,c)$, 故 $\overrightarrow{OM_0}=(a,b,c)$. 又因为 $m^2+n^2+p^2=1$, 因此, 点 O 到直线 L 的距离就是

$$|\overrightarrow{OM_0}\times(m,n,p)|$$
$$=|(bp-cn,cm-ap,an-bm)|$$
$$=[(bp-cn)^2+(cm-ap)^2+(an-bm)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

2.4.3 试求下列一点到直线的距离.

(1) 点 $M_0(6,6,-1)$, 直线

$$L:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-1}.$$

(2) 点 $M_1(3,-1,2)$, 直线

$$L_1:\begin{cases}2x-y+z-4=0,\\ x+y-z+1=0.\end{cases}$$

解 (1) 直线 L 的方向矢量为 $(1,2,-1)$. 此方向上的单位矢量为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)$. $M_0'(2,1,-3)\in L$. $\overrightarrow{M_0M_0'}=(-4,-5,-2)$. 因此, 点 M_0 到直线 L 的距离为

$$\left|\overrightarrow{M_0M_0'}\times\frac{(1,2,-1)}{\sqrt{6}}\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}|(-4,-5,-2)\times(1,2,-1)|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{6}}|(9,-6,-3)|$$
$$=\frac{3}{\sqrt{6}}|(3,-2,-1)|$$
$$=\frac{3}{\sqrt{6}}\times\sqrt{14}=\sqrt{21}.$$

(2) 先将直线 L_1 写成对称方程. L_1 的方向矢量为

$$(2,-1,1)\times(1,1,-1)$$
$$=(0,3,3)=3(0,1,1).$$

令 $z=0$, 从

$$\begin{cases}2x-y-4=0\\ x+y+1=0\end{cases}$$

求得 $x=1, y=-2$. 因此, 直线 L_1 过点 $M_1'(1,-2,0)$. 从而直线 L_1 的对称方程为

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{1}.$$

$\overrightarrow{M_1M_1'}=(-2,-1,-2)$, 因此, 点 M_1 到直线 L_1 的距离为

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|(-2,-1,-2)\times(0,1,1)|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\times|(1,2,-2)|=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2.4.4 平面的正侧与有向距离.

利用平面的定侧: 正侧和负侧以及平面到点的有向距离可以解决一些关于距离与角度的计算问题.

根据 2.2.12, 平面法方程为 $\boldsymbol{n}_0\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)=0$, 这里 $\boldsymbol{n}_0$ 是单位法矢量. 设其方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$. 记 $p=\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{r}_0$, 则 $p=\mathrm{proj}_{\boldsymbol{n}_0}\boldsymbol{r}_0$, $|p|$ 等于原点 O 到平面 π 的距离, 平面的法方程为

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0.$$

将 $\boldsymbol{n}_0$ 的始点放在平面上, $\boldsymbol{n}_0$ 的方向所指的一侧称为平面的正侧, 而把另一侧作为平面的负侧. 显然, 给定 $\boldsymbol{n}_0$, 平面的正侧也就确定了. 记 $\theta'=\langle\boldsymbol{n}_0,\boldsymbol{r}_0\rangle$. 若 θ' 为锐角, 则原点 O 在平面的负侧, 故 $p>0$; 若 θ' 为钝角, 则原点 O 在平面的正侧, 故 $p<0$(图 2.9).

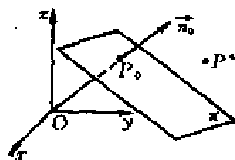


图 2.9

如果平面 π 的一般方程为

$$Ax+By+Cz+D=0,$$

则其法方程为

$$\frac{Ax+By+Cz+D}{\varepsilon\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0,$$

这里 ε 取 $+1$ 或 -1. 为保证原点 O 在平面的负侧, 当 $D\neq0$ 时, 选取 ε 与 D 异号.

给出点 $P^*(x^*,y^*,z^*)$, 位置矢量为 $\boldsymbol{r}^*$, 则平面到 P^* 的有向距离 δ 定义为: $\delta=\mathrm{Proj}_{\boldsymbol{n}_0}\overrightarrow{P_0P^*}$. 这里点 P_0 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$.

$$\delta=\overrightarrow{P_0P^*}\cdot\boldsymbol{n}_0=(\boldsymbol{r}^*-\boldsymbol{r}_0)\cdot\boldsymbol{n}_0$$
$$=\boldsymbol{r}^*\cdot\boldsymbol{n}_0-p$$
$$=x^*\cos\alpha+y^*\cos\beta+z^*\cos\gamma-p.$$

当 P^* 点位于平面正侧时, $\delta>0$; 当 P^* 点位于平面负侧时, $\delta<0$; 当 P^* 点在平面上时, $\delta=0$.

2.4.5 在两个相交平面

$$x+y+z-2=0$$

和

$$x + 2y - z - 1 = 0$$

的交线上，求与两个平行平面 $x + 2y + z - 1 = 0$ 和 $x + 2y + z - 3 = 0$ 等距离的点的坐标.

解 两个平行平面的法方程可写成

$$\frac{x + 2y + z - 1}{\sqrt{6}} = 0$$

和

$$\frac{x + 2y + z - 3}{\sqrt{6}} = 0.$$

设所求点为 $M_0(x_0, y_0, z_0)$，则依题意有

$$\frac{|x_0 + 2y_0 + z_0 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{|x_0 + 2y_0 + z_0 - 3|}{\sqrt{6}} \quad ①$$

依几何意义，点 M_0 必在这两个平行平面之间，因此，点 M_0 位于一个平面的正侧，而位于另一个平面的负侧. 为此，在式 ① 中去掉绝对值符号时，两端取异号，故有

$$\frac{x_0 + 2y_0 + z_0 - 1}{\sqrt{6}} = -\frac{x_0 + 2y_0 + z_0 - 3}{\sqrt{6}}.$$

则 $\begin{cases} x_0 + 2y_0 + z_0 - 2 = 0, \\ x_0 + y_0 + z_0 - 2 = 0, \\ x_0 + 2y_0 - z_0 - 1 = 0. \end{cases}$

求得 $x_0 = \frac{3}{2}, y_0 = 0, z_0 = \frac{1}{2}$，故所求点为 $M_0(\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2})$.

注 $x + 2y + z - 1 = 0$ 与 $x + 2y + z - 3 = 0$ 属于同一个平行平面束，与这两个平行平面等距离的轨迹也是属于此平行平面束的一个平面. 其方程为 $x + 2y + z + \frac{(-1) + (-3)}{2} = 0$，即 $x + 2y + z - 2 = 0$.

2.4.6 试求直线

$$L: \begin{cases} 4x - 5y + 3z - 3 = 0, \\ 4x - 5y + z + 9 = 0 \end{cases}$$

到平面 $\pi: 4x - 5y = 0$ 的距离.

解 直线 L 的方向矢量为 $(4, -5, 3) \times (4, -5, 1) = (10, 8, 0) = 2(5, 4, 0)$. 而平面 π 的法矢量为 $(4, -5, 0)$. 因为 $(5, 4, 0) \cdot (4, -5, 0) = 0$，所以直线 L 与平面 π 互相平行. 今在直线 L 上取点 $M(-\frac{15}{4}, 0, 6)$，则点 M 到平面 π 的距离

$$\frac{|4 \times (-\frac{15}{4}) - 5 \times 0|}{\sqrt{4^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{41}} = \frac{15}{41}\sqrt{41}.$$

这就是直线 L 与平面 π 之间的距离.

2.4.7 设平面与 $20x + 4y - 5z + 7 = 0$ 相平行，且相隔 6 单位的距离，试求它的方程.

解 设所求平面为

$$20x - 4y - 5z + \lambda = 0,$$

它的法方程为

$$\frac{20x - 4y - 5z + \lambda}{21} = 0.$$

任取一点 $M_1(0, 0, \frac{7}{5})$ 在平面 $20x - 4y - 5z + 7 = 0$ 上，两个平行平面之间的距离就是点 M_1 到平面 $\frac{20x - 4y - 5z + \lambda}{20} = 0$ 的距离. 故有

$$\frac{|-5 \times \frac{7}{5} + \lambda|}{21} = 6.$$

即 $|\lambda - 7| = 126$. 求出 $\lambda_1 = 133, \lambda_2 = -119$. 故所求平面的方程为

$$20x - 4y - 5z + 133 = 0$$

与

$$20x - 4y - 5z - 119 = 0.$$

2.4.8 试找出下列各对直线之间的最短距离.

(1) $\frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z + 1}{-1}$，

$\frac{x + 6}{2} = \frac{y + 5}{4} = \frac{z - 1}{-1}$.

(2) $\frac{x - 4}{2} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z - 3}{-1}$，

$\frac{x + 7}{3} = \frac{y + 2}{2} = \frac{z - 1}{1}$.

解 (1) 两条直线的方向矢量依次为 $\boldsymbol{l}_1 = (1, 1, -1)$ 和 $\boldsymbol{l}_2 = (2, 4, -1)$. 故公垂线的方向矢量

$$\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2 = (1, 1, -1) \times (2, 4, -1) = (3, -1, 2).$$

$$\frac{\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2}{|\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2|} = \frac{(3, -1, 2)}{\sqrt{14}}.$$

两条直线分别过点 $P_1(3, 4, -1), P_2(-6, -5, 1)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2} = (-9, -9, 2)$. 故最短距离为

$$\left|(-9, -9, 2) \cdot \frac{(3, -1, 2)}{\sqrt{14}}\right| = \frac{|-14|}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}.$$

(2) 两条直线的方向矢量依次为 $\boldsymbol{l}_1 = (2, 1, -1)$ 和 $\boldsymbol{l}_2 = (3, 2, 1)$. 故公垂线的方向矢量为 $\boldsymbol{l}_1 \times \boldsymbol{l}_2 = (2, 1, -1) \times (3, 2, 1) = (3, -5, 1)$. 类似 (1) 中之解，两条直线分别过点 $M_1(4, -2, 3), M_2(-7, -2, 1)$，$\overrightarrow{M_1M_2} = (-11, 0, -2)$. 故最短距离为

$$\frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot (3, -5, 1)|}{|(3, -5, 1)|} = \frac{|(-11, 0, -2) \cdot (3, -5, 1)|}{\sqrt{35}} = \sqrt{35}.$$

2.4.9 试求两直线

$$L_1: \frac{x - 3}{1} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z + 1}{-1}$$

和

$$L_2: \frac{x + 6}{2} = \frac{y + 5}{4} = \frac{z - 1}{-1}$$

之间的最短距离、公垂线方程和两个垂足 M_1, M_2 的坐标.

解 直线 L_1 过点 $P_1(3,4,-1)$，方向矢量为 $l_1=(1,1,-1)$；直线 L_2 过点 $P_2(-6,-5,1)$，方向矢量为 $l_2=(2,4,-1)$，则公垂线 L 的方向矢量 $l=l_1\times l_2=(1,1,-1)\times(2,4,-1)=(3,-1,2)$. 由上题知最短距离为 $\sqrt{14}$.

过点 P_1 且与 l_1, l 同时平行的平面

$$\pi_1:\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

即

$$x-5y-4z+13=0.$$

过点 P_2 且与 l_2, l 同时平行的平面

$$\pi_2:\begin{vmatrix} x+6 & y+5 & z-1 \\ 2 & 4 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

即

$$x-y-2z+3=0.$$

因此，公垂线 L 的方程为

$$\begin{cases} x-5y-4z+13=0, & ① \\ x-y-2z+3=0. & ② \end{cases}$$

直线 L_1 的参数方程为

$$x=3+t, y=4+t, z=-1-t.$$

代入②，求得 $t=-2$. 于是，直线 L_1 和平面 π_2 的交点 $M_1(1,2,1)$. 同样，直线 L_2 和平面 π_1 的交点 $M_2(-2,3,-1)$. 显然，$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{14}$ 就是 L_1 和 L_2 之间的最短距离.

注 因为 $M_1(x_1,y_1,z_1)\in L_1, M_2(x_2,y_2,z_2)\in L_2$，故

$$\begin{cases} x_1=3+t, \\ y_1=4+t, \\ z_1=-1-t, \end{cases}$$

和

$$\begin{cases} x_2=-6+2t_1, \\ y_2=-5+4t_1, \\ z_2=1-t_1. \end{cases}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(2t_1-t-9, 4t_1-t-9, -t_1+t+2).$$

由于 $\overrightarrow{M_1M_2}\perp(1,1,-1)$ 和 $\overrightarrow{M_1M_2}\perp(2,4,-1)$，故

$$\begin{cases} 7t_1-3t-20=0, \\ 3t_1-t-8=0. \end{cases}$$

解出 $t_1=2, t=-2$. 所以

$M_1(1,2,1), M_2(-2,3,-1), \overrightarrow{M_1M_2}=(-3,1,-2)$、$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{14}$.

公垂线方程为

$$\frac{x-1}{-3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-2}.$$

2.4.10 已知四面体的四个面的方程为

$$y+z=0, \quad ①$$
$$z+x=0, \quad ②$$
$$x+y=0, \quad ③$$
$$x+y+z=a. \quad ④$$

试求：(1) 三对相对棱的最短距离；

(2) 三条公垂线的方程；

(3) 三条公垂线的交点的坐标.

解 由题设知，直线 $\begin{cases} y+z=0, \\ z+x=0 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x+y=0, \\ x+y+z=a \end{cases}$ 构成一组相对棱. 它们的对称方程分别为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},$$

与

$$\frac{x}{-a}=\frac{y}{a}=\frac{z-a}{0}.$$

仿上题的解法，这组相对棱的公垂线的方向矢量为

$$l_1=(1,1,-1)\times(-a,a,0)=a(1,1,2).$$

公垂线长

$$d_1=|(0,0,a)\cdot(1,1,2)|\times\frac{1}{\sqrt{6}}=\frac{2a}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}a}{3}.$$

设公垂线的方程为

$$\frac{x-x_1}{1}=\frac{y-y_1}{1}=\frac{z-z_1}{2}.$$

则 $(1,1,2), (1,1,-1), (x_1-0, y_1-0, z_1-0)$ 三个矢量共面，还有 $(1,1,2), (-a,a,0), (x_1-0, y_1-0, z_1-a)$ 三个矢量也共面，因此

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0, \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1-a \\ -a & a & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_1-y_1=0, \\ x_1+y_1=z_1-a. \end{cases}$$

令 $x_1=0$，求出 $y_1=0, z_1=a$.

此表明公垂线过 $(0,0,a)$ 点，故公垂线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-a}{2}. \quad ⑤$$

类似地

$$\begin{cases} y+z=0, \\ x+y=0 \end{cases} \text{与} \begin{cases} z+x=0, \\ x+y+z=a \end{cases}$$

构成一组相对棱，公垂线长也为$\frac{\sqrt{6}a}{3}$，公垂线方程为

$$\frac{x}{1}=\frac{y-a}{2}=\frac{z}{1}. \qquad ⑥$$

最后一组相对棱是

$$\begin{cases}y+z=0,\\x+y+z=a\end{cases} \text{与} \begin{cases}z+x=0,\\x+y=0.\end{cases}$$

公垂线之长为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$，公垂线方程为

$$\frac{x-a}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}. \qquad ⑦$$

三条公垂线 ⑤,⑥,⑦ 交于一点$(-a,-a,-a)$.

注 在第一组相对棱的讨论中，它们的公垂线既在由 ①,② 所生成的有轴平面束的平面上，又在由 ③,④ 所生成的有轴平面束的平面上，因此，可设公垂线的方程是

$$\begin{cases}x+z+\lambda(y+z)=0,\\x+y+\mu(x+y+z-a)=0.\end{cases}$$

它的方向矢量是

$$(-1-\lambda-\mu,1+\lambda+\lambda\mu,1-\lambda+\mu-\lambda\mu).$$

它既垂直$(1,1,-1)$，又垂直$(-1,1,0)$，因此有

$$\begin{cases}-1+\lambda-2\mu+2\lambda\mu=0,\\2+2\lambda+\mu+\lambda\mu=0.\end{cases}$$

消去μ，得$\lambda=\pm1$，相应地可得$\mu=-2$与$\mu=-\frac{1}{2}$.

当$\lambda=1,\mu=-2$时，得$a=0$，矛盾；当$\lambda=-1,\mu=-\frac{1}{2}$时，求得公垂线方程

$$\begin{cases}x-y=0,\\x+y-z+a=0.\end{cases}$$

根据轮换对称性，知另两条公垂线方程为

$$\begin{cases}y-z=0,\\y+z-x+a=0\end{cases}$$

与

$$\begin{cases}z-x=0,\\z+x-y+a=0.\end{cases}$$

2.4.11 一平面经过$(0,-1,0)$和$(0,0,-1)$两点，且与平面$y+z=7$之间的角度为$\frac{\pi}{3}$，试求此平面的方程.

解 设所求平面为$Ax+By+Cz+D=0$，且$A^2+B^2+C^2=1$. 因为平面过$(0,-1,0)$和$(0,0,-1)$两点，故$-B+D=0$和$-C+D=0$，即$B=D,C=D$.

由题设

$$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{|(A,D,D)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\frac{2|D|}{\sqrt{2}},$$

因此，$|D|=\frac{\sqrt{2}}{4}$. 所设条件为$A^2+B^2+C^2=1$，即

$$A^2+2D^2=1,A=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故所求平面为

$$\sqrt{6}x-y-z-1=0$$

与

$$\sqrt{6}x+y+z+1=0.$$

2.4.12 已给两个相交平面$\pi_1:2x-y+3z-5=0$和$\pi_2:3x+2y-z-3=0$. 试问：

(1) 平面π_1与π_2之间角是多少？

(2) 含原点的二面角是锐角还是钝角？

(3) 点$(2,-1,3)$及原点在π_1,π_2所成的同一个二面角内，或者在相邻的二面角内，或者分别在对棱的二面角内？

解 (1) 平面π_1和平面π_2的法矢量依次为$(2,-1,3)$和$(3,2,-1)$. 设平面π_1与平面π_2之间的角为θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(2,-1,3)\cdot(3,2,-1)|}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=\frac{1}{14},$$

故$\theta=\arccos\frac{1}{14}$. 当然，这也是两个法矢量之间的角度.

(2) 平面π_1和平面π_2的法方程分别为

$$\frac{2x-y+3z-5}{\sqrt{14}}=0$$

与

$$\frac{3x+2y-z-3}{\sqrt{14}}=0.$$

原点都在这两个平面的负侧，由(1) 知，两个法矢量之间的角度为锐角，故含原点的二面角是钝角.

(3) 如(2) 选择两个平面的法方程. 以点$(2,-1,3)$的坐标代入两个平面的法方程，依次得

$$2\times2-1\times(-1)+3\times3-5>0,$$
$$3\times2+2\times(-1)-3\times3-3<0.$$

因此，点$(2,-1,3)$位于平面π_1的正侧，而位于平面π_2的负侧. 所以$(2,-1,3)$与原点位在相邻的二面角内.

注 若$(2,-1,3)$同位于两个平面的负侧，则$(2,-1,3)$与原点在同一个二面角内；若$(2,-1,3)$同位于两个平面的正侧，则$(2,-1,3)$与原点分别在对棱的二面角内.

2.4.13 试求平分两个相交平面二面角的平面方程. 这两个相交平面为

$$\pi_1:x-3y+2z-5=0$$

与

$$\pi_2:3x-2y-z+3=0.$$

解 π_1 的法方程为

$$\frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}}=0;$$

π_2 的法方程为

$$\frac{3x-2y-z+3}{-\sqrt{14}}=0.$$

如此选取的法方程，保证原点都在两个平面的负侧．含原点的二面角的平分面方程为

$$\frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}}=\frac{3x-2y-z+3}{-\sqrt{14}}.$$

这是因为平分面上的点都在两个平面的负侧或都在两个平面的正侧．此时，平分面方程为

$$4x-5y+z-2=0.$$

类似地，不含原点的二面角的平分面方程为

$$\frac{x-3y+2z-5}{\sqrt{14}}=-\left(\frac{3x-2y-z+3}{-\sqrt{14}}\right)$$

即

$$2x+y-3z+8=0.$$

注 两个平分面的法矢量 $(4,-5,1)$ 与 $(2,1,-3)$ 正交，因此，两个平分面互相正交．

2.4.14 试证：$x^2-y^2-z^2+2yz=0$ 表示一对相交平面，并求它们之间的角度．

证明 $x^2-y^2-z^2+2yz=0$ 可分解成

$$(x+y-z)(x-y+z)=0,$$

即

$$x+y-z=0 \quad 与 \quad x-y+z=0.$$

因为两个法矢量 $(1,1,-1)$ 与 $(1,-1,1)$ 不平行，故它们代表一对相交平面．设它们之间的角度为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|(1,1,-1)\cdot(1,-1,1)|}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{3},$$

故 $\theta=\arccos\frac{1}{3}$．

2.4.15 试求通过点 $A(0,0,4)$，$B(2,2,0)$ 两点的直线，并求此直线与平面 $x+y-z=0$ 的交点及它们之间的角．

解 由直线的两点式方程，得直线

$$AB:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{-2}=t.$$

它的方向矢量为 $(1,1,-2)$，参数方程为

$$x=t,y=t,z=4-2t.$$

代入平面方程 $x+y-z=0$，得 $4t-4=0$，$t=1$．此表明交点的参数取值 1，因此，交点为 $(1,1,2)$．

设直线 AB 与已给平面之间的角为 φ，则

$$\sin\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{|(1,1,-2)\cdot(1,1,-1)|}{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

故 $\varphi=\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{3}$．

2.4.16 设 P 是第一卦限内一点，自 P 作 xOz 及 xOy 平面的垂线 PM 及 PN，又 OP 与 MON 平面所成的角为 θ，而 OP 与三个坐标平面所成的角依次为 α，β，γ，试证：

$$\csc^2\theta=\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma.$$

证明 如图 2.10 所示，$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$，$\overrightarrow{OM}=(x,0,z)$，$\overrightarrow{ON}=(x,y,0)$．平面 MON 的法矢量 $\boldsymbol{n}=\overrightarrow{OM}\times\overrightarrow{ON}=(x,0,z)\times(x,y,0)=(-yz,zx,xy)$．则

$$\begin{aligned}\sin^2\theta&=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)^2=\left(\frac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}\right)^2\\&=\left(\frac{|(-yz,zx,xy)\cdot(x,y,z)|}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}\right)^2\\&=\left(\frac{xyz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2}}\right)^2\\&=\frac{x^2y^2z^2}{(x^2+y^2+z^2)(y^2z^2+z^2x^2+x^2y^2)}.\end{aligned}$$

从图中可见，

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{|\overrightarrow{ON}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{ON}|\cdot|\overrightarrow{OP}|}\\&=\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\\&=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.\end{aligned}$$

$$\csc^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{1-\cos^2\alpha}=\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}.$$

同理

$$\csc^2\beta=\frac{x^2+y^2+z^2}{y^2},\csc^2\gamma=\frac{x^2+y^2+z^2}{x^2}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\csc^2\alpha+\csc^2\beta+\csc^2\gamma\\&=(x^2+y^2+z^2)\left(\frac{1}{z^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}\right)\\&=\frac{(x^2+y^2+z^2)(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2)}{x^2y^2z^2}\\&=\csc^2\theta.\end{aligned}$$

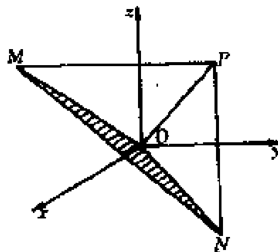


图 2.10

2.4.17 试求通过坐标原点，且与三个平面 $4y=3x$，$y=0$ 和 $z=0$ 成相等角度的直线方程，并求此角度 φ．

解 已给三个平面的单位法矢量依次为 $\boldsymbol{n}_1=(\frac{3}{5},-\frac{4}{5},0)$, $\boldsymbol{n}_2=(0,1,0)$, $\boldsymbol{n}_3=(0,0,1)$. 设直线的方向矢量为 $\boldsymbol{l}=(m,n,p)$, 且 $m^2+n^2+p^2=1$, 由题设知

$$\sin\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\varphi)=|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}_1|=|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}_2|=|\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}_3|.$$

这里 $|\boldsymbol{l}|=|\boldsymbol{n}_1|=|\boldsymbol{n}_2|=|\boldsymbol{n}_3|=1$. 因此

$$\frac{1}{5}|3m-4n|=|n|=|p|.$$

由 $\frac{1}{5}|3m-4n|=|n|$ 解得 $m=3n$, 或者 $3m=-n$. 再由 $n=\pm p$, 可知 $\boldsymbol{l}=(3,1,1)$ 或者 $(3,1,-1)$ 或者 $(-1,3,3)$ 或者 $(-1,3,-3)$. 故所求的 4 条直线为

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1},\ \frac{x}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1},\ \frac{x}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{3}$$

和 $\frac{x}{-1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{-3}$.

2.4.18 试求经过两平面 $x+5y+z=0$ 与 $x-z+4=0$ 的交线, 且与平面 $x-4y-8z+12=0$ 之间的角为 $\frac{\pi}{4}$ 的平面方程.

解 利用有轴平面束, 可设所求平面为

$$x-z+4+\lambda(x+5y+z)=0,$$

即

$$(1+\lambda)x+5\lambda y+(\lambda-1)z+4=0.$$

它的法矢量为 $(1+\lambda,5\lambda,\lambda-1)$. 依题设 $(1+\lambda,5\lambda,\lambda-1)$ 与 $(1,-4,-8)$ 之间的角度为 $\frac{\pi}{4}$, 故

$$\frac{|(1+\lambda,5\lambda,\lambda-1)\cdot(1,-4,-8)|}{\sqrt{(1+\lambda)^2+(5\lambda)^2+(\lambda-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-4)^2+(-8)^2}}=\cos\frac{\pi}{4}.$$

化简整理可得

$$\frac{|1-3\lambda|}{\sqrt{27\lambda^2+2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

两边平方再化简, 得

$$9\lambda^2=-12\lambda.$$

求出 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-\frac{4}{3}$. 故所求平面为

$$x-z+4=0$$

与

$$x+20y+7z-12=0.$$

注 在解本题时, 假设所求平面为 $x-z+4+\lambda(x+5y+z)=0$, 因为 $x-z+4=0$ 是一个解, 故相应的 λ 的取值为 0; 假设所求平面写成 $x+y+z+\mu(x-z+4)=0$, 则因为 $x-z+4=0$ 是一个解, 相应的 μ 的值就为 ∞.

§2.5 柱面方程(参数法应用之一)

设 Γ 是一条空间曲线, $\boldsymbol{l}$ 是一个定方向. 过 Γ 上每一点作平行于 $\boldsymbol{l}$ 的直线, 其所产生的曲面称为柱面. Γ 叫做柱面的准线, 每一位置的动直线叫做柱面的母线. 称 $\boldsymbol{l}$ 是柱面的方向.

假设 $\boldsymbol{l}=(m,n,p)$,

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$$

则以 Γ 为准线, 以 $\boldsymbol{l}$ 为母线方向的柱面方程为

$$\begin{cases}F(x+mt,y+nt,z+pt)=0,\\G(x+mt,y+nt,z+pt)=0.\end{cases}$$

这里 t 是参数, 消去参数 t 就是柱面方程.

事实上, 设 $P(x,y,z)$ 是柱面上任意一点, 过点 P 的母线 L 与准线 Γ 交于点 $Q(x',y',z')$, 则 $\overrightarrow{PQ}\,/\!/\,\boldsymbol{l}$. 于是 $\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p}=t$. 这里 t 是参数, t 的值依赖于点 $P(x,y,z)$ 在柱面上的位置.

因为 $Q(x',y',z')\in\Gamma$, 所以

$$\begin{cases}F(x',y',z')=0, & ①\\G(x',y',z')=0. & ②\end{cases}$$

在 $\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p}$ 中, 独立方程只有两个. 如果取

$$\frac{x'-x}{m}=\frac{y'-y}{n}, \qquad ③$$

$$\frac{y'-y}{n}=\frac{z'-z}{p}, \qquad ④$$

那么, 在①, ②, ③, ④这四个方程中, 将 x',y',z' 看成参数, 从这四个方程中消去三个参数, 所得到关于 x,y,z 的方程就是所求的柱面方程. 这就是参数消去法的解题思想.

2.5.1 试求下面的柱面方程

(1) 准线 $\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1,\\z=2,\end{cases}$

母线平行 Oz 轴;

(2) 准线 $\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{4}-z^2=0,\\y=3,\end{cases}$

母线平行 Oy 轴.

解 (1) 因为母线平行 Oz 轴, 所以柱面方程中不出现变量 z, 形如 $f(x,y)=0$. 今在准线 Γ 方程中消去变量 z, 即以 $z=2$ 代入第一个方程即得所求柱面方程为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\frac{5}{9}.$$

(2) 仿(1)的解法,柱面方程就是$\frac{x^2}{4}-z^2=0$.

注 $f(x,y)=0$代表以$\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$为准线,母线平行$Oz$轴的柱面方程.

事实上,若$P(x_0,y_0,z_0)$为柱面上任意一点,因为母线平行Oz轴,故过点P的母线在柱面上,其方程为$\begin{cases}x=x_0,\\ y=y_0.\end{cases}$它与准线$\Gamma$交于点$M(x_0,y_0,0)$.因为$M\in\Gamma$,故$f(x_0,y_0)=0$,因此,柱面方程为$f(x,y)=0$.

2.5.2 已知准线

$$\Gamma:\begin{cases}x+y-z-1=0,\\ x-y+z=0,\end{cases}$$

母线平行于直线$L:x=y=z$,试求柱面方程.

解法1 设$P(x,y,z)$为所求柱面上任意一点,过点P的母线交Γ于点$M(x_0,y_0,z_0)$,则由$\overrightarrow{PM}\parallel L$知

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{1}=t,$$

即$x_0=x-t,y_0=y-t,z_0=z-t$.

由$M(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$,知

$$\begin{cases}(x-t)+(y-t)-(z-t)-1=0,\\ (x-t)-(y-t)+(z-t)=0,\end{cases}$$

消去参数t,得$2y-2z-1=0$,它代表一个平面,由此可见,平面是最简单的柱面.

解法2 因为准线Γ是一条直线,依柱面的几何意义,所求柱面是一个平面.设此平面为$Ax+By+Cz+D=0$,它平行矢量$(1,1,1)$,故$A+B+C=0$.

因为准线Γ在所求柱面(即平面)上,把z看成参数,从准线Γ的方程中解出$x=1$与$y=z+\frac{1}{2}$,代入$Ax+By+Cz+D=0$,有

$$\frac{1}{2}A+B(z+\frac{1}{2})+Cz+D=0.$$

因为对任意的z成立,所以有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+D=0,\\ B+C=0.\end{cases}$$

结合$A+B+C=0$,求出$A:B:C:D=0:1:(-1):(-\frac{1}{2})$.故所求方程为$y-z-\frac{1}{2}=0$.

2.5.3 试求与直线$x=y=z$的距离等于$\frac{\sqrt{3}}{3}$的点的轨迹.

解 直线$x=y=z$过原点,且方向矢量为$(1,1,1)$.易见,$(1,1,1)$方向上的单位矢量为$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$.

设$P(x,y,z)$为轨迹上任意一点,则$\overrightarrow{OP}=(x,y,z)$.依条件,点$P$到直线$x=y=z$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{3}$.由点到直线的距离的计算公式,有

$$\left|\overrightarrow{OP}\times\frac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}\right|=\frac{1}{\sqrt{3}},$$

即 $|(x,y,z)\times(1,1,1)|=1$.

故所求轨迹方程为

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=1.$$

或写成

$$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2xz-1=0.$$

注 求与两球面$x^2+y^2+z^2=1$和$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$均外切的圆柱面方程,相当于轴线方程为$x=y=z$,圆柱面半径为1的圆柱面方程的求解问题.可参阅本题解之.

2.5.4 柱面Σ的母线方向为$(2,5,8)$,并且Σ与球面$x^2+y^2+z^2=1$相外切,试求Σ的方程.

解 根据几何意义,所求的柱面Σ是圆柱面.圆柱面的轴线为$\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{8}$,圆柱面的半径为1.故$\Sigma$的方程是

$$\frac{|(x,y,z)\times(2,5,8)|}{\sqrt{93}}=1.$$

即

$$(8y-5z)^2+(2z-8x)^2+(5x-2y)^2=93.$$

2.5.5 试证:以定方向(m,n,p)为切线方向,球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的切线必产生圆柱面.

证明 设切线方程为

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p},$$

其中(x_0,y_0,z_0)为切点.依切点的性质,直线$x=x_0+mt,y=y_0+nt,z=z_0+pt$与球面$x^2+y^2+z^2=R^2$有重合的交点.利用$x_0^2+y_0^2+z_0^2=R^2$,得

$$(m^2+n^2+p^2)t^2+2(x_0m+y_0n+z_0p)t=0.$$

因为有二重根,故

$$x_0m+y_0n+z_0p=0. \quad ①$$

因此,切点的轨迹为

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2,\\ xm+yn+zp=0,\end{cases} \quad ②$$

这代表一个圆周,并且其所在平面垂直于切线方向(m,n,p).于是,以Γ为准线,母线平行于(m,n,p)的柱面就是切线的轨迹,它是一个圆柱面.

注1 假设(x_0,y_0,z_0)为切点,则点(x_0,y_0,z_0)处的切平面为$x_0x+y_0y+z_0z=R^2$.因为切线平行(m,n,p),故(m,n,p)与切平面的法矢量(x_0,y_0,z_0)相垂直.于是$x_0m+y_0n+z_0p=0$,这就是方程①.

注2 根据本题的讨论,以

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\2x+5y+8z=0\end{cases}$$

为准线、母线方向为(2,5,8)的柱面方程就是$(8y-5z)^2+(2z-8x)^2+(5x-2y)^2=93$.(参阅2.5.10)

2.5.6 试求通过点$M_0(2,-1,1)$,并以直线

$$\begin{cases}x=3t+1,\\y=2t-2,\\z=t+2\end{cases}$$

为轴的圆柱面的方程.

解 圆柱的轴过点$(1,-2,2)$,且以$(3,2,1)$为方向矢量.设$P(x,y,z)$为圆柱面上任意一点,依题意P点到轴线的距离等于M_0点到轴线的距离.根据点到直线距离的计算公式,有

$$\frac{|(x-1,y+2,z-2)\times(3,2,1)|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{|(2-1,-1+2,1-2)\times(3,2,1)|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}},$$

即

$$|(y-2z+6,-x+3z-5,2x-3y-8)|=|(3,-4,-1)|,$$

$$(y-2z+6)^2+(-x+3z-5)^2+(2x-3y-8)^2=26.$$

化简整理得圆柱面方程

$$5x^2+10y^2+13z^2-12xy-4yz-6zx-22x+60y-54z+99=0$$

2.5.7 试求以

$$\Gamma:\begin{cases}x+y-z=0,\\4y^2-2z^2+x-3y-3z-2=0\end{cases}$$

为准线,母线与直线$L:2x=-2y=z$平行的柱面方程.

解 直线$L:\frac{x}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{2}$,故其方向矢量为$(1,-1,2)$,即柱面的母线方向为$(1,-1,2)$.设$P(x,y,z)$为所求柱面上任意一点.过点$P$的母线交准线$\Gamma$于点$M(x_0,y_0,z_0)$,因为$\overrightarrow{MP}\,/\!/\,(1,-1,2)$,故

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{-1}=\frac{z-z_0}{2}=t. \quad ①$$

因为$M\in\Gamma$,所以

$$\begin{cases}x_0+y_0-z_0=0, & ②\\4y_0^2-2z_0^2+x_0-3y_0-3z_0-2=0. & ③\end{cases}$$

由①得

$$x_0=x-t,\ y_0=y+t,\ z_0=z-2t. \quad ④$$

以④代入②,得$t=\frac{z-x-y}{2}$.再以此t值代入④,得

$$x_0=\frac{3x+y-z}{2},\ y_0=\frac{-x+y+z}{2},$$

$$z_0=x+y.$$

将它代入③,化简整理后得柱面方程

$$x^2+y^2-z^2+6xy-2yz+2xz+4y+2z+2=0.$$

注 从①,②,③的四个独立方程中,消去三个参数x_0,y_0,z_0就能求得柱面方程.为使参数消去法切实可行,在①中引入辅助参数t,从五个方程中消去四个参数,以求得柱面方程.这种做法是常用的.

2.5.8 试求以

$$\Gamma:\begin{cases}(x-1)^2+(y+3)^2+(z-2)^2=25,\\x+y-z+2=0\end{cases}$$

为准线,母线平行于直线$\begin{cases}y=x,\\z=0\end{cases}$的柱面方程.

解 母线的方向为

$$\left(\begin{vmatrix}-1&0\\0&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}\right)=-(1,1,0).$$

假设$P(x,y,z)$为柱面上任意一点,过点P的母线与准线Γ交于点$M(x_0,y_0,z_0)$,则$\overrightarrow{MP}\,/\!/\,(1,1,0)$.于是

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{0},$$

即

$$\begin{cases}x-x_0=y-y_0, & ①\\z-z_0=0. & ②\end{cases}$$

还有

$$\begin{cases}(x_0-1)^2+(y_0+3)^2+(z_0-2)^2=25, & ③\\x_0+y_0-z_0+2=0. & ④\end{cases}$$

从①,②,④求得

$$x_0=\frac{x-y+z-2}{2},$$

$$y_0=\frac{-x+y+z-2}{2},$$

$$z_0=z.$$

以此代入③,有

$$\left(\frac{x-y+z-2}{2}-1\right)^2+\left(\frac{-x+y+z-2}{2}\right)^2+(z-2)^2=25.$$

化简整理可得

$$(x-y)^2+3z^2-8(x-y)-8z-26=0.$$

这就是所求的柱面方程.

注1 本题中,从①,②,③,④四个方程中,消去三个参数x_0,y_0,z_0,而求得柱面方程.

注2 从Γ的表达式可知,Γ是球面与平面的交线,Γ代表一个圆周,为此所求的柱面是圆柱面.

2.5.9 试求以

$$\Gamma:\begin{cases}x+y+z=0,\\x^3+y^3+z^3-1=0\end{cases}$$

为准线,以直线$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$为母线的柱面方程.

解 设 $P(x,y,z)$ 为柱面上任意一点,仿2.5.7,我们有

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{2}=\dfrac{z-z_0}{3}=t, & ①\\ x_0+y_0+z_0=0, & ②\\ x_0^3+y_0^3+z_0^3-1=0. & ③\end{cases}$$

由①得

$$x_0=x-t,y_0=y-2t,z_0=z-3t. \quad ④$$

以④代入②,得 $t=\dfrac{x+y+z}{6}$.再以此 t 值代入④,得

$$\begin{cases}x_0=x-\dfrac{x+y+z}{6}=\dfrac{5x-y-z}{6},\\ y_0=\dfrac{2y-x-z}{3}, & ⑤\\ z_0=\dfrac{z-x-y}{2}.\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}&x_0^3+y_0^3+z_0^3\\ &=(x_0+y_0+z_0)(x_0^2+y_0^2+z_0^2-x_0y_0-y_0z_0\\ &\quad -z_0x_0)+3x_0y_0z_0.\end{aligned}$$

根据②,有

$$x_0^3+y_0^3+z_0^3=3x_0y_0z_0.$$

因此,③变成

$$3x_0y_0z_0=1.$$

以⑤代入此式,得

$$(5x-y-z)(2y-x-z)(z-x-y)-12=0.$$

这就是所求的柱面方程.

注 从这几例可见,利用参数消去法解题是一个好的解题方法.

2.5.10 试证:二次曲面

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2=1$$

代表一个圆柱面,并求出它的轴线方程和圆柱面半径.

证明 根据2.5.3和2.5.4的启发,已给曲面方程的左边相似于两个矢量外积的模的表达式.因为

$$\begin{aligned}&(x,y,z)\times(a,b,c)\\ &=(cy-bz,az-cx,bx-ay),\end{aligned}$$

故

$$(cy-bz)^2+(az-cx)^2+(bx-ay)^2=1$$

可改写成

$$\frac{|(x,y,z)\times(a,b,c)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

此式代表动点 $P(x,y,z)$ 到定直线 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ 保持常距离 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ 的点的轨迹方程,所以原曲面代表一个圆柱面.圆柱面的半径为 $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$,轴线为 $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

2.5.11 试求平行于定直线 $y=mx,z=nx$,且与定圆 $x^2+y^2+z^2=a^2,z=0$ 相交的动直线所生成的曲面方程.

解 定直线的方向矢量为 $(m,-1,0)\times(n,0,-1)=(1,m,n)$,这就是母线的方向.柱面的准线为

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=0.\end{cases}$$

仿2.5.2与2.5.3,有

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t,$$

其中 (x,y,z) 为柱面上任意一点,而 $(x_0,y_0,z_0)\in\Gamma$.

将 $x_0=x-t,y_0=y-mt,z_0=z-nt$ 代入准线 Γ 的方程,得

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y-mt)^2=a^2,\\ z-nt=0.\end{cases}$$

以 $t=\dfrac{z}{n}$ 代入上面第一个方程,得

$$\left(x-\frac{z}{n}\right)^2+\left(y-\frac{mz}{n}\right)^2=a^2,$$

即

$$(nx-z)^2+(ny-mz)^2-n^2a^2=0.$$

2.5.12 试求以三条直线 $L_1:x=y=z;L_2:y=x+1,z=x+2;L_3:y=x+2,z=x+1$ 为母线的圆柱面方程.

解法1 柱面的母线方向为 $(1,1,1)$,过原点 O 作平面 π 与 $(1,1,1)$ 相垂直.平面 π 与 L_1,L_2,L_3 三条母线依次交于点 $(0,0,0),(-1,0,1),(-1,1,0)$.过此三点作一单位球面,其方程为

$$x^2+y^2+z^2+2x=0.$$

这样,柱面的准线方程可写为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2x=0,\\ x+y+z=0.\end{cases}$$

仿2.5.8和2.5.9的讨论,有

$$\begin{cases}\dfrac{x-x_0}{1}=\dfrac{y-y_0}{1}=\dfrac{z-z_0}{1}=t, & ①\\ x_0+y_0+z_0=0, & ②\\ x_0^2+y_0^2+z_0^2+2x_0=0. & ③\end{cases}$$

由①,②,③可得

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y-t)^2+(z-t)^2+2(x-t)=0,\\ t=-\dfrac{1}{3}(x+y+z).\end{cases}$$

消去参数 t,化简整理求得柱面方程为

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+2x-y-z$$

$= 0.$ ④

解法 2 因为母线的方向是(1,1,1),所以圆柱面的轴线与 xy 平面相交,设交点为 $Q(a,b,0)$. 于是可令轴线方程为

$$\frac{x-a}{1}=\frac{y-b}{1}=\frac{z}{1}.$$

将 L_1,L_2,L_3 三条母线写成对称方程的形式,有

$$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1};$$

$$L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{1};$$

$$L_3:\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}.$$

记 $P_1(-1,0,1),P_2(-1,1,0)$, 则 $\overrightarrow{OQ}=(a,b,0)$, $\overrightarrow{P_1Q}=(a+1,b,-1)$, $\overrightarrow{P_2Q}=(a+1,b-1,0)$.

依题中条件,点 $Q(a,b,0)$ 到三条母线 L_1,L_2 和 L_3 的距离是相等的,因此

$$\frac{|(a,b,0)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{|(a+1,b,-1)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{|(a+1,b-1,0)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}},$$

即

$$\begin{aligned}&|(b,-a,a-b)|\\=&|(b+1,-(a+2),a-b+1)|\\=&|(b-1,-(a+1),a-b+2)|.\end{aligned}$$

由后一等式确定 $b=0$,再由前一等式确定 $a=-1$. 故轴线为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}.$$

点 $Q(-1,0,0)$ 到轴线的距离是

$$\frac{|(b,-a,a-b)|}{\sqrt{3}}.$$

令 $a=-1,b=0$,故距离为 $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

仿 2.5.3 中的解法,有

$$\frac{|(x+1,y,z)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}},$$

即

$$(y-z)^2+(x-z+1)^2+(x-y+1)^2=2.$$

化简整理得 ①,即

$$x^2+y^2+z^2-(xy+yz+zx)+2x-y-z=0.$$

2.5.13 试求下列曲线在三个坐标平面上的投影柱面:

(1) $x^2+y^2+z^2=25, x^2+4y^2-z^2=0$;

(2) $x^2+y^2-z-1=0, x^2-y^2-z+1=0$.

解 (1) 已给的曲线是球面与二阶锥面的交线,它们代表两个圆周,在 xy 平面上的投影柱面,就是以已给曲线为准线,母线与 Oz 轴平行的柱面,根据 4.5.1 知,只要消去变量 z 即可. 因此,在 xy 平面上的投影柱面是

$$2x^2+5y^2=25.$$

类似地,消去变量 y 和消去变量 x,依次可得已给曲线在 xz 平面和 yz 平面上的投影柱面. 它们的方程分别是 $3x^2+5z^2=100$ 与 $3y^2-2z^2+25=0$.

(2) 已给曲线是椭圆抛物面与双曲抛物面的交线,仿(1) 的讨论,在 xy 平面上的投影柱面为 $y^2-1=0$;在 yz 平面上的投影柱面为 $y^2-1=0$;在 zx 平面上的投影柱面为 $x^2-z=0$.

注 在(1) 中,已给曲线在 xy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases}2x^2+5y^2=25,\\z=0.\end{cases}$$

也就是投影柱面与相应的坐标平面的交线.

2.5.14 设与直线

$$L:\begin{cases}x=0,\\y=z\end{cases}$$

平行的光线照射在球面 $x^2+y^2+z^2=4z$ 上,试找出球面在 xy 平面上影子的边界.

解 直线 L 的方向矢量为(0,1,1),故平行光线与(0,1,1) 平行,与球面相切的光线构成一个柱面.

过球心(0,0,2) 且与(0,1,1) 方向垂直的平面方程是

$$y+z-2=0.$$

构作曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2-4z=0,\\y+z-2=0.\end{cases}$$

将以 Γ 为准线,母线方向为(0,1,1) 的柱面记作 Σ,则柱面 Σ 与平面 $z=0$ 的交线即为所求.

设 $P(x,y,z)$ 为 Σ 上任意一点,过点 P 的母线交准线 Γ 于点 $M(x_0,y_0,z_0)$,则由 $\overrightarrow{MP}$ 与(0,1,1) 平行,得

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{1}=\frac{z-z_0}{1}=t, \quad ①$$

即 $x_0=x, y_0=y-t, z_0=z-t$. ②

因为 $M\in\Gamma$,故

$$\begin{cases}y_0+z_0-2=0, & ③\\x_0^2+y_0^2+z_0^2-4z_0=0. & ④\end{cases}$$

以 ② 代入 ③,得 $t=\frac{y+z-2}{2}$,再代入 ②,得

$$x_0=x, y_0=\frac{y-z+2}{2},$$

$$z_0=\frac{-y+z-2}{2}.$$

将它们代入 ④,化简整理后可得柱面 Σ 的方程

$$2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4y - 4z - 4 = 0.$$

因此,所求影子的边界是

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 - 2yz + 4y - 4z - 4 = 0, \\ z = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 4y - 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

2.5.15 试求以

$$\Gamma: \begin{cases} x = f(t), \\ y = h(t), \\ z = g(t) \end{cases}$$

为准线,母线与 $\boldsymbol{l} = (m, n, p)$ 平行的柱面方程.

解 设 $P(x, y, z)$ 为柱面上任意一点,过点 P 的母线与准线 Γ 交于点 $M(x_0, y_0, z_0)$,它们相应的参数值就不妨记作 t. 因为 $\overrightarrow{MP} \parallel \boldsymbol{l}$,故

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} = \rho.$$

这里参数 ρ 依赖于 $P(x, y, z)$,而参数 t 也依赖于 P 点的位置. 于是

$$x = x_0 + m\rho, y = y_0 + n\rho, z = z_0 + p\rho.$$

而 $x_0 = f(t), y_0 = h(t), z_0 = g(t)$. 故

$$x = f(t) + m\rho, y = h(t) + n\rho, z = g(t) + p\rho \quad ①$$

这就是柱面的参数方程,其中 ρ, t 是两个参数.

注 1 若记 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ 表示柱面上任意一点 P 的位置矢量,令 $\boldsymbol{a}(t) = (f(t), h(t), g(t))$,则有

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{a}(t) + \rho \cdot \boldsymbol{l}.$$

这就是柱面的矢量方程.

注 2 设准线 $\Gamma: x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$,这里 $a > 0, b > 0$. 母线与 Oz 轴平行,则柱面方程是

$$\begin{cases} x = a\cos t + 0 \times \rho, \\ y = a\sin t + 0 \times \rho, \\ z = bt + 1 \times \rho. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt + \rho. \end{cases}$$

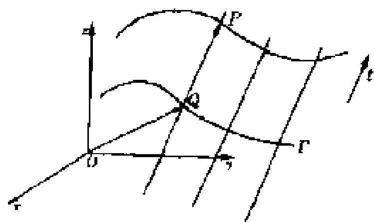


图 2.11

从前两个方程消去 t 即得 $x^2 + y^2 = a^2$,它代表圆柱面. 称这里的准线 $\Gamma: x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ 为圆柱螺线.

进一步,如果母线的方向是(1,1,1),那么计算就要复杂一些了.

注 3 如图 2.11 所示,准线 Γ 上的点的位置矢量为 $\overrightarrow{OQ} = (f(t), g(t), h(t))$. 设 P 为柱面上任意一点,则 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}$. 因为 $\overrightarrow{QP} \parallel \boldsymbol{l}$,所以 $\overrightarrow{QP} = \rho \boldsymbol{l} = (m\rho, n\rho, p\rho)$. 因此有 $\boldsymbol{r} = (f(t), h(t), g(t)) + \rho(m, n, p)$. 即为 ①.

§ 2.6 锥面方程(参数法应用之二)

设 Γ 是一条空间曲线,定点 $P_0 \in \Gamma$,过 Γ 每一点作与点 P_0 的连线,其所产生的曲面称为锥面,Γ 叫做锥面的准线,每一位置的动直线叫做锥面的母线. 称 P_0 为锥面的顶点.

假设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_0$,空间曲线

$$\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ G(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

则以 P_0 为顶点,以 Γ 为准线的锥面方程是

$$\begin{cases} F(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0, \\ G(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), z_0 + t(z - z_0)) = 0. \end{cases}$$

这里 t 是参数,消去参数 t 就是所求的锥面方程.

事实上,设 $P(x, y, z) (P \neq P_0)$ 是所求锥面上任意一点,母线 P_0P 与准线 Γ 交于点 $Q(x', y', z')$. 则有

$$\frac{x' - x_0}{x - x_0} = \frac{y' - y_0}{y - y_0} = \frac{z' - z_0}{z - z_0} = t. \quad ①$$

这里 t 是参数,t 的值依赖于点 $P(x, y, z)$ 在锥面上的位置.

由 ① 得

$$x' = x_0 + (x - x_0)t,$$
$$y' = y_0 + (y - y_0)t,$$
$$z' = z_0 + (z - z_0)t.$$

因为 $Q(x', y', z') \in \Gamma$,故

$$\begin{cases} F(x', y', z') = 0, & ② \\ G(x', y', z') = 0. & ③ \end{cases}$$

在 ①,②,③ 这四个独立方程中,将 x', y', z' 看成参数,从这四个方程消去三个参数 x', y', z' 所得到的关于 x, y, z 的方程就是所求的锥面方程. 这一方法已在 § 2.5 中作了介绍,这就是参数法解题的思想.

2.6.1 试求下列锥面的方程:

(1) 准线 $\Gamma: \begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = k \end{cases} \quad (k \neq 0)$,

顶点为原点;

(2) 准线 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=k\end{cases}\quad(k\neq0)$,

顶点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$. P_0 不是原点，且 P_0 不在平面 $z=k$ 上.

解 (1) 设 $P(x,y,z)$ 为锥面上任意一点，$P\neq O$. 过点 P 的母线 OP 与准线 Γ 交于点 $Q(x',y',z')$. 因为 P,Q,O 三点共线，故

$$\frac{x'}{x}=\frac{y'}{y}=\frac{z'}{z}.\qquad①$$

因为 $Q\in\Gamma$，故

$$\begin{cases}f(x',y')=0,&②\\z'=k.&③\end{cases}$$

我们的做法是：从 ①，②，③ 四个方程中要消去三个参数 x',y',z'. 今利用 $z'=k$，从 ① 中解出 $x'=\frac{kx}{z},y'=\frac{ky}{z}$. 以此代入 ②，得锥面方程

$$f\left(\frac{kx}{z},\frac{ky}{z}\right)=0.$$

(2) 仿(1)中讨论，此处利用 P_0,P,Q 三点共线，有

$$\frac{x'-x_0}{x-x_0}=\frac{y'-y_0}{y-y_0}=\frac{z'-z_0}{z-z_0}.$$

因为 $Q(x',y',z')\in\Gamma$，故有 $Q(x',y',k)$. 从上面方程解出

$$\begin{cases}x'=x_0+\dfrac{x-x_0}{z-z_0}(k-z_0),\\y'=y_0+\dfrac{y-y_0}{z-z_0}(k-z_0).\end{cases}$$

以此代入 $f(x',y')=0$，得锥面方程

$$f\left(x_0+\frac{(k-z_0)(x-x_0)}{z-z_0},\ y_0+\frac{(k-z_0)(y-y_0)}{z-z_0}\right)=0.$$

注 当 $P_0=O$，即 $x_0=y_0=z_0=0$ 时，问题(2)的解就是问题(1)的解了.

2.6.2 试求以

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2-R^2=0,\\z=k\ (k\neq0)\end{cases}$$

为准线，以原点为顶点的锥面方程.

解 利用 2.6.1 的结果，此处 $f(x,y)\equiv x^2+y^2-R^2$. 因此，所求锥面为

$$\left(\frac{kx}{z}\right)^2+\left(\frac{ky}{z}\right)^2-R^2=0,$$

即

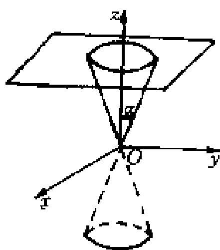


图 2.12

$$x^2+y^2-\frac{R^2}{k^2}z^2=0.\qquad①$$

根据准线 Γ 的表达式，可知准线 Γ 是 $z=k$ 平面上一个圆. 为此，称①是圆锥面的方程. 从图 2.12 可见，圆锥面上任意一条母线与 Oz 轴之间的角度恒为常角 $\alpha(0<\alpha<\frac{\pi}{2})$，且有 $\mathrm{tg}\alpha=\frac{R}{|k|}$. 于是圆锥面的方程可写成 $x^2+y^2-z^2\mathrm{tg}^2\alpha=0$. 这里称 α 是圆锥面的半顶角. 根据上面讨论，圆锥面可看成过原点的动直线 L 与 Oz 轴保持定角 α 运动所产生的曲面.

2.6.3 试求下列锥面方程：

(1) 以 $\Gamma:\begin{cases}x^2-y^2=2z,\\x+y+2z-3=0\end{cases}$

为准线，以原点为顶点.

(2) 以 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2+2x-4=0,\\x+y+z=1\end{cases}$

为准线，以原点为顶点.

解 (1) 设 $P(x,y,z)$ 为锥面上任意一点，母线 OP 与准线 Γ 交于点 $M(x',y',z')$. 因为 P,M,O 三点共线，所以

$$\frac{x'-0}{x-0}=\frac{y'-0}{y-0}=\frac{z'-0}{z-0}=t,$$

即

$$x'=tx,y'=ty,z'=tz.$$

由 $M\in\Gamma$，知

$$\begin{cases}x'^2-y'^2=2z',\\x'+y'+2z'-3=0.\end{cases}$$

以 $x'=tx,y'=ty,z'=tz$ 代入上面方程，得

$$\begin{cases}t(x^2-y^2)=2z,\\t(x+y+2z)=3.\end{cases}$$

消去参数 t，得锥面方程

$$3x^2-3y^2-4z^2-2yz-2zx=0.$$

(2) 仿(1)中讨论，有

$$x'=tx,y'=ty,z'=tz.\qquad①$$

由 $M(x',y',z')\in\Gamma$，知

$$\begin{cases}x'^2+y'^2+z'^2+2x'-4=0,&②\\x'+y'+z'=1.&③\end{cases}$$

在①，②，③所含的五个式子中，消去四个变量 x',y',z',t 可得锥面方程. 现在，将①代入②，③得

$$\begin{cases}t^2(x^2+y^2+z^2)+2tx-4=0,\\t(x+y+z)=1.\end{cases}$$

以第二个方程 $t=\frac{1}{x+y+z}$ 代入第一个方程，化简整理后可得锥面方程

$$5x^2+3y^2+3z^2+10xy+8yz+10zx=0.$$

注 在① $x'=tx,y'=ty,z'=tz$ 中，利用比例

性质,有

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=\frac{x+y+z}{x'+y'+z'}=x+y+z.$$

由此得

$$x'=\frac{x}{x+y+z},y'=\frac{y}{x+y+z},$$

$$z'=\frac{z}{x+y+z}.$$

以此代入 ②,同样可求得锥面方程为

$$5x^2+3y^2+3z^2+10xy+8yz+10zx=0.$$

从本题可知,用参数消去法求解题目时,所设的参数的数目可以是不一样的,主要的关键所在:是用 $n+1$ 个方程消去 n 个变量,以求得动点 (x,y,z) 所满足的方程.

2.6.4 试求下列锥面方程:

(1) 准线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=4,\\x=1,\end{cases}$ 顶点 $P_0(3,2,1)$.

(2) 准线 $\Gamma:\begin{cases}x-y+z=0,\\x^2+2y^2-z^2-4=0,\end{cases}$ 顶点 $P_0(3,2,1)$.

解 (1) 设 $P(x,y,z)$ 为锥面上任意一点,母线 P_0P 与准线 Γ 交于点 $M(x',y',z')$,则由 P_0,P,M 三点共线,知

$$\frac{x'-3}{x-3}=\frac{y'-2}{y-2}=\frac{z'-1}{z-1}=t.$$

即

$$x'=3+(x-3)t,y'=2+(y-2)t,$$
$$z'=1+(z-1)t.$$

代入

$$\begin{cases}x'^2+y'^2=4,\\x'=1\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}[3+(x-3)t]^2+[2+(y-2)t]^2=4,\\3+(x-3)t=1.\end{cases}$$

消去参数 t,求得锥面方程

$$x^2+4y^2-8xy+10x+8y-23=0.$$

(2) 设 $P(x,y,z)$ 为锥面上任意一点,母线 P_0P 交准线于点 $M(x',y',z')$,则

$$\frac{x'-3}{x-3}=\frac{y'-2}{y-2}=\frac{z'-1}{z-1}=t.$$

即

$$x'=3+(x-3)t,y'=2+(y-2)t,$$
$$z'=1+(z-1)t.$$

代入

$$\begin{cases}x'-y'+z'=0,\\x'^2+2y'^2-z'^2-4=0\end{cases}$$

得

$$\begin{cases}t(x-y+z-2)+2=0,\\[3+(x-3)t]^2+2[2+(y-2)t]^2\\\qquad-[1+(z-1)t]^2-4=0.\end{cases}$$

由第一个方程解出 $t=\dfrac{-2}{x-y+z-2}$,代入第二个方程,化简整理可得锥面方程

$$x^2+9y^2+3z^2-7xy-11yz+4zx+4x-4y+4z-4=0.$$

2.6.5 试求以 $P_0(1,2,3)$ 为顶点,对称轴与平面 $2x+2y-z=0$ 垂直,半顶角为 $\frac{\pi}{6}$ 的圆锥面方程.

解 对称轴过点 $P_0(1,2,3)$,并且方向矢量 $l=(2,2,-1)$,故对称轴方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{-1}.$$

设 $P(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 为圆锥面上任意一点,过点 P 与对称轴垂直的平面

$$\pi:2x+2y-z-(2\tilde{x}+2\tilde{y}-\tilde{z})=0.$$

顶点 P_0 到平面 π 的距离

$$d=\frac{|2\times1+2\times2-3\times1-(2\tilde{x}+2\tilde{y}-\tilde{z})|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}}$$
$$=\frac{1}{3}\times|2\tilde{x}+2\tilde{y}-\tilde{z}-3|.$$

另外,

$$|\overrightarrow{P_0P}|=\sqrt{(\tilde{x}-1)^2+(\tilde{y}-2)^2+(\tilde{z}-3)^2}.$$

根据几何意义

$$\frac{d}{|\overrightarrow{P_0P}|}=\cos\frac{\pi}{3},$$

即

$$d^2=\frac{1}{4}|\overrightarrow{P_0P}|^2.$$

故有

$$4(2\tilde{x}+2\tilde{y}-\tilde{z}-3)^2$$
$$=9[(\tilde{x}-1)^2+(\tilde{y}-2)^2+(\tilde{z}-3)^2].$$

因为 $P(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ 代表圆锥面上任意一点,故圆锥面方程为

$$4(2\tilde{x}+2\tilde{y}-\tilde{z}-3)^2$$
$$=9[(\tilde{x}-1)^2+(\tilde{y}-2)^2+(\tilde{z}-3)^2].$$

注 在推导锥面方程时,未必都要应用参数法解题,可以根据给出的几何性质导出锥面方程.本题之解用到了点到平面的距离以及两点间的距离公式,比较简单.如果采用点 P 到旋转轴的距离公式解题,那就会麻烦一些.

2.6.6 试求以原点为顶点,且包含三条坐标轴的圆锥面的方程.

解 利用图形的对称性，先要找到圆锥面的准线 Γ.

依题设，所求圆锥面共有 4 个，分别记作 $\Sigma_1,\Sigma_2,\Sigma_3$ 和 Σ_4. 今先研究 Σ_1，显然，Σ_1 经过 $O(0,0,0)$，$M_1(1,0,0)$，$M_2(0,1,0)$，$M_2(0,0,1)$ 四点. 过 M_1,M_2,M_3 三点的平面方程是 $x+y+z=1$，以原点为球心，过 M_1,M_2,M_3 三点的球面方程是 $x^2+y^2+z^2-1=0$. 因此可取 Σ_1 的准线为

$$\Gamma_1:\begin{cases}x+y+z-1=0,\\x^2+y^2+z^2-1=0.\end{cases}$$

因为 Σ_1 的顶点为原点，仿 2.6.3 的解法，圆锥面的方程为

$$\begin{cases}(x+y+z)t-1=0,\\(x^2+y^2+z^2)t^2-1=0.\end{cases}$$

消去 t 得圆锥面的方程为

$$xy+yz+zx=0.$$

类似地，其余三个圆锥面 $\Sigma_2,\Sigma_3,\Sigma_4$ 的准线依次可取作

$$\Gamma_2:\begin{cases}-x+y+z-1=0,\\x^2+y^2+z^2-1=0;\end{cases}$$

$$\Gamma_3:\begin{cases}x-y+z-1=0,\\x^2+y^2+z^2-1=0;\end{cases}$$

$$\Gamma_4:\begin{cases}x+y-z-1=0,\\x^2+y^2+z^2-1=0.\end{cases}$$

相应地可求得圆锥面的方程为

$$\Sigma_2: xy-yz+zx=0;$$

$$\Sigma_3: xy+yz-zx=0;$$

$$\Sigma_4: -xy+yz+zx=0.$$

2.6.7 试自原点作球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 的切线，求切线所产生的锥面的方程.

解 设 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为切点，则切线 OP_0 的方程为

$$x=\frac{x_0}{t},y=\frac{y_0}{t},z=\frac{z_0}{t}.$$

这里选 $\frac{1}{t}$ 作为参数，上式即

$$x_0=xt,y_0=yt,z_0=zt. \qquad ①$$

因为球面的半径为 R，球心为 $A(a,b,c)$，故

$$\overrightarrow{AP_0}=(x_0-a,y_0-b,z_0-c),$$

$$\overrightarrow{OP_0}=(x_0,y_0,z_0).$$

根据球面的性质，$\overrightarrow{AP_0}\perp\overrightarrow{OP_0}$，因此

$$x_0(x_0-a)+y_0(y_0-b)+z_0(z_0-c)=0. \qquad ②$$

由 P_0 在球面上，得

$$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2+(z_0-c)^2=R^2. \qquad ③$$

现在，要从 ①，②，③ 五个方程中，消去 4 个参数 x_0,y_0,z_0,t，以得到关于 x,y,z 的锥面方程.

由 ② − ③，得

$$ax_0+by_0+cz_0+R^2-(a^2+b^2+c^2)=0.$$

用 ① 代入，得

$$t=\frac{a^2+b^2+c^2-R^2}{ax+by+cz}.$$

以此代入 ①，有

$$x_0=\frac{a^2+b^2+c^2-R^2}{ax+by+cz}x,$$

$$y_0=\frac{a^2+b^2+c^2-R^2}{ax+by+cz}y,$$

$$z_0=\frac{a^2+b^2+c^2-R^2}{ax+by+cz}z.$$

以这组 x_0,y_0,z_0 的表达式代入 ②，可得所求锥面的方程为

$$(a^2+b^2+c^2-R^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2=0. \qquad ④$$

注 ④ 代表一个圆锥面，见后.

2.6.8 试求以直线 $x=y=z$ 为轴线，且过直线 $L:2x-3y=-5z$ 的圆锥面的方程.

解 轴线的方向矢量 $\boldsymbol{l}_1=(1,1,1)$，轴线与 L 交于原点 $(0,0,0)$，直线 $L:\frac{x}{15}=\frac{y}{10}=\frac{z}{-6}$. 故直线 L 的方向矢量 $\boldsymbol{l}_2=(15,10,-6)$. 记 $\boldsymbol{l}_1$ 与 $\boldsymbol{l}_2$ 之间的角度为 θ，则

$$\cos\theta=\frac{|\boldsymbol{l}_1\cdot\boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_1|\cdot|\boldsymbol{l}_2|}=\frac{|15\times1+10\times1-6\times1|}{19\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\sin\theta=\frac{\sqrt{6}}{3}.$$

设 $P(x,y,z)$ 为所求锥面上任意一点，则点 P 到轴线 $x=y=z$ 的距离

$$d=\frac{|(x,y,z)\times(1,1,1)|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}[(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2]^{\frac{1}{2}}.$$

根据本题的几何性质，有

$$\frac{d}{|\overrightarrow{OP}|}=\sin\theta,$$

即

$$d^2=\sin^2\theta\cdot|\overrightarrow{OP}|^2.$$

故有

$$\frac{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}{3}=\frac{2}{3}(x^2+y^2+z^2).$$

化简整理得圆锥面方程

$$xy+yz+zx=0.$$

注 参阅 2.6.5 与其注.

2.6.9 试证：平面 $x-3y+z=0$ 与锥面 $x^2-5y^2+z^2=0$ 相交于两条母线，并求出这两条母线之间的角.

证明 考虑

$$\Gamma:\begin{cases}x-3y+z=0, & ①\\ x^2-5y^2+z^2=0. & ②\end{cases}$$

从 ① 解出 $z=3y-x$，以此代入 ② 得到

$$x^2-5y^2+(3y-x)^2=0.$$

而

$$\begin{aligned}&x^2-5y^2+(3y-x)^2\\ &=2x^2+4y^2-6xy\\ &=2(x^2+2y^2-3xy)\\ &=2(x-y)(x-2y).\end{aligned}$$

曲线 Γ 可以作为平面 $x-3y+z=0$ 与锥面 $x^2-5y^2+z^2=0$ 的交线. 根据前面的推导，曲线 Γ 也可以作为平面 $x-3y+z=0$ 与曲面 $(x-y)(x-2y)=0$ 的交线. 即

$$\Gamma:\begin{cases}x-3y+z=0,\\ (x-y)(x-2y)=0.\end{cases} \quad ③$$

而 ③ 代表两个平面：$x-y=0$ 与 $x-2y=0$. 因此，曲线 Γ 是平面 $x-3y+z=0$ 与平面 $x-y=0$ 的交线；也是平面 $x-3y+z=0$ 与平面 $x-2y=0$ 的交线. 从而证明了平面 $x-3y+z=0$ 与锥面 $x^2-5y^2+z^2=0$ 相交于两条母线. 其方程为

$$\begin{cases}x-3y+z=0,\\ x-y=0,\end{cases} \text{与} \begin{cases}x-3y+z=0,\\ x-2y=0.\end{cases}$$

这两条直线的方向矢量分别为

$$l_1=(1,-3,1)\times(1,-1,0)=(1,1,2)$$

与

$$l_2=(1,-3,1)\times(1,-2,0)=(2,1,1).$$

故这两条母线之间的角为

$$\cos\theta=\frac{|l_1\cdot l_2|}{|l_1|\cdot|l_2|}=\frac{5}{\sqrt6\cdot\sqrt6}=\frac56.$$

因此

$$\theta=\arccos\frac56.$$

2.6.10 试证：方程

$$x^2+2y^2+z^2-4yz-6zx-2x+8y-2z+9=0 \quad ①$$

代表以 $A(1,-2,0)$ 为顶点的一个锥面.

证明 记曲面 Σ：

$$x^2+2y^2+z^2-4yz-6zx-2x+8y-2z+9=0.$$

若 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$，即

$$x_0^2+2y_0^2+z_0^2-4y_0z_0-6z_0x_0-2x_0+8y_0-2z_0+9=0.$$

只需证明直线 AP_0 在曲面 Σ 上. 现在，

$$AP_0:\begin{cases}x=1+t(x_0-1),\\ y=-2+t(y_0+2),\\ z=tz_0.\end{cases} \quad ②$$

将 ② 代入 ①，化简整理立知直线 AP_0 上点的坐标 x,y,z 满足 ①，此表明直线 AP_0 落在曲面 Σ 上，由 P_0 选择的任意性，证实 ① 代表以 $A(1,-2,0)$ 为顶点的一个锥面.

注 题中给出的顶点 $A(1,-2,0)$. 我们通过坐标平移之后，使顶点为新坐标系的原点.

作平移

$$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'-2,\\ z=z'.\end{cases}$$

以此平移公式代入 ①，化简整理后得

$$x'^2+2y'^2+z'^2-4y'z'-6z'x'=0. \quad ③$$

这是 x',y',z' 的二次齐次式. 如果点 (x',y',z') 满足此方程，则 (kx',ky',kz') 也满足此方程. 这表明：只要点 (x',y',z') 在 ③ 代表的曲面上，则由原点与点 (x',y',z') 所决定的直线上的点 (kx',ky',kz') 也在此曲面上，因此，③ 代表一个锥面.

2.6.11 设平面 $\pi:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 与三条坐标轴交于 A,B,C 三点，以过 A,B,C 三点的圆为准线，以原点为顶点作锥面，试求锥面的方程.

解 首先，应找出准线的方程. 准线为圆，它在平面 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ 上，此圆可作为此平面与一个球面 Σ 的交线. 选择球面 Σ，它由 O,A,B,C 四点所决定. 因为 $A(a,0,0)$，$B(0,b,0)$，$C(0,0,c)$，所以球面 Σ 的球心，在 AO 线段、BO 线段、CO 线段这三个线段的三个垂直平分面上，也就是球心在平面 $x=\frac a2$，$y=\frac b2$，$z=\frac c2$ 上. 因此，球心为 $(\frac a2,\frac b2,\frac c2)$. 球心与原点的距离 $\frac12\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 就是球面的半径，因此，准线方程为

$$\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,\\ (x-\frac a2)^2+(y-\frac b2)^2+(z-\frac c2)^2=\frac14(a^2+b^2+c^2).\end{cases}$$

仿 2.6.3 的解法，令 $x_0=tx$，$y_0=ty$，$z_0=tz$. 由 (x_0,y_0,z_0) 在准线上，得

$$\begin{cases}t(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})=1,\\ t^2(x^2+y^2+z^2)-t(ax+by+cz)=0.\end{cases}$$

消去参数 t 得锥面方程

$(a^2+b^2)cxy+(b^2+c^2)ayz+(c^2+a^2)bzx = 0.$

2.6.12　从 $A(0,0,1)$ 点作锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上诸母线的垂线，试求由垂线所产生的锥面方程.

解法1　因为 $x^2+y^2-z^2=0$ 为圆锥面，与 $x^2+y^2-z^2\cdot\mathrm{tg}^2\alpha=0$ 相比较(参阅2.6.2)，半顶角 $\alpha=45°$，即顶角为 $90°$. 根据题设中做法，所求锥面的顶角亦是 $90°$. 因为顶点为 $(0,0,1)$，故所求锥面方程为

$$x^2+y^2=(z-1)^2.$$

解法2　设过 $(0,0,1)$ 点作锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上任一母线的垂线足为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，则锥面 $x^2+y^2=z^2$ 上母线 OP_0 的方向矢量为 (x_0,y_0,z_0). 而所作垂线 AP_0 的方向矢量为 (x_0,y_0,z_0-1). 因此，所求锥面上母线 AP_0 的方程为

$$\frac{x-0}{x_0}=\frac{y-0}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}. \qquad ①$$

由题设知 $\overrightarrow{OP_0}\perp\overrightarrow{AP_0}$，故 $(x_0,y_0,z_0)\cdot(x_0,y_0,z_0-1)=0$，即

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2-z_0=0,$$

因为 $x_0^2+y_0^2=z_0^2$，此处 $z_0\neq 0$，由此求得 $z_0=\dfrac{1}{2}$. 于是

$$x_0^2+y_0^2=\frac{1}{4}. \qquad ②$$

由①得 $x_0=\dfrac{x}{2(1-z)}, y_0=\dfrac{y}{2(1-z)}$. 以此代入②，求得锥面方程为

$$\frac{1}{4}\left(\frac{x}{1-z}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{y}{1-z}\right)^2=\frac{1}{4},$$

即 $x^2+y^2=(z-1)^2$.

2.6.13　已给空间曲线 $\Gamma: x=f(t), y=h(t), z=g(t)$. 试求：以 Γ 为准线，以 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为顶点的锥面方程.

解　设 $P(x,y,z)$ 为所求锥面上任意一点，母线 P_0P 与准线 Γ 交于点 $M(x',y',z')$. 因为 P_0,P,M 三点共线，所以

$$\frac{x-x_0}{x'-x_0}=\frac{y-y_0}{y'-y_0}=\frac{z-z_0}{z'-z_0}=\rho,$$

即

$$\begin{cases} x=x_0+(x'-x_0)\rho, \\ y=y_0+(y'-y_0)\rho, \\ z=z_0+(z'-z_0)\rho. \end{cases}$$

或写成

$$\begin{cases} x=x_0(1-\rho)+x'\rho, \\ y=y_0(1-\rho)+y'\rho, \\ z=z_0(1-\rho)+z'\rho. \end{cases} \qquad ①$$

因为 $(x',y',z')\in\Gamma$，不妨令其所对应的参数值仍为 t，即 $x'=f(t), y'=h(t), z'=g(t)$. 则①为

$$\begin{cases} x=x_0(1-\rho)+\rho\cdot f(t), \\ y=y_0(1-\rho)+\rho\cdot h(t), \\ z=z_0(1-\rho)+\rho\cdot g(t). \end{cases} \qquad ②$$

这就是所求锥面的参数表达式.

此外，$\boldsymbol{r}=(x_0(1-\rho)+\rho\cdot f(t), y_0(1-\rho)+\rho\cdot h(t), z_0(1-\rho)+\rho\cdot g(t))$ 是锥面的矢量表达式.

注　注意到题2.6.2，准线 Γ 的参数方程为 $x=R\cos t, y=R\sin t, z=k$，并且 $x_0=y_0=z_0=0$. 于是，②变成 $x=\rho\cdot R\cos t, y=\rho\cdot R\sin t, z=\rho\cdot k$. 由 $z=\rho\cdot k$ 解出 $\rho=\dfrac{z}{k}$，代入前面两式，得

$$\begin{cases} x=\dfrac{Rz}{k}\cos t, \\ y=\dfrac{Rz}{k}\sin t. \end{cases}$$

由此得

$$x^2+y^2=\frac{R^2}{k^2}z^2,$$

即

$$x^2+y^2-\frac{R^2}{k^2}z^2=0.$$

这就是2.6.2中的①式.

§2.7　旋转面方程

已给直线 L 和曲线 Γ，曲线 Γ 绕直线 L 旋转所产生的曲面称为旋转面，称 L 为旋转轴，称 Γ 为旋转面的一条母线.

过旋转轴的每个平面与旋转面的交线称为旋转面的经线. 显然，每条经线都可作为旋转面的母线. 母线上任一点旋转一周所产生的圆称为纬圆，纬圆所在平面必与旋转轴垂直.

以 $\Gamma: \begin{cases} f(x,z)=0, \\ y=0 \end{cases}$ 为母线，以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程是

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0,$$

这里根号前可能只取正号，可能只取负号，也可能正负号都取. 它们符号的选择取决于母线 Γ 表达式中 x 取值的符号.

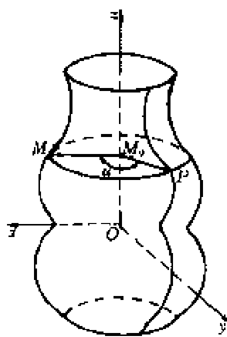


图 2.13

这一结论的证明是不难的. 事实上，设 $P(x,y,z)$ 为旋转面上任意一点，过点 P 作平面 π 与旋转轴(即 Oz 轴)

相垂直，并设平面 π 与母线 Γ、Oz 轴依次交于点 $M(x_0,0,z)$、$M_0(0,0,z)$.(图 2.13)

据旋转面的性质，有 $|\overrightarrow{M_0M}|=|\overrightarrow{M_0P}|$，即

$$|x_0|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

因为 $M\in\Gamma$，故 $f(x_0,z)=0$，即

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0.$$

在上述论证中，给出了求旋转面方程的一般方法.其基本思想是通过旋转面任意一点作与旋转轴正交的平面，设此平面依次与母线和旋转轴分别交于点 M 和 M_0，根据条件 $|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M}|$ 列出方程，然后，消去参数(前面论证中，把 x_0 作为参数)，建立旋转面方程.

本节主要讨论两个问题：一是给出母线与旋转轴，建立旋转面的方程；二是给出了方程，判断它是否代表旋转面.

2.7.1 几个特殊的旋转面.

1. 圆柱面.

以 $\Gamma:\begin{cases}x-R=0,\\y=0\end{cases}(R>0)$

为母线，以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程是

$$\sqrt{x^2+y^2}-R=0,\text{即 } x^2+y^2=R^2.$$

注 因为 $R>0$，为此 Γ 方程中 $x>0$，故利用刚才结论时根号前取正号.如果取

$$\begin{cases}x+R=0,\\y=0\end{cases}$$

作为母线，那么旋转面方程是 $-\sqrt{x^2+y^2}+R=0$，根号前取负号了.

2. 圆锥面.

以 $\Gamma:\begin{cases}x-z\operatorname{tg}\alpha=0,\\y=0\end{cases}$

为母线($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$)，以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程是

$$\pm\sqrt{x^2+y^2}-z\operatorname{tg}\alpha=0,$$

即

$$x^2+y^2-z^2\operatorname{tg}^2\alpha=0.$$

这就是题 2.6.2.这里根号前取正、负号.

3. 球面.

以 $\Gamma:\begin{cases}x=\sqrt{R^2-z^2},\\y=0,\end{cases}(R>0)$

为母线，以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程是

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{R^2-z^2},$$

即

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

它是以原点为球心，以 R 为半径的球面.

如果以 Ox 轴为旋转轴作旋转，则旋转面的方程是

$$x=\sqrt{R^2-(\sqrt{y^2+z^2})^2},$$

即

$$x=\sqrt{R^2-(y^2+z^2)}.$$

它代表半个球面.

4. 圆环面.

以 $\Gamma:\begin{cases}(y-b)^2+z^2-a^2=0,(b>a>0)\\x=0,\end{cases}$

为母线，以 Oz 轴为旋转轴的旋转面方程是

$$\left(\pm\sqrt{x^2+y^2}-b\right)^2+z^2-a^2=0.$$

化简整理得

$$(x^2+y^2+z^2+b^2-a^2)^2=4b^2(x^2+y^2).$$

从上述 4 个特殊的旋转面中可见：两条平行直线，一条绕另一条旋转可得圆柱面；两条相交直线，一条绕另一条旋转可得圆锥面.

2.7.2 已给直线 $L:x=y=z$.试求下列旋转面的方程：

(1) 以 L 为母线，以 Oz 轴为旋转轴；

(2) 以 Oz 轴为母线，以 L 为旋转轴.

解 (1) 设 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是旋转面上任意一点，过点 P 作平面 π 与旋转轴 Oz 相垂直，则平面 π 的方程是 $z=\bar{z}$.设平面 π 与母线、Oz 轴分别交于点 M、M_0，则 $M(z,z,z)$，$M_0(0,0,z)$. 根据旋转面的性质，$|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M}|$.故 $\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2z^2}$，旋转面方程是 $x^2+y^2-2z^2=0$.

事实上，因为直线 L 的方向矢量为 $(1,1,1)$，所以直线 L 与旋转轴 Oz 之间的角度 α，有

$$\cos\alpha=\frac{|(0,0,1)\cdot(1,1,1)|}{1\times\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{2}$，由 2.6.2 题知半顶角 $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{2}$，立得旋转面方程是 $x^2+y^2-2z^2=0$.

(2) 设 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 是旋转面上任意一点，过点 P 作平面 π 与旋转轴 L 相垂直，则平面 π 的方程是 $x+y+z=\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}$.设平面 π 与母线、Oz 轴分别交于点 M、M_0，则

$$M(0,0,\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}),$$

$$M_0\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3},\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3},\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}\right).$$

根据旋转面的性质，$|\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M}|$，即

$$\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}\right)^2+\left(\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}\right)^2+\left[\frac{\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}}{3}-(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})\right]^2$$

$$= \left(\tilde{x} - \frac{\tilde{x}+\tilde{y}-\tilde{z}}{3}\right)^2 + \left(\tilde{y} - \frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}\right)^2$$

$$+ \left(\tilde{z} - \frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}\right)^2.$$

化简整理得

$$\tilde{x}\tilde{y}+\tilde{y}\tilde{z}+\tilde{z}\tilde{x} = 0.$$

在解题过程中应注意到 $\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z}$ 是旋转面上任意一点的坐标，要建立的旋转面的方程是关于 x,y,z 的方程，所以旋转面的方程是

$$xy + yz + zx = 0. \qquad ①$$

参阅2.6.6.

注 求旋转面的方程时，亦可利用旋转面所具备的几何性质来解题. 在本题中，根据题设条件，Oz 轴与直线 L 都过坐标原点，故 $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OM}|$. 用坐标表出有

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = |\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}|$$

化简整理就是 ①. 显然，用此法解题显得简单.

2.7.3 已给两条直线 $L: x = y = z$ 和 $L_1: x - a = y - b = z - c$，这里 a,b,c 不全相等. 试求直线 L_1 绕直线 L 旋转所得的旋转面的方程.

解法1 直线 L_1 过点 $A(a,b,c)$，直线 L 过原点 $O(0,0,0)$. 并且直线 L 与直线 L_1 平行，它们的方向矢量同为 $l = (1,1,1)$，因此，旋转面是一个圆柱面. 如果 $P(x,y,z)$ 是旋转面上任意一点，那么，点 P 到旋转轴 L 的距离等于点 A 到 L 的距离. 由点到直线的距离公式，有

$$\frac{|\overrightarrow{OA}\times l|}{|l|} = \frac{|\overrightarrow{OP}\times l|}{|l|},$$

即

$$|(a,b,c)\times(1,1,1)|$$
$$= |(x,y,z)\times(1,1,1)|.$$

由此得

$$(b-c)^2+(c-a)^2+(a-b)^2$$
$$= (y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2.$$

整理得

$$x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx$$
$$= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca. \qquad ①$$

解法2 设 $P(x,y,z)$ 为旋转面上任意一点，则过点 P 与旋转轴 L 垂直的平面 π 为

$$x+y+z = \tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}.$$

平面 π 与旋转轴 L 的交点为

$$M_0\left(\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}, \frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}, \frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}\right).$$

记平面 π 与母线 L_1 的交点为 M. 今用 L_1 的参数方程

$$x = a+t, y = b+t, z = c+t$$

代入 $x+y+z = \tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}$，可得

$$t = \frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}-(a+b+c)}{3}.$$

以此代入 L_1 的参数方程，得

$$M\left(a+\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}-(a+b+c)}{3},\right.$$
$$b+\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}-(a+b+c)}{3},$$
$$\left.c+\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}-(a+b+c)}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{M_0P} = \left(\tilde{x}-\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}, \tilde{y}-\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}, \tilde{z}-\frac{\tilde{x}+\tilde{y}+\tilde{z}}{3}\right)$$

$$= \left(\frac{2\tilde{x}-\tilde{y}-\tilde{z}}{3}, \frac{2\tilde{y}-\tilde{x}-\tilde{z}}{3}, \frac{2\tilde{z}-\tilde{x}-\tilde{y}}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \left(\frac{2a-b-c}{3}, \frac{2b-c-a}{3}, \frac{2c-a-b}{3}\right).$$

根据 $|\overrightarrow{M_0P}|^2 = |\overrightarrow{M_0M}|^2$，化简整理可得 ① 式.

2.7.4 试求直线

$$L_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$$

绕直线

$$L: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{3}$$

旋转而成的旋转面的方程.

解 因为 L_1 与 L 相交于点 $(1,2,-1)$，故旋转面为锥面. 设 L_1 与 L 之间的角度为 α，则

$$\cos\alpha = \frac{|(2,1,2)\cdot(2,-3,3)|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2+3^2}}$$
$$= \frac{7}{3\sqrt{22}},$$

而 $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{149}}{3\sqrt{22}}$.

设 $P(x,y,z)$ 为旋转面上任意一点，则点 P 到直线 L 的距离等于 $\sin\alpha$ 乘以点 P 到点 $(1,2,-1)$ 的距离. 而 P 到直线 L 的距离为

$$\frac{|(x-1,y-2,z+1)\times(2,-3,3)|}{\sqrt{22}}.$$

故有

$$\frac{1}{22}[(3y+3z-3)^2+(-3x+2z+5)^2$$
$$+(-3x-2y+7)^2]$$
$$= [(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2]\times\frac{149}{198}.$$

化简整理得

$$13x^2-32y^2-32z^2+162yz+108xy-108xz-$$

$$350x + 182y - 280z - 147 = 0.$$

2.7.5　如图2.14所示，$ABCDEFGO$ 为单位正方体，试求：12条棱绕 OB 旋转而成的旋转面的方程.

解　因为 $O(0,0,0)$，$B(1,1,1)$，所以直线 OB：$x = y = z$. 由2.7.2知：OE，OG，OD 三条棱绕 OB 旋转所得旋转面的方程为 $xy + yz + zx = 0$.

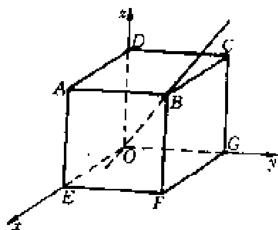


图2.14

若作平移

$$\begin{cases} x = x' + 1, \\ y = y' + 1, \\ z = z' + 1, \end{cases}$$

则 BA，BC，BF 三条棱绕 OB 旋转所得的旋转面的方程为

$$x'y' + y'z' + z'x' = 0.$$

即

$$(x-1)(y-1) + (y-1)(z-1) + (z-1)(x-1) = 0.$$

整理得

$$xy + yz + zx - 2(x + y + z) + 3 = 0.$$

下面研究棱 AE：$\begin{cases} x = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ 绕 OB 旋转而成的旋转面方程. 设 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为轨迹上任意一点，则 π：$x + y + z = \bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$ 是过点 P 与 OB 垂直的一个平面. 平面 π 与 AE 交于点 $M(1,0,\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}-1)$. 因为旋转轴过原点 O，依旋转面的性质，有

$$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2.$$

即

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = 1 + (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} - 1)^2.$$

化简整理得

$$\bar{x}\,\bar{y} + \bar{y}\,\bar{z} + \bar{z}\,\bar{x} - (\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}) + 1 = 0,$$

即棱 AE 绕 OB 旋转而成的旋转面方程是

$$xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0. \qquad ①$$

余下的五条棱为

$$AD: \begin{cases} y = 0, \\ z = 1. \end{cases} \quad CD: \begin{cases} x = 0, \\ z = 1. \end{cases} \quad EF: \begin{cases} x = 1, \\ z = 0. \end{cases}$$

$$GF: \begin{cases} y = 1, \\ z = 0. \end{cases} \quad CG: \begin{cases} x = 0, \\ y = 1. \end{cases}$$

这五条棱上点的坐标都满足 ①. 首先，断定这五条棱都位于由 ① 所代表的旋转面上. 其次，依照方程与图形的对称性可知，这五条棱绕 OB 旋转所成的旋转面的方程也是 ①.

注1　方程 ① 所代表的曲面是由直线所组成的，从图中可见：AE，FG，CD 任取两条都不共面；AD，EF，CG 任取两条也都不共面；前三条棱与后三条棱各取一条都必共面；AE，FG，CD 不可能同时平行于同一个平面；AD，EF，CG 也不可能同时平行于一个平面(参阅 §2.11).

注2　因为 AE 与 OB 是两条异面直线，所以它们一条绕另一条旋转而成的旋转面是单叶环曲面(参阅 §2.9).

2.7.6　试求抛物线

$$\begin{cases} y^2 = 2ax \ (a > 0), \\ z = 0 \end{cases}$$

绕下列直线旋转面成的旋转面方程：

(1) 抛物线的对称轴.

(2) 抛物线在顶点的切线.

解　(1) 抛物线的对称轴是 Ox 轴，抛物线是平面 $z = 0$ 与抛物柱面 $y^2 = 2ax$ 的交线. 它在 $z = 0$ 坐标平面内，所以旋转面的方程为 $y^2 + z^2 = 2ax$.

(2) 抛物线 $y^2 = 2ax$ 在顶点处的切线为 Oy 轴，故所得旋转面的方程为

$$y^2 = 2a(x^2 + z^2)^{\frac{1}{2}},$$

即

$$4a^2x^2 - y^4 + 4a^2z^2 = 0.$$

注　从本题的两个旋转面方程 $y^2 + z^2 = 2ax$ 与 $4a^2x^2 - y^4 + 4a^2z^2 = 0$ 中发现：y^2 与 z^2 前面的系数相同，都是1，而且是相加；x^2 与 z^2 前而的系数也相同，都是4，而且也是相加. 根据这个规律，希望能从给出的方程，判断它们是否代表旋转面. 如果能判断出所代表的曲面是旋转面，可找出母线与旋转轴，对构作图形与理解图形是大为有益的.

2.7.7　试求直线

$$L: \begin{cases} y - 2z = 0, \\ x = 0 \end{cases}$$

绕 Oy 轴旋转而成的曲面 Σ 与平面 $z = 1$ 的交线 Γ 在三个坐标平面上的垂直投影.

解　首先，旋转面 Σ 的方程为

$$y \pm 2\sqrt{x^2 + z^2} = 0,$$

即

$$y^2 = 4(x^2 + z^2).$$

于是

$$\Gamma: \begin{cases} y^2 = 4(x^2 + z^2), \\ z = 1. \end{cases}$$

Γ 在 xy 平面上的投影柱面是 $y^2 = 4(x^2 + 1)$，故 Γ 在 xy 平面上的垂直投影为

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 + 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Γ 在 yz 平面上的投影柱面是 $z=1$,故 Γ 在 yz 平面上的垂直投影为

$$\begin{cases} z=1, \\ x=0 \end{cases} \quad (|y|\geqslant 2).$$

它表示满足 $|y|\geqslant 2$ 的两条射线.

Γ 在 zx 平面上的投影柱面是 $z=1$,故 Γ 在 zx 平面上的垂直投影为

$$\begin{cases} z=1, \\ y=0. \end{cases}$$

2.7.8 试求球面 $\Sigma_1: x^2+y^2+z^2=3$ 和椭圆抛物面 $\Sigma_2: x^2+y^2-2z=0$ 的交线 Γ 在平面 $z=0$ 上的投影柱面和垂直投影的方程.

解

$$\Gamma: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, & ① \\ x^2+y^2-2z=0. & ② \end{cases}$$

由①减去②,得 $z^2+2z-3=0$,解得 $z_1=1, z_2=-3$. 因为②中隐含 $z\geqslant 0$,故应将 $z_2=-3$ 舍去. 以 $z=1$ 代入 Γ 方程可得曲线 Γ 在平面 $z=0$ 上的投影柱面 $\Sigma: x^2+y^2-2=0$. 故 Γ 在 $z=0$ 平面上的垂直投影为

$$\begin{cases} x^2+y^2-2=0, \\ z=0. \end{cases}$$

注 交线 Γ 可看作球面 Σ_1 与椭圆抛物面 Σ_2 的交线. 当然,Γ 也可看作平面 $z=1$ 与 Σ_1、平面 $z=1$ 与 Σ_2 的交线. 进一步,Γ 也是 Σ 与 $z=1$、Σ 与 Σ_2 的交线. 因为 Γ 作为两个曲面的交线,它们相应的曲面的方程组是同解的. 但是,Γ 不能作为 Σ 与 Σ_1 的交线,这是因为 Σ 与 Σ_1 的交线有两条,除 Γ 外,还有一条在 $z=-1$ 的平面上.

2.7.9 试求曲面 $\Sigma_1: 3(x^2+y^2)=(z-3)^2$ 与曲面 $\Sigma_2: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 的交线在 xy 平面和 yz 平面上的垂直投影.

解 如图 2.15 所示. 根据 2.7.7 之注,Σ_1 是一个旋转面,旋转轴为 Oz 轴,母线为

$$\Gamma: \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{3}y=z-3. \end{cases}$$

母线 Γ 与 Oz 轴的交点 $A(0,0,3)$ 是圆锥面 Σ_1 的顶点.

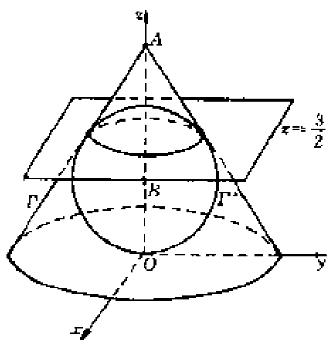


图 2.15

Σ_2 是一个球面,球心 $B(0,0,1)$,半径为 1. 球心 B 到直线 Γ 的距离为

$$\left|\frac{\sqrt{3}y-z+3}{2}\right|_{\substack{y=0\\z=1}}=1.$$

因此,球面 Σ_2 上的大圆

$$\begin{cases} y^2+(z-1)^2=1, \\ x=0 \end{cases}$$

与直线 Γ 相切. 于是,Σ_2 是 Σ_1 和平面 $z=0$ 所围部分的内切球.

Σ_1 即

$$3(x^2+y^2)=z^2-6z+9. \quad ①$$

Σ_2 即

$$x^2+y^2+z^2-2z=0. \quad ②$$

$3\times②-①$,得 $4z^2=9$. 舍去 $z=-\frac{3}{2}$,这是因为球面 Σ_2 中 $|z-1|\leqslant 1$,即 $0\leqslant z\leqslant 2$. 为此,取 $z=\frac{3}{2}$. 因此,Σ_1 与 Σ_2 的交线为

$$\Gamma^*: \begin{cases} x^2+y^2+(z-1)^2=1, \\ z=\frac{3}{2}. \end{cases}$$

消去 z 可得交线 Γ^* 在平面 $z=0$ 上的投影柱面为 $x^2+y^2=\frac{3}{4}$,从而 Γ^* 在 xy 平面上的垂直投影为圆

$$\begin{cases} x^2+y^2=\frac{3}{4}, \\ z=0. \end{cases}$$

另外,Γ^* 在平面 $x=0$ 上的投影柱面为 $z=\frac{3}{2}$,故 Γ^* 在 yz 平面上垂直投影是 $z=\frac{3}{2}$ 平面上的一条线段:

$$\begin{cases} x=0, \\ z=\frac{3}{2} \end{cases} \left(|y|\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2.7.10 试求曲线

$$\Gamma: \begin{cases} x=f(v), & (f(v)>0) \\ y=0, \\ z=g(v) \end{cases}$$

绕 Oz 轴旋转而成的旋转面方程.

解法 1 设 $P(x,y,z)$ 为旋转面上任意一点,则从图 2.13 可见,旋转面的方程为

$$\begin{cases} x=f(v)\cos u, \\ y=f(v)\sin u, \\ z=g(v). \end{cases} \quad ①$$

旋转面的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=(f(v)\cos u, f(v)\sin u, g(v)).$$

解法 2 由 $z=g(v)$ 的反函数 g^{-1} 给出 $v=g^{-1}(z)$,代入 $x=f(v)$ 有

$$x=f(g^{-1}(z)).$$

所以母线 Γ 可写作

$$\begin{cases} x = f(g^{-1}(z)), \\ y = 0. \end{cases}$$

依 § 2.7 中的论述，以

$$\Gamma: \begin{cases} x = f(g^{-1}(z)), \\ y = 0 \end{cases}$$

为母线，绕 Oz 轴旋转的旋转面方程为

$$\sqrt{x^2 + y^2} = f(g^{-1}(z)).$$

此方程的参数表示式就是 ①.

2.7.11　从原点到椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面作垂线，试求垂足的轨迹方程.

解　设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为椭球面上的点，则点 P_0 处的切平面为

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1, \qquad ①$$

并且

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} + \frac{z_0^2}{c^2} = 1. \qquad ②$$

原点到切平面的垂线是

$$\frac{x}{\frac{x_0}{a^2}} = \frac{y}{\frac{y_0}{b^2}} = \frac{z}{\frac{z_0}{c^2}} = t. \qquad ③$$

由 ③ 得

$$x_0 = \frac{a^2 x}{t}, y_0 = \frac{b^2 y}{t}, z_0 = \frac{c^2 z}{t}. \qquad ④$$

以 ④ 代入 ①, ② 得

$$\begin{cases} a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = t^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = t. \end{cases}$$

消去参数 t，得所求轨迹方程为

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)^2. \qquad ⑤$$

注　因为垂足既在切平面 ① 上，又在垂线 ③ 上，所以 ①, ③ 中的 x, y, z 就看作轨迹上点的流动坐标. 称 ⑤ 为垂足曲面或 Fnesnel 弹性曲面.

2.7.12　从原点到曲面 $z = axy(a > 0)$ 的切平面作垂线，试求垂足的轨迹方程.

解　设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 为曲面 $z = axy$ 上的点，则点 P 处的切平面为

$$ay_0 x + ax_0 y - z - z_0 = 0, \qquad ①$$

并且

$$z_0 = ax_0 y_0. \qquad ②$$

$$\frac{x}{ay_0} = \frac{y}{ax_0} = \frac{z}{-1} \qquad ③$$

是原点到切平面的垂线. 利用参数法解题思想，从 ①, ②, ③ 这 4 个方程中，消去 3 个参数 x_0, y_0, z_0 就可得到轨迹方程.

从 ③ 得 $x_0 = -\frac{y}{az}, y_0 = -\frac{x}{az}$，代入 ② 求得 $z_0 = \frac{xy}{az^2}$，以 x_0, y_0, z_0 的表达式代入 ①，有

$$a\left(-\frac{x}{az}\right)x + a\left(-\frac{y}{az}\right)y - z - \left(\frac{xy}{az^2}\right) = 0.$$

化简整理得轨迹方程

$$az(x^2 + y^2 + z^2) + xy = 0.$$

2.7.13　已给二阶曲面

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 1, \qquad ①$$

以及平面的法方程

$$lx + my + nz - p = 0. \qquad ②$$

试求：(1) 曲面 ① 与平面 ② 相切的条件.

(2) 曲面 ① 三个互相正交的切平面的交点的轨迹.

解　(1) 取点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 在曲面 ① 上，则点 P_0 处的切平面方程为

$$ax_0 x + by_0 y + cz_0 z = 1. \qquad ③$$

由题设知平面 ② 与 ③ 相重合，故有

$$\frac{ax_0}{l} = \frac{by_0}{m} = \frac{cz_0}{n} = \frac{1}{p}.$$

于是 $ax_0 = \frac{l}{p}, by_0 = \frac{m}{p}, cz_0 = \frac{n}{p}$.

以此代入 ①，有

$$p^2 = \frac{l^2}{a} + \frac{m^2}{b} + \frac{n^2}{c}. \qquad ④$$

这就是相切的条件.

(2) 设三个互相正交平面的法方程分别为

$$l_i x + m_i y + n_i z = p_i, \qquad ⑤$$

$i = 1,2,3$. 这里

$$l_i l_j + m_i m_j + n_i n_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad ⑥$$

从 ⑥ 出发，易见有

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{3} l_i^2 = \sum_{i=1}^{3} m_i^2 = \sum_{i=1}^{3} n_i^2 = 1, \\ &l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0, \\ &m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0, \\ &n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad ⑦$$

由 ⑤ 知，

$$\sum_{i=1}^{3} (l_i x + m_i y + n_i z)^2 = \sum_{i=1}^{3} p_i^2.$$

因为

$$\sum_{i=1}^{3} p_i^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{l_i^2}{a}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{m_i^2}{b}\right) + \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{n_i^2}{c}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

利用 ⑦ 知

$$\sum_{i=1}^{n} (l_i x + m_i y + n_i z)^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

因此，所求轨迹方程为

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

称它为 Monge 球面.

显然，对于椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$的 Monge 球面方程为 $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$.

§ 2.8 直角坐标变换法

空间直角坐标变换由平移和旋转所组成.直角坐标变换用于研究一般二次曲面的性质、方程的简化以及对一般二次曲面的分类.在利用坐标法讨论问题适当选择坐标系简化方程时，直角坐标变换是一种强有力的计算工具.此外，直角坐标变换在物理、工程技术等领域中也有广泛的应用.

已给两个直角坐标系 $\sigma=[O;\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}]$ 和 $\sigma'=[O';\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}']$.今建立坐标变换的平移公式和旋转公式.

1. 平移公式.

若 $\boldsymbol{i}'=\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}'=\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}'=\boldsymbol{k}$，$O'$关于$\sigma$的坐标为$(a,b,c)$，任意一点$P$关于$\sigma$和$\sigma'$的坐标分别为$(x,y,z)$和$(x',y',z')$，则有平移公式：

$$\begin{cases}x=x'+a,\\ y=y'+b,\\ z=z'+c.\end{cases}$$

2. 旋转公式.

设 $O'=O$，$\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 关于σ的方向余弦依次为 $C_{11},C_{12},C_{13};C_{21},C_{22},C_{23};C_{31},C_{32},C_{33}$.则

$$\begin{cases}\boldsymbol{i}'=C_{11}\boldsymbol{i}+C_{12}\boldsymbol{j}+C_{13}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{j}'=C_{21}\boldsymbol{i}+C_{22}\boldsymbol{j}+C_{23}\boldsymbol{k},\\ \boldsymbol{k}'=C_{31}\boldsymbol{i}+C_{32}\boldsymbol{j}+C_{33}\boldsymbol{k}.\end{cases} \qquad ①$$

因为 $|\boldsymbol{i}'|=|\boldsymbol{j}'|=|\boldsymbol{k}'|=1$，且 $\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}'$ 互相正交，故有

$$C_{i1}C_{j1}+C_{i2}C_{j2}+C_{i3}C_{j3}=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$i,j=1,2,3$.

为便于记忆，写成表格形式

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	C_{11}	C_{12}	C_{13}
$\boldsymbol{j}'$	C_{21}	C_{22}	C_{23}
$\boldsymbol{k}'$	C_{31}	C_{32}	C_{33}

②

称①或②为两个坐标系σ和σ'之间底矢量的变换公式.

如果σ和σ'都是右手系，根据 2.1.10，由

$$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')=1,(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})=1$$

以及

$$(\boldsymbol{i}',\boldsymbol{j}',\boldsymbol{k}')=\begin{vmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{vmatrix}(\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k})$$

得

$$\begin{vmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33}\end{vmatrix}=1.$$

假设任意一点P对于σ和σ'的坐标分别为(x,y,z)和(x',y',z')，则

$$\begin{cases}x=C_{11}x'+C_{21}y'+C_{31}z',\\ y=C_{12}x'+C_{22}y'+C_{32}z',\\ z=C_{13}x'+C_{23}y'+C_{33}z',\end{cases} \qquad ③$$

或者

$$\begin{cases}x'=C_{11}x+C_{12}y+C_{13}z,\\ y'=C_{21}x+C_{22}y+C_{23}z,\\ z'=C_{31}x+C_{32}y+C_{33}z.\end{cases} \qquad ④$$

写成表格形式为

	x	y	z
x'	C_{11}	C_{12}	C_{13}
y'	C_{21}	C_{22}	C_{23}
z'	C_{31}	C_{32}	C_{33}

⑤

这里③,④,⑤都称为σ和σ'之间的点的坐标变换公式（横看可得④式，竖看可得③式）.

进一步，若$O'\neq O$，O'关于σ的坐标为(x_0,y_0,z_0)，则坐标变换公式是

	$x-x_0$	$y-y_0$	$z-z_0$
x'	C_{11}	C_{12}	C_{13}
y'	C_{21}	C_{22}	C_{23}
z'	C_{31}	C_{32}	C_{33}

⑥

2.8.1 两坐标系有相同的轴的方向，但原点不同.设有一点关于这两个坐标系的坐标分别为(1,1,1)和(7,3,−5).试求：这两坐标系原点之间的线段的中点的坐标.

解　设两坐标系分别为 σ 和 σ'，平移公式为

$$\begin{cases} x = x' + a, \\ y = y' + b, \\ z = z' + c. \end{cases}$$

若题设中的点关于 σ 的坐标为(1,1,1)，关于 σ' 的坐标为(7,3，-5)，则由平移公式得 $1 = 7 + a, 1 = 3 + b, 1 = -5 + c$，求得 $a = -6, b = -2, c = 6$. 因此，两个原点 O 与 O' 的中点在 σ 中的坐标为 $\left(\frac{0-6}{2},\frac{0-2}{2},\frac{0+6}{2}\right)$，即(-3，-1,3)；而关于 σ' 的坐标为(3,1，-3).

2.8.2　给出两个有公共原点的直角右手坐标系 σ 和 σ'. 设 Ox' 轴正向过第一卦限，而且与 Ox 轴和 Oy 轴都组成 $60°$ 的角. Oy' 轴位于 xy 平面上，而且与 Oy 轴组成锐角，试求坐标变换公式.

解　由题设及 $\cos 60° = \frac{1}{2}$，可设

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + a_{13}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = a_{21}\boldsymbol{i} + a_{22}\boldsymbol{j}, \\ \boldsymbol{k}' = a_{31}\boldsymbol{i} + a_{32}\boldsymbol{j} + a_{33}\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{i}'$ 在第一卦限，所以 $a_{13} > 0$，因此

$$a_{13} = \sqrt{1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

由 $\boldsymbol{i}' \perp \boldsymbol{j}'$，及 $|\boldsymbol{j}'| = 1$，得

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_{21} + \frac{1}{2}a_{22} = 0, \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1. \end{cases}$$

且 $a_{22} > 0$，由上解出 $a_{22} = \frac{\sqrt{2}}{2}, a_{21} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

因为 σ 和 σ' 都是直角右手坐标系，故

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{j}' \\ &= \left(\frac{1}{2}\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}\right) \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{j}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\boldsymbol{i} - \frac{1}{2}\boldsymbol{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

因此，底矢量的变换公式为

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\boldsymbol{j}'$	$\frac{-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$\boldsymbol{k}'$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}x' - \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{1}{2}z', \\ y = \frac{1}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{1}{2}z', \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}x' + \frac{\sqrt{2}}{2}z'. \end{cases}$$

2.8.3　试求从直角坐标系 σ 到 σ' 的变换公式. 已知点 O' 关于 σ 的坐标是(1，-2,5)，且 $\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{i}'} = \arccos\frac{1}{3}$，$\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}'} = \arccos(-\frac{2}{3})$，$\widehat{\boldsymbol{i},\boldsymbol{k}'} < \frac{\pi}{2}$，$\widehat{\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}'} = \arccos(-\frac{2}{3})$，$\widehat{\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{j}_2'} > \frac{\pi}{2}$.

解　从前两题的求解中知，关键在于算出底矢量的变换公式. 由题设，可记底矢量的变换公式为

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{i}'$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	C_{13}
$\boldsymbol{j}'$	$-\frac{2}{3}$	C_{22}	C_{23}
$\boldsymbol{k}'$	C_{31}	C_{32}	C_{33}

这里 $C_{13} > 0, C_{22} < 0$.

因为 $|\boldsymbol{i}'| = 1$，所以 $(\frac{1}{3})^3 + (-\frac{2}{3})^2 + C_{13}^2 = 1$.

由 $C_{13} > 0$，知 $C_{13} = \frac{2}{3}$.

由 $|\boldsymbol{j}'| = 1, \boldsymbol{i}' \perp \boldsymbol{j}'$ 可知

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \times (-\frac{2}{3}) + (-\frac{2}{3})C_{22} + \frac{2}{3}C_{23} = 0, \\ (-\frac{2}{3})^2 + C_{22}^2 + C_{23}^2 = 1. \end{cases}$$

以第一个方程 $C_{23} = C_{22} + \frac{1}{3}$，代入第二个方程，得 $2C_{22}^2 + \frac{2}{3}C_{22} - \frac{4}{9} = 0$. 因为 $C_{22} < 0$，故取 $C_{22} = -\frac{2}{3}$. 从而 $C_{23} = -\frac{1}{3}$. 而

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}' &= \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{j}' \\ &= \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right) \times \left(-\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}\right) \\ &= \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}. \end{aligned}$$

故底矢量的变换公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \frac{1}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = -\frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{2}{3}\boldsymbol{j} - \frac{1}{3}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' = \frac{2}{3}\boldsymbol{i} - \frac{1}{3}\boldsymbol{j} - \frac{2}{3}\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

坐标变换公式是

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z', \\ y = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{1}{3}z', \\ z = \frac{2}{3}x' - \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'. \end{cases}$$

2.8.4 设两个直角坐标系的原点不同,但对应的底矢量的终点相重合,试求坐标变换公式.

解 如图 2.16 所示,$A(1,0,0)$,$B(0,1,0)$,$C(0,0,1)$. 设 $O'(a_1,a_2,a_3)$. 由 $|O'A| = |O'B| = |O'C| = 1$,得

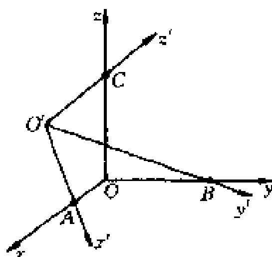


图 2.16

$$\begin{cases} (a_1-1)^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \\ a_1^2 + (a_2-1)^2 + a_3^2 = 1, \\ a_1^2 + a_2^2 + (a_3-1)^2 = 1. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 2a_1 = 0, \\ \sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 2a_2 = 0, \\ \sum_{i=1}^{3} a_i^2 - 2a_3 = 0. \end{cases}$$

由此推出 $a_1 = a_2 = a_3$.但不为0,不然 $O' = O$ 太简单了.因此求出 $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{2}{3}$,即 $O'(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$.

现在 $\overrightarrow{O'A} = (\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$,$\overrightarrow{O'B} = (-\frac{2}{3},\frac{1}{3},-\frac{2}{3})$,$\overrightarrow{O'C} = (-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$,故底矢量变换公式为

	i	j	k
i'	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$
j'	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
k'	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

因为 $O'(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})$,故坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}x' - \frac{2}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}, \\ y = -\frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + \frac{2}{3}, \\ z = -\frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + \frac{2}{3}. \end{cases}$$

2.8.5 试证:三条直线 $L_1: x = \frac{y}{4} = \frac{z}{2}$;$L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$;$L_3: \frac{x}{2} = y = \frac{z}{-3}$ 两两正交.若以此三条直线分别为新直角右手坐标系 $\{O\text{-}x'y'z'\}$ 的 Ox',Oy',Oz' 轴,试求坐标变换公式.

解 易见 L_1,L_2,L_3 三条直线交于原点$(0,0,0)$,为此坐标变换公式为旋转.三条直线的方向矢量分别为 $\boldsymbol{l}_1 = (1,4,2)$,$\boldsymbol{l}_2 = (2,-1,1)$,$\boldsymbol{l}_3 = (2,1,-3)$. 因为 $\boldsymbol{l}_1 \cdot \boldsymbol{l}_2 = 0$,$\boldsymbol{l}_2 \cdot \boldsymbol{l}_3 = 0$,$\boldsymbol{l}_3 \cdot \boldsymbol{l}_1 = 0$,故三条直线互相正交.为此可取底矢量的变换公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \frac{1}{\sqrt{21}}\boldsymbol{i} + \frac{4}{\sqrt{21}}\boldsymbol{j} + \frac{2}{\sqrt{21}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' = \frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j} - \frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

坐标变换公式是

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{21}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y' + \frac{2}{\sqrt{14}}z', \\ y = \frac{4}{\sqrt{21}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{14}}z', \\ z = \frac{2}{\sqrt{21}}x' + \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{3}{\sqrt{14}}z'. \end{cases}$$

2.8.6 试证:两点距离公式是平移和旋转下的不变式.

证明 设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$,$P_2(x_2,y_2,z_2)$. 平移公式为

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \\ z = z' + z_0. \end{cases}$$

经平移后 $P_1 \to P_1'(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$,$P_2 \to P_2'(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$. P_1' 与 P_2' 两点之间的距离

$$d(P_1',P_2') = \sqrt{[(x_1-x_0)-(x_2-x_0)]^2+[(y_1-y_0)-(y_2-y_0)]^2+[(z_1-z_0)-(z_2-z_0)]^2}$$
$$= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$$
$$= d(P_1,P_2).$$

由此证明了两点距离公式是平移的不变式. 为证明它

是旋转不变式,先证明一个引理.

引理 齐次线性变换

$$\begin{cases} x = C_{11}x' + C_{21}y' + C_{31}z', \\ y = C_{12}x' + C_{22}y' + C_{32}z', \\ z = C_{13}x' + C_{23}y' + C_{33}z'. \end{cases}$$

满足恒等式

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

的充要条件是此线性变换为直角坐标变换.

证明 因为

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + z^2 \\ = & (C_{11}{}^2 + C_{12}{}^2 + C_{13}{}^2)x'^2 + (C_{21}{}^2 + C_{22}{}^2 \\ & + C_{23}{}^2)y'^2 + (C_{31}{}^2 + C_{32}{}^2 + C_{33}{}^2)z'^2 \\ & + 2(C_{11}C_{21} + C_{12}C_{22} + C_{13}C_{23})x'y' \\ & + 2(C_{21}C_{31} + C_{22}C_{32} + C_{23}C_{33})y'z' \\ & + 2(C_{11}C_{31} + C_{12}C_{32} + C_{13}C_{33})x'z'. \end{aligned}$$

要使 $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ 成立,其充要条件为本节一开始所叙述的 ② 式成立,此表明线性变换就是直角坐标变换.

现在回到旋转变换 $P_1 \to P_1'$;$P_2 \to P_2'$. 根据引理 $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_1'}|$,$|\overrightarrow{OP_2}| = |\overrightarrow{OP_2'}|$,且 $\overrightarrow{OP_1}, \wedge \overrightarrow{OP_1'} = \overrightarrow{OP_2}, \wedge \overrightarrow{OP_2'}$,因此 $|\overrightarrow{P_1P_2}| = |\overrightarrow{P_1'P_2'}|$. 从而证明了两点间的距离是旋转不变式.

2.8.7 试用投影方法直接证明空间中直角坐标系的旋转公式.

证明 如图 2.17 所示,点 A 表示 M 在 $x'Oy'$ 平面上的投影,AD 与 Ox' 轴垂直. 根据三垂线定理,MD 与 Ox' 轴垂直,从而 $\overrightarrow{OD} = x'\boldsymbol{i}'$,$\overrightarrow{DA} = y'\boldsymbol{j}'$,$\overrightarrow{AM} = z'\boldsymbol{k}'$. 因此

图 2.17

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{Proj}_i \overrightarrow{OM} \\ &= \mathrm{Proj}_i(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM}) \\ &= \mathrm{Proj}_i(x'\boldsymbol{i}' + y'\boldsymbol{j}' + z'\boldsymbol{k}') \\ &= x'\mathrm{Proj}_i\boldsymbol{i}' + y'\mathrm{Proj}_i\boldsymbol{j}' + z'\mathrm{Proj}_i\boldsymbol{k}' \\ &= x'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}'). \end{aligned}$$

同理,有

$$y = x'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}'),$$
$$z = x'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}').$$

因此,坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = x'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}'), \\ y = x'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}'), \\ z = x'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}') + y'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}') + z'(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}'). \end{cases}$$

因为$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}')$,$(\boldsymbol{j},\boldsymbol{i}')$,$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}')$就是 $\boldsymbol{i}'$ 关于σ的方向余弦. 同理,$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}')$,$(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}')$,$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}')$ 与$(\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}')$,$(\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}')$,$(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}')$ 分别是 $\boldsymbol{j}'$,$\boldsymbol{k}'$ 关于σ的方向余弦. 因此,坐标变换公式就是本节中开始所叙述的 ③ 式.

2.8.8 利用直角坐标系旋转,将下列方程化成标准方程.

(1) $xy + yz + zx = 0$;

(2) $xy + yz + zx - 2(x + y + z) + 3 = 0$;

(3) $xy + yz + zx - (x + y + z) + 1 = 0$.

解 根据 2.7.2 和 2.7.5 知道,(1) 和(2) 代表圆锥面,而 ③ 是单叶双曲面. 因为(2),(3) 中都出现因子 $x + y + z$,而且 $xy + yz + zx = \frac{1}{2}(x + y + z)^2 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. 又根据 2.8.6 中的引理的启迪,故可令平面 $x + y + z = 0$ 的单位法矢量$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$作为新的 Ox' 轴的正向. 至于新的 Oy' 轴的底矢量$\boldsymbol{j}'$的选取,其方法就比较多了,只要保证 $|\boldsymbol{j}'| = 1$ 与$\boldsymbol{j}' \perp \boldsymbol{i}'$. 当然,这最简单的取法是其中有一个分量为 0,故可取 $\boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$,而 $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$. 因此,底矢量的变换公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} \qquad\quad - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' = -\frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} - \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

而坐标变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' \qquad\quad + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z'. \end{cases}$$

(1) 以坐标变换代入,化简整理得

$$x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 = 0.$$

显然,它代表一个圆锥面,旋转轴是 x' 轴,它与平面 $x' = 0$ 相垂直,即旋转轴与平面 $x + y + z = 0$ 相垂直.

(2) 由坐标变换公式知 $x + y + z = \sqrt{3}x'$. 今用坐标变换公式代入(2) 中方程,化简后得

$$x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 - 2\sqrt{3}x' + 3 = 0,$$

即

$$(x' - \sqrt{3})^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 = 0.$$

作平移

$$\begin{cases} x' = x'' + \sqrt{3}, \\ y' = y'', \\ z' = z'' \end{cases}$$

后，变成

$$x''^2 - \frac{1}{2}y''^2 - \frac{1}{z}z''^2 = 0.$$

它代表一个圆锥面.

(3) 类似于(2) 的做法，有

$$x'^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 - \sqrt{3}x' + 1 = 0,$$

$$(x' - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 - \frac{1}{2}y'^2 - \frac{1}{2}z'^2 + \frac{1}{4} = 0.$$

作平移

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y' = y'', \\ z' = z'' \end{cases}$$

后，变成

$$\frac{-x''^2}{\frac{1}{4}} + \frac{y''^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z''^2}{\frac{1}{2}} = 1.$$

它代表单叶双曲面.

2.8.9 设二阶柱面过点(1,0,-1)和(2,0,2)，对称轴为 $x = -y = z$，两个对称面为 $x + 2y + z = 0$ 和 $x = z$. 试求柱面的方程.

解 两个对称面的单位法矢量为 $\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)$，对称轴的方向矢量为(1,-1,1). 故可取底矢量的变换公式为

$$\begin{cases} \boldsymbol{i}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{i} - \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{j}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i} \qquad - \frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{k}' = \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{i} + \frac{2}{\sqrt{6}}\boldsymbol{j} + \frac{1}{\sqrt{6}}\boldsymbol{k}. \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$ 构成右手系.

直角坐标的变换公式为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z', \\ y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x' \qquad + \frac{2}{\sqrt{6}}z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z. \end{cases}$$

经旋转后，对称轴为 Ox' 轴. 两个对称平面为 $z' = 0$ 和 $y' = 0$. 利用坐标变换公式，点(1,0,-1)变成$(0, \sqrt{2}, 0)$；点(2,0,2)变为$(\frac{4}{\sqrt{3}}, 0, \frac{4}{\sqrt{6}})$.

根据对称性，因为关于 $y' = 0$ 对称，故不能含有 y' 的一次项；又因为关于 $z' = 0$ 对称，故不能含有 z' 的一次项. 再因为母线平行 Ox' 轴，故不含 x' 的项. 因此，在新坐标系中，柱面方程可写成 $By'^2 + Cz'^2 + D = 0$. 以$(0, \sqrt{2}, 0)$和$(\frac{4}{\sqrt{3}}, 0, \frac{4}{\sqrt{6}})$代入上式得

$$\begin{cases} 2B + D = 0, \\ \frac{8}{3}C + D = 0. \end{cases}$$

解得 $B = -\frac{D}{2}, C = -\frac{3}{8}D$.

故所求柱面方程为

$$\frac{y'^2}{2} + \frac{3}{8}z'^2 = 1,$$

即

$$4(x - z)^2 + (x + 2y + z)^2 = 16.$$

注 参阅 2.8.8.

2.8.10 试证：方程

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = a^3$$

代表一个旋转面，这里 a 为常数.

证明 利用2.8.8或2.8.9中的坐标变换公式代入已给方程，可得$\frac{3\sqrt{3}}{2}x'(y'^2 + z'^2) = a^2$. 根据此方程表达式中含有 $y'^2 + z'^2$ 项，但不出现其他的 y' 或 z' 项，故立知此方程代表一个旋转面：母线是

$$\begin{cases} \frac{3\sqrt{3}}{2}x'y' = a^2, \\ z' = 0, \end{cases}$$

旋转轴为 Ox' 轴：

$$\begin{cases} y' = 0, \\ z' = 0, \end{cases}$$

即 $x = y = z$.

注 原方程可写作

$$(x + y + z)[-\frac{1}{2}(x + y + z)^2 + \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)] = a^3.$$

若用平面 $x + y + z = k$ 去截，得

$$\frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^3}{k} + \frac{k^2}{2}.$$

而

$$\begin{cases} \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{a^3}{k} + \frac{k^2}{2}, \\ x + y + z = k \end{cases}$$

代表一个圆，其圆心在直线 $x = y = z$ 上，因此，原方程代表绕 $x = y = z$ 旋转而成的旋转面.

2.8.11 当数 a, b, c, m, n 满足什么条件时，平面

$$z = mx + ny + p$$

与单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

的交线是椭圆、双曲线或抛物线.

解 作平移 $x=x',y=y',z=z'+p$. 平面与单叶双曲面的方程相应变成

$$mx'+ny'-z'=0$$

与

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}-\frac{(z'+p)^2}{c^2}=1.$$

将平面 $mx'+ny'-z'=0$ 的法矢量 $(m,n,-1)$ 作为新的 z'' 轴方向，再取 $(1,0,m)$ 为新的 y'' 轴方向，则新的 x'' 轴方向为 $(1,0,m)\times(m,n,-1)=(-mn,m^2+1,n)$. 因此，可作坐标变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{-mn}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}y''+\dfrac{m}{\sqrt{m^2+n^2+1}}z'', \\ y'=\dfrac{m^2+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''+\dfrac{n}{\sqrt{m^2+n^2+1}}z'', \\ z'=\dfrac{n}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''+\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}y''-\dfrac{1}{\sqrt{m^2+n^2+1}}z''. \end{cases} \quad ①$$

经此旋转变换后，平面 $mx'+ny'-z'=0$ 变成 $z''=0$. 因此，所求交线为

$$\begin{cases} z''=0, \\ \dfrac{x'^2}{a^2}+\dfrac{y'^2}{b^2}-\dfrac{(z'+p)^2}{c^2}=0. \end{cases} \quad ②$$

用旋转变换①代入上式，可知②代表 $z''=0$ 平面上一条二次曲线. 再用 $z''=0$ 代入②中第二个方程，得交线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{-mn}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}y''\right)^2 \\ \quad +\dfrac{1}{b^2}\left(\dfrac{m^2+1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''\right)^2 \\ \quad -\dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{n}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}}x''+\dfrac{m}{\sqrt{m^2+1}}y''+p\right)^2=0, \\ z''=0. \end{cases}$$

这里 x''^2 的系数为

$$A=\frac{1}{a^2}\left(\frac{m^2n^2}{(m^2+1)(m^2+n^2+1)}\right)+\frac{1}{b^2}\frac{(m^2+1)^2}{(m^2+1)(m^2+n^2+1)}-\frac{1}{c^2}\left(\frac{n^2}{(m^2+1)(m^2+n^2+1)}\right),$$

y''^2 的系数为

$$C=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{m^2+1}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{m^2}{m^2+1}.$$

$\frac{1}{2}x''y''$ 的系数为

$$B=\frac{1}{a^2}\cdot\frac{-mn}{(m^2+1)\sqrt{m^2+n^2+1}}-\frac{1}{c^2}\cdot\frac{mn}{(m^2+1)\sqrt{m^2+n^2+1}}.$$

经化简整理后可得

$$AC-B^2=\frac{c^2-a^2m^2-b^2n^2}{(m^2+n^2+1)(m^2+1)}.$$

因此，当 $c^2-a^2m^2-b^2n^2>0$ 时，交线为椭圆；当 $c^2-a^2m^2-b^2n^2<0$ 时，交线为双曲线；当 $c^2-a^2m^2-b^2n^2=0$ 时，交线为抛物线.

2.8.12 试求通过点 $P_0(1,1,0)$，且通过圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2-2x-2z=0, \\ x-z=0 \end{cases} \quad ①$$

的旋转抛物面的方程.

解 仿上题，将 $x-z=0$ 的法矢量 $(1,0,-1)$ 作为新的 Oz' 轴的正向，接着选择较简单的方向 $(1,1,1)$ 作为新的 Ox' 轴的正向，则新的 Oy' 轴的正向为 $(1,0,-1)\times(1,1,1)=(1,-2,1)$. 作旋转变换

$$\begin{cases} x'=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x+y+z), \\ y'=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(x-2y+z), \\ z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-z) \end{cases}$$

后，①化成

$$\begin{cases} \left(x'-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2+\left(y'-\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right)^2+z'^2=2, \\ z'=0. \end{cases}$$

作平移

$$\begin{cases} x'=x''+\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ y'=y''+\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \\ z'=z'' \end{cases}$$

得圆①的方程

$$\begin{cases} x''^2+y''^2+z''^2=2, \\ z''=0. \end{cases} \quad ②$$

经旋转与平移变换后，$P_0(1,1,0)$ 的坐标为 $\left(0,-\frac{3}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

设旋转抛物面为 $x''^2+y''^2=az''+b$.

由②得 $b=2$，以 $(0,\frac{-3}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 代入上式确定 $a=\frac{-1}{\sqrt{2}}$. 故所求旋转抛物面为

$$x''^2+y''^2=-\frac{\sqrt{2}}{2}z''+2.$$

即

$$\frac{1}{3}(x+y+z-2)^2+\frac{1}{6}(x-2y+z-2)^2=-\frac{1}{2}(x-z)+2.$$

注 已给圆为

$$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=2,\\ x-z=0.\end{cases}$$

因为 $x-z=0$ 的法矢量为 $(1,0,-1)$，球心为 $(1,0,1)$. 所以旋转轴为

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

即 $\begin{cases}y=0,\\ x+z-2=0.\end{cases}$

另一方面，用刚才坐标变换来考虑，旋转轴为 Oz'' 轴. 故旋转轴的方程为

$$\begin{cases}y''=0,\\ z''=0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x+y+z-2=0,\\ x-2y+z-2=0,\end{cases}$

也就是

$$\begin{cases}y=0,\\ x+z-2=0.\end{cases}$$

§2.9 坐标法

空间解析几何学主要是研究空间中各种曲线、曲面的几何形状、几何性质以及它们之间互相联系的一门学科. 空间直角坐标系的建立可将几何上的几何图形与代数上图形所表示的方程予以对应，就可运用代数方法去解决几何问题. 坐标法解题就是根据已给的条件与几何性质，选取适当的坐标系，以建立一系列代数方程，从而将几何问题转化成代数问题. 通过代数方程的求解，以获得几何问题的圆满解决.

坐标系的选择方法是多种多样的，有直角坐标系、斜角坐标系、仿射坐标系、球面坐标系和柱面坐标系等等. 本节一般选用直角坐标系.

2.9.1 已知动点到一定点和到一平面的距离相等，试求动点的轨迹.

解 如图 2.18 所示，选择定平面为 xOy 平面，定点 $A(0,0,a)(a>0)$. 假设动点为 $P(x,y,z)$，则由题设知

$$x^2+y^2+(z-a)^2=z^2.$$

即

$$x^2+y^2=2az-a^2.$$

作平移

$$\begin{cases}x=x',\\ y=y',\\ z=z'+\frac{a}{2}\end{cases}$$

得

$$x'^2+y'^2=2ay'.$$

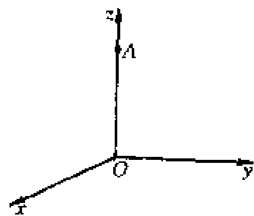


图 2.18

它代表旋转椭圆抛物面.

2.9.2 已知动点到两定点 P_1 和 P_2 的距离之和为 a，试求动点的轨迹.

解 如图2.19所示，建立直角坐标系，使 $P_1(0,0,\frac{c}{2})$，$P_2(0,0,-\frac{c}{2})$. 其中 $c=|P_1P_2|$. 假设动点为 $P(x,y,z)$，则由题设知

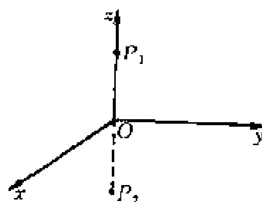


图 2.19

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{c}{2})^2}+\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{c}{2})^2}=a.$$

即

$$\sqrt{x^2+y^2+(z-\frac{c}{2})^2}=a-\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{c}{2})^2}.$$

两边平方得

$$2cz+a^2=2a\sqrt{x^2+y^2+(z+\frac{c}{2})^2}.$$

再两边平方，化简整理得

$$x^2+y^2+(1-\frac{c^2}{a^2})z^2=\frac{1}{4}(a^2-c^2).$$

根据题中假设条件，有 $a\geqslant c$. 当 $a=c$ 时，轨迹退化为线段 P_1P_2；当 $a>c$ 时，轨迹是旋转椭球面.

2.9.3 已知动点到两条异面直线的距离相等，试求动点的轨迹.

解 如图 2.20 所示，建立直角坐标系：使 Oz 轴通过两条异面直线 L_1 和 L_2 的公垂线；原点 O 是线段 A_1A_2 的中点，这里 $A_1(0,0,-c)$，$A_2(0,0,c)$ 是公垂线的两个垂足；Ox 轴与两条定直线保持相等的角度；并且 $O\text{-}xyz$ 为直角右手坐标系.

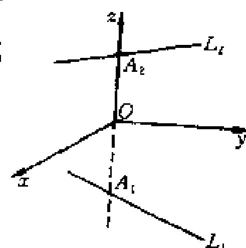


图 2.20

因为直线L_1与Oz轴相交,故L_1在过Oz轴的某个平面$y=-mx\ (m>0)$上.又因为L_1与L_2的公垂线为Oz轴,故L_1在$z=-c$平面上,从而

$$L_1:\begin{cases}y=-mx,\\ z=-c.\end{cases}$$

类似地,根据对称性,可设

$$L_2:\begin{cases}y=mx,\\ z=c.\end{cases}$$

直线L_1的方向矢量$\boldsymbol{l}_1=(1,-m,0)$;直线$L_2$的方向矢量$\boldsymbol{l}_2=(-1,-m,0)$.$|\boldsymbol{l}_1|=|\boldsymbol{l}_2|=\sqrt{1+m^2}$.

假设$P(x,y,z)$为动点,则由题设知

$$\frac{|\overrightarrow{A_1P}\times\boldsymbol{l}_1|}{|\boldsymbol{l}_1|}=\frac{|\overrightarrow{A_2P}\times\boldsymbol{l}_2|}{|\boldsymbol{l}_2|}. \qquad ①$$

因为

$$\overrightarrow{A_1P}=(x,y,z+c),$$
$$\overrightarrow{A_1P}\times\boldsymbol{l}_1=(m(z+c),z+c,-mx-y);$$
$$\overrightarrow{A_2P}=(x,y,z-c),$$
$$\overrightarrow{A_2P}\times\boldsymbol{l}_2=(m(z-c),-(z-c),-mx+y).$$

因此,①变成

$$m^2(z+c)^2+(z+c)^2+(mx+y)^2=m^2(z-c)^2+(z-c)^2+(-mx+y)^2,$$

化简得

$$xy=-\frac{(m^2+1)c}{m}z. \qquad ②$$

作旋转

$$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt2}(x'+y'),\\ y=\dfrac{1}{\sqrt2}(-x'-y'),\\ z=z'.\end{cases}$$

②变成

$$x'^2-y'^2=\frac{2c(m^2+1)}{m}z'.$$

由此可见,动点轨迹是双曲抛物面.

2.9.4 已给空间中A,B,C,D四点,AB,AC,AD互相垂直,且$AB=AC=AD$.在直线AB上任取一点P,相应地在直线CD上取点Q,使得$\dfrac{AP}{BP}=\dfrac{CQ}{DQ}$.当$P$在直线$AB$上移动时,试求动直线$PQ$的轨迹方程.

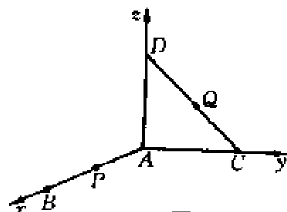


图2.21

解 如图2.21所示,建立直角坐标系:$A(0,0,0)$,$B(1,0,0)$,$C(0,1,0)$,$D(0,0,1)$.因为点P在Ox轴上变动,Q在yOz平面上相应地变动,故可设$P(\lambda,0,0)$,$Q(0,\mu,\nu)$,则

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\lambda}{\lambda-1},$$
$$\frac{CQ}{QD}=-\frac{CQ}{DQ}=-\frac{AP}{BP}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

即

$$\frac{CQ}{QD}=\frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

应用点Q分线段CD为定比$\dfrac{\lambda}{1-\lambda}$的分比公式有

$$\begin{cases}\mu=\dfrac{1+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\times0}{1+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}=1-\lambda,\\[2ex] \nu=\dfrac{0+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}\times1}{1+\dfrac{\lambda}{1-\lambda}}=\lambda.\end{cases}$$

因此$Q(0,\mu,\nu)$,即$Q(0,1-\lambda,\lambda)$.而$P(\lambda,0,0)$,故直线PQ的方程为

$$\begin{cases}x=\lambda+t\lambda,\\ y=t(\lambda-1),\\ z=-t\lambda.\end{cases}$$

由此得

$$x+z=\lambda,\ \frac{y+z}{z}=\frac{1}{\lambda}.$$

两式相乘,即可消去参数λ,得

$$(x+z)(y+z)=z,$$

这就是所求的轨迹方程.

2.9.5 设P,P'分别是给定两条异面直线AB和$A'B'$上的动点,而动点Q使QP,QP'彼此正交,又QP,QP'分别与$AB,A'B'$正交,试求动点Q的轨迹.

解 如图2.22所示,建立直角坐标系:使AB与$A'B'$的公垂线AA'为Oz轴,线段AA'的中点O为原点.过原点O作$OC\ /\!/\ AB$,$OC'\ /\!/\ A'B'$,取OC,OC'的两条平分角线为Ox轴和Oy轴,类似2.9.4,可设

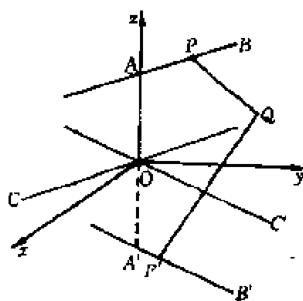


图2.22

$$AB:\begin{cases}y=-mx,\\ z=c,\end{cases}$$
$$A'B':\begin{cases}y=+mx,\\ z=-c.\end{cases}$$

AB的方向矢量$\boldsymbol{l}_1=(1,-m,0)$;$A'B'$的方向矢量

$l_2 = (1, m, 0)$. 令 P 在直线 AB 上, 可设 $P(x_1, -mx_1, c)$. P' 在直线 $A'B'$ 上, 可设 $P'(x_1', mx_1', -c)$. 假设 $Q(x_0, y_0, z_0)$ 为轨迹上任意一点, 则 $\overrightarrow{PQ} = (x_0 - x_1, y_0 + mx_1, z_0 - c)$, $\overrightarrow{P'Q} = (x_0 - x_1', y_0 - mx_1', z_0 + c)$. 因为 $\overrightarrow{PQ} \perp l_1$, 故

$$x_0 - x_1 - m(y_0 + mx_1) = 0;$$

又因 $\overrightarrow{P'Q} \perp l_2$, 故

$$x_0 - x_1' + m(y_0 - mx_1') = 0.$$

由此解出

$$x_1 = \frac{x_0 - my_0}{1 + m^2}, x_1' = \frac{x_0 + my_0}{1 + m^2}. \quad ①$$

此外, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{P'Q}$, 从而

$$(x_0 - x_1)(x_0 - x_1') + (y_0 + mx_1)(y_0 - mx_1') + (z_0 - c)(z_0 + c) = 0.$$

用 ① 中 x_1 及 x_1' 的表达式代入上面方程, 化简整理后可得

$$(m^2x_0^2 - y_0^2)(m^2 - 1) + (1 + m^2)(z_0^2 - c^2) = 0.$$

因为 (x_0, y_0, z_0) 代表轨迹上任意一点, 所以, 动点 Q 的轨迹方程是

$$(m^2x^2 - y^2)(m^2 - 1) + (1 + m^2)(z^2 - c^2) = 0.$$

2.9.6 设 P, P' 分别是给定两条异面直线 AB 和 $A'B'$ 上的动点, PP' 的长度是常数 $2k$ $(k > 0)$. 试求 PP' 之轨迹.

解 建立直角坐标系如 2.9.5, 则直线

$$AB: \begin{cases} y + mx = 0, \\ z = c, \end{cases}$$

$$A'B': \begin{cases} y - mx = 0, \\ z = -c. \end{cases}$$

直线 PP' 既属于以 AB 为轴的有轴平面束, 又属于以 $A'B'$ 为轴的有轴平面束, 故可设直线

$$PP': \begin{cases} y + mx + k_1(z - c) = 0, & ① \\ y - mx + k_2(z + c) = 0. & ② \end{cases}$$

直线 PP' 与 AB 的交点为 $P\left(\frac{k_2c}{m}, -k_2c, c\right)$, 直线 PP' 与 $A'B'$ 的交点为 $P'(\frac{k_1c}{m}, k_1c, -c)$.

由题设 $|PP'| = 2k$, 知

$$\frac{(k_2 - k_1)^2c^2}{m^2} + (k_1 + k_2)^2c^2 = 4(k^2 - c^2). \quad ③$$

另一方面, 由 ①, ② 得

$$k_1 = -\frac{y + mx}{z - c}, k_2 = -\frac{y - mx}{z + c}.$$

以此 k_1, k_2 代入 ③ 即得所求轨迹的方程.

2.9.7 试求与定平面 π 及定直线 L 的距离之比为正常数 k 的点的轨迹, 并说明其形状.

解 根据 § 2.3 中直线与平面的位置关系, 可分三种情形加以讨论.

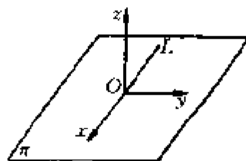


图 2.23

情形 1: 直线 L 在平面 π 内. 建立直角坐标系如图 2.23 所示: 已给平面为 xOy 平面, 直线 L 为 Ox 轴, 则

$$L: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

假设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上任意一点, 依题设有

$$\frac{|z|}{\sqrt{y^2 + z^2}} = k. \quad ①$$

当 $k = 1$ 时, 轨迹为 $y = 0$.

当 $k < 1$ 时, ① 变成 $(1 - k^2)z^2 = k^2y^2$. 代表一对相交平面.

当 $k > 1$ 时, 无实的轨迹.

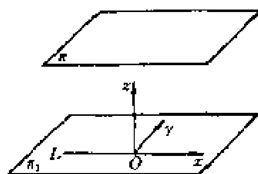


图 2.24

情形 2: 直线 L 与平面 π 平行, 建立直角坐标系如图 2.24 所示: 选择 L 为 Ox 轴, 平面 π_1 为 xOy 平面, 这里 π_1 过直线 L 且与平面 π 相平行.

则平面 $\pi: z = h (h \neq 0)$. 直线

$$L: \begin{cases} y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

设 $P(x, y, z)$ 为轨迹上任意一点, 依题意有

$$\frac{|z - h|}{\sqrt{y^2 + z^2}} = k.$$

化简整理得

$$k^2y^2 + (k^2 - 1)z^2 + 2hz - h^2 = 0. \quad ②$$

当 $k = 1$ 时, $y^2 = -2h(z - \frac{h}{2})$, 它代表抛物柱面.

当 $k \neq 1$ 时, ② 可化为

$$k^2y^2 + (k^2 - 1)(z + \frac{h}{k^2 - 1})^2 = \frac{h^2k^2}{k^2 - 1}.$$

作平移

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y', \\ z = z' - \dfrac{h}{k^2 - 1}, \end{cases}$$

$$k^2y'^2 + (k^2 - 1)z'^2 = \frac{h^2k^2}{k^2 - 1}. \quad ③$$

当 $k > 1$ 时, ③ 代表椭圆柱面.

当 $k < 1$ 时, ③ 代表双曲柱面.

情形3：直线 L 与平面 π 相交. 建立直角坐标系如图2.25所示：以直线 L 与平面 π 的交点 O 作为原点，以定直线 L 为 Oz 轴，则

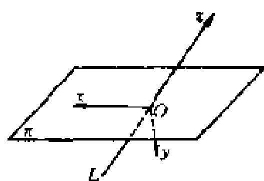


图2.25

$$L:\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

设平面 π 的法方程为

$$Ax + By + Cz = 0,$$

且 $A^2 + B^2 + C^2 = 1$.

如果 $P(x,y,z)$ 为轨迹上任意一点，依题设有

$$\frac{|Ax + By + Cz|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = k,$$

即

$$(Ax + By + Cz)^2 = k^2(x^2 + y^2).$$

它代表以原点为顶点的二次锥面.

2.9.8　设 L_1 与 L_2 是两条异面直线，公垂线是 L，公垂线之长为 a. 试求：直线 L_2 绕直线 L_1 旋转而成的旋转面方程.

解　如图2.26所示，选取 L_1 为 Oz 轴，公垂线 L 为 Ox 轴，建立直角右手坐标系.

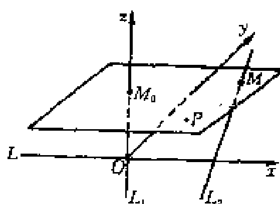


图2.26

因为公垂线 L 垂直 L_2，所以直线 L_2 在平面 $x = a$ 内. 又因为 L 为 Ox 轴，所以由 L 和 L_2 所决定的平面过 Ox 轴. 因此，可设此平面的方程为 $z = by(b \neq 0)$. 于是

$$L_2:\begin{cases} x = a, \\ z = by. \end{cases}$$

设 $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 为所求旋转面上任意一点，则过点 P 与旋转轴 L_1 相垂直的平面为 $z = \bar{z}$. 它与 Oz 轴交于点 $M_0(0,0,\bar{z})$，又与 L_2 交于点 $M(a,\frac{\bar{z}}{b},\bar{z})$. 根据旋转面的性质 $|M_0M|^2 = |M_0P|^2$，得

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = a^2 + \frac{\bar{z}^2}{b^2}.$$

因此，旋转面的方程是

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{a^2b^2} = 1.$$

它代表单叶双曲面.

§2.10　截痕法

曲面 $\Sigma: z = f(x,y)$ 和平面相交的图形称为截口曲线，截口曲线所在的平面称为截口平面. 根据截口曲线的形状及其变化的幅度与范围来研究曲面 Σ 的大概形状以及曲面几何图形性质的方法称为截痕法，又称为截面法. 通常，选取三个坐标平面或平行于一些坐标平面的平面作为截口平面. 如果截面曲线结合它在三个坐标平面上的投影曲线的几何形状和几何性质进行研究，则可得到有关曲面 Σ 更多的几何性质.

如果截口曲线为圆，则称这样的截口曲线为圆截线. 圆截线除本身具备了一些好的几何性质外，它是判别旋转面的一种行之有效的方法.

2.10.1　已给曲面 $\Sigma_1: xy + yz + zx = 0$，$\Sigma_2: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 和平面 $\pi: x + y + z = a$. 试证：

(1) $\begin{cases} xy + yz + zx = 0, & ① \\ x + y + z = a & ② \end{cases}$

表示圆，并求该圆的半径.

(2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, & ③ \\ yz + zx + xy = 0 \end{cases}$

表示圆，并求该圆的半径.

解　(1) 根据2.8.8，$xy + yz + zx = 0$ 代表一个圆锥面，它的旋转轴的方向矢量为$(1,1,1)$，并与平面 $x + y + z = 0$ 相垂直，当然，旋转轴也垂直平面 $x + y + z = a$. 为此，由①，②所表示的曲线代表一个圆. ②式平方减去①式乘以2，得

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

故圆截线为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = a. \end{cases}$$

因为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 的球心为$(0,0,0)$. 球心到平面 $x + y + z = a$ 的距离为 $\frac{|0 + 0 + 0 - a|}{\sqrt{3}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$，故圆截线的半径等于

$$\sqrt{a^2 - (\frac{a}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a.$$

(2) 由③ + 2 × ①，得

$$(x + y + z)^2 = a^2,$$

即有

$$x + y + z = \pm a.$$

根据(1)的讨论，

$$\begin{cases} x + y + z = a, \\ xy + yz + zx = 0 \end{cases}$$

的截口曲线是圆截线，而且圆的半径为 $\frac{\sqrt{6}}{3}a$. 根据图形的对称性，另一条圆截线为

$$\begin{cases} x + y + z = -a, \\ xy + yz + zx = 0. \end{cases}$$

此圆的半径也为$\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

注 根据2.8.8的坐标变换公式,在新坐标系中①的方程为 $x'^2-\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}z'^2=0$;②的方程为 $\sqrt{3}x'=a$.显然,这两个曲面的交线是圆.

由 $\frac{a^2}{3}-\frac{1}{2}y'^2-\frac{1}{2}z'^2=0$ 知圆的半径为 $\sqrt{\frac{2}{3}}a$,即$\frac{\sqrt{6}}{3}a$.

2.10.2 已给椭球面

$$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (a>b>c).$$

试求过 Oy 轴的平面 π,使平面 π 与 Σ 的交线为圆.

解法1 因平面 π 过 Oy 轴,故可设 $\pi: x+Bz=0$. Σ 与平面 $y=0$ 的交线为

$$\Gamma:\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{cases}$$

设平面 π 与 Γ 的交点是 $M(x_0,0,z_0)$,则

$$\begin{cases}\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1,\\ x_0+Bz_0=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}x_0^2=\frac{B^2a^2c^2}{c^2B^2+a^2},\\ z_0^2=\frac{a^2c^2}{c^2B^2+a^2}.\end{cases}$$

按题设,平面 π 与 Σ 的交线是圆,故线段 OM 之长为 b.于是 $x_0^2+z_0^2=b^2$,由此求出

$$B^2=\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^2(a^2-b^2)}.$$

因此,所求平面

$$\pi: c\sqrt{a^2-b^2}x\pm a\sqrt{b^2-c^2}z=0.$$

解法2 由椭球面的对称性,知圆截线的圆心在原点,且过$(0,b,0)$点,半径为 b.故圆截线上任意一点 $P(x,y,z)$ 的坐标满足

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x^2+y^2+z^2=b^2.\end{cases}$$

因为所求平面过 Oy 轴,为此在上述方程组中可消去变量 y,从而有

$$\pi: c\sqrt{a^2-b^2}x\pm a\sqrt{b^2-c^2}z=0. \qquad ①$$

这就是圆截线所在的截口平面.

注 根据图形的对称性,圆截线所在的截口平面不仅仅是一个平面 π,与平面 π 平行的平面与椭球面相截的截口曲线仍为圆,但必须保证这些截口平面与原点之间的距离不能超过椭球面以$(c\sqrt{a^2-b^2},0,\pm a\sqrt{b^2-c^2})$为法向量的切平面到原点的距离.为此,分几步加以考虑.

第1步.求与①平行的椭球面的切平面.假设切点为 $M_0(x_0,y_0,z_0)$,则点 M_0 处的切平面为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y_0y}{b^2}+\frac{z_0z}{c^2}=1.$$

按要求此平面与平面 π 平行,故有

$$\frac{\frac{x_0}{a^2}}{c\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{\frac{y_0}{b^2}}{0}=\frac{\frac{z_0}{c^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}.$$

由此求出 $y_0=0$,以及 $z_0=\frac{c}{a}\cdot\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}x_0$.

因为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1.$$

解得

$$x_0=a\cdot\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a^2-c^2}},y_0=0,$$

$$z_0=c\cdot\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{\sqrt{a^2-c^2}}.$$

因此,与平面 π 平行的椭球面的一个切平面是

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a\sqrt{a^2-c^2}}x+\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{c\sqrt{a^2-c^2}}z=1. \qquad ②$$

第2步.原点到②所表示的切平面之间的距离为 $\frac{ac}{b}$.

第3步.假设与平面 π 平行的截口平面为

$$c\sqrt{a^2-b^2}x+a\sqrt{b^2-c^2}z+d=0. \qquad ③$$

使得截口曲线为圆截线,则原点到此平面的距离为 $\frac{d}{b\sqrt{a^2-c^2}}$.于是③中的 d 必须满足

$$\frac{|d|}{b\sqrt{a^2-c^2}}\leqslant\frac{ac}{b},$$

即

$$|d|\leqslant ac\sqrt{a^2-c^2}. \qquad ④$$

综上所述,圆截线的截口平面是

$$c\sqrt{a^2-b^2}x\pm a\sqrt{a^2-c^2}z+d=0,$$

其中 d 满足条件④.

2.10.3 已给二次曲面 $3x^2+5y^2+3z^2+2xz-4=0$,试求圆截线所在的平面方程.

解 考虑 $3x^2+3z^2+2xz$ 三项,自然会想到在 xOz 平面内作45°的旋转变换,因此,可作旋转

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - z'), \\ y = y', \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + z'). \end{cases}$$

原方程化为

$$4x'^2 + 5y'^2 + 2z'^2 = 4,$$

即

$$\frac{z'^2}{(\sqrt{2})^2} + x'^2 + \frac{y'^2}{(\frac{2}{\sqrt{5}})^2} = 1.$$

取 $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \frac{2}{\sqrt{5}}, a > b > c > 0$,且分别对应于变量 z', x', y'. 根据2.10.2,圆截线所在平面为

$$c\sqrt{a^2 - b^2}z' \pm a\sqrt{b^2 - c^2}y' = 0.$$

一般地,圆锥线所在平面为

$$c\sqrt{a^2 - b^2}z' \pm a\sqrt{b^2 - c^2}y' + d = 0. \quad ①$$

这里 $|d| \leqslant ac\sqrt{a^2 - c^2}$

$$= \sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{5}}\sqrt{2 - \frac{4}{5}} = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

以 $a = \sqrt{2}, b = 1, c = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 代入①,①变成

$$2z' \pm \sqrt{2}y' + \sqrt{5}d = 0.$$

即

$$\sqrt{2}(z - x \pm y) + \sqrt{5}d = 0.$$

2.10.4 试决定 m 的值,使平面 $x - mz = 0$ 与单叶双曲面 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ 相交. 试问:何时截口曲线为椭圆,何时截口曲线为双曲线?

解 作直角坐标系的旋转变换,使得平面 $x - mz = 0$ 为坐标平面,为此,可作旋转

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}x' + \frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}z', \\ y = y', \\ z = -\frac{1}{\sqrt{1 + m^2}}x' - \frac{m}{\sqrt{1 + m^2}}z', \end{cases}$$

经旋转后,单叶双曲面与平面的交线方程为

$$\begin{cases} z' = 0, \\ \frac{m^2 - 1}{1 + m^2}x'^2 + \frac{1 - m^2}{1 + m^2}z'^2 - \frac{4m}{1 + m^2}x'z' + y'^2 = 1. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} z' = 0, \\ \frac{m^2 - 1}{1 + m^2}x'^2 + y'^2 = 1. \end{cases}$$

由上讨论可见:对任何 m 值,都有截口曲线. 并且当 $|m| > 1$ 时,交线为椭圆;当 $|m| < 1$ 时,交线为双曲线.

注 当 $|m| = 1$ 时,截口曲线是

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ x^2 + y^2 - z^2 = 1. \end{cases}$$

它代表两条直线:

$$\begin{cases} x - z = 0, \\ y = 1, \end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases} x - z = 0, \\ y = -1. \end{cases}$$

2.10.5 试证锥面 $z^2 = xy$ 与平面 $x + y = 2a$ 的截口曲线是椭圆,且求此椭圆半轴之长.

证法1 作旋转:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'), \\ z = z'. \end{cases}$$

$$z^2 = xy \quad 变成 \ z'^2 - \frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{2} = 0, \quad ①$$

$$x + y = 2a \quad 变成 \ x' = \sqrt{2}a. \quad ②$$

以②代入①,得

$$z'^2 + \frac{y'^2}{2} = a^2.$$

因此,截口曲线为

$$\begin{cases} z'^2 + \frac{y'^2}{2} = a^2, \\ x' = \sqrt{2}a. \end{cases} \quad ③$$

显然,③代表一个椭圆,半轴之长为 a 和 $\sqrt{2}a$.

证法2

$$\begin{cases} z^2 = xy, & ④ \\ x + y = 2a. & ⑤ \end{cases}$$

以⑤代入④,得

$$(x - a)^2 + z^2 = a^2.$$

它代表圆柱面,母线方向$(0,1,0)$,而 $x + y = 2a$ 的法向量为$(1,1,0)$. 假设柱面的母线方向与平面法向量之间的角度为 θ,则

$$\cos\theta = \frac{|(0,1,0) \cdot (1,1,0)|}{1 \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}.$$

此表明平面 $x + y = 2a$ 与圆柱面斜截. 众所周知,这截口曲线为椭圆,且长半轴是 $\frac{a}{\cos\theta} = \sqrt{2}a$.

2.10.6 试求 λ 的值,使平面 $z = \lambda x$ 与椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (b > a)$ 的截口曲线为圆.

解 $z = \lambda x$ 为过Oy轴的平面. 要使它与椭圆柱面的交线为圆,必须有圆截线的半径为 b,而圆心为$(0,0,0)$. 圆截线既在椭圆柱面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上,又在以$(0,0,0)$为球心,b 为半径的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ 上,即圆截线上的点的坐标满足

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=b^2, & ① \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1. & ② \end{cases}$$

① $- b^2\times$ ②,得

$$(1-\frac{b^2}{a^2})x^2+z^2=0,$$

即

$$x^2+\frac{a^2}{a^2-b^2}z^2=0.$$

因为 $b>a$,所以圆截线在平面

$$x\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}z=0$$

上,故 λ 的值为 $\lambda=\pm\dfrac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

2.10.7 已给一个实圆

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, & ① \\ x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0. & ② \end{cases}$$

这里 $p<R,\cos\gamma\neq0$. 试求此圆在 xOy 面上的投影,并证明此投影曲线是一个实椭圆

解 由②得

$$z=\frac{p-x\cos\alpha-y\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

以此代入①,有

$$(x^2+y^2)\cos^2\gamma+(p-x\cos\alpha-y\cos\beta)^2=R^2\cos^2\gamma.$$

化简整理,得

$$(\cos^2\alpha+\cos^2\gamma)x^2+2xy\cos\alpha\cos\beta+(\cos^2\beta+\cos^2\gamma)y^2-2px\cos\alpha-2py\cos\beta+p^2-R^2\cos^2\gamma=0. \quad ③$$

已给实圆在 xOy 面上的投影曲线的方程是 $z=0$ 与③相联立.

欲证此投影曲线是实椭圆,只需证明 $z=0$ 平面上的投影曲线③是实椭圆. 今利用平面曲线判定实椭圆的方法.

x^2 与 y^2 的系数之和为

$$S=\cos^2\alpha+\cos^2\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1+\cos^2\gamma,$$

这是因为法方程中 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

$$A_{33}=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\gamma & \cos\alpha\cos\beta\\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta+\cos^2\gamma\end{vmatrix}=\cos^2\gamma(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma)=\cos^2\gamma>0.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos^2\alpha+\cos^2\gamma & \cos\alpha\cos\beta & -p\cos\alpha\\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta+\cos^2\gamma & -p\cos\beta\\ -p\cos\alpha & -p\cos\beta & p^2-R^2\cos^2\gamma\end{vmatrix}=(p^2-R^2)\cos^2\gamma<0.$$

因为 $A_{33}>0,S\cdot\Delta<0$,根据二次曲线度量分类的判别法,知投影曲线为实椭圆.

2.10.8 试求 $ax^2+by^2+cz^2=1\ (abc\neq0)$ 的截口曲线,使点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 恰为截口曲线的中心.

解 过 P_0 作直线

$$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt, \end{cases} \quad ①$$

以①代入 $ax^2+by^2+cz^2=1$,得

$$(am^2+bn^2+cp^2)t^2+2t(ax_0m+by_0n+cz_0p)+ax_0{}^2+by_0{}^2+cz_0{}^2-1=0. \quad ②$$

由题设 P_0 是中心,它是截口曲线的对称中心,故②中 t 的两个根取异号等值,故

$$ax_0m+by_0n+cz_0p=0, \quad ③$$

这里 (m,n,p) 是直线①的方向矢量,依题意所有直线必在下面平面上:

$$ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0.$$

因此,截口曲线为

$$\begin{cases} ax^2+by^2+cz^2=1, \\ ax_0(x-x_0)+by_0(y-y_0)+cz_0(z-z_0)=0. \end{cases}$$

2.10.9 试讨论二次曲面 Σ:

$$F(x,y,z)\equiv\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad ①$$

的圆截线的方程.

解 假设圆截线所在的截口平面为

$$\pi:Ax+By+Cz+D=0. \quad ②$$

先求平面 π 的方程.

设圆截线的圆心为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$,过点 P_0 且落在平面 π 上的直线为

$$L:\begin{cases} x=x_0+Xt, \\ y=y_0+Yt, \\ z=z_0+Zt. \end{cases} \quad ③$$

这里 (X,Y,Z) 为单位方向矢量. 因为 L 在平面 π 内,所以 (X,Y,Z) 与 (A,B,C) 垂直,于是

$$AX+BY+CZ=0. \quad ④$$

以③代入①,得

$$a^*t^2+b^*t+c^*=0, \quad ⑤$$

这里 $a^*=\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2,b^*=2[X(\lambda_1x_0+a_{14})+Y(\lambda_2y_0+a_{24})+Z(\lambda_3z_0+a_{34})],c^*=F(x_0,y_0,z_0)$.

因为截口平面 π 与 Σ 的交线为圆截线,因而圆心 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是圆截线的对称中心. 由韦达定理知,⑤中的 $b^*=0$. 因此,根据 2.3.11 的 $|t|$ 的几何意义,知 $t^2=-\dfrac{c^*}{a^*}=$ 圆半径的平方 $=$ 常数. 因为 c^* 是

常数，所以 a^* 也是常数，即

$$\lambda_1X^2+\lambda_2Y^2+\lambda_3Z^2=\text{常数}. \tag{⑥}$$

还有 $X^2+Y^2+Z^2=1, AX+BY+CZ=0.$

把它们写成

$$\begin{cases}(\lambda_1X)\cdot X+(\lambda_2Y)\cdot Y+(\lambda_3Z)\cdot Z=\text{常数},\\ X\cdot X+Y\cdot Y+Z\cdot Z=1,\\ AX+BY+CZ=0.\end{cases}$$

因为上式对与 (A,B,C) 相垂直的任意的单位矢量 (X,Y,Z) 成立，因此有

$$\begin{vmatrix}\lambda_1X & \lambda_2Y & \lambda_3Z\\ X & Y & Z\\ A & B & C\end{vmatrix}=0. \tag{⑦}$$

下面根据 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 取值情形加以讨论.

情形 1：$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$.

因为 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3$，所以 Σ 代表球面，球面与平面相截都得到圆截线，故不予讨论.

情形 2：$\lambda_1=\lambda_2\neq\lambda_3$.

(1) 若 A,B 不全为 0，则分别取

$$(X,Y,Z)=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-B,A,0)$$

与

$$(X,Y,Z)=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-AC,-BC,A^2+B^2).$$

代入 ⑥ 有

$$\frac{\lambda_1(B^2+A^2)}{A^2+B^2}=\frac{\lambda_1(A^2C^2+B^2C^2)+\lambda_3(A^2+B^2)^2}{A^2+B^2},$$

由此推出 $(\lambda_1-\lambda_3)(A^2+B^2)=0$. 这与 $\lambda_1\neq\lambda_3$ 的假设矛盾. 故没有圆截线.

(2) 若 $A=B=0$，则圆截线的所在平面只能是 $z=p$. 显然，如果 $\lambda_1=\lambda_2\neq0$，此时二阶曲面为旋转锥面，圆截线是纬圆，或者 Σ 为旋转椭球面；如果 $\lambda_1=\lambda_2=0$，则没有圆截线.

情形 3：$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 互不相等，可设 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$.

首先，如果 $ABC\neq0$，则当取

$$(X,Y,Z)=\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}(-B,A,0)$$

时，由 ⑦ 得 $ABC=0$，矛盾. 为此，A,B,C 中至少有一个为 0.

若 $A=0$，则由 ⑦ 得

$$-B(\lambda_1-\lambda_3)XZ+C(\lambda_1-\lambda_2)XY=0.$$

而由 ④ 得

$$BY+CZ=0.$$

由这两式可得

$$B^2(\lambda_1-\lambda_3)=-C^2(\lambda_1-\lambda_2).$$

因为 $\lambda_1>\lambda_2>\lambda_3$，故 B,C 无解. 因此，没有圆截线. 同样，若 $C=0$，也是没有圆截线. 余下讨论 $B=0$ 的情形. 类似关于 $A=0$ 情形的讨论，有

$$(\lambda_2-\lambda_3)A^2=(\lambda_1-\lambda_2)C^2, \tag{⑧}$$

$$\frac{A}{C}=\pm\sqrt{\frac{\lambda_1-\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_3}}.$$

因此，圆截线所在平面只可能是

$$\sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x\pm\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z=p. \tag{⑨}$$

圆截线为

$$\begin{cases}\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2+2a_{14}x\\ \quad+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0,\\ \sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x\pm\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z=p.\end{cases} \tag{⑩}$$

从 ⑩ 中第二个方程可得

$$(\lambda_1-\lambda_2)x^2=p^2+(\lambda_2-\lambda_3)z^2\pm2p\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z. \tag{⑪}$$

而 ⑩ 中第一个方程中的二次项用 ⑪ 代入，有

$$\begin{aligned}&\lambda_1x^2+\lambda_2y^2+\lambda_3z^2\\ =&\lambda_2(x^2+y^2+z^2)+(\lambda_1-\lambda_2)x^2+(\lambda_3-\lambda_2)z^2\\ =&\lambda_2(x^2+y^2+z^2)+p^2\pm2p\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z.\end{aligned}$$

因此，圆截线方程为

$$\begin{cases}\lambda_2(x^2+y^2+z^2)+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z\\ \quad\pm2p\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z+a_{44}+p^2=0,\\ \sqrt{\lambda_1-\lambda_2}x\pm\sqrt{\lambda_2-\lambda_3}z=p.\end{cases} \tag{⑫}$$

例如，在 2.10.2 中，

$$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

因为 $a>b>c$，所以 $\lambda_1=\frac{1}{c^2},\lambda_2=\frac{1}{b^2},\lambda_3=\frac{1}{a^2}$. 由 ⑨ 得圆截线的截口平面为

$$\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}z\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}x=p.$$

令 $-d=abcp$. 上述方程整理后，得

$$c\sqrt{a^2-b^2}x\pm a\sqrt{b^2-c^2}z+d=0.$$

又例如 2.10.6 中，$\lambda_1=\frac{1}{a^2},\lambda_2=\frac{1}{b^2},\lambda_3=0$. 由 ⑨ 得截口平面的方程为

$$\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}x\pm\sqrt{\frac{1}{b^2}-0}z=p.$$

若取 $p=0$，上面方程即为 $x=\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}z$. 因此，题中的 $\lambda=\pm\frac{a}{\sqrt{b^2-a^2}}$.

还有，在圆截线方程 ⑫ 中，若 $\lambda_2=0$，则没有圆截线；若 $\lambda_2\neq0$，显然，⑫ 表示球面与平面的交线，乃是圆截线.

注 若 Σ 分别为椭球面、单叶双曲面、双叶双曲

面、二次锥面、柱面等等，可写出它们的圆截线的方程.

2.10.10 试证：双曲抛物面 $x^2-y^2=2z$ 上任一点处的切平面必与此曲面相交于两条直线.

证明 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 在双曲抛物面 $x^2-y^2=2z$ 上，则点 M_0 处的切平面为 $x_0x-y_0y=z+z_0$. 它与曲面的交线为

$$\begin{cases} x_0x-y_0y=z+z_0, & ① \\ x^2-y^2=2z. & ② \end{cases}$$

以 ① 代入 ②，得

$$x^2-y^2=2(x_0x-y_0y-z_0). \qquad ③$$

因为 $x_0^2-y_0^2-2z_0=0$，所以 ③ 可写成

$$(x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0. \qquad ④$$

联立 ① 与 ④，表示切平面与曲面的交线为

$$\begin{cases} (x-x_0)^2-(y-y_0)^2=0, \\ x_0x-y_0y=z+z_0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x+y-x_0-y_0=0, \\ x_0x-y_0y=z+z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-y-x_0+y_0=0, \\ x_0x-y_0y=z+z_0. \end{cases}$$

它代表两条不同的直线. 此表明点 M_0 处的切平面与双曲抛物面交于两条直线.

§2.11 直纹面

在§2.5和§2.6中的柱面和锥面都是由直线所生成的，可称它们为直纹面. 所谓直纹面就是依赖于一个参数变动的一族直线所产生的曲面. 直纹面上每一条直线称为此直纹面的直母线，简称母线. 常见的直纹面除柱面、锥面外，还有单叶双曲面、双曲抛物面等曲面.

首先，对直纹面定义中的参数的含义应有明确的了解. 大家知道，对于曲线参数方程 $x=f(t),y=g(t),z=h(t)$，当参数 t 变化时，相应的点在曲线上变化，其参数 t 对应的是曲线上的点. 对于平行平面束

$$A_1x+B_1y+C_1z+k=0,$$

当参数 k 变化时，相应的是平面在平行平面束中变化，其参数 k 对应的是平面. 对于有轴平面束

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+k(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$

当参数 k 变化时，相应的是平面在有轴平面束中变化，其参数 k 对应的是过轴的平面. 对于直纹面，当参数变化时，相应的是直母线在曲面上变化，故参数所对应的是曲面上的母线. 当参数取遍所有的值时，相应的母线就产生了直纹面. 例如，2.5.15 中给出了柱面的参数方程

$$\begin{cases} x=f(t)+m\cdot\rho, \\ y=g(t)+n\cdot\rho, \\ z=h(t)+p\cdot\rho, \end{cases}$$

其中 $x=f(t),y=g(t),z=h(t)$ 为柱面的准线，(m,n,p) 为柱面母线的方向. 对于固定的 $t=t_0$，可得到柱面上一条母线

$$x=f(t_0)+m\rho,\ y=g(t_0)+n\rho,$$
$$z=h(t_0)+p\cdot\rho.$$

从而柱面是直纹面. 它可看作由单参数直线族

$$\frac{x-f(t)}{m}=\frac{y-g(t)}{n}=\frac{z-h(t)}{p}$$

所生成.

由于直纹面是由一族直线所生成的，故可利用直线即母线所具有的性质进行解题.

1. 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

它的一族母线为

$$L_t:\begin{cases} \dfrac{x}{a}=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}=\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

2. 二次锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

它的一族母线为

$$L_t:\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=-\dfrac{ty}{b}, \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{y}{tb}. \end{cases}$$

其方向矢量为

$$(a(t^2-1),\ -2bt,\ c(t^2+1)).$$

3. 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

一族是 t 族母线：

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right), \\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{y}{b}\right). \end{cases}$$

其方向矢量为

$$\left(\frac{1}{bc}\left(t-\frac{1}{t}\right),\frac{2}{ac},\frac{1}{ab}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).$$

另一族是 ρ 族母线：

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\rho\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\rho}\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

其方向矢量为

$$\left(\frac{1}{bc}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right),\frac{-2}{ac},\frac{1}{ab}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right).$$

4. 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

一族是 t 族母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=2t,\\ \dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{t}.\end{cases}$$

其方向矢量为 $(a,-b,2t)$. 另一族是 ρ 族母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}-\dfrac{y}{b}=2\rho,\\ \dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{\rho}.\end{cases}$$

其方向矢量为$(a,b,2\rho)$.

单叶双曲面和双曲抛物面上的母线具有很好的几何性质:

(1) 同族的两条母线必定异面.

(2) 异族的两条母线必定共面. 但是对于单叶双曲面的异族母线共面时,既可平行也可相交;然而对于双曲抛物面的异族母线共面时,却只能相交.

(3) 对于单叶双曲面,同族的三条母线不可能平行于同一个平面;对于双曲抛物面,同族的所有母线平行于一个固定的平面.

例如,2.7.5中棱 AE 绕OB 旋转所产生的曲面是单叶双曲面. 在注 1 中指明的 AE,FG,CD 表示属于一族母线;而 AD,EF,CG 恰属于另一族母线,它们印证了刚才提及的单叶双曲面直母线所具备的三条性质.

2.11.1 已给两椭圆

$$\Gamma_1:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=c,\end{cases}$$

$$\Gamma_2:\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=-c.\end{cases}$$

将 Γ_1 上离心角为$(t-\alpha)$的点和 Γ_2 上离心角为$(t+\alpha)$的点用直线相连接. 试证此族直线组成一个单叶双曲面,这里 t 是参数,$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

证明 椭圆 Γ_1 和 Γ_2 的参数方程分别为

$$\Gamma_1:\begin{cases}x=a\cos(t-\alpha),\\ y=b\sin(t-\alpha),\\ z=c.\end{cases}$$

$$\Gamma_2:\begin{cases}x=a\cos(t+\alpha),\\ y=b\sin(t+\alpha),\\ z=-c.\end{cases}$$

故单参数 t 的直线族方程为

$$\frac{x-a\cos(t-\alpha)}{a[\cos(t-\alpha)-\cos(t+\alpha)]}=\frac{y-b\sin(t-\alpha)}{b[\sin(t-\alpha)-\sin(t+\alpha)]}=\frac{z-c}{2c}.$$

即

$$\frac{x-a\cos(t-\alpha)}{a\sin t\cdot\sin\alpha}=\frac{y-b\sin(t-\alpha)}{-b\cos t\cdot\sin\alpha}=\frac{z-c}{c}.$$

改写成

$$\begin{cases}x=a\cos(t-\alpha)+\dfrac{a}{c}(z-c)\sin\alpha\cdot\sin t,\\ y=b\sin(t-\alpha)-\dfrac{b}{c}(z-c)\sin\alpha\cdot\cos t,\\ z=z.\end{cases}$$

根据参数法解题的思想,应消去参数 t. 因为

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2\\ &=1+\left(\frac{z-c}{c}\right)^2\sin^2\alpha+2\frac{(z-c)}{c}[\cos(t-\alpha)\sin t\\ &\quad-\sin(t-\alpha)\cos t]\sin\alpha\\ &=1+\left(\frac{z-c}{c}\right)^2\sin^2\alpha+2\sin^2\alpha\left(\frac{z-c}{c}\right)\\ &=\cos^2\alpha+\frac{z^2}{c^2}\sin^2\alpha.\end{aligned}$$

所以此族直线生成的曲面方程是

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\alpha}+\frac{y^2}{b^2\cos^2\alpha}-\frac{z^2}{c^2\mathrm{ctg}^2\alpha}=1.$$

置 $a'=a\cos\alpha,b'=b\cos\alpha,c'=c\,\mathrm{ctg}\alpha$. 上述方程为

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

它代表单叶双曲面.

类似可证:若将 Γ_1 上离心角为$(t+\alpha)$的点和 Γ_2 上离心角为$(t-\alpha)$的点用直线相连接,则此直线族也生成相同的单叶双曲面.

如上两种直线族的取法恰好构成了单叶双曲面上的两族直母线.

2.11.2 设 a,b 为正数,将抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\ y=0\end{cases}$$

上的点 $P(2am,0,2m^2)$ 和抛物线

$$\begin{cases}y^2=-2b^2z,\\ x=0\end{cases}$$

上的点 $Q(0,2bm,-2m^2)$ 联成直线 PQ. 当参数 m

变化时，试求动直线 PQ 所产生的曲面.

解 因为 $P(2am,0,2m^2)$，$Q(0,2bm,-2m^2)$，故直线 PQ 的方程为

$$\frac{x-2am}{a}=\frac{y}{-b}=\frac{z-2m^2}{2m}.$$

即

$$\begin{cases}-bx+2abm=ay,\\2my+b(z-2m^2)=0.\end{cases}$$

由上面第一个方程得 $m=\frac{bx+ay}{2ab}$，将此代入第二个方程即得所求曲面的方程为

$$b^2x^2-a^2y^2=2a^2b^2z,$$

即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

它代表双曲抛物面.

此处，当 $m=0$ 时，规定 PQ 直线的方程是

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0,z=0.$$

类似地，若将抛物线

$$\begin{cases}x^2=2a^2z,\\y=0\end{cases}$$

上的点 $P'(-2am,0,2m^2)$ 与抛物线

$$\begin{cases}y^2=-2b^2z,\\x=0\end{cases}$$

上的点 $Q'(0,2bm,-2m^2)$ 联成直线 $P'Q'$，则当参数 m 变化时，动直线 $P'Q'$ 所生成的曲面也是

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

上述两族直线：直线族 PQ 和直线族 $P'Q'$ 就是双曲抛物面上的两族直母线.

2.11.3 试证：过双曲抛物面

$$\Sigma:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z \qquad ①$$

上每一点只有两条直母线通过.

证明 任取点 $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$. 假设过点 P_0 的母线为

$$\begin{cases}x=x_0+mt,\\y=y_0+nt,\\z=z_0+pt.\end{cases} \qquad ②$$

以 ② 代入 ①，并利用

$$\frac{x_0^2}{a^2}-\frac{y_0^2}{b^2}=2z_0,$$

可得

$$\left(\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}\right)t^2+2\left(\frac{x_0m}{a^2}-\frac{y_0n}{b^2}-p\right)t=0.$$

因为对任意 t 成立，故有

$$\begin{cases}\frac{m^2}{a^2}-\frac{n^2}{b^2}=0, & ③\\ \frac{x_0m}{a^2}-\frac{y_0n}{b^2}=p. & ④\end{cases}$$

由 ③ 可设 $m=at,n=bt$ 或者 $m=at,n=-bt$.

当 $m=at,n=bt$ 时，将它代入 ④ 可得

$$\frac{x_0t}{a}-\frac{y_0t}{b}=p.$$

于是 $m:n:p=a:b:\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right)$.

当 $m=at,n=-bt$ 时，类似可得

$$m:n:p=a:-b:\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right).$$

综上所述，只有两条直母线过 P_0 点.

注 1 椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 上没有直母线. 这可仿本题的解法，得出 $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=0$，故 $m=n=p=0$. 矛盾. 类似可证椭圆抛物面与双叶双曲面上都没有直母线.

注 2 类似可证单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上每一点只有两条直母线通过.

2.11.4 已知平面 $ax+by+cz=0\ (abc\neq0)$ 与锥面 $xy+yz+zx=0$ 的交线是两条互相正交的直线. 试证：$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$.

证明 已给锥面方程可变形为

$$\frac{x+y}{x}=\frac{-y}{z}.$$

设上式比值为 λ，则锥面的直母线族为

$$L_\lambda:\begin{cases}x+y=\lambda x,\\\lambda z=-y.\end{cases}$$

L_λ 的方向矢量为 $(\lambda,\lambda(\lambda-1),1-\lambda)$. 因为 L_λ 在已知平面上，所以 $(\lambda,\lambda(\lambda-1),1-\lambda)$ 与 (a,b,c) 正交. 由这两个矢量内积为零，得到

$$b\lambda^2+(a-b-c)\lambda+c=0.$$

由韦达定理知其两根 λ_1,λ_2 满足

$$\lambda_1+\lambda_2=\frac{b+c-a}{b},\lambda_1\lambda_2=\frac{c}{b}. \qquad ①$$

$L_{\lambda_1},L_{\lambda_2}$ 互相正交的条件是 $(\lambda_1,\lambda_1(\lambda_1-1),1-\lambda_1)$ 与 $(\lambda_2,\lambda_2(\lambda_2-1),1-\lambda_2)$ 彼此正交. 因此

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2(\lambda_1-1)(\lambda_2-1)+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)=0,$$

即

$$\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_2[\lambda_1\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2)+1]+\lambda_1\lambda_2-(\lambda_1+\lambda_2)+1=0.$$

以 ① 代入即得欲证之式.

2.11.5 试证：

$$(x-z)^2+(y+z-a)^2=a^2(a>0)$$
代表一个柱面.

证明 将原方程写为

$$(x-z)(x-z)=(y+z)(2a-y-z).$$

令

$$\begin{cases} x-z=t(y+z), \\ x-z=\dfrac{1}{t}(2a-y-z), \end{cases} \quad ①$$

此处,当 $t=0$ 时,对应于直线

$$x-z=0, 2a-y-z=0;$$

当 $\dfrac{1}{t}\to 0$ 时,对应于直线

$$x-z=0, y+z=0.$$

易证直线族 ① 生成已给曲面. 直线族 ① 的方向矢量为

$$(1,-t,-1-t)\times(1,\frac{1}{t},-1+\frac{1}{t})$$
$$=(t+\frac{1}{t},t+\frac{1}{t},t+\frac{1}{t})$$
$$=(t+\frac{1}{t})(1,1,1).$$

由此可见直母线平行于固定方向(1,1,1). 从而原方程代表一个柱面.

注 按照此法,可证 $(x+z)(y+z)=4$ 代表一个柱面. 其上的单参数直线族为

$$\begin{cases} x+z=u, \\ y+z=\dfrac{4}{u}. \end{cases}$$

2.11.6 试从曲面

$$\Sigma: yz+2zx+3xy+6=0$$

上找出经过点(-1,0,3)的两条直母线的方程.

解法 1 曲面 Σ 的方程可写为

$$(3y+2z)(x+1)=-(y-2)(z-3). \quad ①$$

此曲面两族直母线可写为

$$\begin{cases} y-2=t(3y+2z), \\ z-3=-\dfrac{1+x}{t} \end{cases} \quad ②$$

和

$$\begin{cases} y-2=\rho(1+x), \\ z-3=-\dfrac{3y+2z}{\rho}. \end{cases} \quad ③$$

将(-1,0,3)代入②,得 $t=-\dfrac{1}{3}$. 将(-1,0,3)代入③,得 $\dfrac{1}{\rho}\to 0$. 因此,所求的两条直母线的方程是

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{3}$$

和

$$\begin{cases} x=-1, \\ z=3. \end{cases}$$

解法 2 设经过点(-1,0,3)的直线方程为

$$\frac{x+1}{m}=\frac{y}{n}=\frac{z-3}{p}=t.$$

其参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+mt, \\ y=nt, \\ z=3+pt. \end{cases}$$

以此代入已给的曲面方程,有

$$(3mn+2mp+np)t^2+(6m-2p)t=0.$$

因为对任意 t 成立,所以

$$\begin{cases} 3mn+2mp+np=0, \\ 6m-2p=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} 3m=p, \\ m(m+n)=0. \end{cases}$$

解此方程组,得两组解

$$m:n:p=0:1:0 \text{ 与 } m:n:p=1:-1:3.$$

故所求的两条直母线方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-3}{3}$$

和

$$\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{0}.$$

2.11.7 已给单叶双曲面 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{z^2}{16}=1$,试求:

(1) 经过(2,3,4)点的直母线的方程.

(2) 平行于平面 $6x+4y+3z-17=0$ 的直母线方程.

(3) 此曲面上互相正交的直母线的交点之轨迹方程.

解 (1) 原方程为

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{z}{4}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{z}{4}\right)=\left(1-\frac{y}{3}\right)\left(1+\frac{y}{3}\right).$$

两族直母线为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{4}=t(1-\dfrac{y}{3}), \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{4}=\dfrac{1}{t}(1+\dfrac{y}{3}) \end{cases} \quad ①$$

和

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{z}{4}=\rho(1+\dfrac{y}{3}), \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{z}{4}=\dfrac{1}{\rho}(1-\dfrac{y}{3}). \end{cases} \quad ②$$

以(2,3,4)代入①和②,分别求得 $t=1$ 和 $\rho=0$. 因此,经过(2,3,4)点的两条直母线的方程为

$$\begin{cases} 6x-4y-3z-12=0, \\ 6x-4y+3z-12=0 \end{cases}$$

和

$$\begin{cases}2x-z=0,\\ y=3.\end{cases}$$

(2) t 族直母线 ① 的方向矢量为

$$\left(\frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{t}\right),\ -\frac{1}{4},\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right),$$

ρ 族直母线 ② 的方向矢量为

$$\left(-\frac{1}{12}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right),-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right),$$

而平面 $6x+4y+3z-17=0$ 的法矢量为(6,4,3). 由题设知

$$\begin{cases}\left(\frac{1}{12}\left(t-\frac{1}{t}\right),-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right)\cdot(6,4,3)=0, & ③\\ \left(-\frac{1}{12}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right),-\frac{1}{4},\frac{1}{6}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right)\cdot(6,4,3) \\ \quad =0. & ④\end{cases}$$

③ 即 $\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)-1-\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)=0$, 求得 $t=-1$. ④ 即 $-\frac{1}{2}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)-1+\frac{1}{2}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)=0$, 求得 $\rho=1$.

以 $t=-1$ 和 $\rho=1$ 分别代入 ①,② 可得直母线方程为

$$\begin{cases}6x-4y-3z+12=0,\\ 6x+4y+3z+12=0\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}6x-4y-3z-12=0,\\ 6x+4y+3z-12=0.\end{cases}$$

(3) 详见下题之解.

2.11.8 试求单叶双曲面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 上互相正交直母线的交点的轨迹.

解 t 族母线的方向矢量为

$$\boldsymbol{v}_t=\left(\frac{1}{bc}\left(t-\frac{1}{t}\right),\frac{2}{ac},\frac{1}{ab}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).$$

ρ 族母线的方向矢量为

$$\boldsymbol{v}_\rho=\left(\frac{1}{bc}\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right),-\frac{2}{ac},\frac{1}{ab}\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right).$$

因为同族母线不相交, 故相交的两条母线分别属于 t 族和 ρ 族. 设 $P(x,y,z)$ 为正交直母线的交点, 则有 $\boldsymbol{v}_t\cdot\boldsymbol{v}_\rho=0$, 故

$$\frac{1}{b^2c^2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{a^2b^2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)-\frac{4}{a^2c^2}=0,$$

即

$$(a^2+c^2)\left(t\rho+\frac{1}{t\rho}\right)+(c^2-a^2)\left(\frac{\rho}{t}+\frac{t}{\rho}\right)-4b^2=0.$$

因为 $t\rho=\dfrac{\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)^2}{1-\frac{y^2}{b^2}},\ \dfrac{1}{t\rho}=\dfrac{\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)^2}{1-\frac{y^2}{b^2}}$,

$$\frac{\rho}{t}=\frac{\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}{\left(1-\frac{y}{b}\right)^2},\ \frac{t}{\rho}=\frac{\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}}{\left(1+\frac{y}{b}\right)^2}.$$

将这些表达式代入 t,ρ 所满足的方程, 有

$$(a^2+c^2)\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)+(c^2-a^2)\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)-2b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=0.$$

因为 $\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$, 所以上式为

$$(a^2+c^2)\left(\frac{2x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+(c^2-a^2)\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)-2b^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=0,$$

$$2(a^2+c^2)\frac{x^2}{a^2}+2(b^2+c^2)\frac{y^2}{b^2}=2(a^2+b^2),$$

$$x^2+y^2+c^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)=a^2+b^2,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2.$$

故轨迹为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2+b^2-c^2,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

特别, 当 $a=b$ 时, 已给曲面为旋转单叶双曲面, 轨迹为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2a^2-c^2,\\ x^2+y^2-\frac{a^2z^2}{c^2}=a^2.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=\pm c\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2+c^2}}.\end{cases}$$

其轨迹为两个圆周.

注 对于题 2.11.7, 因为 $a=2,b=3,c=4$, 所以互相正交直母线的交点之轨迹为

$$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=-3,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.\end{cases}$$

此表明无实的轨迹.

2.11.9 试求双曲抛物面上互相正交直母线的交点的轨迹.

解 双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

的两族母线为

$$t\text{ 族}:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2t,\\ \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=\frac{z}{t}.\end{cases} \qquad ①$$

$$\rho\text{ 族}:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=2\rho,\\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{z}{\rho}.\end{cases} \qquad ②$$

t 族母线的方向矢量是 $v_t^*=(a,-b,2t)$.

ρ 族母线的方向矢量是 $v_\rho=(a,b,2\rho)$.

依题设正交条件,$v_t^*\cdot v_\rho=0$.

即

$$a^2-b^2+4\rho t=0. \qquad ③$$

由 ①,② 分别得

$$t=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right),\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right).$$

以此代入 ③,得

$$a^2-b^2+\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0,$$

即

$$a^2-b^2+2z=0.$$

因此,两族正交直母线的交点轨迹为

$$\begin{cases}a^2-b^2+2z=0,\\ \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.\end{cases} \qquad ④$$

注 试求双曲抛物面 $y^2-z^2=2x$ 上两条正交直母线的交点轨迹时,利用 ④,并对照已给的双曲抛物面的方程,可得所求轨迹方程为

$$\begin{cases}x=0,\\ y^2-z^2=0.\end{cases}$$

即为两条直线

$$\begin{cases}x=0,\\ y+z=0\end{cases} \text{ 与 } \begin{cases}x=0,\\ y-z=0.\end{cases}$$

2.11.10 试证:双曲抛物面

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$$

上经过一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的两条直母线之间的角度 θ 满足

$$\mathrm{tg}\theta=ab\left(1+\frac{x_0^2}{a^4}+\frac{y_0^2}{b^4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(z_0-\frac{a^2-b^2}{2}\right)^{-1}.$$

证明 由 2.11.8 知,两族直母线的方向矢量分别为$(a,-b,2t)$ 和$(a,b,2\rho)$. 因此,角度 θ 满足:

$$\mathrm{tg}\theta=\frac{|(a,-b,2t)\times(a,b,2\rho)|}{(a,-b,2t)\cdot(a,b,2\rho)}$$

$$=\frac{[4b^2(\rho+t)^2+4a^2(\rho-t)^2+4a^2b^2]^{\frac{1}{2}}}{4\rho t+a^2-b^2}.$$

因为(x_0,y_0,z_0) 点在两条直母线上,所以

$$t=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a}+\frac{y_0}{b}\right),\rho=\frac{1}{2}\left(\frac{x_0}{a}-\frac{y_0}{b}\right).$$

代入 $\mathrm{tg}\theta$ 的表达式,即得欲证之式.

2.11.11 试证:$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 可用参数方程

$$\begin{cases}x=a\cdot r\cos\theta,\\ y=b\cdot r\sin\theta,\\ z=\frac{r^2}{2}\cos2\theta\end{cases}$$

表示之,并证明经过点(r,θ) 的两条直母线为

$$\frac{x-a\cdot r\cos\theta}{a}=\frac{y-b\cdot r\sin\theta}{\pm b}$$

$$=\frac{z-\frac{r^2}{2}\cos2\theta}{r(\cos\theta\mp\sin\theta)}.$$

证明 令 $x=a\cdot r\cos\theta, y=b\cdot r\sin\theta$. 由 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$,立得 $z=\frac{r^2}{2}\cos2\theta$. 故 $x=a\cdot r\cos\theta$, $y=b\cdot r\sin\theta, z=\frac{r^2}{2}\cos2\theta$ 为曲面的参数方程.

由 2.11.9 知,两族直母线的方向矢量分别为 $(a,-b,2t),(a,b,2\rho)$.

因为直母线经过点(r,θ),再由 2.11.8,知

$$2t=r(\cos\theta+\sin\theta),$$

$$2\rho=r(\cos\theta-\sin\theta).$$

因此,两族直母线的方向矢量为

$$(a,-b,r(\cos\theta+\sin\theta))$$

和

$$(a,b,r(\cos\theta-\sin\theta)).$$

故两条直母线方程为

$$\frac{x-a\cdot r\cos\theta}{a}=\frac{y-b\cdot r\sin\theta}{\pm b}$$

$$=\frac{z-\frac{r^2}{2}\cos2\theta}{r(\cos\theta\mp\sin\theta)}.$$

2.11.12 试证:单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

可用参数方程

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\sec\varphi,\\ y=b\sin\theta\sec\varphi,\\ z=c\,\mathrm{tg}\varphi\end{cases}$$

表示之,并证明经过点(r,θ) 的两条直母线为

$$\frac{x-a\cos\theta\sec\varphi}{a\sin(\theta\pm\varphi)}=\frac{y-b\sin\theta\sec\varphi}{-b\cos(\theta\pm\varphi)}$$

$$=\frac{z-c\cdot\mathrm{tg}\varphi}{\pm c}.$$

证明 在给出的参数方程中,θ,φ 为参数,它满足

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$$

所以它代表单叶双曲面的参数方程.

t 族直母线为

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=t\left(1+\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{t}\left(1-\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

方向矢量为

$$v_t{}^*=\left(\frac{1}{bc}\left(t-\frac{1}{t}\right),\frac{2}{ac},\frac{1}{ab}\left(t+\frac{1}{t}\right)\right).$$

因为过点(θ,φ),即过点

$(a\cos\theta\sec\varphi,b\sin\theta\sec\varphi,c\,\mathrm{tg}\varphi)$,

所以

$$t=\frac{\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}}{1+\dfrac{y}{b}}=\frac{\cos\theta\cdot\sec\varphi+\mathrm{tg}\varphi}{1+\sin\theta\cdot\sec\varphi}$$

$$=\frac{\cos\theta+\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\theta}.$$

同样有

$$\frac{1}{t}=\frac{\cos\theta-\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\theta}.$$

应该指出,由于 $t\times\dfrac{1}{t}=1$,显然

$$\frac{\cos\theta+\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\theta}\times\frac{\cos\theta-\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\theta}=1.$$

$$\begin{aligned}t-\frac{1}{t}&=\frac{\cos\theta+\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\theta}-\frac{\cos\theta-\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\theta}\\&=\frac{2\cos\varphi\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\varphi-\sin^2\theta}\\&=\frac{2(\sin2\varphi-\sin2\theta)}{2\cos^2\varphi-2\sin^2\theta-1+1}\\&=\frac{2(\sin2\varphi-\sin2\theta)}{\cos2\varphi+\cos2\theta}\\&=\frac{2\sin(\varphi-\theta)\cos(\varphi+\theta)}{\cos(\varphi+\theta)\cos(\varphi-\theta)}\\&=\frac{2\sin(\varphi-\theta)}{\cos(\varphi-\theta)}.\end{aligned}$$

类似可得

$$t+\frac{1}{t}=\frac{2}{\cos(\varphi-\theta)}.$$

因此

$$\begin{aligned}v_t{}^*&=\left(\frac{1}{bc}\times\frac{2\sin(\varphi-\theta)}{\cos(\varphi-\theta)},\frac{2}{ac},\frac{1}{ab}\times\frac{2}{\cos(\varphi-\theta)}\right)\\&=\frac{-2}{abc\cdot\cos(\varphi-\theta)}(a\sin(\theta-\varphi),-b\cdot\cos(\theta-\varphi),-c).\end{aligned}$$

从而 t 族的直母线方程为

$$\frac{x-a\cdot\cos\theta\sec\varphi}{a\sin(\theta-\varphi)}=\frac{y-b\sin\theta\sec\varphi}{-b\cos(\theta-\varphi)}=\frac{z-c\cdot\mathrm{tg}\varphi}{-c}.$$

对于 ρ 族直母线

$$\begin{cases}\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=\rho\left(1-\dfrac{y}{b}\right),\\[2mm] \dfrac{x}{a}-\dfrac{z}{c}=\dfrac{1}{\rho}\left(1+\dfrac{y}{b}\right).\end{cases}$$

方向矢量

$$v_\rho=\left(a\left(\rho-\frac{1}{\rho}\right),-2b,c\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\right).$$

同对 t 族直母线中所讨论的一样,可得

$$\rho=\frac{\cos\theta+\sin\varphi}{\cos\varphi-\sin\theta},\ \frac{1}{\rho}=\frac{\cos\theta-\sin\varphi}{\cos\varphi+\sin\theta},$$

$$\rho+\frac{1}{\rho}=\frac{2}{\cos(\varphi+\theta)},$$

$$\rho-\frac{1}{\rho}=\frac{2\sin(\varphi+\theta)}{\cos(\varphi+\theta)},$$

因此

$$v_\rho=\frac{2}{\cos(\varphi+\theta)}(a\sin(\varphi+\theta),-b\cos(\varphi+\theta),c).$$

从而 ρ 族的直母线方程为

$$\frac{x-a\cdot\cos\theta\sec\varphi}{a\sin(\varphi+\theta)}=\frac{y-b\sin\theta\cdot\sec\varphi}{-b\cos(\varphi+\theta)}=\frac{z-c\cdot\mathrm{tg}\varphi}{c}.$$

2.11.13　试证:单叶双曲面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$上一点的切平面与单叶双曲面交于两条直线.

证明　由上题知,单叶双曲面的参数方程为

$x=a\cos\theta\cdot\sec\varphi,y=b\sin\theta\cdot\sec\varphi,$

$z=c\cdot\mathrm{tg}\varphi.$

又点 $P_0(a\cos\theta\cdot\sec\varphi,b\sin\theta\cdot\sec\varphi,c\cdot\mathrm{tg}\varphi)$ 处的切平面为

$$\frac{\cos\theta\cdot\sec\varphi}{a}x+\frac{\sin\theta\cdot\sec\varphi}{b}y-\frac{\mathrm{tg}\varphi\cdot z}{c}=1. \quad ①$$

又由上题知,ρ 族直母线的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\theta\cdot\sec\varphi+at\cdot\sin(\varphi+\theta),\\ y=b\sin\theta\cdot\sec\varphi-bt\cdot\cos(\varphi+\theta),\\ z=c\cdot\mathrm{tg}\varphi+ct.\end{cases}$$

以此代入①的左边,有

$$\begin{aligned}&\cos\theta\cdot\sec\varphi[\cos\theta\cdot\sec\varphi+\sin(\varphi+\theta)t]\\&+\sin\theta\cdot\sec\varphi[\sin\theta\cdot\sec\varphi-\cos(\varphi+\theta)t]\\&-\mathrm{tg}\varphi[\mathrm{tg}\varphi+t]\\=&\sec^2\varphi+\sec\varphi[\cos\theta\cdot\sin(\varphi+\theta)\\&-\sin\theta\cdot\cos(\varphi+\theta)]t-\mathrm{tg}^2\varphi-t\cdot\mathrm{tg}\varphi\\=&1+(\sec\varphi\cdot\sin\varphi)t-t\cdot\mathrm{tg}\varphi\\=&1.\end{aligned}$$

这表明过(θ,φ)点的ρ族直母线位于此切平面①上.同样可证:过(θ,φ)点的 t 族直母线也位于切平面①上.可见,切平面含有两条相交直线.因为平面与二次曲面相交于一条二次曲线,今已证明它交于两条相交直线,故切平面与曲面交于两条直线.

§2.12 不变量

已给二次曲面

$$\begin{aligned}\Sigma: F(x,y,z) \equiv & a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy \\ & +2a_{23}yz+2a_{13}zx+2a_{14}x \\ & +2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44} \\ = & 0 \end{aligned} \qquad ①$$

容易看出:经过平移变换后,① 中的 $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 不变.一般地,根据 §2.8 的讨论,经直角坐标变换

	$x-x_0$	$y-y_0$	$z-z_0$
x'	C_{11}	C_{12}	C_{13}
y'	C_{21}	C_{22}	C_{23}
z'	C_{31}	C_{32}	C_{33}

②

后,① 化成

$$\begin{aligned}F'(x',y',z') \equiv & a_{11}'x'^2+a_{22}'y'^2+a_{33}'z'^2 \\ & +2a_{12}'x'y'+2a_{23}'y'z' \\ & +2a_{13}'x'z'+2a_{14}'x'+2a_{24}'y' \\ & +2a_{34}'z'+a_{44}'=0. \end{aligned} \qquad ③$$

如果③ 中由某些系数 a_{ij}' 所构成的函数 f,与 ① 相应系数 a_{ij} 所构成的相同的函数经变换 ② 后是相等的,即

$$f(a_{11}',\cdots,a_{44}')=f(a_{11},\cdots,a_{44}),$$

则称函数 f 是二次曲面 ① 关于直角坐标变换 ② 的一个不变量.当然,f 可能仅是旋转或者平移的不变量.刚才提到的由 a_{11},a_{22},a_{33} 所构成的函数 $a_{11}+a_{22}+a_{33}$ 是直角坐标系旋转的不变量.记

$$S=a_{11}+a_{22}+a_{33},$$

$$S_1=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{12}&a_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{13}&a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}\end{vmatrix},$$

$$\Theta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{12}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{34}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix},$$

$$D(\lambda)=-\lambda^3+S\lambda^2-S_1\lambda+\Delta.$$

这里 S,S_1,Δ 和 Θ 都是直角坐标变换 ② 的不变量.

因为特征多项式 $D(\lambda)$ 的三个根 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 都是实数根,从下述方程组

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)X+a_{12}Y+a_{13}Z=0,\\ a_{12}X+(a_{22}-\lambda)Y+a_{23}Z=0,\\ a_{13}X+a_{23}Y+(a_{33}-\lambda)Z=0\end{cases}$$

中分别取 λ 等于 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$,相应地求出三个彼此正交的非零解 (X_1,Y_1,Z_1),(X_2,Y_2,Z_2) 和 (X_3,Y_3,Z_3).依次选取它们作为新的坐标系中 Ox' 轴、Oy' 轴和 Oz' 轴的正向,则 ① 中的二次项化简为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$.

利用不变量藉助于直角坐标变换不仅可将二次曲面 ① 化成最简形式,而且是二次曲面几何性质的一种重要的解题方法.

2.12.1 满足

$$\begin{cases}a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0,\\ a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0,\\ a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0\end{cases}$$

的点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 称为二次曲面的中心.经平移

$$\begin{cases}x=x'+x_0,\\ y=y'+y_0,\\ z=z'+z_0\end{cases}$$

后,二次曲面可化为

$$a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y'+2a_{23}y'z'+2a_{13}x'z'+\frac{\Theta}{\Delta}=0.$$

解 平移不改变二次项系数,因此,经平移后二次曲面的方程为

$$\begin{aligned}& a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y' \\ & +2a_{23}y'z'+2a_{13}x'z'+2a_{14}'x'+2a_{24}'y' \\ & +2a_{34}'z'+a_{44}'=0.\end{aligned}$$

这里
$$\begin{aligned}a_{14}'&=a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14},\\ a_{24}'&=a_{12}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24},\\ a_{34}'&=a_{13}x_0+a_{23}y_0+a_{33}z_0+a_{34},\\ a_{44}'&=F(x_0,y_0,z_0).\end{aligned}$$

根据中心 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 所满足的方程,知

$$a_{14}'=a_{24}'=a_{34}'=0,$$

$$a_{44}'=F(x_0,y_0,z_0),$$

故有

$$\begin{aligned}& a_{11}x'^2+a_{22}y'^2+a_{33}z'^2+2a_{12}x'y' \\ & +2a_{23}y'z'+2a_{13}x'z'+F(x_0,y_0,z_0)=0.\end{aligned}$$

此式中,不变量 $\Theta'=\Delta\cdot F(x_0,y_0,z_0)$.因为 $\Theta'=\Theta$,所以 $\Theta=\Delta\cdot F(x_0,y_0,z_0)$,即 $F(x_0,y_0,z_0)=\dfrac{\Theta}{\Delta}$.

注 对于中心二次曲面,可先求出中心,经坐标变换平移到中心后,可以消去三个一次项.

2.12.2　化简二次曲面方程

$$\Sigma: x^2+3y^2+5z^2-8xy-8yz+6x+10y-2z-10=0,$$

并写出坐标变换公式.

解法1　因为 $a_{11}=1, a_{22}=3, a_{33}=5, a_{12}=-4, a_{23}=-4, a_{13}=0, a_{14}=3, a_{24}=5, a_{34}=-1, a_{44}=-10$,所以

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&-4&0\\-4&3&-4\\0&-4&5\end{vmatrix}=-81.$$

$$\Theta=\begin{vmatrix}1&-4&0&3\\-4&3&-4&5\\0&-4&5&-1\\3&5&-1&-10\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}3&-4&5\\-4&5&-1\\5&-1&-10\end{vmatrix}+4\times\begin{vmatrix}-4&-4&5\\0&5&-1\\3&-1&-10\end{vmatrix}+0\times\begin{vmatrix}-4&3&5\\0&-4&-1\\3&5&-10\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}-4&3&-4\\0&-4&5\\3&5&-1\end{vmatrix}$$

$$=243.$$

因为 $\Delta\neq0$,所以有唯一的中心,它的坐标满足:

$$\begin{cases}x-4y+3=0,\\-4x+3y-4z+5=0,\\-4y+5z-1=0.\end{cases}$$

由此求得 $x=1, y=1, z=1$,故中心为(1,1,1).

由2.12.1,作平移　$x=x'+1, y=y'+1, z=z'+1$. 可消去三个一次项,而且常数项为 $\frac{\Theta}{\Delta}=\frac{243}{-81}=-3$. 即平移到中心(1,1,1)后,原方程化为

$$x'^2+3y'^2+5z'^2-8x'y'-8y'z'-3=0.$$

现在,$S=1+3+5=9$.

$$S_1=\begin{vmatrix}1&-4\\-4&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&0\\0&5\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&-4\\-4&5\end{vmatrix}=-9$$

因此,特征方程为

$$D(\lambda)=-\lambda^3+9\lambda^2-9\lambda-81=0.$$

求得三个特征根 $\lambda_1=-3, \lambda_2=3, \lambda_3=9$.

考虑方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)X-4Y=0,\\-4X+(3-\lambda)Y-4Z=0,\\-4Y+(5-\lambda)Z=0.\end{cases}$$

以 $\lambda=-3$ 代入得

$$\begin{cases}4X-4Y=0,\\-4X+6Y-4Z=0,\\-4Y+8Z=0.\end{cases}$$

找出 $X=Y=2Z$,即 $X:Y:Z=2:2:1$. 可取非零解 $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$. 它是(2,2,1)方向上的单位矢量.

同样,以 $\lambda=3$ 代入可得 $-2X-4Y=0, -4X-4Z=0, -4Y+2Z=0, X:Y:Z=-2:1:2$. 可取非零解 $(X_2,Y_2,Z_2)=\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$.

因为三个特征根互不相同,故

$$(X_3,Y_3,Z_3)=(X_1,Y_1,Z_1)\times(X_2,Y_2,Z_2)=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

作旋转

	x'	y'	z'
x''	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y''	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z''	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

得

$$3x''^2+3y''^2+9z''^2-3=0,$$

即

$$-x''^2+y''^2+\frac{z''^2}{\frac{1}{3}}=1.$$

它代表单叶双曲面. 将平移与旋转变换公式合写在一起,可得坐标变换公式

$$\begin{cases}x=\frac{2}{3}x''-\frac{2}{3}y''+\frac{1}{3}z''+1,\\y=\frac{2}{3}x''+\frac{1}{3}y''-\frac{2}{3}z''+1,\\z=\frac{1}{3}x''+\frac{2}{3}y''+\frac{2}{3}z''+1.\end{cases}$$

解法2　根据解法1中所找到的三条新坐标轴的正向

$\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right),\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$和$\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$,

先作旋转

	x	y	z
x'	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
y'	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
z'	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

即以

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z', \\ y = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z', \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' \end{cases}$$

代入原方程,可得

$$-3x'^2 + 3y'^2 + 9z'^2 + 10x' - 2y' - 6z' - 10 = 0.$$

配方得

$$3(x' - \frac{5}{3})^2 + 3(y' - \frac{1}{3})^2 + 9(z' - \frac{1}{3})^2 - 3 = 0.$$

将平移公式

$$\begin{cases} x' = x'' + \frac{5}{3}, \\ y' = y'' + \frac{1}{3}, \\ z' = z'' + \frac{1}{3} \end{cases}$$

代入上述方程,有

$$-3x''^2 + 3y''^2 + 9z''^2 - 3 = 0.$$

易见,最简方程与坐标变换公式同解法1一致.

解法3 因为曲面有唯一的中心,而中心的几何意义代表对称中心.今三条新的坐标轴的正向分别为 $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 和 $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, 故三个对称平面分别是都过中心且依次以上述三个矢量作为法矢量的平面.根据平面的点法式方程,知三个对称平面是

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{5}{3} = 0, \\ -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0, \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - \frac{1}{3} = 0. \end{cases}$$

将这三个对称平面作为新坐标系中的三个坐标平面.可立得解法1中的坐标变换公式:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{3}(2x + 2y + z - 5), \\ y' = \frac{1}{3}(-2x + y + 2z - 1), \\ z' = \frac{1}{3}(x - 2y + 2z - 1), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z' + 1, \\ y = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z' + 1, \\ z = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z' + 1. \end{cases}$$

2.12.3 化简二次曲面方程

$$\Sigma: 2x^2 + 5y^2 + 10z^2 + 4xy + 12yz + 6xz + x + y - z - \frac{1}{4} = 0.$$

解 仿2.12.2的解法,特征方程

$$D(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 5-\lambda & 6 \\ 3 & 6 & 10-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

展开此三阶行列式,求得特征根 $\lambda_1 = 15$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$.

对于 $\lambda = 15$,从

$$\begin{cases} (2-15)X + 2Y + 3Z = 0, \\ 2X + (5-15)Y + 6Z = 0, \\ 3X + 6Y + (10-15)Z = 0 \end{cases}$$

中求出 $X : Y : Z = 1 : 2 : 3$.取非零解

$$(X_1, Y_1, Z_1) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right).$$

对于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$,它是二重根,相应的方程组为

$$\begin{cases} (2-1)X + 2Y + 3Z = 0, \\ 2X + (5-1)Y + 6Z = 0, \\ 3X + 6Y + (10-1)Z = 0. \end{cases}$$

三个方程等价,取独立的方程 $X + 2Y + 3Z = 0$.由这个方程可见,要找的非零解 (X, Y, Z) 都是与 (X_1, Y_1, Z_1) 正交的.由选择的任意性,找一个与 (X_1, Y_1, Z_1) 正交的非零解

$$(X_2, Y_2, Z_2) = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, -1).$$

再取

$$\begin{aligned} &(X_3, Y_3, Z_3) \\ &= (X_1, Y_1, Z_1) \times (X_2, Y_2, Z_2) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) \times \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ &= \left(\frac{-5}{\sqrt{42}}, \frac{4}{\sqrt{42}}, -\frac{1}{\sqrt{42}}\right). \end{aligned}$$

作旋转变换

	x	y	z
x'	$\frac{1}{\sqrt{14}}$	$\frac{2}{\sqrt{14}}$	$\frac{3}{\sqrt{14}}$
y'	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
z'	$-\frac{5}{\sqrt{42}}$	$\frac{4}{\sqrt{42}}$	$-\frac{1}{\sqrt{42}}$

代入原方程,可得

$$15x'^2+y'^2+z'^2+\sqrt{3}y'-\frac{1}{4}=0.$$

配方得

$$15x'^2+(y'+\frac{\sqrt{3}}{2})^2+z'^2=1$$

作平移 $x'=x'',y'=y''-\frac{\sqrt{3}}{2},z'=z''$,

得

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{15}}+y''^2+z''^2=1.$$

它代表椭球面.因为特征根是二重根 $\lambda_2=\lambda_3=1$,所以它代表旋转面.坐标变换公式为

$$\begin{cases}x''=\frac{1}{\sqrt{14}}(x+2y+3z),\\ y''=\frac{1}{\sqrt{3}}(x+y-z)+\frac{\sqrt{3}}{2},\\ z''=\frac{1}{\sqrt{42}}(-5x+4y-z).\end{cases}$$

此旋转椭球面的旋转轴为 $y''=0,z''=0$.即为

$$\begin{cases}2x+2y-2z+3=0,\\ -5x+4y-z=0.\end{cases}$$

二阶曲面的中心为$\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.显然,中心在此旋转轴上.

2.12.4 试确定 k 的值,使方程 $x^2-2xy+kz^2=0$ 代表旋转锥面,并求旋转轴方程.

解 特征方程为

$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}1-\lambda & -1 & 0\\ -1 & 0-\lambda & 0\\ 0 & 0 & k-\lambda\end{vmatrix}=0,$$

即

$$(k-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)=0.$$

三个特征根为 $\lambda_1=k,\lambda_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\lambda_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.因此经旋转后可将曲面方程化为

$$kx'^2+\frac{1+\sqrt{5}}{2}y'^2+\frac{1-\sqrt{5}}{2}z'^2=0.$$

显然,当 $k=0$ 时,不是旋转锥面.因此,$k\neq0$.只有当 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 或 $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时,曲面代表旋转锥面.

当 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 时,旋转轴为 Oz' 轴.在方程组

$$\begin{cases}(1-\lambda)X-Y=0,\\ -X-\lambda Y=0,\\ (k-\lambda)Z=0\end{cases}$$

中取 $\lambda=\lambda_3=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,因 $k=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,故 $Z=0$.在第一个方程中取 $X=1$,得 $Y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.故 $X:Y:Z=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}:0$,这就是旋转轴的方向.此外,旋转轴过坐标原点,故旋转轴的方程是

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}=\frac{z}{0}.$$

注 当 $k=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 时的旋转轴方程,请读者自行思考.

2.12.5 试证:$2y^2+4xz+2x-4y+6z+5=0$ 代表旋转锥面,并求其半顶角和旋转轴的方程.

解法1 特征方程为

$$D(\lambda)\equiv\begin{vmatrix}0-\lambda & 0 & 2\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 0-\lambda\end{vmatrix}=0.$$

即

$$-\lambda^3+2\lambda^2+4\lambda-8=0.$$

求出三个特征根

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\lambda_3=-2.$$

中心坐标满足

$$\begin{cases}2z+1=0,\\ 2y-2=0,\\ 2x+3=0.\end{cases}$$

唯一中心为$(-\frac{3}{2},1,-\frac{1}{2})$.容易算出 $\Delta=-8$,$\mathcal{D}=0$,故平移到中心后,原方程的一次项与常数项系数都为零.

对于二重根 $\lambda_1=\lambda_2=2$,与 $\lambda_3=-2$.它们都是非零的特征根,所以经旋转后,曲面的方程可化为

$$2x'^2+2y'^2-2z'^2=0,$$

即

$$x'^2+y'^2-z'^2=0.$$

显然,它代表旋转锥面,且半顶角为$\frac{\pi}{4}$.

对于单根 $\lambda_3=-2$,方程组

$$\begin{cases}[0-(-2)]X & & +2Z & =0,\\ & [2-(-2)]Y & & =0,\\ 2X & & +[2-(-2)]Z & =0\end{cases}$$

的非零解为 $Y=0, X=-Z$. 故可取$(X,Y,Z)=(1,0,-1)$. 这就是旋转轴的方向. 故旋转轴的方程为

$$\frac{x+\frac{3}{2}}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+\frac{1}{2}}{1}.$$

解法 2 从已给曲面的方程可知,只需作 xz 平面上的$\frac{\pi}{4}$ 角度的旋转. 为此,作旋转变换:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-z'), \\ y=y', \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+z'). \end{cases}$$

代入曲面方程,得

$$2x'^2+2y'^2-2z'^2+4\sqrt{2}x'+2\sqrt{2}z'-4y'+5=0.$$

配方得

$$2(x'+\sqrt{2})^2+2(y'-1)^2-2(z'-\frac{\sqrt{2}}{2})^2=0.$$

作平移

$$x'=x''-\sqrt{2}, y'=y''+1, z'=z''+\frac{\sqrt{2}}{2},$$

得

$$x''^2+y''^2-z''^2=0.$$

它代表旋转锥面,半顶角为$\frac{\pi}{4}$,旋转轴为

$$\begin{cases} x''=0, \\ y''=0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x'+\sqrt{2}=0, \\ y'-1=0. \end{cases}$$

利用旋转公式,得旋转轴方程为

$$\begin{cases} x+z-2=0, \\ y-1=0. \end{cases}$$

2.12.6 已给二阶曲面 $axy+byz+czx=0$,试证:当 $abc>0$ 时,此曲面是双叶双曲面;当 $abc<0$ 时,曲面是单叶双曲面.

证明 正如本节开始所述的那样,根据三个实的特征根,总可以找到三个彼此互相正交的单位矢量(X_1,Y_1,Z_1),(X_2,Y_2,Z_2) 和(X_3,Y_3,Z_3),将它们分别作为新的坐标系中的 Ox' 轴、Oy' 轴和Oz' 轴的正向,而把二次曲面的二次项 $a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{23}yz+2a_{13}xy$ 化为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2$.

因为 S,S_1,Δ 都是直角坐标变换的不变量,所以

$$S=S'=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,$$

$$S_1=S_1'=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_2 & 0\\ 0 & \lambda_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_3\end{vmatrix}$$

$$=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3,$$

$$\Delta=\Delta'=\lambda_1\lambda_2\lambda_3.$$

现在,

$$\Delta=\begin{vmatrix}0 & \frac{a}{2} & \frac{c}{2}\\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{b}{2}\\ \frac{c}{2} & \frac{b}{2} & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}abc.$$

$$S=0,$$

$$S_1=\begin{vmatrix}0 & \frac{a}{2}\\ \frac{a}{2} & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & \frac{c}{2}\\ \frac{c}{2} & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & \frac{b}{2}\\ \frac{b}{2} & 0\end{vmatrix}$$

$$=-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)<0,$$

$$\Theta=\begin{vmatrix}0 & \frac{a}{2} & \frac{c}{2} & 0\\ \frac{a}{2} & 0 & \frac{b}{2} & 0\\ \frac{c}{2} & \frac{b}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{vmatrix}=-\frac{1}{4}abc.$$

因为 $\Delta\neq0$,所以是中心二次曲面,$\frac{\Theta}{\Delta}=-1$.

当 $abc>0$ 时,根据

$$S=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0,$$

$$S_1=\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_1\lambda_3$$

$$=-\frac{1}{4}(a^2+b^2+c^2)<0,$$

$$\Delta=\lambda_1\lambda_2\lambda_3=\frac{1}{4}abc>0,$$

得出三个特征根为一正二负. 故在方程

$$\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2+\lambda_3z'^2-1=0$$

中的 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 取一正二负,当然它代表双叶双曲面.

当 $abc<0$ 时,仿上讨论,由 $S=0, S_1<0, \Delta<0$ 得出三个特征根为一负二正,故此曲面为单叶双曲面.

2.12.7 试证:$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2-2abxy-2bcyz-2aczx=1(abc\neq0)$代表单叶双曲面,且两个实半轴长度的平方和等于它的虚半轴的长度的平方.

证明

$$\Delta=\begin{vmatrix}a^2 & -ab & -ac\\ -ab & b^2 & -bc\\ -ac & -bc & c^2\end{vmatrix}$$

$$=-4a^2b^2c^2<0,$$

$$S=a^2+b^2+c^2>0,$$

$$\Theta=(-1)\times\Delta=-\Delta>0,$$

$S_1 = 0.$

从 $\Delta < 0$ 知三个非零特征根为三个全负或者二正一负.因为 $S > 0$,所以不可能三个全负.为此,三个特征根是二正一负.又 $\frac{\Theta}{\Delta} = -1$.

今设 $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0$.曲面方程可化为

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 - 1 = 0.$$

即

$$-\frac{x'^2}{-\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{z'^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 1.$$

两个实半轴的长度平方和为 $\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3}$,而虚半轴的长度平方为 $-\frac{1}{\lambda_1}$.由 $S = 0$,得

$$\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 0.$$

两边除以 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3$,得

$$\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = -\frac{1}{\lambda_1}.$$

此表明两个实半轴长度的平方和等于它的虚半轴的长度的平方.

2.12.8　已知二阶曲面的三个对称平面为 $x + y + z = 0$, $2x - y - z = 0$ 和 $y - z + 1 = 0$,以及其上的三个点 $O(0,0,0)$, $A(1,1,-1)$, $B(0,0,1)$,试求它的方程.

解　易见三个对称平面的交点为 $(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.根据中心所具有的对称性质,此交点就是曲面的中心.三个对称平面的单位法矢量依次为 $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{6}}(2,-1,-1)$ 和 $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,-1)$.这三个矢量恰好构成右手系.故可作坐标变换

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}x' + \frac{2}{\sqrt{6}}y', \\ y = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' - \frac{1}{2}, \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}x' - \frac{1}{\sqrt{6}}y' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' + \frac{1}{2}. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{3}}(x + y + z), \\ y' = \frac{1}{\sqrt{6}}(2x - y - z), \\ z' = \frac{1}{\sqrt{2}}(y - z + 1). \end{cases}$$

经此直角坐标变换后,曲面的方程为

$$Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1.$$

此时,$O(0,0,0)$, $A(1,1,-1)$, $B(0,0,1)$ 三点的新坐标依次为 $(0,0,\frac{1}{\sqrt{2}})$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{3}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{6}},0\right)$.以此三点的坐标代入 $Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = 1$,可得

$$\begin{cases} \frac{C}{2} = 1, \\ \frac{A}{3} + \frac{2}{3}B + \frac{9}{2}C = 1, \\ \frac{A}{3} + \frac{1}{6}B = 1. \end{cases}$$

解得 $A = 12, B = -18, C = 2$.故曲面方程为

$$12x'^2 - 18y'^2 + 2z'^2 = 1.$$

用 x, y, z 坐标表出的方程为

$$4(x + y + z)^2 - 3(2x - y - z)^2 + (y - z + 1)^2 = 1.$$

2.12.9　试求经过两个椭圆

$$\Gamma_1: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0 \end{cases}$$

和

$$\Gamma_2: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$$

的二次曲面的方程,并求其中心的轨迹.

解　设经过两椭圆的二次曲面为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

令 $z = 0$,则此方程化为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0.$$

要使它成为一个椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 = 0,$$

必须有 $a_{12} = 0, a_{14} = 0, a_{24} = 0$,以及

$$\frac{a_{11}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a_{22}}{\frac{1}{b^2}} = \frac{a_{44}}{-1}.$$

由此得

$$a_{11} = -\frac{a_{44}}{a^2}, a_{22} = -\frac{a_{44}}{b^2}.$$

同样,令 $y = 0$,有

$$a_{11}x^2 + a_{33}z^2 + 2a_{13}xz + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

要使它成为椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

必须有 $a_{13} = 0, a_{34} = 0$,以及

$$\frac{a_{11}}{\frac{1}{a^2}} = \frac{a_{33}}{\frac{1}{c^2}} = \frac{a_{44}}{-1}.$$

由此得

$$a_{11} = -\frac{a_{44}}{a^2}, a_{33} = -\frac{a_{44}}{c^2}.$$

综上所述有

$$a_{11} = -\frac{a_{44}}{a^2}, a_{22} = -\frac{a_{44}}{b^2}, a_{33} = -\frac{a_{44}}{c^2},$$

故 $a_{44} \neq 0$. 代入方程得所求二次曲面为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2\lambda yz - 1 = 0.$$

这里记 $\lambda = \frac{a_{23}}{a_{44}}$.

依中心的定义,中心满足

$$\begin{cases} \frac{x}{a^2} = 0, \\ \frac{y}{b^2} + \lambda z = 0, \\ \lambda y + \frac{z}{c^2} = 0. \end{cases}$$

消去参数 λ,得中心的轨迹方程为

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \end{cases}$$

它代表两条相交直线

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0 \end{cases}$$

与

$$\begin{cases} x = 0, \\ \frac{y}{b} - \frac{z}{c} = 0. \end{cases}$$

2.12.10 试求二次曲面

$\Sigma: a(x^2 + 2yz) + b(y^2 + 2zx) + c(z^2 + 2xy) = 1$

代表旋转面的充要条件.

解

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & c & b \\ c & b & a \\ b & a & c \end{vmatrix}$$

$$= S \cdot S_1 = 3abc - a^3 - b^2 - c^3,$$

$$S = a + b + c,$$

$$S_1 = ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2$$

$$= -\frac{1}{2}[(b-c)^2 + (c-a)^2 + (a-b)^2]$$

$$< 0.$$

特征方程

$$D(\lambda) = \lambda^3 - S\lambda^2 + S_1\lambda - SS_1 = 0,$$

即

$$(\lambda - S)(\lambda^2 + S_1) = 0.$$

三个特征根为 $\lambda_1 = \sqrt{S_1}, \lambda_2 = -\sqrt{S_1}, \lambda_3 = S$.

经旋转变换后,曲面 Σ 可化为

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 = 1.$$

依 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的取法,要使 Σ 代表旋转面,必须 $\lambda_1 = \lambda_3$ 或者 $\lambda_2 = \lambda_3$(对于 $\lambda_1 = \lambda_2$,易见 $S_1 = 0$,即 $a = b = c$,Σ 为 $a(x+y+z)^2 = 1$.太简单了).

当且仅当 $-S_1 = S^2$,即

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

$$= (a + b + c)^2.$$

故所求的充要条件为

$$ab + bc + ca = 0.$$

下面进一步讨论旋转曲面的形状.

情形 1: $\lambda_1 = \lambda_3$.

此时, $\lambda_1 = \lambda_3 = S = a + b + c$.

$$\lambda_2 = -S = -(a + b + c).$$

曲面 Σ 为 $x^2 - y^2 + z^2 = \frac{1}{a+b-c}$.

当 $a + b + c > 0$ 时,Σ 为旋转单叶双曲面;

当 $a + b + c < 0$ 时,Σ 为旋转双叶双曲面.

情形 2: $\lambda_2 = \lambda_3$.

仿情形 1,曲面 Σ 为

$$x^2 - y^2 - z^2 = \frac{1}{a+b+c}.$$

当 $a + b + c > 0$ 时,Σ 为旋转双叶双曲面;

当 $a + b + c < 0$ 时,Σ 为旋转单叶双曲面.

2.12.11 已知二次曲面过点 $P_0(2, 0, -1)$,中心在点 $(0, 0, -1)$,且与 Oxy 平面的交线为

$$\begin{cases} x^2 + 4xy - 1 = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad ①$$

试求它的方程.

解 若平移到中心,二次曲面方程中不出现一次项,因此,可设二次曲面的方程为

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}(z+1)^2 + 2a_{12}xy$$

$$+ 2a_{23}y(z+1) + 2a_{13}x(z+1) + a_{44} = 0. \quad ②$$

令 $z = 0$,得交线

$$\begin{cases} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x \\ \quad + 2a_{23}y + a_{44} + a_{33} = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad ③$$

比较 ① 与 ③,得

$$a_{22} = 0, a_{13} = 0, a_{23} = 0,$$

$$\frac{a_{11}}{1} = \frac{2a_{12}}{4} = \frac{a_{33} + a_{44}}{-1}.$$

又因曲面过点 $(2, 0, -1)$,故有 $4a_{11} + a_{44} = 0$. 由此得

$$a_{44} = -4a_{11}, a_{12} = 2a_{11}, a_{33} = 3a_{11}.$$

故所求曲面为

$$x^2 + 4xy + 3(z+1)^2 - 4 = 0.$$

第3篇　线性代数

§3.1　应用初等变换计算行列式

矩阵的行或列的初等变换是矩阵的一类重要而基本的运算，是论证矩阵命题和解决矩阵问题的一种基本方法．它贯穿于整个线性空间理论与矩阵论的始终，几乎是处处存在的．这一节主要介绍如何应用矩阵的初等变换来计算行列式．至于它在求逆矩阵、解线性方程组、解决有关矩阵秩的问题、向量组的秩的确定和线性无关性的判定、确定方阵的 Jordan 标准形、方阵在相合下的标准形以及二次型的化简中的应用将在以下各节中陆续介绍．

3.1.1　求 n 阶方阵 A 的行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{pmatrix}.$$

解　把矩阵 A 的第1行依次加到第 $2,3,\cdots,n$ 行，矩阵 A 化为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}.$$

由于矩阵 A 的某行元素乘以同一数加到另一行，其行列式值不变，所以 $\det A=\det B=n!$．

注1　对矩阵 A 进行初等变换，可以通过对矩阵 A 左乘或右乘一个方阵实现．例如在上例中有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ -1 & 0 & 3 & \cdots & n\\ -1 & -2 & 0 & \cdots & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -1 & -2 & -3 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ 0 & 2 & 6 & \cdots & 2n\\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 2n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{pmatrix}$$

注2　用初等变换把方阵 A 化为上三角方阵（或下三角方阵），是计算方阵的行列式的基本方法．

3.1.2　求 n 阶方阵 A 的行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\end{pmatrix}.$$

解　依次将矩阵 A 的第 n 行减去第 $n-1$ 行，第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行，…，第2行减去第1行，即

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ x_1 & x_2 & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & a_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}x_1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & x_2-a_{12} & a_{23}-a_{13} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ 0 & 0 & x_3-a_{23} & \cdots & a_{3n}-a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_{n-1,n}\end{pmatrix}.$$

由于行列式是方阵的可乘函数，即对任意 n 阶方阵 A 和 B，有 $\det AB=\det A\det B$，而上式右端是一个上三角方阵，其行列式为 $x_1(x_2-a_{12})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$，上式左端第一个方阵为下三角方阵，其行列式为1，因此上式两端取行列式，即得 $\det A=x_1(x_2-a_{12})\cdots(x_n-a_{n-1,n})$．

注　学会用对矩阵 A 左乘或右乘以一个矩阵来表示对矩阵 A 进行初等变换是有益的．

3.1.3　求 n 阶方阵 A 的行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & n & n\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n & n & n\end{pmatrix}$$

解　依次将矩阵 A 的第 n 列减去第 $n-1$ 列，第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列，…，第2列减去第1列，即

$$
\begin{pmatrix}
1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\
2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\
3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n & n & n & \cdots & n & n & n
\end{pmatrix}
$$

$$
\times \begin{pmatrix}
1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\
\vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 \\
2 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \\
3 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
n-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}.
$$

记上式右端的方阵为 B. 上式两端取行列式得到 $\det A = \det B$. 将矩阵 B 的第 n 行经 $n-1$ 次相邻两行的对换调到第 1 行，第 $n-1$ 行经 $n-2$ 次相邻两行的对换调到第 2 行，…，第 2 行与第 1 行对换，即

$$
\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 \\
\vdots & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\
\vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\
0 & & & \vdots \\
1 & 0 & \cdots & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
2 & 1 & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & 0 \\
3 & \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \vdots \\
n-1 & 1 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \vdots \\
n & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
n & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
n-1 & 1 & \ddots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\
1 & 1 & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

由于对矩阵 B 对调两行，其行列式值变号，而矩阵 B 经过 $(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\binom{n}{2}$ 次相邻对换得到上式右端下三角方阵，因此得到 $\det A = \det B = (-1)^{\binom{n}{2}} n$，其中 $\binom{n}{2}$ 是 n 个元素取 2 个元素的组合数.

3.1.4　求行列式 $\det A$，其中

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\
a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n
\end{pmatrix}.
$$

解　矩阵 A 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行各减去第 n 行，即

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\
0 & 1 & \ddots & 0 & -1 \\
\vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 0 & -1 \\
\vdots & & & 1 & -1 \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1
\end{pmatrix}
\times \begin{pmatrix}
a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\
a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n
\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{pmatrix}
a_1-a_n & a_1-a_n & \cdots & a_1-a_n \\
a_2-a_n & a_2-a_n & \cdots & a_2-a_n \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n-1}-a_n & a_{n-1}-a_n & \cdots & a_{n-1}-a_n \\
a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n
\end{pmatrix}. \qquad ①
$$

记上式右端矩阵为 B. 当 $n \geqslant 3$ 时，矩阵 B 的前两行成比例，其行列式值为 0；当 $n=2$ 时，

$$
\det B = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & a_1-a_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1-a_2)(b_2-b_1);
$$

当 $n=1$ 时，$\det B = a_1+b_1$. 式①两端取行列式得到

$$
\det A = \det B = \begin{cases} a_1+b_1, & \text{当 } n=1 \text{ 时}; \\ (a_1-a_2)(b_2-b_1), & \text{当 } n=2 \text{ 时}; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}
$$

3.1.5　计算 n 阶行列式 $\det A$，其中 $A=(a_ib_j)$ 是 n 阶方阵.

解　记每个元素全是 1 的 n 阶方阵为 J_n，它称为 n 阶全 1 方阵. 注意，方阵 A 是 n 阶全 1 方阵 J_n 的第 $1,2,\cdots,n$ 行依次遍乘以数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 且第 $1,2,\cdots,n$ 列依次遍乘以数 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 得到的矩阵，即有

$$
A = \begin{pmatrix}
a_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & a_2 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & a_n
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & 1 & \cdots & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
1 & 1 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\times \begin{pmatrix}
b_1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & b_2 & \cdots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & b_n
\end{pmatrix}.
$$

由于对角方阵的行列式等于它的对角元的乘积，而且方阵的行列式是方阵的可乘函数，因此上式两端取行列式得到 $\det A = a_1a_2\cdots a_nb_1b_2\cdots b_n\det J_n$. 当 $n \geqslant 2$ 时，由于方阵 J_n 中任意两行元素都相同，因此 $\det J_n = 0$；当 $n=1$ 时，显然 $\det J_n = 1$. 于是有

$$
\det A = \begin{cases} a_1b_1, & \text{当 } n=1 \text{ 时}; \\ 0, & \text{其　他}. \end{cases}
$$

注　在3.1.5中我们通过矩阵的某行(或列)同乘以一数的初等变换把一个矩阵分解为几个矩阵的乘积，然后求得矩阵的行列式. 一般地说，一个方阵 A 可以通过矩阵的行或列的初等变换分解为若干个矩阵的乘积，便可以利用方阵的行列式是方阵的可乘函数这一性质，求得方阵 A 的行列式. 对于一个给定的方阵，如何将它分解为若干个方阵的乘积，则要视给定的方阵的特点而定.

3.1.6　求 n 阶行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \end{pmatrix},$$

而 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 是实数.

解　取 $n-1$ 次实系数多项式 $f(x)=(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{n-1})$. 它有 $n-1$ 个实根 $-a_1,-a_2,\cdots,-a_{n-1}$. 设 $a=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{|a_i|\neq 0\}$，即 a 是所有非零的 a_i 的最小绝对值，则存在实数列 $\{\varepsilon_i: i=1,2,\cdots\}$，使得 $|\varepsilon_i|<a$，$i=1,2,\cdots$，且其极限 $\lim\limits_{i\to\infty}\varepsilon_i=0$. 显然 $f(\varepsilon_i)\neq 0$，$i=1,2,\cdots$. 注意，当 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-1}=0$ 时，这样的实数列 $\{\varepsilon_i: i=1,2,\cdots\}$ 仍然存在. 当 $a_1a_2\cdots a_{n-1}\neq 0$，即 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 全不为0时，记 $B(\varepsilon_i)=A+\varepsilon_i I_n$，其中 I_n 是 n 阶单位方阵，即

$$B(\varepsilon_i)=\begin{pmatrix} \varepsilon_i & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \varepsilon_i+a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon_i+a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \varepsilon_i+a_{n-1} \end{pmatrix},$$

$i=1,2,\cdots$. 将方阵 $B(\varepsilon_i)$ 的第 $2,3,\cdots,n$ 行依次遍乘以 $-(\varepsilon_i+a_1)^{-1},-(\varepsilon_i+a_2)^{-1},\cdots,-(\varepsilon_i+a_{n-1})^{-1}$，并加到第1行，即

$$\begin{pmatrix} 1 & -(\varepsilon_i+a_1)^{-1} & \cdots & -(\varepsilon_i+a_{n-1})^{-1} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}B(\varepsilon_i)$$

$$=\begin{pmatrix} \varepsilon_i-\sum\limits_{j=1}^{n-1}(\varepsilon_i+a_j)^{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \varepsilon_i+a_1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & \cdots & \varepsilon_i+a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

上式两端取行列式得到

$$\det B(\varepsilon_i)=\Big(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n-1}(\varepsilon_i+a_j)^{-1}\Big)\prod_{j=1}^{n-1}(\varepsilon_i+a_j).$$

于是

$$\begin{aligned}\det A &= \lim_{i\to\infty}\det(A+\varepsilon_i I_n)\\ &= \lim_{i\to\infty}\Big(\varepsilon_i-\sum_{j=1}^{n-1}(\varepsilon_i+a_j)^{-1}\Big)\prod_{j=1}^{n-1}(\varepsilon_i+a_j)\\ &= -\Big(\sum_{j=1}^{n-1}a_j^{-1}\Big)\prod_{j=1}^{n-1}a_j\\ &= -\sum_{j=1}^{n-1}a_1a_2\cdots a_{j-1}a_{j+1}\cdots a_n.\end{aligned}$$

容易验证，当 $a_1a_2\cdots a_{n-1}=0$，即 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 中有一个为零时，上述结论仍然成立.

注　在3.1.6中我们使用了微小摄动法. 这是矩阵论中一种常用的方法. 其根据是：记 $B(\varepsilon_i)=A+\varepsilon_i I_n=(b_{kl}(\varepsilon_i))$，则由行列式的定义有

$$\det B(\varepsilon_i)=\sum_{l_1l_2\cdots l_n}\delta(l_1l_2\cdots l_n)b_{1l_1}(\varepsilon_i)b_{2l_2}(\varepsilon_i)\cdots b_{nl_n}(\varepsilon_i),\qquad ②$$

其中 $\sum\limits_{l_1l_2\cdots l_n}$ 表示遍历 $1,2,\cdots,n$ 的排列 $l_1l_2\cdots l_n$ 求和，而 $\delta(l_1l_2\cdots l_n)$ 是排列 $1,2,\cdots,n$ 的奇偶性符号. 注意，

$$b_{k,l_k}(\varepsilon_i)=\begin{cases} a_{kk}+\varepsilon_i, & \text{当 } l_k=k \text{ 时};\\ a_{k,l_k}, & \text{其　　他}, \end{cases}$$

其中 $A=(a_{kl})$. 换言之，$b_{k,l_k}(\varepsilon_i)$ 是 ε_i 的实系数多项式，其次数 $\leqslant 1$. 因此 $b_{1l_1}(\varepsilon_i)b_{2l_2}(\varepsilon_i)\cdots b_{nl_n}(\varepsilon_i)$ 是 ε_i 的实系数多项式. 所以式②右端是 ε_i 的实系数多项式，从而是 ε_i 的连续函数. 因此对式②右端取极限得到

$$\begin{aligned}&\lim_{i\to\infty}\sum_{l_1l_2\cdots l_n}\delta(l_1l_2\cdots l_n)b_{1l_1}(\varepsilon_i)b_{2l_2}(\varepsilon_i)\cdots b_{nl_n}(\varepsilon_i)\\ &=\sum_{l_1l_2\cdots l_n}\delta(l_1l_2\cdots l_n)\lim_{i\to\infty}b_{1l_1}(\varepsilon_i)b_{2l_2}(\varepsilon_i)\cdots b_{nl_n}(\varepsilon_i)\\ &=\sum_{l_1l_2\cdots l_n}\delta(l_1l_2\cdots l_n)b_{1l_1}(0)b_{2l_2}(0)\cdots b_{nl_n}(0)\\ &=\sum_{l_1l_2\cdots l_n}\delta(l_1l_2\cdots l_n)a_{1l_1}a_{2l_2}\cdots a_{nl_n}=\det A.\end{aligned}$$

另一方面，$B(\varepsilon_1),B(\varepsilon_2),\cdots,B(\varepsilon_m),\cdots$ 是 n 阶方阵组成的一个矩阵序列. 它确定了一个实数序列 $\det B(\varepsilon_1),\det B(\varepsilon_2),\cdots,\det B(\varepsilon_m),\cdots$. 由式②得到 $\lim\limits_{i\to\infty}B(\varepsilon_i)=\det A$.

3.1.7　计算 $n+1$ 阶行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix} x_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & x_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_0 & a_1 & x_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

解　将 $n+1$ 阶方阵 A 添加一行、一列，使之具有

如下形式：

$$B=\begin{pmatrix}1 & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n\\ 0 & x_0 & a_1 & \cdots & a_n\\ 0 & a_0 & x_1 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}.$$

显然 $\det B=\det A$，把 $n+2$ 阶方阵 B 的第一行依次加到第 $2,3,\cdots,n+2$ 行，即有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n\\ 0 & x_0 & a_1 & \cdots & a_n\\ 0 & a_0 & x_1 & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n\\ 1 & x_0-a_0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & x_1-a_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n\end{pmatrix}. \quad ③$$

上式右端记作 C. $n+2$ 阶方阵 C 的第 i 列乘以数 $(x_{i-2}-a_{i-2})^{-1}$，$i=2,3,\cdots,n+2$，即有

$$\begin{pmatrix}1 & -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_n\\ 1 & x_0-a_0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & x_1-a_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & x_n-a_n\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & (x_0-a_0)^{-1} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & (x_n-a_n)^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a_0}{x_0-a_0} & \cdots & -\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}. \quad ④$$

上式右端矩阵记作 D. 将 $n+2$ 阶矩阵 D 的第 i 列乘以 -1，$i=2,3,\cdots,n$，并加到第 1 列，即有

$$\begin{pmatrix}1 & -\dfrac{a_0}{x_0-a_0} & \cdots & -\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\\ 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ -1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1+\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{a_i}{x_i-a_i} & -\dfrac{a_0}{x_0-a_0} & \cdots & -\dfrac{a_n}{x_n-a_n}\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}. \quad ⑤$$

上式右端矩阵记作 T. 由式 ③，④ 和式 ⑤ 得到

$$\begin{aligned}\det A=\det B&=\det C\\ &=\prod_{i=0}^{n}(x_i-a_i)\det D\\ &=\prod_{i=0}^{n}(x_i-a_i)\det T\\ &=\left(1+\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{x_i-a_i}\right)\prod_{i=0}^{n}(x_i-a_i)\\ &=\prod_{i=0}^{n}(x_i-a_i)+\sum_{i=0}^{n}a_i(x_0-a_0)(x_1-a_1)\cdots(x_{i-1}-a_{i-1})(x_{i+1}-a_{i+1})\cdots(x_n-a_n).\end{aligned}$$

注 1 在解 3.1.7 时我们先在 $n+1$ 阶方阵 A 上添加一行一列，得到一个 $n+2$ 阶方阵 B，使得 $\det A=\det B$，然后再计算 $n+2$ 阶行列式 $\det B$. 这是计算行列式的一个常用的升阶方法.

注 2 3.1.7 的行列式可以作为公式应用. 例如由 3.1.7 可以求得下列 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & 5 & \cdots & n-1 & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-3 & n\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & 2n-1\end{vmatrix}=(n-1)!;$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n-1}(n-1);$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1 \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right);$$

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+2 & x & \cdots & x \\ x & x & x+3 & \cdots & x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x & x & x & \cdots & x+n \end{vmatrix}$$

$$= n!\left(1 + x + \frac{x}{2} + \cdots + \frac{x}{n}\right);$$

$$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ a & x & a & \cdots & a \\ a & a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= (x + (n-1)a)(x-a)^{n-1}.$$

3.1.8 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，J_n 是 n 阶全 1 方阵. 证明

$$\det(A + xJ_n) = \det A + x\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是元素 a_{ij} 的代数余子式.

证 考虑 $n+1$ 阶方阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{pmatrix}.$$

则有 $\det B = \det(A + xJ_n)$. 将 $n+1$ 阶方阵 B 的第 1 行乘以 -1 加到其他各行，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ 0 & a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ 0 & a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & x & x & \cdots & x \\ -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

上式右端的方阵记作 C，则有 $\det(A + xJ_n) = \det B = \det C$. 将 $n+1$ 阶行列式 $\det C$ 按第 1 行作 Laplace 展开，得到

$$\det(A + xJ_n) = \det C = \det A + \sum_{j=1}^{n}(-1)^j x$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ -1 & a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad ⑥$$

再将上式右端的和式中的 n 阶行列式按第 1 列作 Laplace 展开，得到

$$\begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ -1 & a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ -1 & a_{31} & \cdots & a_{3,j-1} & a_{3,j+1} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(-1)^i$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ -1 & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad ⑦$$

把式 ⑦ 代入式 ⑥ 得到

$$\det(A + xJ_n) = \det A + \sum_{i,j=1}^{n} xA_{ij}.$$

注 证明 3.1.8 时用了行列式的升阶技巧，矩阵的初等变换以及 Laplace 展开定理. 后者是行列式理论中的一个重要定理，在计算行列式时经常使用.

3.1.9 计算 $2n$ 阶行列式 $\det A$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & b_1 \\ & a_2 & & & & & b_2 & \\ & & \ddots & & & \iddots & & \\ & & & a_n & b_n & & & \\ & & & b_{n+1} & a_{n+1} & & & \\ & & \iddots & & & \ddots & & \\ & b_{2n-1} & & & & & a_{2n-1} & \\ b_{2n} & & & & & & & a_{2n} \end{pmatrix},$$

其中未写出的元素全是 0.

解 将矩阵 A 的第 $2n$ 行调到第 2 行，第 $2n$ 列调到第 2 列，即有

$$PAP' = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & & & & & \\ b_{2n} & a_{2n} & & & & & & \\ & & a_2 & & & & & b_2 \\ & & & \ddots & & & \iddots & \\ & & & & a_n & b_n & & \\ & & & & b_{n+1} & a_{n+1} & & \\ & & & \iddots & & & \ddots & \\ & & b_{2n-1} & & & & & a_{2n-1} \end{pmatrix}, \quad ⑧$$

其中 P 是如下形式的 $2n$ 阶方阵：

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

而 P' 是方阵 P 的转置. 注意，P 是一个 $2n$ 阶正交方阵，即 P 满足 $PP' = I_{2n}$，因此 $\det P \det P' = 1$. 式⑧两端取行列式得到

$$\det A = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_{2n} & a_{2n} \end{pmatrix} \times \det\begin{pmatrix} a_2 & & & & & b_2 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a_n & b_n & & \\ & & b_{n+1} & a_{n+1} & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ b_{2n-1} & & & & & a_{2n-1} \end{pmatrix}$$

如此继续即可得到

$$\det A = (a_1a_{2n} - b_1b_{2n})(a_2a_{2n-1} - b_2b_{2n-1}) \cdots (a_na_{n+1} - b_nb_{n+1}).$$

注 对矩阵 A 的行进行一系列行的初等变换，同时对矩阵 A 的列也进行相应的一系列列的初等变换，称为对矩阵 A 进行同步初等变换. 由于一个可逆方阵 P 可以表为若干个初等方阵（即初等变换所确定的方阵）的乘积，因此对方阵 A 进行同步初等变换，相当于对方阵 A 左乘以一个可逆方阵 P，同时右乘以 P 的转置，即将方阵 A 变为方阵 PAP'. 而方阵 PAP' 和 A 是相合的，所以对方阵 A 进行同步初等变换相当于对方阵 A 进行相合变换. 同步初等变换非常重要，应予重视.

3.1.10 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

其中 $a_{ij} = a_{i,j-1} + a_{i-1,j}$，$2 \leqslant i, j \leqslant n$. 证明：$\det A = 1$.

证 把方阵 A 的第 n 行减去第 $n-1$ 行，第 $n-1$ 行减去第 $n-2$ 行，…，第 2 行减去第 1 行，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ 1 & a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} & \cdots & a_{3n} - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} - a_{n-1,2} & a_{n3} - a_{n-1,3} & \cdots & a_{nn} - a_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

上式两端取行列式得到

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ a_{32} - a_{22} & a_{33} - a_{23} & \cdots & a_{3n} - a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} - a_{n-1,2} & a_{n3} - a_{n-1,3} & \cdots & a_{nn} - a_{n-1,n} \end{vmatrix}$$

由于 $a_{ij} - a_{i-1,j} = a_{i,j-1}$，$2 \leqslant i, j \leqslant n$，因此

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n-1} \\ 1 & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3,n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

上式右端的 $n-1$ 阶行列式仍然满足条件 $a_{ij} = a_{i-1,j} + a_{i,j-1}$，$3 \leqslant i \leqslant n$，$2 \leqslant j \leqslant n-1$.

重复上面的证明，即可得到 $\det A = 1$.

3.1.11 计算 $n+1$ 阶行列式 $\det A$，其中

$$A = \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

解 将 $n+1$ 阶方阵 A 的第 1 行乘以 x 加到第 2 行，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & x & -1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_n x + a_{n-1} & 0 & -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{bmatrix}$$

记上式右端的方阵为 B. 由上式得到, $\det A = \det B$. 将方阵 B 的第 2 行乘以 x 加到第 3 行, 即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_n x + a_{n-1} & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & 0 & x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ a_0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{j=n-1}^{n} a_j x^{j-n+1} & 0 & -1 & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=n-2}^{n} a_j x^{j-n+2} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ a_{n-2} & 0 & 0 & x & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ a_0 & 0 & 0 & \cdots 0 & x \end{pmatrix}$$

上式两端取行列式得到 $\det A = \det B = \det C$, 其中 C 是上式右端的行列式. 如此继续即得到

$$\det A = \begin{vmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{j=n-1}^{n} a_j x^{j-n+1} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将上式右端的行列式按第 $n+1$ 行作 Laplace 展开, 得到

$$\det A = (-1)^n (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0)$$

$$\times \begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n阶}$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0.$$

注 3.1.11 的解可以通过对方阵 A 左乘一个方阵来求得, 即

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{n-1} & \ddots & \ddots & 0 \\ x^n & x^{n-1} & x & 1 \end{pmatrix} A$$

$$= \begin{pmatrix} a_n & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \sum_{j=n-1}^{n} a_j x^{j-n+1} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=n-2}^{n} a_j x^{j-n+2} & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ \sum_{j=0}^{n} a_j x^j & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

3.1.12 (Vandermonde 行列式) 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i).$$

证 记 3.1.12 中 n 阶行列式为 $D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 将 $D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 中第 $n-1$ 行乘以 $-a_1$ 加到第 n 行, 第 $n-2$ 行乘以 $-a_1$ 加到第 $n-1$ 行, $\cdots$, 第 1 行乘以 $-a_1$ 加到第 2 行, 则有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \cdots & a_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2(a_2 - a_1) & \cdots & a_n(a_n - a_1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_2^{n-2}(a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-1}(a_n - a_1) \end{vmatrix}.$$

由此得到

$D_n(a_1, a_2, \cdots, a_n) =$

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ (a_2-a_1)a_2 & (a_3-a_1)a_3 & \cdots & (a_n-a_1)a_n \\ (a_2-a_1)a_2^2 & (a_3-a_1)a_3^2 & \cdots & (a_n-a_1)a_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (a_2-a_1)a_2^{n-2} & (a_3-a_1)a_3^{n-2} & \cdots & (a_n-a_1)a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

上式右端 $n-1$ 阶行列式中第 j 列提出因数 $a_{j+1}-a_1$，$j=1,2,\cdots,n-1$，即得关于 $D_n(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 的递推方程

$$D_n(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \prod_{j=2}^{n}(a_j-a_1)D_{n-1}(a_2,a_3,\cdots,a_n).$$

当 $n=2$ 时有 $D_2(a_{n-1},a_n)=a_n-a_{n-1}$. 解上述递推方程得到

$$D_n(a_1,a_2,\cdots,a_n) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i).$$

注1 应用初等变换，建立关于行列式的递推方程，再解递推方程求得行列式的值，是计算行列式的一种常见的方法.

注2 Vandermonde 行列式是一个著名的行列式. 3.1.12 的结论可以作为公式应用.

3.1.13 设 $p_i(x)$ 是 i 次多项式，其 i 次项的系数为 a_i，$i=0,1,\cdots,n-1$. 证明：

$$\begin{vmatrix} p_0(x_1) & p_0(x_2) & \cdots & p_0(x_n) \\ p_1(x_1) & p_1(x_2) & \cdots & p_1(x_n) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ p_{n-1}(x_1) & p_{n-1}(x_2) & \cdots & p_{n-1}(x_n) \end{vmatrix} = a_0a_1\cdots a_{n-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

证 设 $p_i(x)=a_{ii}x^i+a_{i,i-1}x^{i-1}+\cdots+a_{i1}x+a_{i0}$，$a_{ii}=a_i$，$i=1,2,\cdots,n-1$. 而 $p_0(x)=a_0$. 记左端行列式为 $\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 则

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1x_1+a_{10} & \cdots & a_1x_n+a_{10} \\ a_2x_1^2+a_{21}x_1+a_{20} & \cdots & a_2x_n^2+a_{21}x_n+a_{20} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1,j}x_1^j & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1}a_{n-1,j}x_n^j \end{vmatrix}.$$

上式右端行列式的第1行乘以 $-\dfrac{a_{i-1,0}}{a_0}$ 加到第 i 行，$i=2,\cdots,n$，得到

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1x_1 & \cdots & a_1x_n \\ a_2x_1^2+a_{21}x_1 & \cdots & a_2x_n^2+a_{21}x_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{j=1}^{n-1}a_{n-1,j}x_1^j & \cdots & \sum_{j=1}^{n-1}a_{n-1,j}x_n^j \end{vmatrix}.$$

上式右端行列式的第2行乘以 $-\dfrac{a_{i-1,1}}{a_1}$ 加到第 i 行，$i=3,\cdots,n$，得到

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1x_1 & \cdots & a_1x_n \\ a_2x_1^2 & \cdots & a_2x_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sum_{j=2}^{n-1}a_{n-1,j}x_1^j & \cdots & \sum_{j=2}^{n-1}a_{n-2,j}x_n^j \end{vmatrix}.$$

如此继续得到

$$\Delta_n(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \cdots & a_0 \\ a_1x_1 & a_1x_2 & \cdots & a_1x_n \\ a_2x_1^2 & a_2x_2^2 & \cdots & a_2x_n^2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n-1}x_1^{n-1} & a_{n-1}x_2^{n-1} & \cdots & a_{n-1}x_n^{n-1} \end{vmatrix} = a_0a_1\cdots a_{n-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

上面最后一步用了 3.1.12 的结论.

3.1.14 证明：

(1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n \\ \cos2\theta_1 & \cos2\theta_2 & \cdots & \cos2\theta_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \cos(n-1)\theta_1 & \cos(n-1)\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\binom{n-1}{2}}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i);$$

(2) $$\begin{vmatrix} \sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \cdots & \sin\theta_n \\ \sin2\theta_1 & \sin2\theta_2 & \cdots & \sin2\theta_n \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \sin n\theta_1 & \sin n\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_n \end{vmatrix} = 2^{\binom{n}{2}}\sin\theta_1\cdots\sin\theta_n\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i).$$

证 (1) 由于 $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$，其中 $i=\sqrt{-1}$，所以 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=e^{in\theta}=\cos n\theta+i\sin n\theta$，因此

$$2\cos n\theta = (\cos\theta+i\sin\theta)^n+(\cos\theta-i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k$$

$$+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k$$

$$-2\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{偶数}}}\binom{n}{k}\cos^{n-k}\theta(i\sin\theta)^k.$$

记 $k=2l, 0\leqslant l\leqslant\frac{n}{2}$. 则

$$\cos n\theta=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}\theta\sin^{2l}\theta$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}\theta(1-\cos^2\theta)^l.$$

其中 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 是 $\frac{n}{2}$ 的整数部分. 上式右端是 $\cos\theta$ 的 n 次多项式,记作 $P_n(\cos\theta)$. 由于

$$P_n(\cos\theta)=\cos n\theta$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l\binom{n}{2l}\cos^{n-2l}\theta\left(\sum_{t=0}^{l}(-1)^t\binom{l}{t}\cos^{2t}\theta\right)$$

$$=\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\sum_{t=0}^{l}(-1)^l(-1)^t\binom{n}{2l}\binom{l}{t}\cos^{n+2t-2l}\theta,$$

因此 $P_n(\cos\theta)$ 中 $\cos^n\theta$ 的系数是

$$\sum_{l=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^l(-1)^l\binom{n}{2l}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{l=0}^{n}(1+(-1)^l)\binom{n}{l}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}+\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l}\right)$$

$$=\frac{1}{2}[(1+1)^n+(1-1)^n]=2^{n-1}.$$

代入行列式 3.1.14(1),并应用 3.1.13 的结论,得到

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \cos\theta_1 & \cos\theta_2 & \cdots & \cos\theta_n\\ \cos2\theta_1 & \cos2\theta_2 & \cdots & \cos2\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \cos(n-1)\theta_1 & \cos(n-1)\theta_2 & \cdots & \cos(n-1)\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}p_0(\cos\theta_1) & p_0(\cos\theta_2) & \cdots & p_0(\cos\theta_n)\\ p_1(\cos\theta_1) & p_1(\cos\theta_2) & \cdots & p_1(\cos\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ p_{n-1}(\cos\theta_1) & p_{n-1}(\cos\theta_2) & \cdots & p_{n-1}(\cos\theta_n)\end{vmatrix}$$

$$=2^{0+1+2+\cdots+(n-2)}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i)$$

$$=2^{\binom{n-1}{2}}\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i).$$

(2) $2i\sin n\theta$

$$=(\cos n\theta+i\sin n\theta)-(\cos n\theta-i\sin n\theta)$$

$$=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$$

$$=(\cos\theta+i\sin\theta)^n-(\cos\theta-i\sin\theta)^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}((i\sin\theta)^k-(i\sin\theta)^k)\cos^{n-k}\theta$$

$$=2i\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\text{奇数}}}\binom{n}{k}(-1)^k\sin^k\theta\cos^{n-k}\theta.$$

记 $k=2l+1$,则

$$\sin n\theta=\sin\theta\sum_{0\le2l+1\le n}\binom{n}{2l+1}(-1)^l\times$$

$$(1-\cos^2\theta)^l\cos^{n-2l-1}\theta$$

$$=\sin\theta q_{n-1}(\cos\theta),$$

其中 $q_{n-1}(\cos\theta)=\sum_{0\le2l+1\le n}\binom{n}{2l+1}(-1)^l(1-\cos^2\theta)^l\cos^{n-2l-1}\theta$ 是 $\cos\theta$ 的 $n-1$ 次多项式,且 $\cos^{n-1}\theta$ 的系数为

$$\sum_{0\le2l+1\le n}\binom{n}{2l+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}-\sum_{0\le2l\le n}\binom{n}{2l}$$

$$=2^n-2^{n-1}=2^{n-1}.$$

因此

$$\begin{vmatrix}\sin\theta_1 & \sin\theta_2 & \cdots & \sin\theta_n\\ \sin2\theta_1 & \sin2\theta_2 & \cdots & \sin2\theta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin n\theta_1 & \sin n\theta_2 & \cdots & \sin n\theta_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\sin\theta_1q_0(\cos\theta_1) & \cdots & \sin\theta_nq_0(\cos\theta_n)\\ \sin\theta_1q_1(\cos\theta_1) & \cdots & \sin\theta_nq_1(\cos\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \sin\theta_1q_{n-1}(\cos\theta_1) & \cdots & \sin\theta_nq_{n-1}(\cos\theta_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n$$

$$\times\begin{vmatrix}q_0(\cos\theta_1) & q_0(\cos\theta_2) & \cdots & q_0(\cos\theta_n)\\ q_1(\cos\theta_1) & q_1(\cos\theta_2) & \cdots & q_1(\cos\theta_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ q_{n-1}(\cos\theta_1) & q_{n-1}(\cos\theta_2) & \cdots & q_{n-1}(\cos\theta_n)\end{vmatrix}$$

$$=\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n2^{0+1+\cdots+(n-1)}$$

$$\times\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i)$$

$$=2^{\binom{n}{2}}\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_n\prod_{1\le i<j\le n}(\cos\theta_j-\cos\theta_i).$$

因此 3.1.14(2) 成立.

3.1.15 计算 n 阶行列式 $\det A$,其中

$$A=\begin{pmatrix}\frac{x_1}{x_1-1} & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \frac{x_2}{x_2-1} & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{x_n}{x_n-1} & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

解 注意,

$$A=\begin{pmatrix}x_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & x_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & x_n\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1-1} & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2}\\ \frac{1}{x_2-1} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x_n-1} & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

则

$$\det A = x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix}\frac{1}{x_1-1} & 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2}\\ \frac{1}{x_2-1} & 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{x_n-1} & 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}.$$

记其右端行列式为 $D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 将 $D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 中第2列乘以 $-\frac{1}{x_1-1}$ 加到第1列,又乘以 $-x_1^{j-2}$ 加到第 j 列, $j=3,4,\cdots,n$,得到

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=$$

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{x_2-x_1}{(x_2-1)(x_1-1)} & 1 & x_2-x_1 & \cdots & x_2^{n-3}(x_2-x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{x_n-x_1}{(x_n-1)(x_1-1)} & 1 & x_n-x_1 & \cdots & x_n^{n-3}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

将上式右端行列式按第2列作Laplace展开,得到关于 $D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的递推方程

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)}{(x_1-1)}\times D_{n-1}(x_2,x_3,\cdots,x_n). \tag{9}$$

其初始条件为

$$D_2(x_{n-1},x_n)=\begin{vmatrix}\frac{1}{x_{n-1}-1} & 1\\ \frac{1}{x_n-1} & 1\end{vmatrix}=\frac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-1)(x_n-1)}.$$

解递推方程⑨得到

$$D_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)}{\prod\limits_{i=1}^{n}(x_i-1)}.$$

于是

$$\det A=\prod_{i=1}^{n}\frac{x_i}{x_i-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i).$$

3.1.16(Cauchy 行列式) 计算 n 阶行列式 $\det A$,其中

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n}\end{pmatrix}.$$

解 记 $A=(a_{ij})$,其中 $a_{ij}=\frac{1}{a_i+b_j}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 将方阵 A 的第1行乘以 $-a_{i1}a_{11}^{-1}$ 加到第 i 行, $i=2,3,\cdots,n$,即有

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{21}a_{11}^{-1} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_{31}a_{11}^{-1} & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_{n1}a_{11}^{-1} & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}A$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & a_{n2}-\frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn}-\frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}}\end{pmatrix}.$$

记 $c_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$, $2\leqslant i,j\leqslant n$. 上式两端取行列式得到

$$\det A=a_{11}\begin{vmatrix}c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2n}\\ c_{32} & c_{33} & \cdots & c_{3n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ c_{n2} & c_{n3} & \cdots & c_{nn}\end{vmatrix}. \tag{10}$$

记 $\det A=D_n(a_1,a_2,\cdots,a_n;b_1,b_2,\cdots,b_n)$. 由于

$$\begin{aligned}c_{ij}&=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\\ &=\frac{1}{a_i+b_j}-\frac{a_1+b_1}{(a_i+b_1)(a_1+b_j)}\\ &=\frac{(a_i-a_1)(b_j-b_1)}{(a_1+b_j)(a_i+b_j)(a_i+b_1)},2\leqslant i,j\leqslant n,\end{aligned}$$

因此式⑩右端的行列式的第 i 行具有公因子 $\frac{a_{i+1}-a_1}{a_{i+1}+b_1}$,第 j 列具有公因子 $\frac{b_{j+1}-b_1}{b_{j+1}-a_1}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$. 于是由式⑩得到关于 $D_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n)$ 的递推方程

$$\begin{aligned}&D_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n)\\ &=\frac{1}{a_1+b_1}\prod_{j=2}^{n}\frac{(a_j-a_1)(b_j-b_1)}{(a_j+b_1)(a_1+b_j)}\\ &\quad\times D_{n-1}(a_2,\cdots,a_n;b_2,\cdots,b_n).\end{aligned} \tag{11}$$

其初始条件为

$$D_2(a_{n-1},a_n;b_{n-1},b_n)$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(a_n-a_{n-1})(b_n-b_{n-1})}{(a_{n-1}+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})(a_{n-1}+b_n)(a_n+b_n)}.$$

解递推方程 ⑪ 得到

$$\det A = D_n(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_n) = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}.$$

3.1.17　求 n 阶三对角方阵

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & \\ c & a & b & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & b \\ & & & c & a \end{bmatrix}$$

的行列式,其中未写出的元素全为 0,而且 $bc \neq 0$.

解　记 $D_n = \det A$. 将 n 阶行列式 D_n 按第 1 行作 Laplace 展开,得到关于 D_n 的递推方程

$$D_n = aD_{n-1} - bcD_{n-2}, n = 3,4,\cdots. \tag{⑫}$$

其初始条件为 $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc$. ⑫ 是一个 2 阶常系数线性递推方程,其特征方程为

$$x^2 - ax + bc = 0.$$

它的两个根记作 α,β,即有 $\alpha+\beta = a, \alpha\beta = bc$. 代入式 ⑫ 得到

$$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}.$$

于是

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}), \tag{⑬}$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}). \tag{⑭}$$

记 $U_n = D_n - \alpha D_{n-1}, V_n = D_n - \beta D_{n-1}$,则式 ⑬ 和 ⑭ 分别化为关于 U_n 和 V_n 的递推方程

$$U_n = \beta U_{n-1}, n = 3,4,\cdots. \tag{⑮}$$

$$V_n = \alpha V_{n-1}, n = 3,4,\cdots. \tag{⑯}$$

其初始条件分别为 $U_2 = D_2 - \alpha D_1 = \beta^2, V_2 = D_2 - \beta D_1 = \alpha^2$. 解方程 ⑮ 得到 $U_n = \beta^{n-2}U_2 = \beta^n$. 由式 ⑯ 得到 $V_n = \alpha^{n-2}V_2 = \alpha^n$. 因此

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta^n, \tag{⑰}$$

$$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha^n. \tag{⑱}$$

当 $\alpha = \beta$ 时,$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^n$,即得递推方程

$$D_n = \alpha D_{n-1} + \alpha^n, n = 3,4,\cdots, \tag{⑲}$$

且 $\alpha = \beta = \frac{a}{2}, bc = \alpha^2 = \frac{a^2}{4}$,即 $a^2 = 4bc$. 解方程 ⑲ 得到

$$D_n = \alpha^{n-2}D_2 + (n-2)\alpha^n.$$

由于 $D_2 = a^2 - bc = 3\alpha^2$,因此 $D_n = (n+1)\alpha^n = (n+1)(\frac{a}{2})^n$.

当 $\alpha \neq \beta$ 时,由式 ⑰ 和 ⑱ 得到

$$D_n = \frac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta - \alpha} = \beta^n + \alpha\beta^{n-1} + \cdots + \alpha^{n-1}\beta + \beta^n.$$

注意,上式对 $\alpha = \beta$ 也成立.

注　3.1.17 涉及 2 阶常系数线性递推方程的求解. 一般 n 阶常系数线性递推方程的求解理论在任何一本组合数学的教科书中都可以找到,例如可参考黄国勋、李炯生著《计数》,上海教育出版社 1983 年版.

3.1.18(Minkowski)　设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵,其中 $a_{ii} > 0, a_{ij} < 0, 1 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j$,且设方阵 A 的第 i 行上所有元素之和 $R_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0, i = 1,2,\cdots,n$,则方阵 A 称为行主角占优的. 证明:n 阶行主角占优方阵 A 的行列式大于 0.

证　对方阵 A 的阶数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时,$A = (a_{11})$,其中 $a_{11} > 0$. 因此 $\det A = a_{11} > 0$. 设结论对 $n-1$ 阶行主角占优方阵成立. 下面证明结论对 n 阶行主角占优方阵 $A = (a_{ij})$ 成立. 注意 $a_{11} > 0$. 将方阵 A 的第一行乘以数 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 加到第 i 行,$i = 2,\cdots,n$,即有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}} & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ -\frac{a_{n1}}{a_{11}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n} - \frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n2} - \frac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{nn} - \frac{a_{n1}a_{1n}}{a_{11}} \end{bmatrix}.$$

记 $b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}, 2 \leqslant i,j \leqslant n$,并记 $B = (b_{ij})$. 则由上式得到

$$\det A = a_{11}\det B = a_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

因为方阵 A 是行主角占优的,所以 $a_{11} + a_{1i} > a_{11} + a_{12} + \cdots + a_{1n} = R_1 > 0, a_{ii} + a_{i1} > a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} = R_i > 0$. 而 $a_{1i} < 0$,因此

$$b_{ii} = \frac{(a_{11} + a_{1i})a_{ii} - a_{1i}(a_{ii} + a_{i1})}{a_{11}} > 0,$$

$i = 2,3,\cdots,n$.

当 $i \neq j$ 时,$a_{ij} < 0$.因此 $\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} > 0$.所以

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}} < 0, 2 \leqslant i,j \leqslant n, i \neq j.$$

又

$$\begin{aligned}\sum_{j=2}^{n} b_{ij} &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}\sum_{j=2}^{n} a_{ij} - a_{i1}\sum_{j=2}^{n} a_{1j}) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}R_i - a_{11}a_{i1} - a_{i1}(R_1 - a_{11})) \\ &= \frac{1}{a_{11}}(a_{11}R_i - a_{i1}R_1).\end{aligned}$$

由于方阵 A 是行主角占优的,所以 $R_i > 0, R_1 > 0$, $a_{11} > 0, a_{i1} < 0$,因此 $\sum_{j=2}^{n} b_{ij} > 0, i = 2,3,\cdots,n$.这表明,$n-1$ 阶方阵 $B = (b_{ij})$ 也是行主角占优的.由归纳假设,$\det B > 0$,从而 $\det A = a_{11}\det B > 0$.

§3.2 初等变换与线性方程组

求解线性方程组的 Gauss 消元法和线性方程组的求解理论的建立主要依赖于矩阵的行的初等变换.由于矩阵方程是线性方程组的推广,求可逆方阵的逆方阵可以化为一类特殊的矩阵方程求解,而求方阵的相应于特征值的特征向量也归结为解线性方程组,因此对解线性方程组、矩阵方程、求逆方阵以及方阵的特征向量而言,矩阵的行的初等变换是一种基本的方法.

3.2.1 求齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \qquad ①$$

的通解.

解 方程组 ① 的系数矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 A 的第 1 行乘以 -3 加到第 2 行,再将第 1 行乘以 -5 加到第 4 行,得到

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

将矩阵 B 的第 2 行分别乘以 1 和 -1 并分别加到第 3,4 行,得到

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

再将矩阵 C 的第 2 行加到第 1 行,得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 D 的第 2 行乘以 -1,得到

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

以矩阵 $\bar{A}$ 为系数矩阵的齐次方程组为

$$\begin{cases} x_1 - x_3 - x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases} \qquad ②$$

注意,方程组 ① 与 ② 同解.由 ② 得到,方程组 ① 的通解为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_4 + 5x_5 \\ -2x_3 - 2x_4 - 6x_5 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5\begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_3, x_4, x_5 是独立参数,而

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

是方程组 ① 的基础解系.

注 用 F^n 表示数域 F 上 n 维列向量空间.定义 F^5 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下:对任意 $x \in F^5$,令 $\mathscr{A}(x) = A_1x$,其中 A_1 是线性方程组 ① 的系数矩阵 A 添加一个零行得到的,即

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则线性变换 $\mathscr{A}$ 的核 $\ker\mathscr{A}$ 为

$$
\begin{aligned}
\ker\mathscr{A} &= \{x \in F^5 : \mathscr{A}(x) = 0\} \\
&= \{x \in F^5 : A_1 x = 0\} \\
&= \{x \in F^5 : Ax = 0\}.
\end{aligned}
$$

所谓求线性方程组 ① 的通解即是确定线性变换 $\mathscr{A}$ 的核 $\ker\mathscr{A}$ 中所有的向量，而方程组 ① 的基础解系 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 即是核 $\ker\mathscr{A}$ 的一组基.

3.2.2　求线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\
8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\
4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\
2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3
\end{cases} \qquad ③
$$

的通解.

解　方程组 ③ 的增广矩阵为

$$
[A,\beta] = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\
8 & 12 & -9 & 8 & 3 \\
4 & 6 & 3 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 9 & -7 & 3
\end{array}\right),
$$

其中 A 是方程组 ③ 的系数矩阵，将矩阵 $[A,\beta]$ 的第 1 行分别乘以 $-4, -2, -1$，并分别加到第 2,3,4 行，得到

$$
[B,\gamma] = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 5 & -4 & 1 \\
0 & 0 & 10 & -8 & 2
\end{array}\right).
$$

将矩阵 $[B,\gamma]$ 的第 2 行分别乘以 $1, -2$，并分别加到第 3,4 行，得到

$$
[C,\xi] = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & -1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

矩阵 $[C,\xi]$ 的第 2 行乘以 $-\frac{1}{5}$ 加到第 1 行，得到

$$
[D,\eta] = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & 3 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \\
0 & 0 & -5 & 4 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

矩阵 $[D,\eta]$ 的第 1 行乘以 $\frac{1}{2}$，第 2 行乘以 $-\frac{1}{5}$，得到

$$
[\tilde{A},\tilde{\beta}] = \left(\begin{array}{cccc|c}
1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{10} & \frac{3}{5} \\
0 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{1}{5} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).
$$

以 $[\tilde{A},\tilde{\beta}]$ 为增广矩阵的线性方程组为

$$
\begin{cases}
x_1 + \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{10}x_4 = \frac{3}{5}, \\
x_3 - \frac{4}{5}x_4 = \frac{1}{5}.
\end{cases} \qquad ④
$$

注意，方程组 ③ 与 ④ 同解. 由 ④ 得到

$$
\begin{cases}
x_1 = -\frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 + \frac{3}{5}, \\
x_3 = \frac{4}{5}x_4 + \frac{1}{5}.
\end{cases}
$$

因此方程组 ③ 的通解为

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{2}x_2 - \frac{1}{10}x_4 \\ x_2 \\ \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 0 \\ \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix},
$$

其中 x_2, x_4 是独立参数，而

$$
\alpha_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \alpha_2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} \\ 0 \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix}
$$

是方程组 ③ 相应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系.

3.2.3　确定 a 的值，使得线性方程组

$$
\begin{cases}
2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\
x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2, \\
x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = a
\end{cases} \qquad ⑤
$$

有解. 在有解时求方程组 ⑤ 的通解.

解　方程组 ⑤ 的增广矩阵为

$$
[A,\beta] = \left(\begin{array}{cccc|c}
2 & -1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\
1 & 7 & -4 & 11 & a
\end{array}\right),
$$

其中 A 是方程组 ⑤ 的系数矩阵，$\beta = (1,2,a)'$. 矩阵 $[A,\beta]$ 的第 2 行分别乘以 $-2, -1$，并分别加到第 1 行和第 3 行，则矩阵 $[A,\beta]$ 化为

$$
[B,\gamma] = \left(\begin{array}{cccc|c}
0 & -5 & 3 & -7 & -3 \\
1 & 2 & -1 & 4 & 2 \\
0 & 5 & -3 & 7 & a-2
\end{array}\right).
$$

矩阵 $[B,\gamma]$ 的第 1 行加到第 3 行，则矩阵 $[B,\gamma]$ 变为

$$[C,\xi]=\begin{pmatrix}0&-5&3&-7&\vdots&-3\\1&2&-1&4&\vdots&2\\0&0&0&0&\vdots&a-5\end{pmatrix}.$$

方程组 ⑤ 与增广矩阵为 $[C,\xi]$ 的方程组同解. 后者有解的充要条件是系数矩阵 C 的秩 $\operatorname{rank}C$ 等于增广矩阵 $[C,\xi]$ 的秩 $\operatorname{rank}[C,\xi]$. 而 $\operatorname{rank}C=\operatorname{rank}[C,\xi]$ 的充要条件是 $a=5$. 因此方程组 ⑤ 当且仅当 $a=5$ 时有解. 在 $a=5$ 时, 将矩阵 $[C,\xi]$ 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{5}$, 则 $[C,\xi]$ 化为

$$[D,\eta]=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{3}{5}&\frac{7}{5}&\vdots&\frac{3}{5}\\1&2&-1&4&\vdots&2\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}.$$

矩阵 $[D,\eta]$ 的第 1 行乘以 -2 加到第 2 行, 得到

$$[T,\zeta]=\begin{pmatrix}0&1&-\frac{3}{5}&\frac{7}{5}&\vdots&\frac{3}{5}\\1&0&\frac{1}{5}&\frac{6}{5}&\vdots&\frac{4}{5}\\0&0&0&0&\vdots&0\end{pmatrix}.$$

以 $[T,\zeta]$ 为增广矩阵的方程组为

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{5}x_3+\frac{6}{5}x_4=\frac{4}{5},\\x_2-\frac{3}{5}x_3+\frac{7}{5}x_4=\frac{3}{5}.\end{cases}\qquad ⑥$$

于是求得方程组 ⑤ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}-\frac{1}{5}x_3-\frac{6}{5}x_4\\\frac{3}{5}+\frac{3}{5}x_3+\frac{7}{5}x_4\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5}\\\frac{3}{5}\\0\\0\end{pmatrix}+x_3\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\1\\0\end{pmatrix}+x_4\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{7}{5}\\0\\1\end{pmatrix},$$

其中 x_3,x_4 是独立参数, 而

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\\frac{3}{5}\\1\\0\end{pmatrix},\quad\alpha_2=\begin{pmatrix}-\frac{6}{5}\\\frac{7}{5}\\0\\1\end{pmatrix}$$

是线性方程组 ⑤ 相应的齐次线性方程组的基础解系.

3.2.4　证明:线性方程组

$$\begin{cases}x_1-x_2=a_1,\\x_2-x_3=a_2,\\\cdots\cdots\cdots\cdots\\x_{n-1}-x_n=a_{n-1},\\x_n-x_1=a_n\end{cases}\qquad ⑦$$

有解的充要条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$. 在有解时求其通解.

证　方程组 ⑦ 的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&&&\\&1&-1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&1&-1\\-1&&&&1\end{pmatrix}_{n\times n},$$

其中未写出的元素为 0. 而方程组 ⑦ 的增广矩阵为

$$[A,\beta]=\begin{pmatrix}1&-1&&&&\vdots&a_1\\&1&-1&&&\vdots&a_2\\&&\ddots&\ddots&&\vdots&\vdots\\&&&1&-1&\vdots&a_{n-1}\\-1&&&&1&\vdots&a_n\end{pmatrix}.$$

将矩阵 A 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行都加到第 n 行, 则矩阵 A 化为

$$B=\begin{bmatrix}1&-1&\cdots&&\\&\ddots&&1&-1\\0&&&&0\end{bmatrix}_{n\times n},$$

再将矩阵 B 的第 n 列加到第 $n-1$ 列, 第 $n-2$ 列加到第 $n-3$ 列, $\cdots$, 第 2 列加到第 1 列, 得到

$$C=\begin{pmatrix}0&-1&&&0\\\vdots&&\ddots&&\vdots\\0&&&-1&0\\0&\cdots&\cdots&&0\end{pmatrix}.$$

显然矩阵 C 的秩 $\operatorname{rank}C=n-1=\operatorname{rank}A$. 将增广矩阵 $[A,\beta]$ 的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行全加到第 n 行, 则 $[A,\beta]$ 化为

$$[B,\gamma]=\begin{pmatrix}1&-1&&&\vdots&a_1\\&\ddots&\ddots&&\vdots&\vdots\\&&1&-1&\vdots&a_{n-1}\\0&\cdots&0&0&\vdots&a_1+\cdots+a_n\end{pmatrix}.\qquad ⑧$$

由于方程组 ⑦ 有解的充要条件是, $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}[A,\beta]$, 而 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}[A,\beta]$ 的充要条件是 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$, 因此方程组 ⑦ 有解的充要条件是, $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$.

当 $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ 时, 由 ⑧ 得到

$$[B,\gamma]=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & & a_1\\ & 1 & -1 & & & a_2\\ & & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & 1 & -1 & a_{n-1}\\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

矩阵$[B,\gamma]$的第$2,\cdots n-1$行加到第1行,第$3,\cdots,n-1$行加到第2行,…,第$n-1$行加到第$n-2$行,则矩阵$[B,\gamma]$化为

$$[C,\xi]=\begin{pmatrix}1 & & & & 1 & a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}\\ & \ddots & & & \vdots & a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}\\ & & \ddots & & \vdots & \vdots\\ & & & 1 & -1 & a_{n-1}\\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & 0\end{pmatrix}$$

以矩阵$[C,\xi]$为增广矩阵的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1},\\ x_2-x_n=a_2+\cdots+a_{n-1},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_{n-1}-x_n=a_{n-1}.\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}x_1=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+x_n,\\ x_2=a_2+\cdots+a_{n-1}+x_n,\\ \cdots\cdots\\ x_{n-1}=a_{n-1}+x_n.\end{cases}$$

因此方程组 ⑦ 的通解为

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+x_n\\ a_2+\cdots+a_{n-1}+x_n\\ \cdots\\ a_{n-1}+x_n\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+\cdots+a_{n-1}\\ a_2+\cdots+a_{n-1}\\ \vdots\\ a_{n-1}\\ 0\end{pmatrix}+x_n\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix},$$

其中x_n是独立参数.

3.2.5 设$A=(a_{ij})$是$n\times(n+1)$行满秩矩阵,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_{n+1})'$是$n+1$维未知向量.证明:齐次线性方程组$Ax=0$的通解为

$$x_i=(-1)^{n-i}t\times\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1}\\ \cdots & & & & & & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n+1}\end{vmatrix},$$

$i=1,2,\cdots,n+1$,

其中t是任意常数.

证 对n用归纳法.当$n=1$时,$A=(a_{11},a_{12})$,且$\mathrm{rank}A=1$,因此a_{11},a_{12}不全为零.而方程组$Ax=0$为$a_{11}x_1+a_{12}x_2=0$,所以$\dfrac{x_1}{a_{12}}=\dfrac{x_2}{-a_{11}}=t$.即得$x_1=ta_{12},x_2=-ta_{11}$.即结论对$n=1$成立.

现在设结论对$n-1$成立.下面证明结论对n成立.此时齐次线性方程组为$Ax=0$,其中系数矩阵$A=(a_{ij})$是行满秩的.因此矩阵A的第1行$(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,n+1})$是非零的,即$a_{11},a_{12},\cdots,a_{1,n+1}$不全为零.为方便起见,不妨设$a_{11}\neq0$.将矩阵$A$的第1行乘以$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$加到第$i$行,$i=2,\cdots,n$,则矩阵$A$化为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n+1}\\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2,n+1}\\ \cdots & & & \cdots\\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{n,n+1}\end{pmatrix}$$

其中$b_{ij}=a_{ij}-\dfrac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}},2\leqslant i\leqslant n,2\leqslant j\leqslant n+1$.记$B=(b_{ij}),2\leqslant i\leqslant n,2\leqslant j\leqslant n+1$.显然矩阵$B$也是行满秩的.由归纳假设,齐次线性方程组$By=0,y=(x_2,x_3,\cdots,x_{n+1})'$的通解为

$$x_{i+1}=(-1)^{n-1-i}t\times\begin{vmatrix}b_{22} & \cdots & b_{2,i} & b_{2,i+2} & \cdots & b_{2,n+1}\\ b_{32} & \cdots & b_{3,i} & b_{3,i+2} & \cdots & b_{3,n+1}\\ \cdots & & & & & \cdots\\ b_{n2} & \cdots & b_{n,i} & b_{n,i+2} & \cdots & b_{n,n+1}\end{vmatrix},$$

$i=1,2,\cdots,n.$ ⑨

而

$$\begin{vmatrix}b_{22} & \cdots & b_{2,i} & b_{2,i+2} & \cdots & b_{2,n+1}\\ b_{32} & \cdots & b_{3,i} & b_{3,i+2} & \cdots & b_{3,n+1}\\ \cdots & & & & & \cdots\\ b_{n2} & \cdots & b_{n,i} & b_{n,i+2} & \cdots & b_{n,n+1}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{22}-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{2i}-\dfrac{a_{21}a_{1i}}{a_{11}}\\ a_{32}-\dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{3i}-\dfrac{a_{31}a_{1i}}{a_{11}}\\ \cdots & & \cdots\\ a_{n2}-\dfrac{a_{n1}a_{12}}{a_{11}} & \cdots & a_{ni}-\dfrac{a_{n1}a_{1i}}{a_{11}}\end{vmatrix}$$

$$
\begin{vmatrix}
\cdots & a_{2,i+2}-\dfrac{a_{21}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{2,n+1}-\dfrac{a_{21}a_{1,n+1}}{a_{11}} \\
\cdots & a_{3,i+2}-\dfrac{a_{31}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{3,n+1}-\dfrac{a_{31}a_{1,n+1}}{a_{11}} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots & a_{n,i+2}-\dfrac{a_{n1}a_{1,i+2}}{a_{11}} & \cdots & a_{n,n+1}-\dfrac{a_{n1}a_{1,n+1}}{a_{11}}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}.
$$

于是式⑨化为

$$
x_{i+1}=(-1)^{n-(i+1)}t
\times\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix},
$$

$$
i=1,2,\cdots,n. \qquad ⑩
$$

将上式代入齐次线性方程组 $Ax=0$ 中的第一个方程 $a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n+1}x_{n+1}=0$，得到

$$
\begin{aligned}
x_1&=-\frac{1}{a_{11}}\sum_{i=1}^{n}a_{1,i+1}x_{i+1}\\
&=-t\sum_{i=1}^{n}(-1)^{n-(i+1)}\frac{a_{1,i+1}}{a_{11}}
\end{aligned}
$$

$$
\times\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}. \qquad ⑪
$$

注意

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+1} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+1} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+1} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}
=0. \qquad ⑫
$$

将上述行列式按第 1 行作 Laplace 展开，得到

$$
\sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{1+i}a_{1,i}
\times\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}=0.
$$

于是有

$$
\sum_{i=2}^{n+1}(-1)^{1+i}a_{1,i}
\times\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_{1,i+1}
\times\begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1i} & a_{1,i+2} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{21} & \cdots & a_{2i} & a_{2,i+2} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{ni} & a_{n,i+2} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}
$$

$$
=-a_{11}\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}.
$$

将上式代入⑪，得到

$$
x_1=(-1)^{n-1}t\begin{vmatrix}
a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1,n+1} \\
a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,n+1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n,n+1}
\end{vmatrix}.
$$

这就证明，齐次线性方程组 $Ax=0$ 的通解具有题示的形式.

注　由于齐次线性方程组 $Ax=0$ 的系数矩阵 A 的秩为 n，而未知元 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的个数为 $n+1$，因此方程组 $Ax=0$ 的解构成的解空间是 1 维的. 再注意到式⑫. 易知方程组 $Ax=0$ 具有一个非零解. 由此即可证明 3.2.5. 这里采用归纳法和矩阵的行的初等变换，尽管所用篇幅较长，却是容易想到的.

3.2.6　设 A 和 B 分别是给定的 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵，X 是 $m\times p$ 未知矩阵. 证明：矩阵方程 $AX=B$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}[A,B]$，其中 $[A,B]$ 是矩阵 A 和 B 并排而成的矩阵.

证　记 $B=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p]$，其中 β_j 是矩阵 B 的第 j 列形成的 m 维列向量，$j=1,2,\cdots,p$. 另记 $X=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p]$，其中 α_j 是矩阵 X 的第 j 列形成的 n 维未知列向量，$j=1,2,\cdots,p$. 考虑矩阵方程

$$
A[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_j]=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j],
$$

$$
j=1,2,\cdots,p.
$$

现在对 j 用归纳法证明，矩阵方程 $A[\alpha_1,\cdots,\alpha_j]=[\beta_1,\cdots,\beta_j]$ 有解的充要条件是 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}[A,\beta_1,\cdots,\beta_j]$. 当 $j=1$ 时结论显然成立，因为矩阵方程即为 $A\alpha_1=\beta_1$，这是通常的线性方程组. 设结论对 $j-1$ 成立. 考虑矩阵方程 $A[\alpha_1,\cdots,\alpha_j]=[\beta_1,\cdots,\beta_j]$. 它有解的充要条件是矩阵方程 $A[\alpha_1,\cdots,\alpha_{j-1}]=[\beta_1,\cdots,\beta_{j-1}]$ 和 $A\alpha_j=\beta_j$ 都有解. 由归纳假设，使这两个矩阵方程有解的充要条件是，$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}[A,\beta_1,$

$\cdots,\beta_{j-1}]$ 和 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}[A,\beta_j]$. 这表明, $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_j$ 均可由矩阵 A 的列向量的极大线性无关向量组线性表出. 因此 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}[A,\beta_1,\cdots,\beta_j]$. 即结论对 j 也成立.

注 从3.2.6的证明可以看出,解矩阵方程 $AX=B$ 可以归结为解 p 个线性方程组 $A\alpha_j=\beta_j, j=1,2,\cdots,p$. 所以说,矩阵方程是线性方程组的推广. 因此,矩阵的行的初等变换在解矩阵方程中是大有作为的.

3.2.7 求矩阵方程 $AX=B$ 的所有解,其中

$$A=\begin{bmatrix}1&2&-3\\3&2&-4\\2&-1&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-3&0\\10&2&7\\10&7&8\end{bmatrix},$$

而 X 是3阶未知方阵.

解 矩阵方程 $AX=B$ 的增广矩阵为

$$[A,B]=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-3&1&-3&0\\3&2&-4&10&2&7\\2&-1&0&10&7&8\end{array}\right].$$

矩阵 $[A,B]$ 的第1行分别乘以 $-3,-2$,并分别加到第2,3行,则 $[A,B]$ 化为

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-3&1&-3&0\\0&-4&5&7&11&7\\0&-5&6&8&13&8\end{array}\right].$$

上述矩阵的第3行乘以 -1 加到第2行,得到

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&2&-3&1&-3&0\\0&1&-1&-1&-2&-1\\0&-5&6&8&13&8\end{array}\right].$$

再将上一矩阵的第2行分别乘以 $-2,5$,并分别加到第1,3行,得到

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-1&3&1&2\\0&1&-1&-1&-2&-1\\0&0&1&3&3&3\end{array}\right].$$

上一矩阵的第3行分别加到第1,2行,得到

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&6&4&5\\0&1&0&2&1&2\\0&0&1&3&3&3\end{array}\right].$$

以上一矩阵为增广矩阵的矩阵方程与原矩阵方程同解. 因此,原矩阵方程的解为

$$X=\begin{bmatrix}6&4&5\\2&1&2\\3&3&3\end{bmatrix}.$$

3.2.8 解矩阵方程 $XA=B$,其中

$$A=\begin{bmatrix}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{bmatrix}.$$

解 注意,矩阵方程 $XA=B$ 的两端取转置,得到矩阵方程 $A'X'=B'$. 显然这两个矩阵方程同解. 后者的增广矩阵为 $[A',B']=\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}'$. 对矩阵 $[A',B']$ 进行行的初等变换,相当于对矩阵 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 进行列的初等变换. 因此方程 $XA=B$ 的增广矩阵为 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$,而且在求其解时只对矩阵 $\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}$ 进行列的初等变换. 现在将矩阵

$$\begin{bmatrix}A\\B\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc}5&3&1\\1&-3&-2\\-5&2&1\\ \hdashline -8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{array}\right]$$

的第3列分别乘以 $-5,-3$,并分别加到第1,2列,得到

$$\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\11&3&-2\\-10&-1&1\\ \hdashline -8&3&0\\-5&9&0\\-2&15&0\end{array}\right].$$

上一矩阵的第2列分别乘以 $-10,1$,并分别加到第1,3列,得到

$$\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\-19&3&1\\0&-1&0\\ \hdashline -38&3&3\\-95&9&9\\-152&15&15\end{array}\right].$$

用 $-\frac{1}{19}$ 乘上一矩阵的第1列,得到

$$\left[\begin{array}{ccc}0&0&1\\1&3&1\\0&-1&0\\ \hdashline 2&3&3\\5&9&9\\8&15&15\end{array}\right].$$

上一矩阵的第1列分别乘以 $-3,-1$,并分别加到第2,3列,得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & -6 & 4 \\ 8 & -9 & 7 \end{pmatrix}$$

将上一矩阵乘以 -1,并将第 3 列调到第 1 列,得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

以上一矩阵为增广矩阵的矩阵方程与原方程 $XA = B$ 同解.因此原矩阵方程的解为

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.2.9　求矩阵方程 $AXB = C$ 的通解,其中

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

解　令 $XB = Y$,则 $AY = C$.其增广矩阵为

$$[A, C] = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & -5 & 2 & 18 & 12 & 9 \\ 5 & -7 & 3 & 23 & 15 & 11 \end{array}\right).$$

矩阵$[A, C]$的第 1 行分别乘以 $-2, -3$,并分别加到第 2,3 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & -3 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ -1 & 2 & 0 & 17 & 15 & 17 \end{array}\right).$$

上一矩阵的第 2 行分别乘以 $3, -2$,并分别加到第 1,3 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 2 & 0 & 1 & 44 & 36 & 37 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ -1 & 0 & 0 & -11 & -9 & -9 \end{array}\right).$$

上一矩阵的第 3 行乘以 2 加到第 1 行,并对调第 1,3 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & -11 & -9 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{array}\right).$$

用 -1 乘以上一矩阵的第 1 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 14 & 12 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 22 & 18 & 19 \end{array}\right).$$

由此得到,矩阵方程 $AY = C$ 具有唯一解

$$Y = \begin{pmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

再求矩阵方程 $XB = Y$ 的解.其增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} B \\ Y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 11 & 9 & 9 \\ 14 & 12 & 13 \\ 22 & 18 & 19 \end{pmatrix}.$$

矩阵$\begin{bmatrix} B \\ Y \end{bmatrix}$的第 1 列分别乘以 $-1, -1$,并分别加到第 2,3 列,得到

$$\begin{pmatrix} 9 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 11 & -2 & -2 \\ 14 & -2 & -1 \\ 22 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

上一矩阵的第 2 列乘以 $-\frac{1}{2}$,得到

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 11 & 1 & -2 \\ 14 & 1 & -1 \\ 22 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

上一矩阵的第 1 列减去第 3 列,得到

$$\begin{pmatrix} 12 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 13 & 1 & -2 \\ 15 & 1 & -1 \\ 25 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

再将上一矩阵的第 2 列分别乘以 $-12, 3$,并分别加到第 1,3 列,得到

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ & \cdots\cdots & \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

对调其中第1列到第3列,得到

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \cdots\cdots & \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

于是矩阵方程 $XB = Y$,从而 $AXB = C$ 具有唯一解

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.2.10　求矩阵方程 $AX = B$ 的通解,其中

$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$.

解　原方程的增广矩阵为

$$[A, B] = \left[\begin{array}{cc:cc} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 4 & 6 \end{array}\right].$$

其中第1行乘以 -2,加到第2行,得到

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 2 & -3 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

易知 $\text{rank}A = \text{rank}[A, B] = 1$. 由 3.2.6,原方程有解,且

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad ⑬$$

与原方程同解. 由 ⑬ 得到

$$\begin{cases} 2x_{11} - 3x_{21} = 2, \\ 2x_{12} - 3x_{22} = 3. \end{cases}$$

解之得

$$x_{11} = 1 + \frac{3}{2}x_{21},$$

$$x_{12} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_{22}.$$

因此原方程的通解为

$$X = \begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}x_{21} & \frac{3}{2} + \frac{3}{2}x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix},$$

其中 x_{21}, x_{22} 是任意常数.

3.2.11　求矩阵方程 $XA = B$ 的通解,其中

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{bmatrix}.$$

解　原矩阵方程的增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \\ \cdots & \cdots \\ 2 & 4 \\ 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

将其第1列乘以 -2,加到第2列,得到

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \\ \cdots & \cdots \\ 2 & 0 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可知, $\text{rank}A = \text{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 1$,因此原矩阵方程有解,且与

$$X\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} \qquad ⑭$$

同解. 解方程 ⑭ 得到

$$\begin{cases} 3x_{11} + 4x_{12} = 2, \\ 3x_{21} + 4x_{22} = 9. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x_{11} = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x_{12}, \\ x_{21} = 3 - \frac{4}{3}x_{22}. \end{cases}$$

因此原方程的通解是

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} - \frac{4}{3}x_{12} & x_{12} \\ 3 - \frac{4}{3}x_{22} & x_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{12} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix},$$

其中 x_{12}, x_{22} 是任意常数.

3.2.12　求下列 n 阶方阵 A 的逆方阵 A^{-1}:

$$(1)\ A = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 全非零;

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 1\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots}\\ 1 & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}$;

(3) $A=\begin{pmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \multicolumn{4}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{pmatrix}$;

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ \multicolumn{6}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1\end{pmatrix}$.

解 当方阵 A 可逆时，矩阵方程 $AX=I_n$ 具有唯一解 A^{-1}，这里 I_n 是 n 阶单位方阵. 而方程 $AX=I_n$ 的增广矩阵为 $[A,I_n]$. 由于方阵 A 可逆，因此方阵 A 可以用矩阵的行的初等变换变为单位方阵. 所以，如果增广矩阵 $[A,I_n]$ 经行的初等变换变为 $[I_n,B]$ 时，则矩阵方程 $AX=I_n$ 与矩阵方程 $I_nX=B$ 同解，因而 $X=B=A^{-1}$. 这表明，只要将 $n\times 2n$ 矩阵 $[A,I_n]$ 进行矩阵的行的初等变换变为 $n\times 2n$ 矩阵 $[I_n,B]$，则 B 即是 A 的逆方阵.

(1) 将矩阵

$$[A,I_n]=\left(\begin{array}{cccccc|ccccc}0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{11}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right)$$

的第 i 行乘以 $\frac{1}{a_i}$，$i=1,2,\cdots,n$，并将第 n 行调到第1行，得到

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{array}\right).$$

因此

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_n}\\ \frac{1}{a_1} & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0 & 0\\ \multicolumn{5}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & 0\end{pmatrix}.$$

(2) 将 $n\times 2n$ 矩阵

$$[A,I_n]=\left(\begin{array}{ccccc|ccccc}0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \multicolumn{10}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$$

的第 $2,3,\cdots,n$ 行全加到第 1 行，并将第 1 行乘以 $\frac{1}{n-1}$，得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$$

将第 i 行减去第 1 行，得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1}\\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1}\end{array}\right).$$

再将第 $2,3,\cdots,n$ 行全加到第 1 行，得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & -1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n-1} & \frac{n-2}{n-1} & \cdots & -\frac{1}{n-1}\\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & -1 & -\frac{1}{n-1} & -\frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{n-2}{n-1}\end{array}\right).$$

将第 $2,3,\cdots,n$ 行各乘以 -1，得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1}\end{array}\right).$$

于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{n-2}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \frac{1}{n-1} & -\frac{n-2}{n-1} & \cdots & \frac{1}{n-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{n-1} & \frac{1}{n-1} & \cdots & -\frac{n-2}{n-1}\end{pmatrix}.$$

(3) 将 $n\times 2n$ 矩阵

$$[A,I_n]=\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right)$$

的第 i 行减去第 1 行,$i=2,3,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -a_1 & a_2 & \cdots & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_1 & 0 & \cdots & a_n & -1 & 0 & \cdots & 1\end{array}\right).$$

将第 i 行乘以 $\frac{1}{a_i}$,$i=2,3,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n}\end{array}\right).$$

将第 i 行乘以 -1,$i=2,3,\cdots,n$,并加到第 1 行,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1s & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{a_1}(a_1s-1) & -\frac{1}{a_2} & \cdots & -\frac{1}{a_n}\\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n}\end{array}\right).$$

其中 $s=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}$. 第 1 行乘以 $\frac{1}{a_1s}$,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_1s-1}{a_1a_1s} & -\frac{1}{a_1a_2s} & \cdots & -\frac{1}{a_1a_ns}\\ -\frac{a_1}{a_2} & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{a_2} & \frac{1}{a_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\frac{a_1}{a_n} & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{a_n} & 0 & \cdots & \frac{1}{a_n}\end{array}\right).$$

第 1 行乘以 $-\frac{a_1}{a_i}$ 加到第 i 行,$i=2,3,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{a_1s-1}{a_1a_1s} & -\frac{1}{a_1a_2s} & \cdots & -\frac{1}{a_1a_ns}\\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\frac{1}{a_2a_1s} & \frac{a_2s-1}{a_2a_2s} & \cdots & -\frac{1}{a_2a_ns}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\frac{1}{a_na_1s} & -\frac{1}{a_na_2s} & \cdots & \frac{a_ns-1}{a_na_n}\end{array}\right).$$

于是

$$A^{-1}=-\frac{1}{s}\begin{pmatrix} \frac{1-a_1s}{a_1^2} & \frac{1}{a_1a_2} & \cdots & \frac{1}{a_1a_n}\\ \frac{1}{a_2a_1} & \frac{1-a_2s}{a_2^2} & \cdots & \frac{1}{a_2a_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{1}{a_na_1} & \frac{1}{a_na_2} & \cdots & \frac{1-a_ns}{a_n^2}\end{pmatrix}.$$

(4) 将 $n\times 2n$ 矩阵

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & & & & & & & & & & \cdots\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{array}\right)$$

的第 $1,2,\cdots,n-1$ 行全加到第 n 行,得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & & & & & & & & & & & \cdots\\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0\\ s & s & s & \cdots & s & s & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\end{array}\right),$$

其中 $s=\binom{n+1}{2}$. 将第 i 行减去第 $i-1$ 行,$i=2,3,\cdots,n-1$,第 n 行乘以 $\frac{1}{s}$,得到

$$\left(\begin{array}{cccccc|cccccc} 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 & n & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 & -1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \cdots & & & & & & & & & & & \cdots\\ -1 & -1 & \cdots & n-1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \cdots & \frac{1}{s} & \frac{1}{s} & \frac{1}{s}\end{array}\right),$$

把第 n 行加到第 i 行,然后将第 i 行乘以 $\frac{1}{n}$,$i=2,3,\cdots,n-1$,得到矩阵 $[B\ C]$,其中

$$B=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n-1&n\\1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&0\\1&1&\cdots&1&1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0&0&0\\ \frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ \frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}\\ \frac{1}{s}&\frac{1}{s}&\frac{1}{s}&\cdots&\frac{1}{s}&\frac{1}{s}&\frac{1}{s}\end{pmatrix}.$$

将$[B\ C]$的第n行减去第$2,3,\cdots,n-1$行,然后将第i行乘以$-(i-1)$加到第1行,$i=2,3,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccccc}0&0&\cdots&0&1&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}\\ 1&0&\cdots&0&0&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ 0&1&\cdots&0&0&\frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&\cdots&1&0&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}\\ 0&0&\cdots&1&1&\frac{2+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{2}{ns}&\cdots&\frac{2}{ns}&\frac{2-s}{ns}&\frac{2}{ns}\end{array}\right).$$

再将第n行减去第1行,并将第1行调到第n行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccccc}1&0&0&\cdots&0&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ 0&1&0&\cdots&0&\frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}\\ 0&0&1&\cdots&0&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1-s}{ns}&\frac{1-s}{ns}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&0&0&\cdots&1&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}\end{array}\right).$$

于是

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots&\frac{1}{ns}\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ &&\ddots&\ddots&\ddots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&\frac{1}{ns}\\ &&&\ddots&\ddots\\ \frac{1}{ns}&\cdots&\cdots&\frac{1-s}{ns}&\frac{1+s}{ns}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ \frac{1+s}{ns}&\frac{1}{ns}&\cdots\ \cdots&\frac{1}{ns}&\frac{1-s}{ns}\end{pmatrix}.$$

3.2.13 n阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_1(1-a_1)&-a_1a_2&\cdots&-a_1a_n\\-a_2a_1&a_2(1-a_2)&\cdots&-a_2a_n\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&a_n(1-a_n)\end{pmatrix}$$

何时可逆.在方阵A可逆时求方阵A的逆方阵.

解 将$n\times 2n$矩阵

$[A,I_n]=$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_1(1-a_1)&-a_1a_2&\cdots&a_1a_n&1&0&\cdots&0\\-a_2a_1&a_2(1-a_2)&\cdots&-a_2a_n&0&1&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&a_n(1-a_n)&0&0&\cdots&1\end{array}\right)$$

的第$2,3,\cdots,n$行全加到第1行,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_1(1-s)&a_2(1-s)&\cdots&a_n(1-s)&1&1&\cdots&1\\-a_2a_1&a_2(1-a_2)&\cdots&-a_2a_n&0&1&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&a_n(1-a_n)&0&0&\cdots&1\end{array}\right),$$

其中$s=a_1+a_2+\cdots+a_n$.当$1-s\neq 0$时,用$\frac{1}{1-s}$乘以上一矩阵的第1行,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_1&a_2&\cdots&a_n&\frac{1}{1-s}&\frac{1}{1-s}&\cdots&\frac{1}{1-s}\\-a_2a_1&a_2(1-a_2)&\cdots&-a_2a_n&0&1&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-a_na_1&-a_na_2&\cdots&a_n(1-a_n)&0&0&\cdots&1\end{array}\right).$$

将第1行乘以a_i加到第i行,$i=2,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}a_1&a_2&\cdots&a_n&\frac{1}{1-s}&\frac{1}{1-s}&\cdots&\frac{1}{1-s}\\0&a_2&\cdots&0&\frac{a_2}{1-s}&1+\frac{a_2}{1-s}&\cdots&\frac{a_2}{1-s}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&a_n&\frac{a_n}{1-s}&\frac{a_n}{1-s}&\cdots&1+\frac{a_n}{1-s}\end{array}\right).$$

将第 $2,\cdots,n$ 行各乘以 -1 全加到第1行,得到

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1+\frac{a_1}{1-s} & \frac{a_1}{1-s} & \cdots & \frac{a_1}{1-s} \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & \frac{a_2}{1-s} & 1+\frac{a_2}{1-s} & \cdots & \frac{a_2}{1-s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & \frac{a_n}{1-s} & \frac{a_n}{1-s} & \cdots & 1+\frac{a_n}{1-s} \end{array}\right).$$

当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 全不为0时,用 $\frac{1}{a_i}$ 乘于第 i 行, $i=1,2,\cdots,n$,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|cccc} 1 & \cdots & 0 & \frac{1-s+a_1}{a_1(1-s)} & \frac{1}{1-s} & \cdots & \frac{1}{1-s} \\ & \ddots & & \frac{1}{1-s} & \frac{1-s+a_2}{a_2(1-s)} & \cdots & \frac{1}{1-s} \\ & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{1-s} & \frac{1}{1-s} & \cdots & \frac{1-s+a_n}{a_n(1-s)} \end{array}\right).$$

因此当 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和 $1-a_2-a_2-\cdots-a_n$ 全不为0时,方阵 A 可逆,且其逆为

$$A^{-1}=\frac{1}{1-s}\begin{pmatrix} 1+\frac{1-s}{a_1} & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+\frac{1-s}{a_2} & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+\frac{1-s}{a_n} \end{pmatrix}.$$

3.2.14 求下列方阵 A 的逆方阵 A^{-1}:

(1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 \end{pmatrix}$,其中 $\omega\neq 1,\omega^3=1$;

(2) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

解 (1) 由于 $\omega^3=1$,所以 $\frac{1}{\omega}=\omega^2$,且 $\omega^2+\omega+1=0$,即 $\omega^2=-(\omega+1)$. 现在将 3×6 矩阵

$$[A,I_3]=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

的第2,3行分别减去第1,2行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega-1 & \omega^2-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \omega(\omega-1) & \omega-\omega^2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

第2行乘以 $-\omega$ 加到第3行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega-1 & \omega^2-1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3\omega & \omega & \omega^2 & 1 \end{array}\right).$$

第2行除以 $\omega-1$,第3行除以 3ω,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^2 & -\frac{1}{\omega-1} & \frac{1}{\omega-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{\omega}{3} & \frac{\omega^2}{3} \end{array}\right).$$

第1行减去第2行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\omega & \frac{\omega}{\omega-1} & -\frac{1}{\omega-1} & 0 \\ 0 & 1 & -\omega^2 & -\frac{1}{\omega-1} & \frac{1}{\omega-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{\omega}{3} & \frac{\omega^2}{3} \end{array}\right).$$

第3行分别乘以 ω,ω^2,并分别加到第1,2行,得到

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{\omega^2}{3} & \frac{\omega}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{\omega}{3} & \frac{\omega^2}{3} \end{array}\right).$$

因此

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega^4 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

(2) 5×10 矩阵

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

的第 i 行加上第 $i+1$ 行的2倍, $i=1,2,3,4$,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第3,4,5行分别乘以3,并分别加到第1,2,3行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 0 & -2 & 9 & -6 & 1 & 2 & 3 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 9 & 0 & 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第4,5行分别乘以 -2,并分别加到第1,2行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 0 & 0 & 9 & -12 & 1 & 2 & 3 & 4 & -4 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第 5 行乘以 9 加到第 1 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第 1 行除以 6,得到

$$\left(\begin{array}{cccc:ccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ -1 & \cdots & 0 & 5 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \cdots & 0 & 4 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & \cdots & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & \cdots & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第 1 行分别乘以 $-5,-4,-3,-2$,并分别加到第 2,3,4,5 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{3}{6} & -\frac{2}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{6} & -\frac{8}{6} & -\frac{6}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{2}{6} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -\frac{3}{6} & -\frac{6}{6} & -\frac{9}{6} & -\frac{6}{6} & -\frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{6} & -\frac{4}{6} & -\frac{6}{6} & -\frac{8}{6} & -\frac{4}{6} \end{array}\right).$$

将第 i 行乘以 -1, $i=2,3,4,5$,并将第 1 行调到第 5 行,得到

$$\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{8}{6} & \frac{6}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{6} & \frac{6}{6} & \frac{9}{6} & \frac{6}{6} & \frac{3}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{6}{6} & \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{array}\right).$$

由此得到

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{4}{6} & \frac{8}{6} & \frac{6}{6} & \frac{4}{6} & \frac{2}{6} \\ \frac{3}{6} & \frac{6}{6} & \frac{9}{6} & \frac{6}{6} & \frac{3}{6} \\ \frac{2}{6} & \frac{4}{6} & \frac{6}{6} & \frac{8}{6} & \frac{4}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{3}{6} & \frac{4}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}.$$

注 1 因为 $\omega^3 = 1, \omega \neq 1$,所以 $\omega^2 = \bar{\omega}, \omega = \bar{\omega}^2$, $\omega^4 = \bar{\omega}^2$,因此,在 3.2.14(1) 中,

$$A^{-1} = \frac{1}{3}A^*, AA^* = 3I_3 = A^*A,$$

其中 A^* 是 A 的共轭转置.一般地说,对于 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1} \\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

其中 $\omega^n = 1, \omega \neq 1$,故有 $AA^* = nI_n = A^*A$.由此可得,$A^{-1} = \frac{1}{n}A^*$.

注 2 在 3.2.14(2) 中,

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 2(5-1) & 2(5-2) & 2(5-3) & 2 \\ 3 & 2(5-2) & 3(5-2) & 3(5-3) & 3 \\ 2 & 2(5-3) & 3(5-3) & 4(5-3) & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

对 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

有

$$A^{-1} = \frac{1}{n+1} \times$$

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ n-1 & 2(n-1) & 2(n-2) & \cdots & 2\cdot 2 & 2\cdot 1 \\ n-2 & 2(n-2) & 3(n-2) & \cdots & 3\cdot 2 & 3\cdot 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 2\cdot 2 & 3\cdot 2 & \cdots & (n-1)\cdot 2 & (n-1)\cdot 1 \\ 1 & 2\cdot 1 & 3\cdot 1 & \cdots & (n-1)\cdot 1 & n \end{pmatrix}$$

3.2.15 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶非负方阵,即 $a_{ij} \geqslant$

$0, 1 \leqslant i, j \leqslant n$，且设方阵 A 的每个行上所有元素之和均小 1，即 $R_i = a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{in} < 1, i = 1, 2, \cdots, n$. 证明：方阵 $I_n - A$ 可逆，且其逆方阵 $(I_n - A)^{-1}$ 也是非负的.

证 对方阵的阶数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时，$A = [a_{11}]$，$a_{11} \geqslant 0$，$R_1 = a_{11} < 1$，因此 $1 - a_{11} > 0$. 所以 $I_1 - A = [1 - a_{11}]$ 可逆，其逆为 $(I_1 - A)^{-1} = \left[\dfrac{1}{1 - a_{11}}\right]$ 是非负的. 现在设结论对 $n - 1$ 阶的满足题设条件的方阵成立. 下面证明结论对满足题设条件的 n 阶方阵 A 也成立.

由于方阵 A 是非负的，因此 $a_{nn} \leqslant R_n < 1$，所以 $1 - a_{nn} > 1$. 将方阵

$$I_n - A = \begin{pmatrix} 1 - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1 - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1 - a_{nn} \end{pmatrix}$$

的第 n 行乘以 $\dfrac{a_{in}}{1 - a_{nn}}$ 加到第 i 行，$i = 1, 2, \cdots, n - 1$，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \dfrac{a_{1n}}{1 - a_{nn}} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \dfrac{a_{2n}}{1 - a_{nn}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \dfrac{a_{n-1,n}}{1 - a_{nn}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} (I_n - A) =$$

$$\begin{pmatrix} 1 - a_{11} - \dfrac{a_{n1}a_{1n}}{1 - a_{nn}} & \cdots & \cdots & -a_{1,n-1} - \dfrac{a_{n,n-1}a_{1n}}{1 - a_{nn}} & 0 \\ -a_{21} - \dfrac{a_{n1}a_{2n}}{1 - a_{nn}} & \cdots & \cdots & -a_{2,n-1} - \dfrac{a_{n,n-1}a_{2n}}{1 - a_{nn}} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n-1,1} - \dfrac{a_{n1}a_{n-1,n}}{1 - a_{nn}} & \cdots & \cdots & -a_{n-1,n-1} - \dfrac{a_{n,n-1}a_{n-1,n}}{1 - a_{nn}} & 0 \\ -a_{n1} & \cdots & \cdots & -a_{n,n-1} & 1 - a_{nn} \end{pmatrix}.$$

第 n 列乘以 $\dfrac{a_{ni}}{1 - a_{nn}}$ 加到第 i 列，$i = 1, 2, \cdots, n - 1$，即有

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \dfrac{a_{1n}}{1 - a_{nn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \dfrac{a_{n-1,n}}{1 - a_{nn}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} (I_n - A) \times \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \dfrac{a_{n1}}{1 - a_{nn}} & \cdots & \dfrac{a_{n,n-1}}{1 - a_{nn}} & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - b_{11} & \cdots & -b_{1,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -b_{n-1,1} & \cdots & 1 - b_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - a_{nn} \end{pmatrix} \quad ⑮$$

其中 $b_{ij} = a_{ij} + \dfrac{a_{nj}a_{in}}{1 - a_{nn}}, 1 \leqslant i, j \leqslant n - 1$. 记 $B = (b_{ij})$. 显然 $b_{ij} \geqslant 0$，即 B 是一个 $n - 1$ 阶非负方阵. 它的第 i 行上所有元素之和为

$$\begin{aligned} & b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{i,n-1} \\ & = (a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{i,n-1}) \\ & \quad + \frac{a_{in}}{1 - a_{nn}}(a_{n1} + a_{n2} + \cdots + a_{n,n-1}) \\ & = R_i - a_{in} + \frac{a_{in}}{1 - a_{nn}}(R_n - a_{nn}) \\ & = R_i - \frac{a_{in}}{1 - a_{nn}}(1 - R_n). \end{aligned}$$

由于 $a_{in} \geqslant 0, 1 - a_{nn} > 0, 1 - R_n > 0$，所以

$b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{i,n-1} \leqslant R_i < 1, i = 1, 2, \cdots, n - 1$.

因此 B 是满足题设条件的 $n - 1$ 阶非负方阵. 由归纳假设，$I_{n-1} - B$ 可逆，且其逆方阵 $(I_{n-1} - B)^{-1}$ 是非负的. 注意式⑮右端方阵的前 $n - 1$ 行、$n - 1$ 列构成的子方阵为 $I_{n-1} - B$. 因此由式⑮可知，方阵 $I_n - A$ 是可逆的. 式⑮两端取逆得到

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \\ -\dfrac{a_{n1}}{1 - a_{nn}} & \cdots & -\dfrac{a_{n,n-1}}{1 - a_{nn}} & 1 \end{pmatrix} (I_n - A)^{-1}$$

$$\times \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & -\dfrac{a_{1n}}{1 - a_{nn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & -\dfrac{a_{n,n-1}}{1 - a_{nn}} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$
=\begin{pmatrix}(I_{n-1}-B)^{-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1-a_{nn}}\end{pmatrix}.
$$
因此

$$
(I_n-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\\ \dfrac{a_{n1}}{1-a_{nn}} & \cdots & \dfrac{a_{n,n-1}}{1-a_{nn}} & 1\end{pmatrix}\times
$$

$$
\begin{pmatrix}(I_{n-1}-B)^{-1} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{1-a_{nn}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & \dfrac{a_{1n}}{1-a_{nn}}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & \dfrac{a_{n-1,n}}{1-a_{nn}}\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}
$$

上式右端三个 n 阶方阵都是非负的，其乘积也是非负的，从而 $(I_n-A)^{-1}$ 是非负的.

3.2.16　求 n 阶方阵

$$
A=\begin{pmatrix}0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}
$$

的特征多项式、特征值和特征向量.

解　方阵 A 的特征多项式为

$$
\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ -1 & 0 & \cdots & \cdots & \lambda\end{vmatrix}
$$

将第 i 行乘以 λ^{n-i}，$i=1,2,\cdots,n$，然后全都加到第 n 行，得到

$$
\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & -1\\ \lambda^n-1 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{vmatrix}
=\lambda^n-1.
$$

因此方阵 A 的特征值为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$，其中 $\omega^n=1,\omega\neq 1$.

下面求方阵 A 的相应于特征值 ω^k 的特征向量，即求齐次方程组

$$
(\omega^k I_n-A)x
=\begin{pmatrix}\omega^k & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots\\ & & & \ddots & -1\\ -1 & & & & \omega^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0 \qquad ⑯
$$

的解. 该方程组的系数矩阵的第 1 行乘以 ω^k 加到第 2 行，得到

$$
\begin{pmatrix}\omega^k & -1 & & & \\ \omega^{2k} & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & \omega^k & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1\\ -1 & 0 & & & \omega^k\end{pmatrix}
$$

第 2 行乘以 ω^k 加到第 3 行，$\cdots$，第 $n-1$ 行乘以 ω^k 加到第 n 行，得到

$$
\begin{pmatrix}\omega^k & -1 & & & \\ \omega^{2k} & & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ \omega^{(n-1)k} & & & & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0\end{pmatrix}
$$

即齐次方程组 ⑯ 化为同解方程组

$$
\begin{cases}\omega^k x_1-x_2=0,\\ \omega^{2k}x_1-x_3=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \omega^{(n-1)k}x_1-x_n=0.\end{cases}
$$

因此

$$
x=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ \omega^k x_1\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}x_1\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix}.
$$

即方阵 A 的相应于特征值 ω^k 的特征子空间(即所有特征向量与零向量构成的集合)是 1 维的，且由 $\alpha_k=(1,\omega^k,\cdots,\omega^{(n-1)k})^t$ 生成(即 α_k 是特征子空间的一组基)，$k=0,1,2,\cdots,n-1$.

3.2.17　求 n 阶循环矩阵

$$
C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})
=\begin{pmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1}\\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}
$$

的特征值和特征向量.

解　n 阶循环矩阵 $C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 是由它的第 1 行所决定的，第 2 行是第 1 行的元素右移一步得到，

第3行是第2行右移一步得到的,等等.易知3.2.16中 n 阶方阵 A 是一个循环方阵,即有 $A = C(0,1,0,\cdots,0)$.而且

$$C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) = a_0I_n + a_1A + a_2A^2 + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}.$$

记 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}$,则

$$C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}) = f(A).$$

这表明,任意一个 n 阶循环方阵 $C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 都可以表为方阵 A 的 $n-1$ 次多项式.反之方阵 A 的 $n-1$ 次多项式 $f(A)$ 是一个 n 阶循环方阵.因此方阵 A 称为基本循环方阵.

由3.2.16,基本循环方阵 A 的特征值为 $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$,其中 $\omega^n=1,\omega\neq1$,而且 $\alpha_k=(1,\omega^k,\cdots,\omega^{(n-1)k})^t$ 是相应于特征值 ω^k 的特征向量,即有

$A\alpha_k = \omega^k\alpha_k$,且 $A^l\alpha_k = \omega^{lk}\alpha_k, 0\leqslant k\leqslant n-1, 0\leqslant l\leqslant n-1$.

因此

$$\begin{aligned}
&C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})\alpha_k\\
&= a_0I_n\alpha_k + a_1A\alpha_k + \cdots + a_{n-1}A^{n-1}\alpha_k\\
&= a_0\alpha_k + a_1\omega^k\alpha_k + \cdots + a_{n-1}\omega^{(n-1)k}\alpha_k\\
&= (a_0 + a_1\omega^k + \cdots + a_{n-1}\omega^{(n-1)k})\alpha_k\\
&= f(\omega^k)\alpha_k, k=0,1,\cdots,n-1. \qquad ⑰
\end{aligned}$$

这表明,$f(1),f(\omega),\cdots,f(\omega^{n-1})$ 是 $C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的特征值,而 α_k 是 n 阶循环方阵 $C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 的相应于特征值 ω^k 的特征向量,$k=0,1,\cdots,n-1$.

注 由式⑰可知,

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix} = f(\omega^k)\begin{pmatrix}1\\ \omega^k\\ \omega^{2k}\\ \vdots\\ \omega^{(n-1)k}\end{pmatrix}, k=0,1,\cdots,n-1.$$

因此

$$\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\omega^{n-1})\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$$

由于Vandermonde行列式

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{vmatrix} = \prod_{0\leqslant i<j\leqslant n-1}(\omega^j - \omega^i) \neq 0,$$

所以

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1\\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & a_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \omega & \omega^2 & \cdots & \omega^{n-1}\\ 1 & \omega^2 & \omega^4 & \cdots & \omega^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & \cdots & \omega^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} f(1) & & & \\ & f(\omega) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\omega^{n-1})\end{pmatrix}.$$

即 n 阶循环方阵 $C(a_0,a_1,\cdots,a_{n-1})$ 相似于对角方阵.

3.2.18 求 n 阶实方阵

$$A=\begin{pmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{pmatrix}$$

的特征值和相应于特征值的特征向量,其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为 0.

解 方阵 A 的特征多项式为

$$\det(\lambda I_n-A)=\begin{vmatrix} \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2 \end{vmatrix}.$$

考虑 $n+1$ 阶行列式

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}.$$

第 1 行乘以 $-a_{i-1}$ 加到第 i 行, $i=2,3,\cdots,n+1$,得到

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & \lambda-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n \\ 0 & -a_2a_1 & \lambda-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & \lambda-a_n^2 \end{vmatrix}$$
$$=\det(\lambda I_n-A).$$

另一方面,行列式 $\varphi(\lambda)$ 的第 $i+1$ 行乘以 $-\frac{a_i}{\lambda}$, $i=1,2,\cdots,n$,然后都加到第 1 行,得到

$$\varphi(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}a_i^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$
$$=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2).$$

因此方阵 A 的特征多项式为 $\det(\lambda I_n-A)=\lambda^{n-1}(\lambda-\sum_{i=1}^{n}a_i^2)$.所以方阵 A 的特征值为 0, $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$,其中特征值 0 的重数是 $n-1$.

方阵 A 的相应于特征值 0 的特征向量 x 由齐次线性方程组 $Ax=0$ 所确定.记 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^t$,则 $A=\alpha\alpha^t$.因此 $Ax=\alpha\alpha^t x=0$.两边同乘以 α^t,得到

$$(\alpha^t\alpha)\alpha^t x=(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n)=0.$$

因此 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0$.因为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 不全为零,所以可设 $a_i\neq 0$.于是

$$x_i=-\frac{a_1}{a_i}x_1-\cdots-\frac{a_{i-1}}{a_i}x_{i-1}-\frac{a_{i+1}}{a_i}x_{i+1}-\frac{a_n}{a_i}x_n.$$

因此

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{i-1} \\ -\frac{1}{a_i}\sum_{j\neq i}a_jx_j \\ x_{i+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_i}x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_2}{a_i}x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+\cdots+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_{i-1} \\ -\frac{a_{i-1}}{a_i}x_{i-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_{i+1}}{a_i}x_{i+1} \\ x_{i+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$+\cdots+\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_n}{a_i}x_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$
$$=x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\frac{a_1}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}+\cdots+x_{i-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{a_{i-1}}{a_i} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+x_{i+1}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ \frac{a_{i+1}}{a_i}\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}+\cdots+x_n\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ -\frac{a_n}{a_i}\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

记 $\varepsilon_j=(0,\cdots,0,\underset{j}{1},0,\cdots,0)'$,则 $\varepsilon_j-\frac{a_j}{a_i}\varepsilon_i,j=1,\cdots,i-1,i+1,\cdots,n$ 是齐次方程组 $Ax=0$ 的基础解系,即方阵 A 的属于特征值 0 的特征子空间是 $n-1$ 维的.

最后求方阵 A 的相应于特征值 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ 的特征向量.记 $s=\sum_{i=1}^{n}a_i^2$.考虑齐次线性方程组

$$\begin{pmatrix}s-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ -a_2a_1 & s-a_2^2 & \cdots & -a_2a_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ -a_na_1 & -a_na_2 & \cdots & s-a_n^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=0.$$

将其系数矩阵的第 1 行乘以 $\frac{a_ia_1}{s-a_1^2}$ 加到第 i 行,$i=2,3,\cdots,n$,则系数矩阵变为

$$\begin{pmatrix}s-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_n\\ 0 & \frac{s(s-a_1^2-a_2^2)}{s-a_1^2} & \cdots & -\frac{sa_2a_n}{s-a_1^2}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & -\frac{sa_na_2}{s-a_1^2} & \cdots & \frac{s(s-a_1^2-a_n^2)}{s-a_1^2}\end{pmatrix}$$

第 i 行乘以 $\frac{s-a_1^2}{s}$,$i=2,3,\cdots,n$,得到

$$\begin{pmatrix}s-a_1^2 & -a_1a_2 & -a_1a_3 & \cdots & -a_1a_{n-1}\\ 0 & s-a_1^2-a_2^2 & -a_2a_3 & \cdots & -a_2a_n\\ 0 & -a_3a_2 & s-a_1^2-a_3^2 & \cdots & -a_3a_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & -a_na_2 & -a_na_3 & \cdots & s-a_1^2-a_n^2\end{pmatrix}$$

第 2 行乘以 $\frac{a_3a_2}{s-a_1^2-a_2^2}$ 加到第 i 行,$i=3,4,\cdots,n$,然后第 i 行乘以 $\frac{s-a_1^2-a_2^2}{s-a_1^2}$,$i=3,4,\cdots,n$,得到

$$\begin{pmatrix}s-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_{n-1} & -a_1a_n\\ 0 & s-a_1^2-a_2^2 & \cdots & -a_2a_{n-1} & -a_2a_n\\ 0 & 0 & \cdots & -a_3a_{n-1} & a_3a_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & \cdots & -a_na_{n-1} & s-a_1^2-a_2^2-a_n^2\end{pmatrix}.$$

如此继续即可得到

$$\begin{pmatrix}s-a_1^2 & -a_1a_2 & \cdots & -a_1a_{n-1} & -a_1a_n\\ 0 & s-a_1^2-a_2^2 & \cdots & -a_2a_{n-1} & -a_2a_n\\ 0 & 0 & \cdots & -a_3a_{n-1} & -a_3a_n\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & \cdots & s-\sum_{i=1}^{n-1}a_i^2 & -a_{n-1}a_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

以上一矩阵为系数矩阵的齐次线性方程组的第 $n-1$ 个方程为 $a_n^2x_{n-1}=a_{n-1}a_nx_n$.由此得到,$\frac{x_{n-1}}{a_{n-1}}=\frac{x_n}{a_n}=t$,即 $x_{n-1}=a_{n-1}t,x_n=a_nt$.第 $n-2$ 个方程为 $(a_{n-1}^2+a_n^2)x_{n-2}-a_{n-2}a_{n-1}x_{n-1}-a_{n-2}a_nx_n=0$.将 $x_{n-1}=a_{n-1}t,x_n=a_nt$ 代入即得 $x_{n-2}=a_{n-2}t$.如此继续.设 $x_2=a_2t,x_3=a_3t,\cdots,x_n=a_nt$.将它们代入第一个方程

$$(a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2)x_1-a_1a_2x_2-\cdots-a_1a_nx_n=0,$$

即得 $x_1=a_1t$.因此相应于特征值 $\sum_{i=1}^{n}a_i^2$ 的特征向量是

$$x=t\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},$$

其中 t 是任意非零的数.

注 在求方阵 A 的属于特征值 0 的特征向量时并未使用矩阵的行的初等变换,而是充分利用方阵 A 可以分解为列向量 α 与行向量 α' 之积这一特点.这就简化了计算.因此在解题时不必拘泥于一种方法.择简便的方法而用之,是十分重要的.

3.2.19 设 3 阶实对称方阵 A 的特征值为 6,3,3,且属于特征值 3 的两个线性无关的特征向量是 $\alpha_1=(-1,0,1)'$,$\alpha_2=(1,-2,1)'$.求方阵 A 的属于特征值 6 的特征向量和方阵 A.

解 设 $\alpha_3'=(x_1,x_2,x_3)'$ 是方阵 A 的属于特征值 6 的特征向量.依题意有

$$\begin{cases}A\alpha_1=3\alpha_1,\\ A\alpha_2=3\alpha_2,\\ A\alpha_3=6\alpha_3.\end{cases}\qquad ⑬$$

于是 $\alpha_3'A\alpha_1 = 3\alpha_3'\alpha_1, \alpha_1'A\alpha_3 = 6\alpha_1'\alpha_3$. 前一等式取转置，则由方阵 A 的对称性得到，$(\alpha_3'A\alpha_1)' = 3(\alpha_3'\alpha_1)', \alpha_1'A'\alpha_3 = \alpha_1'A\alpha_3 = 3\alpha_1'\alpha_3$. 因此 $3\alpha_1'\alpha_3 = 6\alpha_1'\alpha_3$, 从而 $\alpha_1'\alpha_3 = 0$. 同理，$\alpha_2'\alpha_3 = 0$. 由此得到

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases} \quad ⑲$$

解得

$$\begin{cases} x_1 = x_3, \\ x_2 = x_3. \end{cases}$$

即方程组 ⑲ 的通解为

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

取 $\alpha_3 = (1,1,1)'$.

由式 ⑱ 得到

$$A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}. \quad ⑳$$

容易验证，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 两两正交，因此方阵$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$可逆. 下面求其逆方阵. 将 3×6 矩阵

$$[[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] \vdots I_3] = \left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

的第 1 行加到第 3 行，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

第 2 行分别乘以$\frac{1}{2}$, 1, 并分别加到第 1, 3 行，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

第3行分别乘以$-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$, 并分别加到第1, 2行，得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

第 1, 2, 3 行分别乘以 $-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$, 得到

$$\left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

即得

$$[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

由式 ⑳ 得到

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

注　已知 n 阶方阵A 的 n 个特征值$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 求方阵 A, 称为特征值反问题，它是矩阵论研究的一个重要课题.

3.2.20　设 $C^{2\times 2}$ 是所有 2 阶复方阵构成的 4 维复线性空间，且 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \in C^{2\times 2}$. 定义 $C^{2\times 2}$ 上线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：对任意 $X \in C^{2\times 2}$, 令 $\mathscr{A}(X) = AX$. 确定线性变换 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 及其维数 $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}$.

解　依定义，线性变换 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 为

$$\mathrm{Ker}\mathscr{A} = \{X \in C^{2\times 2} : AX = 0\}.$$

即 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 是矩阵方程 $AX = 0$ 的解空间，即其所有解的集合. 将方程 $AX = 0$ 的系数矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$$

的第 1 行乘以 4 加到第 2 行，得到

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

方程 $AX = 0$ 与 $BX = 0$ 同解. 由

$$BX = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = 0$$

得到

$$\begin{cases} x_{11} = x_{21}, \\ x_{12} = x_{22}. \end{cases}$$

因此方程 $AX = 0$ 的通解为

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{21} & x_{22} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix},$$

其中 x_{21}, x_{22} 为任意常数. 即有

$$\mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{21} & 0 \\ 0 & x_{22} \end{bmatrix} : x_{21}, x_{22} \in C \right\},$$

其中 C 是复数域. 由于 $\mathrm{Ker}\,\mathscr{A}$ 依赖两个独立参数 x_{21}, x_{22}, 所以 $\dim \mathrm{Ker}\,\mathscr{A} = 2$.

§3.3 初等变换与矩阵的标准形

矩阵在各种等价关系下的标准形理论是矩阵论和线性空间理论的核心内容. 在建立矩阵的各种标准形理论时, 矩阵的初等变换是重要而基本的工具, 在化矩阵为标准形时, 矩阵的初等变换也是一种常用的基本方法. 本节将利用矩阵的初等变换来求矩阵在相抵下的 Hermite 标准形、多项式矩阵在相抵下的 Smith 标准形、矩阵在相似下的 Jordan 标准形以及矩阵在相合下的标准形.

3.3.1 求下列矩阵 A 的秩 $\mathrm{rank}A$.

(1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \end{pmatrix}$;

(3) $A = [a_{ij}]$, 其中 $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 且当 $1 \leqslant i < j \leqslant n$ 时, $a_{ij} = j$, 而 $a_{ii} = i$, $i = 1, 2, \cdots, n$.

解 (1) 用 $\frac{1}{2}$ 乘于矩阵 A 的第 1 列, 得到

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 的第 1 列分别乘以 $1, -3, 2, -4$, 并分别加到第 2, 3, 4, 5 列, 得到

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 C 的第 1 行分别乘以 $-2, -1$, 并分别加到第 2, 3 行, 第 3 列分别乘以 $5, -1$, 并加到第 4, 5 列, 得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

再对调矩阵 D 的第 2 和 3 列, 并将第 2 行乘以 2 加到第 3 行, 然后用 -1 乘于第 2 列, 得到

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 E 即是矩阵 A 在相抵下的 Hermite 标准形, 其秩 $\mathrm{rank}E = 2$. 由于矩阵的秩在矩阵的初等变换下是不变的, 因此 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}E = 2$.

(2) 矩阵 A 的第 1 列分别乘以 $-3, -5, 1$, 并分别加到第 2, 3, 4 列, 得到

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -13 & 6 \\ 5 & -14 & -26 & 12 \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 的第 2, 3, 4 列分别乘以 $-\frac{1}{7}, -\frac{1}{13}, \frac{1}{6}$, 得到

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

矩阵 C 的第 2 列分别乘以 $-1, -1$, 并分别加到第 3, 4 列, 得到

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 D 的第 1 行分别乘以 $-2, -5$, 并分别加到第 2, 3 行, 再用 -2 乘于第 2 行, 并加到第 3 行, 得到

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 E 即是矩阵 A 在相抵下的 Hermite 标准形, 易知 $\mathrm{rank}E = 2$. 因此 $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}E = 2$.

(3) 根据题设条件可以确定矩阵 A 为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \cdots & n-1 & n \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的第 i 行乘以 -1, 并加到第 $i+1$ 行, $i = n-1, n-2, \cdots, 1$, 得到

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵 B 的第 $j+1$ 列乘以 -1 加到第 j 列, $j = 1, 2, \cdots, n$, 得到

$$C=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\ 0 & \cdots & & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

矩阵 C 的第 n 列乘以 $\frac{1}{n}$ 分别加到第 $1,2,\cdots,n-1$ 列,然后第 n 列乘以 $\frac{1}{n}$,得到

$$D=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

再将矩阵 D 的第 n 列调到第 1 列,得到

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}_{n\times n}.$$

矩阵 E 是矩阵 A 在相抵下的 Hermite 标准形,且 $\mathrm{rank}E=n$.因此 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}E=n$.

注 用矩阵的初等变换求矩阵的秩时,不一定要把矩阵化成 Hermite 标准形,只需化得的矩阵能够容易求出其秩即可.例如在(1)中将矩阵 A 化成矩阵 C,矩阵 C 的秩易知为 2.于是即得 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}C=2$.又如在(2)中矩阵 A 化为矩阵 C,由此即可知 $\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}C=2$.其次,对矩阵 A 进行初等变换,可以用矩阵乘积表示.其根据是,设 $m\times n$ 矩阵 A 的 Hermite 标准形是 $E=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$,其中 I_r 是 r 阶单位矩阵,$r=\mathrm{rank}A$.则存在可逆 m 阶方阵 P 和可逆 n 阶方阵 Q,使得 $PAQ=E$.由于可逆方阵可以表为有限个初等方阵的乘积,而前(或后)乘矩阵 A 一个初等方阵相当于对矩阵 A 进行一次行(或列)的初等变换,因此 $PAQ=E$ 表示对矩阵 A 经过有限次行的初等变换和列的初等变换变为 E.记

$$B=\begin{bmatrix}A & I_m\\ I_n & 0\end{bmatrix},$$

其中 0 是 $n\times m$ 零矩阵.则

$$\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & I_m\\ I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & I_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}PAQ & P\\ Q & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E & P\\ Q & 0\end{bmatrix}.$$

这说明,如果对矩阵 B 的前 m 行进行行的初等变换,并对矩阵 B 的前 n 列进行列的初等变换,使得其中 $m\times n$ 矩阵 A 化为 Hermite 标准形,而其中 m 阶单位方阵 I_m 化为 P,n 阶单位方阵 I_n 化为 Q,则 P 和 Q 即是把矩阵 A 化为 Hermite 标准形时的过渡矩阵.

3.3.2 对下述给定的矩阵 A,求可逆方阵 P 和 Q,使得 PAQ 为 Hermite 标准形.

(1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -4\\ 2 & -4 & 3 & 2 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2\\ -1 & -1 & -3 & 0 & 4 & 2\end{pmatrix}$;

(2) $A=$

$$\begin{pmatrix}n+1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & n+2 & 3 & \cdots & n-1 & n\\ 1 & 2 & n+3 & \cdots & n-1 & n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 2n-1 & n\end{pmatrix}_{(n-1)\times n}$$

解 (1) 记

$$B=\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -4 & 3 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & -1 & -3 & 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right),$$

其中未写出的元素全为 0.矩阵 B 的第 1 行分别乘以 $-2,1$,并分别加到第 2,4 行,得到

$$C=\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1 & -2 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -3 & 1 & 5 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1\\ \hline & & I_6 & & & & & 0 & & \end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 3 行分别乘以 2,3,并分别加到第 1 行和第 4 行,得到

$$D=\left(\begin{array}{cccccc|cccc}1 & 0 & -2 & 3 & 3 & -8 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -6 & 4 & 8 & -8 & 1 & 0 & 3 & 1\\ \hline & & I_6 & & & & & 0 & & \end{array}\right).$$

矩阵 D 的第 2 行乘以 2,并加到第 4 行,得到

$$E = \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 0 & 2 & 3 & 3 & -8 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 12 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline & & & I_6 & & & & & 0 & \end{array}\right),$$

矩阵 E 的第 1 列分别乘以 2, −3, −3, 8, 并分别加到第 3, 4, 5, 6 列, 又将第 2 列分别乘以 1, −1, −1, 2, 然后分别加到第 3, 4, 5, 6 列, 得到

$$F = \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 2 & 10 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 & 12 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 & -3 & -3 & 8 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 2 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 F 的第 4 列分别乘以 −1, −3, 并分别加到第 5, 6 列, 得到

$$G = \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & 10 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 & 3 & 0 & 17 & & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 5 & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 G 的第 3 列分别乘以 $\frac{2}{3}$, $-\frac{10}{3}$, 并分别加到第 5, 6 列, 得到

$$H = \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -3 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 2 & -3 & \frac{4}{3} & \frac{31}{3} & & & & \\ 0 & 1 & 1 & -1 & \frac{2}{3} & -\frac{25}{3} & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 H 的第 3, 4 列分别乘以 $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, 并将第 2, 3 列对调, 得到

$$J = \left(\begin{array}{cccccc:cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 5 & 2 & 3 & 1 \\ \hdashline 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{4}{3} & -\frac{31}{3} & & & & \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{25}{3} & & & & \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & -3 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 J 中西北角 4×6 子矩阵为矩阵 A 的 Hermite 标准形. 所求 4 阶和 6 阶可逆方阵 P 和 Q 分别为

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{4}{3} & -\frac{31}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{25}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 矩阵$\begin{bmatrix} A & I_{n-1} \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$的第 i 行减去第$i-1$行，$i=n-1,n-2,\cdots,2$，得到

$$B=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc} n+1 & 2 & \cdots & n-1 & n & 1 & 0 & \cdots 0 & & 0 \\ -n & n & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots 0 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ & & I_r & & & & & & & \end{array}\right).$$

矩阵B的第j列加到第$j+1$列，$j=1,2,\cdots,n-2$，得到的矩阵记为C. 矩阵C的第j列减去第n列，$j=1,2,\cdots,n-1$，得到

$$D=\left(\begin{array}{cccccc:ccccc} \binom{2}{2} & \binom{3}{2} & \binom{4}{2} & \cdots & \binom{n}{2} & n & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & -n & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & & & & & \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & 1 & & & & & \end{array}\right),$$

其中$\binom{m}{k}$是m 个不同物品取k 个的组合数. 矩阵 D 的第n 列乘以 $-\frac{\binom{j+1}{2}}{n}$，并加到第 j 列，得到

$$E=\left(\begin{array}{ccccc:cccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & n & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -n & 0 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & -n & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & \cdots & 1 & 0 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & & & & \\ -1-\frac{\binom{2}{2}}{n} & -1-\frac{\binom{3}{2}}{n} & \cdots & -1-\frac{\binom{n}{2}}{n} & 1 & & & & \end{array}\right).$$

矩阵E的第1行乘以$\frac{1}{n}$，第$2,\cdots,n-1$行乘以$-\frac{1}{n}$，并把第 n 列调到第1列，得到

$$F=\left(\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 0 & \cdots 0 & 0 & \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots 0 & 0 & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots 1 & 0 & 0 & \cdots \frac{1}{n} & & -\frac{1}{n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots 1 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & & & & \\ 1 & -1-\frac{\binom{2}{2}}{n} & \cdots\cdots & 1\ \frac{\binom{n}{2}}{n} & & & & \end{array}\right).$$

于是所求的可逆方阵 P 和Q 分别为

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & -1-\frac{\binom{2}{2}}{n} & \cdots & -1-\frac{\binom{n}{2}}{n} \end{pmatrix}.$$

注 对给定的矩阵 A，使得 PAQ 为 Hermite 标准形的过渡矩阵偶(P,Q)并不唯一.

3.3.3 设

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},$$

其中λ是实变量. 记$f(\lambda)=\operatorname{rank}A(\lambda)$，求$f(\lambda)$的最小值$\min f(\lambda)$.

解 矩阵$A(\lambda)$的第1行分别乘以$-4,-7,-2$，并分别加到第2,3,4行，得到

$$B(\lambda)=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda-12 & 0 & 6 & -15 \\ -20 & 0 & 10 & -25 \\ -4 & 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

矩阵$B(\lambda)$的第4行分别乘以$-3,-5$，并分别加到第2,3行，得到

$$C(\lambda)=\begin{pmatrix}3&1&1&4\\ \lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ -4&0&2&5\end{pmatrix}.$$

矩阵 $C(\lambda)$ 的第 2 列分别乘以 $-3,-1,-4$,并分别加到第 1,3,4 列,然后将第 3 列分别乘以 $2,\frac{5}{2}$,并分别加到第 1 列和第 4 列,得到

$$D(\lambda)=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\ \lambda&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ 0&0&2&0\end{pmatrix}.$$

易知当 $\lambda\neq 0$ 时 $\operatorname{rank}D(\lambda)=3$;当 $\lambda=0$ 时 $\operatorname{rank}D(\lambda)=2$. 因此 $\min f(\lambda)=2$.

3.3.4 证明:$m\times n$ 矩阵 A 的秩 $\operatorname{rank}A=1$ 的充要条件是,存在 m 维和 n 维非零列向量 α 和 β,使得 $A=\alpha\beta'$,其中 β' 是 β 的转置.

证 必要性. 由于 $\operatorname{rank}A=1$,所以 A 是非零矩阵. 因此 $A=(a_{ij})$ 中必有非零元素. 设 $a_{ij}\neq 0$. 如果 $i=1,j=1$,即 $a_{11}\neq 0$,则用 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 乘于矩阵 A 的第 1 行,并加到第 i 行,$i=2,3,\cdots,n$,则矩阵 A 化为

$$B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ 0&a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}&\cdots&a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ 0&a_{m2}-\frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}&\cdots&a_{mn}-\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}\end{pmatrix}.$$

由于 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}A=1$,所以矩阵

$$C=\begin{pmatrix}a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}&\cdots a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\\ \cdots&\cdots\\ a_{m2}-\frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}&\cdots a_{mn}-\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}\end{pmatrix}$$

的秩为 0,从而 C 是零矩阵. 因此 $a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}=0$,即 $a_{ij}=\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}$,$2\leqslant i\leqslant m,2\leqslant j\leqslant n$. 于是

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\ a_{21}&\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}&\cdots&\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{m1}&\frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}}&\cdots&\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{pmatrix}\left[1,\frac{a_{12}}{a_{11}},\cdots,\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right].$$

记 $\alpha=(a_{11},a_{21},\cdots,a_{m1})'$,$\beta=\left(1,\frac{a_{12}}{a_{11}},\cdots,\frac{a_{1n}}{a_{11}}\right)'$,则 $A=\alpha\beta'$;如果 $i\neq 1,j\neq 1$,则对调矩阵 A 的第 1 行和第 i 行以及第 1 列和第 j 列,得到的矩阵记作 B. 易知 $B=P_{1i}AQ_{1j}$,其中 P_{1i} 和 Q_{1j} 分别是对调 m 阶单位方阵 I_m 的第 1 行和第 i 行以及对调 n 阶单位方阵 I_n 的第 1 列和第 j 列得到的矩阵,而且矩阵 $B=(b_{ij})$ 中元素 $b_{11}=a_{ij}\neq 0$. 由前面的证明,存在 m 维和 n 维非零列向量 α 和 β,使得 $B=P_{1i}AQ_{1j}=\alpha\beta'$. 于是 $A=(P_{1i}^{-1}\alpha)(Q_{1j}^{-1}\beta)'=(P_{1i}\alpha)(Q_{1j}\beta)'$(注意 $P_{1i}^2=I_m$,$Q_{1j}^2=I_n$). 由于 α 和 β 是非零的,而 $P_{1i}\alpha$ 和 $Q_{1j}\beta$ 分别是对调 α 的第 1 行与第 i 行和对调 β 的第 1 行与第 j 行得到的列向量,因此 $P_{1i}\alpha$ 和 $Q_{1j}\beta$ 是非零的. 这就证明了必要性.

充分性. 设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_m)$,$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$,且 $a_i\neq 0,b_j\neq 0$,而 $A=\alpha\beta'$. 即

$$A=\begin{pmatrix}a_1b_1&a_1b_2&\cdots&a_1b_n\\ a_2b_1&a_2b_2&\cdots&a_2b_n\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ a_mb_1&a_mb_2&\cdots&a_mb_n\end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的第 i 行乘以 $-\frac{a_k}{a_i}$,并加到第 k 行,$k=1,2,\cdots,i-1,i+1,\cdots,m$,得到

$$B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\\ a_ib_1&\cdots&a_ib_j&\cdots&a_ib_n\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&0&\cdots&0\end{pmatrix}.$$

由于 $a_ib_j\neq 0$,因此 $\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}B=1$. 这就证明了充分性.

3.3.5 如果 $m\times n$ 矩阵 A 的秩 $\operatorname{rank}A=m$(或 n),则矩阵 A 称为行(或列)满秩的. 证明:对于 $\operatorname{rank}A=r$ 的 $m\times n$ 矩阵 A,存在 $m\times r$ 列满秩矩阵 R 和 $r\times n$ 行满秩矩阵 T,使得 $A=RT$.

证 因为 $\operatorname{rank}A=r$,因此存在 m 阶和 n 阶可逆矩阵 P 和 Q,使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}_{m\times r}[I_r,0]_{r\times n}Q.$$

记 $R=P\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}_{m\times r}$,$T=[I_r,0]_{r\times n}Q$,则 $m\times r$ 矩阵 R 是秩为 r 的 $m\times r$ 矩阵 $\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}$ 经行的初等变换得到

的. 因此 $\operatorname{rank}R=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}I_r\\0\end{bmatrix}=r$. 同理 $\operatorname{rank}T=\operatorname{rank}[I_r,0]=r$. 即 R 和 T 分别是 $m\times r$ 列满秩与 $r\times n$ 行满秩矩阵,且 $A=RT$.

注 将 $m\times n$ 矩阵A 表成列满秩矩阵R 与行满秩矩阵 T 的乘积,称为矩阵 A 的满秩分解. 因此结论 3.3.5 称为矩阵的满秩分解定理. 在论证矩阵的一些命题中,满秩分解定理是很有用的.

3.3.6 求矩阵 A 的满秩分解,其中

$$A=\begin{pmatrix}6&0&3&1\\4&-2&6&0\\2&2&-3&1\end{pmatrix}.$$

解 矩阵$\begin{pmatrix}A&I_3\\I_4&0\end{pmatrix}$的第 3 行减去第 1 行,得到

$$B=\left(\begin{array}{cccc:ccc}6&0&3&1&1&0&0\\4&-2&6&0&0&1&0\\-4&2&-6&0&-1&0&1\\\hdashline &&I_4&&&&0\end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 2 行加到第 3 行,得到

$$C=\left(\begin{array}{cccc:ccc}6&0&3&1&1&0&0\\4&-2&6&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1&1&1\\\hdashline &&I_4&&&&0\end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 4 列分别乘以 $-6,-3$,并分别加到第 1,3 列,然后将第 2 列分别乘以 2,3,并分别加到第 1,3 列,得到

$$D=\left(\begin{array}{cccc:ccc}0&0&0&1&1&0&0\\0&-2&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&-1&1&1\\\hdashline 1&0&0&0&&&\\2&1&3&0&&&\\0&0&1&0&&&\\-6&0&-3&1&&&\end{array}\right).$$

矩阵 D 的第 1 列和第 4 列对调,然后用 $-\frac{1}{2}$ 乘以第 2 行,得到

$$E=\left(\begin{array}{cccc:ccc}1&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}&0\\0&0&0&0&-1&1&1\\\hdashline 0&0&0&1&&&\\0&1&3&-2&&&\\0&0&1&0&&&\\1&0&-3&-6&&&\end{array}\right).$$

则

$$PAQ=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{1}{2}&0\\-1&1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&3&2\\0&0&1&0\\1&0&-3&-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned}A&=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}Q^{-1}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&3&1\\-2&1&-3&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\\&=\left(\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-2&0\\1&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}1000\\0100\end{bmatrix}\right.\\&\quad\times\left.\begin{pmatrix}6&0&3&1\\-2&1&-3&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix}\right)\\&=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\\1&2\end{pmatrix}\begin{bmatrix}6&0&3&1\\-2&1&-3&0\end{bmatrix},\end{aligned}$$

其中

$$R=\begin{pmatrix}1&0\\0&-2\\1&2\end{pmatrix},T=\begin{bmatrix}6&0&3&1\\-2&1&-3&0\end{bmatrix}$$

分别是列满秩和行满秩的.

注 从解 3.3.6 可以看出,求秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 A 的满秩分解的一般步骤是:(1) 对矩阵$\begin{bmatrix}A&I_m\\I_n&0\end{bmatrix}$的前 m 行与前 n 列分别作行和列的初等变换,将矩阵$\begin{bmatrix}A&I_m\\I_n&0\end{bmatrix}$化为$\begin{bmatrix}E&P\\Q&0\end{bmatrix}$,其中 $E=$

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$是矩阵 A 在相抵下的Hermite标准形;(2)由 $PAQ=E$ 得到 $A=(P^{-1}\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix})([I_r,0]Q^{-1})$,此即是 A 的满秩分解.在证明满秩分解定理3.3.5时用的就是这种方法.其次.在矩阵 A 的满秩分解式 $A=RT$ 中,矩阵偶 (R,T) 并不唯一.可以证明,如果 $A=RT=R_1T_1$ 是矩阵 A 的两个不同的满秩分解,则存在 r 阶可逆方阵 P, $r=\text{rank}A$,使得 $R=R_1P$, $T=P^{-1}T_1$.最后应指出的是,3.3.4只是3.3.5的一个特例.因此以后再证明3.3.4时可以直接引用满秩分解定理3.3.5.

3.3.7 如果 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 中每个元素 a_{ij} 都是整数,则 A 称为整数矩阵.如果 n 阶方阵 A 的行列式等于 ±1,则 A 称为幺模矩阵.证明:对于给定 $m\times n$ 矩阵 A,存在 m 阶和 n 阶幺模整数矩阵 P 和 Q,使得

$$PAQ=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & d_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad ①$$

其中 $d_1,d_2,\cdots,d_r$ 是正整数,$r=\text{rank}A$,且 $d_i\mid d_{i+1}$, $i=1,2,\cdots,r-1$.

证 首先注意,对调 n 阶单位方阵 I_n 的第 i 行和第 j 行得到的方阵 P_{ij} 是一个幺模整数矩阵;对于整数 a, n 阶初等方阵 $Q_{ij}(a)=I_n+aE_{ij}$ 也是幺模整数矩阵,其中 E_{ij} 是 (i,j) 位置上元素为1其他元素为0的 n 阶方阵,$1\leqslant i\neq j\leqslant n$.另外,两个幺模整数方阵的乘积是幺模整数方阵;幺模整数方阵的逆方阵仍是幺模整数方阵.因此只须证明,可以通过某行(或列)乘以某个整数 a 并加到另一行(或列)以及对调两行(或列)的初等变换把 $m\times n$ 整数矩阵 A 化为形式①即可.现证如下.

易知对 $m\times n$ 零矩阵 A,结论成立.因此设 $A=(a_{ij})$ 非零,则存在某个元素 $a_{ij}\neq0$.对调 A 的第1行和第 i 行,以及第1列和第 j 列,则 a_{ij} 调到 $(1,1)$ 位置上.所以不妨设 $a_{11}\neq0$,甚至 $a_{11}>0$.

首先证明,矩阵 A 可经有限次对调两行(或列)以及某行(或列)乘以某个整数加到另一行(或列)的初等变换化为矩阵 $B=(b_{ij})$,其中 $b_{11}>0$,且 b_{11} 整除其他所有元素 b_{ij}.为此对矩阵 A 中正整数 a_{11} 用归纳法.当 $a_{11}=1$ 时结论显然成立.现在设结论对 $a_{11}<k$ 成立.下面证明结论对 $a_{11}=k$ 成立.如果 a_{11} 整除其他所有元素,则结论已成立.因此不妨设存在某个 a_{ij},使得 a_{11} 不整除 a_{ij}.

情形1: $i=1$,即 a_{11} 不整除 a_{1j}.由Euclid除法,$a_{1j}=a_{11}q+r$,其中 q, r 为整数,且 $r<a_{11}=k$.矩阵 A 的第1列乘以 $-q$ 加到第 j 列,再对调第1列和第 j 列,则矩阵 A 化为矩阵 $C=(c_{ij})$,其中 $c_{11}=r<k$.由归纳假设,矩阵 C 可化为矩阵 $B=(b_{ij})$,其中 $b_{11}>0$,且 $b_{11}\mid b_{ij}$, $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$.因此结论成立.

情形2: $j=1$,即 a_{11} 不整除 a_{i1}.此时将情形1的证明中把列改成行,即可证明结论成立.

情表3: $i\neq1$, $j\neq1$,此时 a_{11} 整除矩阵 A 中第1行和第1列上所有元素,但不整除某个不在第1行和第1列上的元素 a_{ij}.由Euclid除法,可设 $a_{1j}=a_{11}q_j$, $a_{i1}=a_{11}p_i$,其中 q_j, p_i 是整数,$2\leqslant j\leqslant n$, $2\leqslant i\leqslant m$.矩阵 A 的第1行乘以 $-p_i$ 并加到第 i 行,$i=2,\cdots,m$,第1列乘以 $-q_j$ 加到第 j 列,得到矩阵 $C=(c_{ij})$,其中第1行和第1列上除 $c_{11}=a_{11}$ 外其他元素全是0.如果矩阵 C 中 c_{ij} 都能被 c_{11} 整除,则结论成立.设 c_{ij} 不被 c_{11} 整除,则将矩阵 C 中第 i 行加到第1行,得到的矩阵即适合情形1.因此结论成立.

现在设矩阵 A 已经通过有限次对调两行(列)以及某行(列)乘以某个整数加到另一行(列)化为矩阵 $C=(c_{ij})$,其中 c_{11} 整除其他所有元素 c_{ij}, $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant n$.设 $c_{i1}=c_{11}q_i$, $c_{1j}=c_{11}p_j$, $2\leqslant i\leqslant m$, $2\leqslant j\leqslant n$.矩阵 C 的第1行乘以 $-q_i$,并加到第 i 行,$i=2,\cdots,m$,第1列乘以 $-p_j$,并加到第 j 列,$j=2,\cdots,n$,则矩阵 C 化为

$$\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \widetilde{c_{22}} & \widetilde{c_{23}} & \cdots & \widetilde{c_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \widetilde{c_{m2}} & \widetilde{c_{m3}} & \cdots & \widetilde{c_{mn}} \end{pmatrix},$$

其中 $\widetilde{c_{ij}}=c_{ij}-c_{1j}q_i$, $2\leqslant i\leqslant m$, $2\leqslant j\leqslant m$.由于 $c_{11}\mid c_{ij}$,因此 $c_{11}\mid\widetilde{c_{ij}}$, $2\leqslant i\leqslant m$, $2\leqslant j\leqslant n$.对矩阵

$$\widetilde{C}=\begin{pmatrix} \widetilde{c_{22}} & \cdots & \widetilde{c_{2n}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \widetilde{c_{m2}} & \cdots & \widetilde{c_{mn}} \end{pmatrix}$$

重复上述证明,则矩阵 $\widetilde{C}$ 可化为

$$C'=\begin{pmatrix} c_{22}' & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_{33}' & \cdots & c_{3n}' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & c_{m3}' & \cdots & c_{mn}' \end{pmatrix},$$

其中 $c_{11}\mid c_{22}'$, $c_{22}'\mid c_{ij}'$, $3\leqslant i\leqslant m$, $3\leqslant j\leqslant n$.如此继续.于是矩阵 A 可经有限次行(列)的对调和某行

(列) 乘以某个整数并加到另一行(列) 的初等变换化为形式 ① 的矩阵.

注 矩阵① 中的正整数 $d_1, d_2, \cdots, d_r$ 称为矩阵 A 的不变因数. 可以证明, 对于正整数 $k, 1 \leqslant k \leqslant r$, $d_1 d_2 \cdots d_k$ 是矩阵 A 中所有 k 阶非零子式的最大公因数 D_k. 另外, 矩阵 ① 称为整数环 $\mathbf{Z}$ 上 $m \times n$ 矩阵 A 在相抵下的标准形.

3.3.8 对调 n 阶单位方阵 I_n 的第 i 行和第 j 行得到的方阵 P_{ij} 称为第 1 类初等方阵, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$; n 阶方阵 $a_{ij}(a) = I_n + aE_{ij}$ 称为第 2 类初等方阵, 或平延, 其中 $a \neq 0, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n$; n 阶单位方阵 I_n 的第 i 行乘以非零的数 b 得到的方阵 $P_i(b)$ 称为第 3 类初等方阵, $1 \leqslant i \leqslant n$. 对于 $m \times n$ 矩阵 A, AP_{ij}(或 $P_{ij}A$, 此时 P_{ij} 是 m 阶第 1 类初等方阵) 是对调矩阵 A 的第 i, j 列(行) 得到的方阵; $AQ_{ij}(a)$(或 $Q_{ij}(a)A$, 此时 $Q_{ij}(a)$ 是 m 阶平延) 是矩阵 A 的第 i 列(第 j 行) 乘以数 a 加到第 j 列(第 i 行) 得到的矩阵; $AP_i(b)$(或 $P_i(b)a$, 此时 $P_i(b)$ 是 m 阶第 3 类初等方阵) 是矩阵 A 的第 i 列(或第 i 行) 乘以数 b 得到的矩阵. 数域 F 上所有 n 阶可逆方阵的集合记作 $GL_n(F)$; 数域 F 上所有行列式为 1 的 n 阶方阵的集合记作 $SL_n(F)$. 证明:

(1) $GL_n(F)$ 在矩阵乘法下成为一个群, 此群称为数域 F 上 n 级一般线性群;

(2) $SL_n(F)$ 在矩阵乘法下成为一个群, 此群称为数域 F 上 n 级特殊线性群;

(3) 群 $SL_n(F)$ 是由 n 阶平延生成的;

(4) 群 $GL_n(F)$ 是由平延和第 3 类初等方阵生成的.

证 (1) 设 $A, B \in GL_n(F)$, 即 A, B 是数域 F 上 n 阶可逆方阵, 则 $\det A \neq 0, \det B \neq 0$. 因此, $\det AB = \det A \det B \neq 0$, 即 AB 是可逆的, 从而 $AB \in GL_n(F)$. 因此 $GL_n(F)$ 对矩阵乘法是封闭的. 其次, 由于矩阵的乘法满足结合律, 所以对 $GL_n(F)$, 矩阵乘法的结合律也成立. 又若 $A \in GL_n(F)$, 则 A 可逆, 其逆方阵 A^{-1} 满足 $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$, 所以 A^{-1} 是可逆的, 即 $A^{-1} \in GL_n(F)$. 由群的定义, $GL_n(F)$ 在矩阵乘法下成为一个群.

(2) 同理可以验证, $SL_n(F)$ 是一个矩阵乘法群.

(3) 只须证明, 数域 F 上任意一个行列式为 1 的 n 阶方阵 A 均可表为有限个平延的乘积, 也即行列式为 1 的方阵 A 均可经有限次某行(或列) 的第 2 类初等变换化为单位方阵. 我们知道, 一个可逆方阵可以经对调两行(或列) 的第 1 类初等变换, 第 2 类初等变换以及某行(或列) 乘以某个非零的数 b 的第 3 类初等变换化为单位方阵. 由于第 1 类初等变换使方阵的行列式值变号, 第 3 类初等变换要改变行列式的值, 而第 2 类初等变换不改变方阵的行列式的值, 因此为了保持方阵经初等变换后其行列式值不变, 我们可以用某行(或列) 乘以 -1 后再与另一行(或列) 对调的变换替代第 1 类初等变换, 用某行(或列) 乘以非零的数 a 以及另一行(或列) 乘以 a^{-1} 的变换替代第 3 类初等变换. 注意, 将矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的第 2 行乘以 -1 并加到第 1 行, 得到矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. 而矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的第 1 行加到第 2 行, 得到矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. 这说明, 某行(或列) 乘以 -1 后再与另一行(或列) 对调的变换可以通过有限次第 2 类初等变换来实现. 又当 $a \neq 0, 1$ 时, 矩阵 $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ 的第 2 行乘以 a 加到第 1 行, 得到矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$. 矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ 的第 1 行乘以 $1 - a^{-1}$ 加到第 2 行, 得到矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}$. 矩阵 $\begin{bmatrix} a & 1 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}$ 的第 1 行减去第 2 行, 得到矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-1 & 1 \end{bmatrix}$. 后者的第 1 行乘以 $1-a$ 加到第 2 行, 得到矩阵 I_2. 这说明, 矩阵的第 i 行(或列) 乘以 a 且第 j 行(或列) 乘以 a^{-1} 的变换也可以通过有限次第 2 类初等变换来实现. 这就证明, 行列式为 1 的 n 阶方阵 A 可以经过有限次第 2 类初等变换化为单位方阵, 即群 $SLn(F)$ 是由 n 阶平延生成的.

(4) 只须证明, n 阶可逆方阵可经有限次第 2 类、第 3 类初等变换化为单位方阵. 由(3) 的证明, 矩阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 因此第 1 类初等变换可通过有限次第 2 类、第 3 类初等变换来实现.

注 结论 3.3.8(3) 与(4) 是典型群理论中的重要定理(见华罗庚、万哲先著《典型群》(上海科学技术出版社, 1963 年版)). 其证明的主要工具是矩阵的初等变换. 足见初等变换用处之广.

3.3.9 对下述 3 阶 λ 多项式矩阵 $A(\lambda)$, 求 3 阶可逆 λ 多项式矩阵 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$, 使得 $P(\lambda)A(\lambda)Q(\lambda)$ 为矩阵 $A(\lambda)$ 在相抵下的 Smith 标准形, 并求 $A(\lambda)$ 的不变因子、行列式因子和初等因子组.

$$(1)\ A(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix};$$

$$(2)\ A(\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda & \lambda^2 & \lambda\\ \lambda & \lambda & -\lambda\\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2\end{pmatrix};$$

$$(3)\ A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2\end{pmatrix}.$$

解 (1) 矩阵$\begin{bmatrix}A(\lambda) & I_3\\ I_3 & 0\end{bmatrix}$的第1行乘以$\lambda-2$,加到第2行,然后用$\lambda-2$乘于第2行,并加到第3行,矩阵$\begin{bmatrix}A(\lambda) & I_3\\ I_3 & 0\end{bmatrix}$化为

$$B(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda-2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ (\lambda-2)^2 & 0 & -1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ (\lambda-2)^3 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & \lambda-2 & 1\\ \hline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right)$$

矩阵$B(\lambda)$的第2列和第3列分别乘以$\lambda-2$和$(\lambda-2)^2$,并加到第1列,得到

$$C(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & \lambda-2 & 1 & 0\\ (\lambda-2)^3 & 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & \lambda-2 & 1\\ \hline 1 & 0 & 0 & & & \\ \lambda-2 & 1 & 0 & & 0 & \\ (\lambda-2)^2 & 0 & 1 & & & \end{array}\right)$$

矩阵$C(\lambda)$的第2,3列分别乘以-1,并分别调到第1,2列,得到

$$D(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & \lambda-2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3 & (\lambda-2)^2 & \lambda-2 & 1\\ \hline 0 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & \lambda-2 & & 0 & \\ 0 & -1 & (\lambda-2)^2 & & & \end{array}\right).$$

其中$E(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & (\lambda-2)^3\end{pmatrix}$是$A(\lambda)$在相抵下的Smith标准形,所求可逆$\lambda$矩阵$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$分别为

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ \lambda-2 & 1 & 0\\ (\lambda-2)^2 & \lambda-2 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & \lambda-2\\ 0 & -1 & (\lambda-2)^2\end{pmatrix}.$$

而$A(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=1,d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3$,行列式因子为$D_3(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)d_3(\lambda)=(\lambda-2)^3,D_2(\lambda)=d_1(\lambda)d_2(\lambda)=1,D_1(\lambda)=d_1(\lambda)=1$,初等因子组为$\{(\lambda-2)^3\}$.

(2) 矩阵$\begin{bmatrix}A(\lambda) & I_3\\ I_3 & 0\end{bmatrix}$的第3列加到第1列,得到

$$B(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & \lambda^2 & \lambda & \\ 0 & \lambda & -\lambda & I_3\\ 1 & \lambda^2 & -\lambda^2 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & \end{array}\right).$$

矩阵$B(\lambda)$的第1列分别乘以$-\lambda^2,-\lambda$,并分别加到第2,3列,得到

$$C(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & \\ 0 & \lambda & -\lambda & I_3\\ 1 & 0 & -\lambda^2-\lambda & \\ \hline 1 & -\lambda^2 & \lambda & \\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -\lambda^2 & 1-\lambda & \end{array}\right).$$

矩阵$C(\lambda)$的第3行减去第1行,第2列加到第3列,然后将第3列乘以-1,得到

$$D(\lambda)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & -1 & 0 & 1\\ \hline 1 & -\lambda^2 & \lambda(\lambda+1) & & & \\ 0 & 1 & -1 & & 0 & \\ 1 & -\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1 & & & \end{array}\right).$$

其中矩阵$E(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$是$A(\lambda)$在相抵下的Smith标准形.所求可逆$\lambda$矩阵$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$分别是

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix}1 & -\lambda^2 & \lambda(\lambda+1)\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda^2 & \lambda^2+\lambda-1\end{pmatrix}.$$

$A(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda)=1,d_2(\lambda)=\lambda,d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$,行列式因子为$D_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1),D_2(\lambda)$

$=\lambda, D_1(\lambda)=1$,初等因子组为$\{\lambda,\lambda,\lambda+1\}$.

(3) 矩阵$\begin{bmatrix}A(\lambda) & I_3\\ I_3 & 0\end{bmatrix}$的第2行加到第3行,得到

$$B(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda & (\lambda+1)^2 & 0 & 1 & 1\\ \hdashline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right].$$

矩阵$B(\lambda)$的第2列乘以$-(\lambda+2)$加到第3列,得到

$$C(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\lambda(\lambda+1) & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -\lambda(\lambda+2) & 0 & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 1 & 1\\ \hdashline 1 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -(\lambda+2) & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right].$$

矩阵$C(\lambda)$的第3列乘以$-\lambda$加到第2列,然后对调第1,3列,得到

$$D(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}0 & 0 & \lambda(\lambda+1) & 1 & 0 & 0\\ -\lambda(\lambda+2) & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ \hdashline 0 & 0 & 1 & & & \\ -(\lambda+2) & (\lambda+1)^2 & 0 & & 0 & \\ 1 & -\lambda & 0 & & & \end{array}\right].$$

矩阵$D(\lambda)$的第3行乘以$\lambda(\lambda+2)$加到第2行,并将第1,2,3行分别调到第2,3,1行,再对调第2,3列,得到

$$E(\lambda)=\left[\begin{array}{ccc:ccc}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 & 0 & (1+\lambda)^2 & \lambda(\lambda+2)\\ \hdashline 0 & 1 & 0 & & & \\ -(\lambda+2) & 0 & (\lambda+1)^2 & & 0 & \\ 1 & 0 & \lambda & & & \end{array}\right].$$

其中$G(\lambda)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0\\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2\end{bmatrix}$是$A(\lambda)$在相抵下的Smith标准形,所求可逆$\lambda$矩阵$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$分别是

$$P(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & (\lambda+1)^2 & \lambda(\lambda+2)\end{bmatrix},$$

$$Q(\lambda)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ -(\lambda+2) & 0 & (\lambda+1)^2\\ 1 & 0 & -\lambda\end{bmatrix}.$$

$A(\lambda)$的不变因子为$d_1(\lambda)=1, d_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$, $d_3(\lambda)=\lambda(\lambda+1)^2$,行列式因子为$D_3(\lambda)=\lambda^2(\lambda+1)^3, D_2(\lambda)=\lambda(\lambda+1), D_1(\lambda)=1$,初等因子组为$\{\lambda,\lambda+1,(\lambda+1)^2\}$.

注 用初等变换化λ矩阵$A(\lambda)$为Smith标准形的方法与用初等变换化数域F上矩阵A为Hermite标准形基本相同,只是应注意,在化λ矩阵$A(\lambda)$为Smith标准形时,在乘λ矩阵$A(\lambda)$的某行(或列)的变换时只限于乘某个非零的数,而不能乘以某个λ的多项式.另外,对角λ矩阵$A(\lambda)=\mathrm{diag}(a_1(\lambda),a_2(\lambda),\cdots,a_n(\lambda))$并不一定是Smith标准形,只有当$\lambda$多项式$a_1(\lambda),a_2(\lambda),\cdots,a_n(\lambda)$是首一多项式,而且其中前一个整除后一个时才是Smith标准形.

3.3.10 设A和B是数域F上n阶方阵,$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$是数域F上可逆λ矩阵,且设$P(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)=\lambda I_n-B$, $P(\lambda)=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)+P_0$, $Q(\lambda)=Q_1(\lambda)(\lambda I_n-B)+Q_0$,其中$P_1(\lambda)$和$Q_1(\lambda)$是数域$F$上$n$阶$\lambda$矩阵,而$P_0$和$Q_0$是数域$F$上$n$阶方阵.证明:$Q_0=P_0^{-1}$,且$P_0AP_0^{-1}=B$.

证 由于$P(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)=\lambda I_n-B$,且$P(\lambda)=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)+P_0$,所以

$$\begin{aligned}&(\lambda I_n-B)-P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=P(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)-P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=[(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)+P_0](\lambda I_n-A)Q(\lambda)\\ &\quad -P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)\\ &\quad +P_0(\lambda I_n-A)Q(\lambda)-P_0(\lambda I_n-A)Q_0.\end{aligned}$$

而$Q(\lambda)=Q_1(\lambda)(\lambda I_n-B)+Q_0$,所以

$$\begin{aligned}&(\lambda I_n-B)-P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)\\ &\quad +P_0(\lambda I_n-A)[Q_1(\lambda)(\lambda I_n-B)+Q_0]\\ &\quad -P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)\\ &\quad +P_0(\lambda I_n-A)Q_1(\lambda)(\lambda I_n-B).\end{aligned}$$

由于$P(\lambda)$和$Q(\lambda)$可逆,因此由$P(\lambda)(\lambda I_n-A)Q(\lambda)=(\lambda I_n-B)$得到,$(\lambda I_n-A)Q(\lambda)=P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n-B)$, $P(\lambda)(\lambda I_n-A)=(\lambda I_n-B)Q(\lambda)^{-1}$.另外$P_0=P(\lambda)-(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)$,所以

$$\begin{aligned}&(\lambda I_n-B)-P_0(\lambda I_n-A)Q_0\\ &=(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n-B)\\ &\quad +[P(\lambda)-(\lambda I_n-B)P_1(\lambda)]\\ &\quad \times(\lambda I_n-A)Q_1(\lambda)(\lambda I_n-B)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (\lambda I_n - B)P_1(\lambda)P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - B) \\
&\quad + P(\lambda)(\lambda I_n - A)Q_1(\lambda)(\lambda I_n - B) \\
&\quad - (\lambda I_n - B)P_1(\lambda)(\lambda I_n - A)Q_1(\lambda)(\lambda I_n - B) \\
&= (\lambda I_n - B)P_1(\lambda)P(\lambda)^{-1}(\lambda I_n - B) \\
&\quad + (\lambda I_n - B)Q(\lambda)^{-1}Q_1(\lambda)(\lambda I_n - B) \\
&\quad - (\lambda I_n - B)P_1(\lambda)(\lambda I_n - A)Q_1(\lambda)(\lambda I_n - B) \\
&= (\lambda I_n - B)[P_1(\lambda)P(\lambda)^{-1} + Q(\lambda)^{-1}Q_1(\lambda) \\
&\qquad - P_1(\lambda)(\lambda I_n - A)Q_1(\lambda)](\lambda I_n - B).
\end{aligned}
$$

上式左端是关于 λ 的一个一次矩阵多项式. 如果上式右端的方括号中的关于 λ 的矩阵多项式不为零,则上式右端是一个关于 λ 的非零矩阵多项式,其次数至少是2. 和上式左端的矩阵多项式的次数为1相矛盾. 因此上式右端为0. 从而有

$$\lambda I_n - B = P_0(\lambda I_n - A)Q_0.$$

比较上式两端关于 λ 的同次项系数,得到

$$P_0Q_0 = I_n, \qquad B = P_0AQ_0.$$

这就证明了3.3.10.

注 3.3.10给出了求 n 阶过渡矩阵 P,使得给定的 n 阶方阵 A 化为Jordan标准形 PAP^{-1} 的一般方法. 具体用法见下例.

3.3.11 对下述方阵 A,求过渡矩阵 P,使得 PAP^{-1} 是Jordan标准形.

(1) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$;

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$;

(3) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

解 (1) 方阵 A 的特征方阵 $\lambda I_3 - A$ 为

$$\lambda I_3 - A = \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -2 & -10 \\ 4 & \lambda - 3 & -7 \\ 3 & -1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}.$$

$\lambda I_3 - A$ 的行列式为 $\det(\lambda I_3 - A) = (\lambda - 2)^3$,此即是方阵 A 的3阶行列式因子 $D_3(\lambda)$. 由于

$$\begin{vmatrix} 2 & -10 \\ \lambda - 3 & -7 \end{vmatrix} = 2(5\lambda - 8),$$

$$\begin{vmatrix} 4 & \lambda - 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(3\lambda - 5),$$

它们的最大公因子为1,因此方阵 A 的2阶行列式因子的 $D_2(\lambda) = 1$. 由于方阵 A 的1阶行列式因子 $D_1(\lambda)$ 整除 $D_2(\lambda)$,所以 $D_1(\lambda) = 1$. 于是方阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \dfrac{D_2(\lambda)}{D_1(\lambda)} = 1, d_3(\lambda) = \dfrac{D_3(\lambda)}{D_2(\lambda)} = (\lambda - 2)^3$. 从而方阵 A 的初等因子组为 $\{(\lambda - 2)^3\}$. 所以方阵 A 的Jordan标准形为 $J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. 现在求过渡矩阵 P,使得 $PAP^{-1} = J$.

首先将特征方阵 $A(\lambda) = \lambda I_n - A$ 化为Smith标准形. 矩阵 $\begin{bmatrix} A(\lambda) & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ 的第3行分别乘以 $\lambda - 3$, -2,并分别加到第2,1行,得到

$$B(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda - 2 & 0 & -2(\lambda - 2) & 1 & 0 & -2 \\ 3\lambda - 5 & 0 & \lambda^2 - 10\lambda + 14 & 0 & 1 & \lambda - 3 \\ 3 & -1 & \lambda - 7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right).$$

矩阵 $B(\lambda)$ 的第1行乘以 -3 并加到第2行,得到

$$C(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \lambda - 2 & 0 & -2(\lambda - 2) & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 2 & -3 & 1 & \lambda + 3 \\ 3 & -1 & \lambda - 7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right).$$

矩阵 $C(\lambda)$ 的第2行分别乘以 $-(\lambda - 2)$ 和 -3,并分别加到第1,3行,得到

$$D(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -(\lambda - 2)^3 & 3\lambda - 5 & 2 - \lambda & \lambda^2 - \lambda + 4 \\ 1 & 0 & \lambda^2 - 4\lambda + 2 & -3 & 1 & \lambda + 3 \\ 0 & -1 & -3\lambda^2 + 13\lambda - 13 & 9 & 3 & -3\lambda - 8 \\ \hline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right)$$

矩阵 $D(\lambda)$ 的第3列减去第1列的 $\lambda^2 - 4\lambda + 2$ 倍,并加上第2列的 $-3\lambda^2 + 13\lambda - 13$ 倍,得到矩阵 $E(\lambda)$.

矩阵 $E(\lambda)$ 的第1行乘以 -1,第3行乘以 -1,然后将第1,2,3行分别调到第3,1,2行,得到

$$G(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & \lambda + 3 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 3 & 3\lambda + 8 \\ 0 & 0 & (\lambda - 2)^3 & -3\lambda + 5 & \lambda - 2 & \lambda^2 + \lambda - 4 \\ \hline 1 & 0 & -\lambda^2 + 4\lambda - 2 & & & \\ 0 & 1 & -3\lambda^2 + 13\lambda - 13 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

于是

$$\begin{pmatrix}3&1&\lambda+3\\-9&3&3\lambda+8\\-3\lambda+5&\lambda-2&\lambda^2+\lambda-4\end{pmatrix}(\lambda I_3-A)$$

$$\times\begin{pmatrix}1&0&-\lambda^2+4\lambda-2\\0&1&-3\lambda^2+13\lambda-13\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)^3\end{pmatrix}.$$

其次将特征方阵 λI_3-J 化为Smith标准形. 同上可得

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda-2&1&0\\(\lambda-1)^2&\lambda-2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\0&\lambda-2&-1\\0&0&\lambda-2\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&\lambda-2\\0&-1&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&(\lambda-2)^3\end{pmatrix}.$$

即有

$$\lambda I_3-J=\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda-2&1&0\\(\lambda-2)^2&\lambda-2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix}-3&1&\lambda+3\\-9&3&3\lambda+8\\-3\lambda+5&\lambda-2&\lambda^2+\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$\times(\lambda I_3-A)$$

$$\times\begin{pmatrix}1&0&-\lambda^2+4\lambda-2\\0&1&-3\lambda^2+13\lambda-13\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&\lambda-2\\0&-1&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}^{-1}$$

记

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0\\\lambda-2&1&0\\(\lambda-2)^2&\lambda-2&1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$\times\begin{pmatrix}-3&1&\lambda+3\\-9&3&3\lambda+8\\-3\lambda+5&\lambda-2&\lambda^2+\lambda-4\end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda^2+4\lambda-2\\0&1&-3\lambda^2+13\lambda-13\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}0&0&1\\-1&0&\lambda-2\\0&-1&(\lambda-2)^2\end{pmatrix}^{-1}.$$

则

$$P(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0\\-(\lambda-2)&1&0\\0&-(\lambda-2)&1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}-3&1&\lambda+3\\-9&3&3\lambda+8\\-3\lambda+5&\lambda-2&\lambda^2+\lambda-4\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3&1&\lambda+3\\3\lambda-15&-\lambda+5&-\lambda^2+2\lambda+14\\6\lambda-13&-2(\lambda-2)&-2\lambda^2-\lambda+12\end{pmatrix}$$

$$-\lambda^2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}0&0&1\\3&-1&2\\6&-2&-1\end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix}-3&1&3\\-15&5&14\\-13&4&12\end{pmatrix}.$$

记

$$R_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&-2\end{pmatrix},R_1=\begin{pmatrix}0&0&1\\3&-1&2\\6&-2&-1\end{pmatrix},$$

$$R_0=\begin{pmatrix}-3&1&3\\-15&5&14\\-13&4&12\end{pmatrix}.$$ 则

$$\begin{aligned}P(\lambda)&=\lambda^2R_2+\lambda R_1+R_0\\&=(\lambda^2I_3-\lambda J)R_2+\lambda(JR_2+R_1)+R_0\\&=(\lambda I_3-J)\lambda R_2+(\lambda I_3-J)(JR_2+R_1)\\&\quad+J^2R_2+JR_1+R_0\\&=(\lambda I_3-J)(\lambda R_2+JR_2+R_1)\\&\quad+J^2R_2+JR_1+R_0.\end{aligned}$$

因此 $P_0=J^2R_2+JR_1+R_0$, 即用 J 代入 $P(\lambda)=\lambda^2R_2+\lambda R_1+R_0$ 中的 λ 得到的. 同理, 由于

$$Q(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&-\lambda^2+4\lambda-2\\0&1&-3\lambda^2+13\lambda-13\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}\lambda-2&-1&0\\(\lambda-2)^2&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-\lambda^2+5\lambda-4&-1&0\\-2\lambda^2+9\lambda-9&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\lambda^2+\begin{pmatrix}5&0&0\\9&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\lambda$$

$$+\begin{pmatrix}-4&1&0\\-9&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$=T_2\lambda^2+T_1\lambda+T_0,$$

其中

$$T_2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\-2&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},T_1=\begin{pmatrix}5&0&0\\9&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},T_0=$$

$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 0 \\ -9 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,因此

$$
\begin{aligned}
Q(\lambda) &= T_2(\lambda^2 I_3 - \lambda J) + (T_1 + T_2 J)\lambda + T_0 \\
&= (T_2\lambda)(\lambda I_3 - J) + (T_1 + T_2 J)(\lambda I_3 - J) \\
&\quad + T_2 J^2 + T_1 J + T_0.
\end{aligned}
$$

所以 $Q_0 = T_2 J^2 + T_1 J + T_0$,即在 $Q(\lambda) = T_2\lambda^2 + T_1\lambda + T_0$ 中用 J 替换 λ 得到的.于是

$$
P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},
$$

$$
Q_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = P_0^{-1}.
$$

由 3.3.10,$P_0 A P_0^{-1} = J$.因此 P_0 即是所求的过渡矩阵.

(2) 矩阵 $A(\lambda) = \left(\begin{array}{c:c} \lambda I_3 - A & I_3 \\ \hdashline I_3 & 0 \end{array}\right)$ 的第 1 行分别乘以 -2 和 $\lambda - 5$,并分别加到第 2,3 行,得到

$$
B(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \lambda-3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ \lambda^2-8\lambda+12 & 2(\lambda-2) & 0 & \lambda-5 & 0 & 1 \\ \hdashline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right)
$$

矩阵 $B(\lambda)$ 的第 2 行乘以 -2,并加到第 3 行,得到

$$
C(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \lambda-3 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2(\lambda-2) & \lambda-2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (\lambda-2)^2 & 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 1 \\ \hdashline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right)
$$

矩阵 $C(\lambda)$ 的第 3 列分别乘以 2 和 $\lambda-3$,并分别加到第 2,1 列,再将第 2 列乘以 2 加到第 1 列,得到

$$
D(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ (\lambda-2)^2 & 0 & 0 & \lambda-1 & -2 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & & & \\ 2 & 1 & 0 & & 0 & \\ \lambda+1 & 2 & 1 & & & \end{array}\right).
$$

矩阵 $D(\lambda)$ 的第 3 列乘以 -1,并对调第 1,3 列,得到

$$
E(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 & \lambda-1 & -2 & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 1 & 2 & & 0 & \\ -1 & 2 & \lambda+1 & & & \end{array}\right).
$$

于是

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda-3 & 2 & -1 \\ -2 & \lambda+2 & -2 \\ -3 & 6 & \lambda-5 \end{pmatrix}
\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}
$$

是特征方阵 $\lambda I_3 - A$ 在相抵下的 Smith 标准形,方阵 A 的不变因子为 $d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda-2, d_3(\lambda) = (\lambda-2)^2$,初等因子组为 $\{\lambda-2, (\lambda-2)^2\}$.因此方阵 A 的 Jordan 标准形为

$$
J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.
$$

将特征方阵 $\lambda I_3 - J$ 化为 Smith 标准形.容易算得

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}
\times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda-2)^2 \end{pmatrix}.
$$

于是得到

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}(\lambda I_3 - A)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix}(\lambda I_3 - J)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}.
$$

即

$$
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}(\lambda I_3 - A)
\times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}^{-1}
= (\lambda I_3 - J).
$$

则

$$
P(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -(\lambda-2) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \lambda-2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

由于 $P(\lambda)$ 和 $Q(\lambda)$ 本身即是数域上方阵,因此所求的过渡矩阵 P 为

$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 记

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

则 $B^{-1} = C$,且

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

由于方阵 A 是块对角方阵,因此可以分别把方阵 B 和 C 化为 Jordan 标准形. 矩阵 $B(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda I_3 - B & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ 的第1行乘以 λ 加到第2行,然后第2行乘以 λ 并加到第3行,得到

$$C(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} \lambda & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 0 & -1 & \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^3-1 & 0 & 0 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \hdashline & I_3 & & & 0 & \end{array}\right)$$

矩阵 $C(\lambda)$ 的第2,3列分别乘以 λ,λ^2,并加到第1列、再将第2,3列变号,并将第1列调到第3列,得到

$$D(\lambda) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 & \lambda^2 & \lambda & 1 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & \lambda & & 0 & \\ 0 & -1 & \lambda^2 & & & \end{array}\right).$$

因此

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda^2 & \lambda & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \lambda \\ 0 & -1 & \lambda^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^3-1 \end{pmatrix}.$$

于是 $\lambda I_3 - B$ 的不变因子为 $d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = 1$, $d_3(\lambda) = \lambda^3 - 1 = (\lambda-1)(\lambda-\omega)(\lambda-\omega^2)$,其中 ω 是3次单位原根,即 $\omega \neq 1, \omega^3 = 1$. 所以方阵 B 的 Jordan 标准形为

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

现在求3阶可逆方阵 $P_0 = (p_{ij})$,使得 $P_0BP_0^{-1} = J$. 此时方阵 P_0 满足 $P_0B = JP_0$. 由此得到

$$\begin{pmatrix} p_{13} & p_{11} & p_{12} \\ p_{23} & p_{21} & p_{22} \\ p_{33} & p_{31} & p_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ \omega p_{21} & \omega p_{22} & \omega p_{23} \\ \omega^2 p_{31} & \omega^2 p_{32} & \omega^2 p_{33} \end{pmatrix}.$$

比较上式两端方阵同一位置上的元素,得到,

$$p_{11} = p_{12} = p_{13},$$
$$p_{23} = \omega p_{21}, p_{22} = \omega p_{23} = \omega^2 p_{21},$$
$$p_{22} = \omega^2 p_{31}, p_{32} = \omega^2 p_{33} = \omega^4 p_{31} = \omega p_{31}.$$

取 $p_{11} = p_{21} = p_{31} = 1$,则

$$P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}.$$

$\det P_0$ 是一个 Vandermonde 行列式,其值为 $\det P_0 = (\omega-1)(\omega^2-1)(\omega-\omega^2) \neq 0$.因此 P 可逆,且是由方阵 B 化为 Jordan 标准形 J 的一个过渡矩阵.

由于 $P_0BP_0^{-1} = J$,故两边取逆得到

$$P_0B^{-1}P_0^{-1} = P_0CP_0^{-1} = J^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & J^{-1} \end{bmatrix}.$$

注意上式右端的方阵是方阵 A 的 Jordan 标准形. 因此

$$P = \begin{bmatrix} P_0 & 0 \\ 0 & P_0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2 & \omega & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega & \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2 & \omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega & \omega^2 \end{pmatrix}$$

是将方阵 A 化为 Jordan 标准形的一个过渡方阵.

注 对于给定方阵 A,在求将方阵 A 化为 Jordan 标准形 J 的过渡方阵 P 时,通常可用3.3.10给出的方法.但这种方法有时候很繁.这时就应考虑采用其他方法.3.3.11(3) 的解采用的方法是,先求出方阵 A 的 Jordan 标准形 J,再解矩阵方程 $PA = JP$,从而求出过渡方阵 P.这也是行之有效的方法.当然还可以用其他方法,见下例.

3.3.12 对下述给定的方阵 A 和 B,求过渡矩阵 P,使得 $PAP^{-1} = B$.

(1) $A = \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix}$;

(2) $A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}$;

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$

和

$$B = \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

是 n 阶方阵.

解 首先注意,方阵 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 的逆方阵是 $\begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,其中 a 是非零的数;方阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的逆方阵是 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$ 的逆方阵是 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$.给定2阶方阵 A,从方阵 A 变为 $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,相当于方阵 A 的第2行乘以 a,并加到第1行,然后将第1列乘以 $-a$,再加到第2列;而方阵 A 变为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,相当于方阵 A 对调第1,2行,再对调第1,2列;方阵 A 变为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$,相当于方阵 A 的第2行乘以 a,第2列再乘以 a^{-1}.一般地说,对于给定的 n 阶方阵 A,把方阵 A 变为 PAP^{-1},如果方阵 P 表示的是第 i 行乘以 a 加到第 j 行的初等变换,则 PAP^{-1} 表示矩阵 A 的第 i 行乘以 a 加到第 j 行,再将第 j 列乘以 $-a$ 加到第 i 列得到的方阵;如果 P 表示的是对调第 i,j 行的初等变换,则 PAP^{-1} 表示矩阵 A 对调第 i,j 行和对调第 i,j 列而得到的方阵;如果 P 表示的是第 i 行乘以非零的数 a 的初等变换,则 PAP^{-1} 是矩阵 A 的第 i 行乘以 a 和第 i 列乘以 a^{-1} 而得到的方阵.因此相似变换 $A \to PAP^{-1}$ 可以通过上述三种同时对行与列的初等变换来实现.

(1) 矩阵 $\begin{bmatrix} A & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ 的第2列乘以2加到第1列,并将第1行乘以 -2 加到第2行,得到

$$C = \left[\begin{array}{cc:cc} 5 & -6 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & -2 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 2 & 1 & & \end{array}\right].$$

矩阵 C 的第2行乘以3,加到第1行,并将第1列乘以 -3,加到第2列,得到

$$D = \left[\begin{array}{cc:cc} 14 & -60 & -5 & 3 \\ 3 & -13 & -2 & 1 \\ \hdashline 1 & -3 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 2 & -5 & & \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c:c} B & P \\ \hdashline P^{-1} & 0 \end{array}\right].$$

则

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}.$$

所求过渡矩阵 P 为 $\begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) 矩阵 $\begin{bmatrix} B & I_2 \\ I_2 & 0 \end{bmatrix}$ 的第2行乘以 -2,加到第1行,再将第1列乘以2,加到第2列,得到

$$C = \left[\begin{array}{cc:cc} 6 & -1 & 1 & -2 \\ 16 & -2 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 0 & 1 & & \end{array}\right]$$

矩阵 C 的第1列加上第2列,第2行减去第1行,得到

$$D = \left[\begin{array}{cc:cc} 5 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & -1 & -1 & 3 \\ \hdashline 3 & 2 & \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{0}} \\ 1 & 1 & & \end{array}\right].$$

即

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 & -81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\9 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38 & -81\\16 & -34\end{bmatrix}.$$

所求过渡方阵 $P=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}$.

(3) 矩阵$\begin{bmatrix}A & I_n\\I_n & 0\end{bmatrix}$的第 2,3,…,$n$ 行都加到第 1 行,第 2,3,…,n 列各减去第 1 列,得到

$$C=\left(\begin{array}{cccc|cccc}n & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\\hline 1 & -1 & \cdots & -1 & & & &\\0 & 1 & \cdots & 0 & & & &\\ & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & &\\0 & 0 & \cdots & 1 & & & &\end{array}\right)$$

矩阵 C 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{n}$,加到第 i 行,$i=2,3,\cdots,n$,第 i 列乘以$\frac{1}{n}$,加到第 1 列,$i=2,\cdots,n$,得到

$$D=\left(\begin{array}{cccc|cccc}n & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1\\0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\\multicolumn{8}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}\\0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}\\\hline \frac{1}{n} & -1 & \cdots & -1 & & & &\\\frac{1}{n} & 1 & \cdots & 0 & & & &\\ & \cdots & \cdots & \cdots & & 0 & &\\\frac{1}{n} & 0 & \cdots & 1 & & & &\end{array}\right).$$

因此

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\-\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}\frac{1}{n} & -1 & \cdots & -1\\\frac{1}{n} & 1 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\\frac{1}{n} & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}$$

$=B$.

所求过渡方阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\-\frac{1}{n} & \frac{n-1}{n} & \cdots & -\frac{1}{n}\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\-\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \cdots & \frac{n-1}{n}\end{pmatrix}.$$

3.3.13 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\-1 & -1 & 0\\2 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

求 3 阶实的可逆方阵 P,使得 PAP^t 是对称方阵 A 在相合下的标准形,其中 P^t 是方阵 P 的转置.

解 首先注意,对于给定的 2 阶方阵 B,

$$\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1 & 0\\a & 1\end{bmatrix}$$

表示方阵 B 的第 2 行乘以数 a 加到第 1 行,同时第 2 列乘以数 a 加到第 1 列;

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & a\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & a\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & a\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & a\end{bmatrix}$$

表示矩阵 B 的第 2 行乘以数 a,同时第 2 列乘以数 a;而

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}^t=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}B\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$$

表示矩阵 B 对调第 1,2 行,同时对调第 1,2 列.一般地说,对给定的 n 阶方阵 B,作方阵 B 的相合变换:$B\to PBP^t$,当 P 表示第 i 行乘以数 a 加到第 j 行的初等变换时,则 PBP^t 表示方阵 B 的第 i 行乘以数 a 加到第 j 行,同时第 i 列乘以数 a 加到第 j 列;当 P 表示第 i 行乘以数 a 的初等变换时,则 PBP^t 表示方阵 B 的第 i 行和第 i 列同时乘以数 a 的变换;而当 P 表示对调第 i,j 行的初等变换时,则 PBP^t 表示方阵 B 同时对调第 i,j 行和第 i,j 列的变换.这三种类型的变换称为对方阵 B 的同步变换.为了记录下由方阵 B 变为 PBP^t 的同步变换相应的过渡方阵 P,可以采用如下方法:将方阵$\begin{bmatrix}B & I_n\\I_n & 0\end{bmatrix}$的前 n 行与前 n 列经同步变换变为$\begin{bmatrix}C & P\\P^t & 0\end{bmatrix}$,则 $PCP^t=B$.现在解 3.3.13.

矩阵$\begin{bmatrix}A & I_3\\I_3 & 0\end{bmatrix}$的第 1 行分别乘以 1、-2,并分别加到第 2,3 行,同时第 1 列分别乘以 1、-2,并分别加到第 2,3 列,得到

$$B=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-2&2&1&1&0\\0&2&-2&-2&0&1\\ \hdashline 1&1&-2&&&\\0&1&0&&0&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 2 行加到第 3 行，同时第 2 列加到第 3 列，得到

$$C=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-2&0&1&1&0\\0&0&0&-1&1&1\\ \hdashline 1&1&-1&&&\\0&1&1&&0&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 2 行与第 2 列同时乘以 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，得到

$$D=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&-1&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\0&0&0&-1&1&1\\ \hdashline 1&\frac{\sqrt{2}}{2}&-1&&&\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&1&&0&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

于是

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-1&1&1\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}1&\frac{\sqrt{2}}{2}&-1\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

是对称方阵 A 在相合下的标准形. 所求过渡方阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0\\-1&1&1\end{pmatrix}.$$

3.3.14 对下述给定的实对称方阵 S，求过渡方阵 P，使得 PSP' 是对称方阵 S 在相合下的标准形.

(1) $S=\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2&\cdots&2&2\\1&2&3&\cdots&3&3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&2&3&\cdots n-1&n&1\\1&2&3&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}$；

(2) $S=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}_{n\times n}$；

(3) $S=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&0&\cdots&1\\1&\cdots&0&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\0&\cdots&1&0&\cdots&0\end{pmatrix}_{2n\times 2n}$；

(4) $S=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\\frac{1}{2}&1&\ddots&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\frac{1}{2}\\0&\cdots&0&\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}_{n\times n}$

解 (1) 矩阵 $\begin{bmatrix}S&I_n\\I_n&0\end{bmatrix}$ 的第 i 行减去第 $i-1$ 行，同时第 i 列减去第 $i-1$ 列，$i=n,n-1,\cdots,2$，得到矩阵

$$A=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&&&&1&&&\\&1&&&-1&1&&\\&&\ddots&&&\ddots&\ddots&\\&&&1&&&-1&1\\ \hdashline 1&-1&&&&&&\\&1&\ddots&&&&&\\&&\ddots&-1&&&&\\&&&1&&&&\end{array}\right),$$

其中未写出的元素为 0. 因此

$$\begin{pmatrix}1&0&\cdots&&0\\-1&1&\ddots&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&&0\\\vdots&\ddots&\ddots&&\vdots\\0&\cdots&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&\cdots&1&1\\1&2&2&\cdots&2&2\\1&2&3&\cdots&3&3\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&2&3&\cdots&n-1&n-1\\1&2&3&\cdots&n-1&n\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & \ddots & 1 & -1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}=I_n.$$

所以方阵 S 在相合下的标准形为 I_n，所求过渡方阵为

$$P=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & & 0\\ -1 & 1 & \ddots & & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

(2) 当 $n=2k$ 时，记 $S=\begin{pmatrix}0 & J_k\\ J_k & 0\end{pmatrix}$，其中

$$J_k=\begin{pmatrix} & & & 1\\ & & ⋰ & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$$

是 k 阶方阵，而未写出的元素均为 0. 记

$$A=\begin{bmatrix}S & I_n\\ I_n & 0\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{cc:cc}0 & J_k & I_k & 0\\ J_k & 0 & 0 & I_k\\ \hdashline I_k & 0 & & \\ 0 & I_k & & \mathbf{0}\end{array}\right).$$

矩阵 A 的第 $n+1-i$ 行加到第 i 行，同时将第 $n+1-i$ 列加到第 i 列，$i=1,2,\cdots,k$（相当于分块矩阵 A 的第 2 行乘以 J_k 加到第 1 行，同时第 2 列乘以 J_k 加到第 1 列），得到

$$B=\left(\begin{array}{cc:cc}2I_k & J_k & I_k & J_k\\ J_k & 0 & 0 & I_k\\ \hdashline I_k & 0 & & \\ J_k & I_k & & \mathbf{0}\end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 i 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 $n+1-i$ 行，同时第 i 列乘以 · $\frac{1}{2}$ 加到第 $n+1-i$ 列，$i=1,2,\cdots,k$，即分块矩阵 B 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}J_k$ 加到第 2 行，同时第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}J_k$ 加到第 2 列，得到

$$C=\left(\begin{array}{cc:cc}2I_k & 0 & I_k & J_k\\ 0 & -\frac{1}{2}I_k & -\frac{1}{2}J_k & \frac{1}{2}I_k\\ \hdashline I_k & -\frac{1}{2}J_k & & \\ J_k & \frac{1}{2}I_k & & \mathbf{0}\end{array}\right)$$

矩阵 C 的第 i 行和第 i 列同时乘以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，$i=1,2,\cdots,k$，第 j 行和第 j 列同时乘以 $\sqrt{2}$，$i=k+1,k+2,\cdots,n$，得到

$$D=\left(\begin{array}{cc:cc}I_k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k & \frac{\sqrt{2}}{2}J_k\\ 0 & -I_k & -\frac{\sqrt{2}}{2}J_k & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k\\ \hdashline \frac{\sqrt{2}}{2}I_k & -\frac{\sqrt{2}}{2}J_k & & \\ \frac{\sqrt{2}}{2}J_k & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k & & \mathbf{0}\end{array}\right).$$

即

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}I_k & \frac{\sqrt{2}}{2}J_k\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}J_k & -\frac{\sqrt{2}}{2}I_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & J_k\\ J_k & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}I_k & -\frac{\sqrt{2}}{2}J_k\\ \frac{\sqrt{2}}{2}J_k & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_k & 0\\ 0 & -I_k\end{bmatrix}$$

是 $2k$ 阶对称方阵 S 在相合下的标准形. 所求 $2k$ 阶过渡方阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots\\ 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0\\ 0 & \cdots & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0\\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

当 $n=2k+1$ 时，$S=\begin{pmatrix}0 & 0 & J_k\\ 0 & 1 & 0\\ J_k & 0 & 0\end{pmatrix}$. 同理可得

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}I_k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}J_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}J_k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k \end{pmatrix} S \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}I_k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}J_k \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2}J_k & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}I_k \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_{k+1} & 0 \\ 0 & -I_k \end{pmatrix}$$

是方阵 S 在相合下的标准形，所求 $2k+1$ 阶过渡方阵

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(3) 方阵 $\begin{bmatrix} S & I_{2n} \\ I_{2n} & 0 \end{bmatrix}$ 的第 $n+i$ 行加到第 i 行，同时把第 $n+i$ 列加到第 i 列，$i=1,2,\cdots,n$，得到

$$A = \left(\begin{array}{cc:cc} 2I_n & I_n & I_n & I_n \\ I_n & 0 & 0 & I_n \\ \hdashline I_n & 0 & & \\ I_n & I_n & & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

矩阵 A 的第 i 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 $n+i$ 行，同时把第 i 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 $n+i$ 列，$i=1,2,\cdots,n$，得到

$$B = \left(\begin{array}{cc:cc} 2I_n & 0 & I_n & I_n \\ 0 & -\frac{1}{2}I_n & -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \\ \hdashline I_n & -\frac{1}{2}I_n & & \\ I_n & \frac{1}{2}I_n & & \mathbf{0} \end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 i 行和列同乘以 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，第 $n+i$ 行和列同乘以 $\sqrt{2}$，$i=1,2,\cdots,n$，于是得到

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}I_n & \frac{\sqrt{2}}{2}I_n \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}I_n & \frac{\sqrt{2}}{2}I_n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}I_n & -\frac{\sqrt{2}}{2}I_n \\ \frac{\sqrt{2}}{2}I_n & \frac{\sqrt{2}}{2}I_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_n \end{bmatrix}.$$

所求 $2n$ 阶过渡矩阵 P 为

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

(4) 先考虑 $n=3$ 的情形. 此时把 6 阶方阵 $A = \begin{bmatrix} S & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 行，同时把第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 列，得到

$$B = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & 0 & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 2 行乘以 $-\frac{2}{3}$ 加到第 3 行，同时第 2 列乘以 $-\frac{2}{3}$ 加到第 3 列，得到

$$C = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & & \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & & \mathbf{0} & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 2 行、第 2 列同时乘以 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$，第 3 行、第 3 列同时乘以 $\frac{\sqrt{6}}{2}$，得到

$$D=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&0&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2}{3}\sqrt{3}&0\\0&0&1&\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{2}\\ \hdashline 1&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}&&&\\0&\frac{2\sqrt{3}}{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&&0&\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{2}&&&\end{array}\right)$$

则

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2}{3}\sqrt{3}&0\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}S\begin{pmatrix}1&-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{6}\\0&\frac{2}{3}\sqrt{3}&-\frac{\sqrt{6}}{3}\\0&0&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}=I_3.$$

因此当 $n=3$ 时所求过渡矩阵 P 为

$$P=\begin{pmatrix}1&0&0\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2}{3}\sqrt{3}&0\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{2}\end{pmatrix}.$$

对一般的 n，从上面的矩阵 C 可以看出，应有，矩阵 $A=\begin{bmatrix}S&I_n\\I_n&0\end{bmatrix}$ 可以经同步变换变为

$$C=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&0\end{bmatrix},$$

其中 $C_{11}=\mathrm{diag}(1,\frac{3}{4},\cdots,\frac{n+1}{2n})$，

$$C_{12}=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&0&\cdots&0\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(-1)^{n-1}\frac{1}{n}&(-1)^{n-2}\frac{2}{n}&\cdots&-\frac{n-1}{n}&1\end{pmatrix}$$

$$C_{21}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\\0&1&-\frac{2}{3}&\cdots&(-1)^{n-2}\frac{2}{n}\\\vdots&0&1&\cdots&(-1)^{n-3}\frac{3}{n}\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&-\frac{(n-1)}{n}\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

上式容易用归纳法加以证明．再把矩阵 C 的第 i 行、第 i 列同乘以 $\sqrt{\frac{2i}{i+1}}$，$i=2,3,\cdots,n$，即得所求 n 阶过渡矩阵 P 为

$$\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-\frac{\sqrt{3}}{3}&\frac{2}{3}\sqrt{3}&0&\cdots&0\\\frac{\sqrt{6}}{6}&-\frac{\sqrt{6}}{3}&\frac{\sqrt{6}}{2}&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\(-1)^{n-1}a&(-1)^{n-2}2a&(-1)^{n-3}3a&\cdots&na\end{pmatrix}.$$

其中 $a=\sqrt{\frac{2}{n(n+1)}}$．

3.3.15　对下述二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，求坐标变换

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)P,$$

使得 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变为标准形．

(1) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+2x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_3$；

(2) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_ix_{i+1}$；

(3) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$；

(4) $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|i-j|x_ix_j$．

解　(1) 记

$$S=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&2&0\\-1&0&0\end{pmatrix},$$

则

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)S\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}.$$

把二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的系数矩阵 S 化为相合下的标准形．为此把矩阵 $A=\begin{bmatrix}S&I_3\\I_3&0\end{bmatrix}$ 的第1行加到第3行，同时把第1列加到第3列，并把第1行乘以 -1 加到第2行，同时把第1列乘以 -1 加到第2列，得到

$$B=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&0&0\\0&1&1&-1&1&0\\0&1&-1&1&0&1\\ \hdashline 1&-1&1&&&\\0&1&0&&0&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

矩阵 B 的第3行减去第2行，同时第3列减去第2列，得到

$$
C=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0\\
0 & 0 & -2 & 2 & -1 & 1\\
\hdashline
1 & -1 & 2 & & & \\
0 & 1 & -1 & & \boldsymbol{0} & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right).
$$

矩阵 C 的第 3 行、第 3 列同时乘以$\frac{\sqrt{2}}{2}$,得到

$$
D=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\
\hdashline
1 & -1 & \sqrt{2} & & & \\
0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & & \boldsymbol{0} & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right).
$$

于是得到

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0\\
\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix}
S
\begin{pmatrix}
1 & -1 & \sqrt{2}\\
0 & 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\
0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix}
=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & -1
\end{pmatrix}.
$$

记

$$
(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0\\
\sqrt{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}
\end{pmatrix}. \qquad ②
$$

则

$$
f(x_1,x_2,x_3)=(y_1,y_2,y_3)\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}
=y_1^2+y_2^2-y_3^2.
$$

所求坐标变换即为 ②.

(2) 易知

$$
f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)
\times\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\
\frac{1}{2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\\
0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},
$$

其中

$$
S=\begin{pmatrix}
0 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\
\frac{1}{2} & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\
0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0\\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2}\\
0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0
\end{pmatrix}_{n\times n}
$$

是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的系数矩阵. 把系数矩阵 S 化为相合下的标准形:分 n 为奇数和偶数情形. 当 $n=3$ 时,矩阵 $A=\begin{bmatrix}S & I_3\\ I_3 & 0\end{bmatrix}$的第 2 行加到第 1 行,同时把第 2 列加到第 1 列,得到

$$
B=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0\\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1\\
\hdashline
1 & 0 & 0 & & & \\
1 & 1 & 0 & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right).
$$

矩阵 B 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 分别加到第 2,3 行,同时第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 分别加到第 2,3 列,得到

$$
C=\left(\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\\
0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\
1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & & & \\
0 & 0 & 1 & & &
\end{array}\right).
$$

矩阵 C 的第 2 行加到第 3 行,同时第 2 列加到第 3 列,得到

$$D=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&-\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&0&-1&0&1\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&-1&&&\\1&\frac{1}{2}&0&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

矩阵 D 的第 2 行和第 2 列各乘以 2，得到

$$E=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&0&1&1&0\\0&-1&0&-1&1&0\\0&0&0&-1&0&1\\ \hdashline 1&-1&-1&&&\\1&1&0&&&\\0&0&1&&&\end{array}\right).$$

于是得到

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

当 $n=4$ 时，矩阵 $A=\begin{bmatrix}S&I_4\\I_4&0\end{bmatrix}$ 的第2行加到第1行，同时第 2 列加到第 1 列，得到

$$B=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&1&1&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0&1&0&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0&0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&1\\ \hdashline 1&0&0&0&&&&\\1&1&0&0&&&&\\0&0&1&0&&&&\\0&0&0&1&&&&\end{array}\right)$$

矩阵 B 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$，分别加到第 2,3 行，同时第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$，分别加到第 2,3 列，得到

$$C=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{4}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{4}&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&1\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&&&&\\1&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0&&&&\\0&0&1&0&&&&\\0&0&0&1&&&&\end{array}\right).$$

矩阵 C 的第2行加到第3行，同时第2列加到第3列，得到

$$D=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&0&\frac{1}{2}&-1&0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&1\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&-1&0&&&&\\1&\frac{1}{2}&0&0&&&&\\0&0&1&0&&&&\\0&0&0&1&&&&\end{array}\right).$$

矩阵 D 的第4行加到第3行，同时第 4 列加到第 3 列，得到

$$E=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&0&1&1\\0&0&\frac{1}{2}&0&0&0&0&1\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&-1&0&&&&\\1&\frac{1}{2}&0&0&&&&\\0&0&1&0&&&&\\0&0&1&1&&&&\end{array}\right).$$

矩阵 E 的第 3行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第4行，同时第 3 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 4 列，得到

$$G=\left(\begin{array}{cccc:cccc}1&0&0&0&1&1&0&0\\0&-\frac{1}{4}&0&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0\\0&0&1&0&-1&0&1&1\\0&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ \hdashline 1&-\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}&&&&\\1&\frac{1}{2}&0&0&&&&\\0&0&1&-\frac{1}{2}&&&&\\0&0&1&\frac{1}{2}&&&&\end{array}\right)$$

矩阵 G 的第 2,4 行各乘以 2,同时第 2,4 列各乘以 2,即可得到

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0\\-1&1&0&0\\-1&0&1&1\\1&0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0&0\\\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix}1&-1&-1&1\\1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

记 $R=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}-1&0\\1&0\end{pmatrix}$,同理可得,当 $n=2k+1$ 时,有

$$\begin{pmatrix}R&0&0&\cdots&0&0\\T&R&0&\cdots&0&0\\0&T&R&\cdots&0&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&T&R&0\\0&\cdots&\cdots&0&[-1,0]&1\end{pmatrix}$$

$$\times S\begin{pmatrix}R'&T'&0&0&\cdots&0&0\\0&R'&T'&\ddots&&\vdots&\vdots\\0&0&R'&\ddots&&0&\vdots\\\vdots&\vdots&&\ddots&\ddots&T'&0\\0&0&\cdots&\cdots&0&R'&R'\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}\\0&0&\cdots&\cdots&0&0&1\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}&0&\cdots&0&0\\0&\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}&\ddots&\vdots&\vdots\\\vdots&&\ddots&0&\vdots\\\vdots&&&\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}&0\\0&\cdots&\cdots&0&0\end{pmatrix}$$

其中对角上的块 R 出现 k 次.因此取

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1})=(y_1,y_2,\cdots,y_{2k+1})$$

$$\times\begin{pmatrix}R&0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\T&\ddots&\ddots&&&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&&T&R&0\\0&\cdots&\cdots&0&[-1,0]&1\end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1})=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2k-1}^2-y_{2k}^2$.当 $n=2k$ 时,有

$$\begin{pmatrix}R&0&\cdots&0\\T&R&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0&\cdots&0\;\;T&R\end{pmatrix}S\begin{pmatrix}R'&T'&0&\cdots&0\\0&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&T'\\0&\cdots&\cdots&0&R'\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}&0&\cdots&0\\0&\ddots&&\vdots\\\vdots&&\ddots&0\\0&\cdots&0&\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}\end{pmatrix},$$

其中对角上的块出现 k 次.因此取

$$(x_1,x_2,\cdots,x_{2k})$$

$$=(y_1,y_2,\cdots,y_{2k})\begin{pmatrix}R&0&\cdots&0\\T&R&\ddots&\vdots\\0&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&0\\0\cdots&0&T&R\end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_{2k})=y_1^2-y_2^2+y_3^2-y_4^2+\cdots+y_{2k-1}^2-y_{2k}^2$.

(3) 注意,

$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

$$= (x_1, x_2, \cdots, x_n) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

其中 n 阶方阵

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的系数矩阵.

当 $n = 3$ 时,把矩阵 $A = \begin{bmatrix} S & I_3 \\ I_3 & 0 \end{bmatrix}$ 的第 2 行加到第 1 行,并把第 2 列加到第 1 列,得到

$$B = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 行,同时第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 列,然后第 1 行乘以 -1 加到第 3 行,同时第 1 列乘以 -1 加到第 3 列,得到

$$C = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & -\frac{1}{2} & -1 & & & \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 2 行和第 2 列各乘以 2. 得到

$$D = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & -1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & \end{array}\right).$$

即得

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

作变换

$$(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2.$$

现在设 $n > 3$. 矩阵 $A = \begin{bmatrix} S & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ 的第 2 行加到第 1 行,同时第 2 列加到第 1 列,得到

$$B = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 B 的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 行,第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 2 列,然后第 1 行乘以 -1 加到第 i 行,第 1 列乘以 -1 加到第 i 列,$i = 3, 4, \cdots, n$,得到

$$
C=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & -\frac{1}{4} & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & -1 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & \cdots & -1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 1\\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & -1 & \cdots & -1 & & & & & \\
1 & \frac{1}{2} & -1 & \cdots & -1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & &
\end{array}\right). \qquad ③
$$

记 $n-2$ 阶方阵

$$
S_1=\begin{pmatrix}
1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2}\\
\frac{1}{2} & 1 & \cdots & \frac{1}{2}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & 1
\end{pmatrix}.
$$

将对称方阵 S_1 化为相合下的标准形如下:矩阵 $A_1=\begin{bmatrix} S_1 & I_{n-2}\\ I_{n-2} & 0\end{bmatrix}$的第 1 行乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 i 行,第 1 列乘以 $-\frac{1}{2}$ 加到第 i 列,$i=2,\cdots,n-2$,得到

$$
B_1=\left(\begin{array}{ccccc:ccccc}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \cdots & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \cdots & 0\\
\hdashline
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 1\\
\hdashline
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \cdots & -\frac{1}{2} & & & & & \\
0 & 1 & 0 & \cdots & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & & & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & &
\end{array}\right)
$$

矩阵 B_1 的第 2 行乘以 $-\frac{1}{3}$ 加到第 i 行,第 2 列乘以 $-\frac{1}{3}$ 加到第 i 列,$i=3,4,\cdots,n-2$,得到

$$
C_1=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & 0\end{bmatrix},
$$

其中

$$
C_{11}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \frac{3}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & 0 & \frac{4}{6} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{1}{6}\\
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{4}{6} & \cdots & \frac{1}{6}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \cdots & \frac{4}{6}
\end{pmatrix},
$$

$$
C_{12}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & 0 & \cdots & 0\\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \cdots & 1
\end{pmatrix},
$$

$$
C_{21}=\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{3}\\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{3}\\
0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{3}\\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & -\frac{1}{3}\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

如此继续,即可得到

$$
D_1=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12}\\ D_{21} & 0\end{bmatrix},
$$

其中 $D_{11}=\mathrm{diag}\left(1,\frac{3}{4},\frac{4}{6},\cdots,\frac{(n-2)+1}{2(n-2)}\right)$,

$$
D_{12}=\begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\
-\frac{1}{2} & 1 & 0 & \cdots & 0\\
-\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\frac{1}{n-2} & -\frac{1}{n-2} & 0 & \cdots & 1
\end{pmatrix}
$$

$$
D_{21}=\begin{pmatrix}
1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-2}\\
 & 1 & -\frac{1}{3} & \cdots & -\frac{1}{n-2}\\
 & & 1 & \cdots & -\frac{1}{n-2}\\
 & & & \ddots & \vdots\\
 & & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

记 $n-2$ 阶方阵

$$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&1&0&\cdots&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\frac{1}{n-2}&-\frac{1}{n-2}&-\frac{1}{n-2}&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

则有

$$P_1S_1P_1'=\begin{pmatrix}1&&&&\\&\frac{3}{4}&&&\\&&\frac{4}{6}&&\\&&&\ddots&\\&&&&\frac{(n-2)+1}{2(n-2)}\end{pmatrix}.$$

由式③得到

$$\begin{pmatrix}1&1&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\-1&-1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-1&-1&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$\times S\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}&-1&\cdots&-1\\1&\frac{1}{2}&-1&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0&\cdots&0\\0&-\frac{1}{4}&0&\cdots&0\\0&0&-1&\cdots&-\frac{1}{2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&-\frac{1}{2}&\cdots&-1\end{pmatrix}. \qquad ④$$

记

$$Q=\begin{bmatrix}R&0\\T&I_{n-2}\end{bmatrix},R=\begin{bmatrix}1&1\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$T=\begin{bmatrix}-1&-1\\\vdots&\vdots\\-1&-1\end{bmatrix}_{(n-2)\times 2},$$

$$\bar{S}=\begin{bmatrix}H&0\\0&-S_1\end{bmatrix},H=\begin{bmatrix}0&0\\0&-\frac{1}{4}\end{bmatrix}.$$

则式④化为

$$QSQ'=\bar{S}=\begin{bmatrix}H&0\\0&-S_1\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix}I_2&0\\0&P_1\end{bmatrix}QSQ'\begin{bmatrix}I_2&0\\0&P_1\end{bmatrix}'$$

$$=\begin{bmatrix}H&0\\0&-P_1S_1P_1'\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&-\frac{1}{4}&&&&\\&&-1&&&\\&&&-\frac{3}{4}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-\frac{(n-2)+1}{2(n-2)}\end{pmatrix},$$

而

$$P=\begin{bmatrix}I_2&0\\0&P_1\end{bmatrix}Q=\begin{bmatrix}R&0\\P_1T&P_1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0&0&0&\cdots&0\\1&-1&1&0&0&\cdots&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1&0&\cdots&0\\-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&-\frac{1}{3}&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\-\frac{1}{n-2}&-\frac{1}{n-2}&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&1\end{pmatrix}.$$

取坐标变换

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)P,$$

则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\times$$

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&-\frac{1}{4}&&&&\\&&-1&&&\\&&&-\frac{3}{4}&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-\frac{(n-2)+1}{2(n-2)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{pmatrix}$$

$$=y_1^2-\frac{1}{4}y_2^2-y_3^2-\frac{3}{4}y_4^2-\cdots-\frac{n-1}{2(n-2)}y_n^2.$$

再令

$$(y_1,y_2,\cdots,y_n)=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\widetilde{P},$$

其中

$$\widetilde{P} = \begin{pmatrix} 1 &&&&& \\ & 2 &&&& \\ && 1 &&& \\ &&& \frac{2\sqrt{3}}{3} && \\ &&&& \ddots & \\ &&&&& \sqrt{\frac{2(n-2)}{n-1}} \end{pmatrix},$$

即 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\widetilde{P}P$，则

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=z_1^2-z_2^2-\cdots-z_n^2.$$

(4) 记 n 阶方阵

$$S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \cdots & \frac{n-2}{2} & \frac{n-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{n-3}{2} & \frac{n-2}{2} \\ \frac{2}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{n-4}{2} & \frac{n-3}{2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{n-2}{2} & \frac{n-3}{2} & \frac{n-4}{2} & \cdots & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{n-1}{2} & \frac{n-2}{2} & \frac{n-3}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

则 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(x_1,x_2,\cdots,x_n)S\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，其中 S 是二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的系数矩阵. 现在把 n 阶对称方阵 S 化为相合下的标准形. 矩阵 $A=\begin{bmatrix} S & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ 的第 i 行减去第 $i-1$ 行，同时第 i 列减去第 $i-1$ 列，$i=n,n-1,\cdots,2$，得到

$$B = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & & \end{array}\right)$$

矩阵 B 的第 i 行乘以 $\frac{1}{2}$ 加到第 1 行，同时第 i 列乘以 $\frac{1}{2}$ 加到第 1 列，$i=2,3,\cdots,n$，得到

$$C = \left(\begin{array}{ccccc:ccccc} \frac{n-1}{4} & 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ \hdashline \frac{1}{2} & -1 & 0 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -1 & & & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \cdots & 1 & & & & & \end{array}\right).$$

矩阵 C 的第 1 行和第 1 列各乘以 $\frac{2\sqrt{n-1}}{n-1}$，得到

$$D=\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

其中

$$D_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix},$$

$$D_{12}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} & 0 & 0 & \cdots & \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_{21}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & -1 \\ \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix}.$$

记

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{\sqrt{n-1}}{n-1} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

则

$$PSP' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}.$$

取坐标变换

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)P,$$

则

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= y_1^2 - y_2^2 - \cdots - y_n^2.$$

注 给定二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，写出其系数矩阵 S，是解题的关键一步. 然后对 n 阶对称方阵 S 进行同步变换，使之化为相合下的标准形 $\tilde{S}$，即将矩阵 $\begin{bmatrix} S & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$ 经同步变换化为 $\begin{bmatrix} \tilde{S} & P \\ P' & 0 \end{bmatrix}$，则令坐标变换为 $(x_1, x_2, \cdots, x_n) = (y_1, y_2, \cdots, y_n)P$，此时

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$= (y_1, y_2, \cdots, y_n)\tilde{S}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$
$$= y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

其中 p 和 q 是二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的正、负惯性指数，它们是由二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 唯一确定的. 从而二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的标准形是唯一的. 由于将 n 阶对称方阵 S 经同步变换化为标准形时所选用的同步变换的方式是多种多样的，因此将二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 化为标准形的坐标变换并不唯一. 如何选用坐标变换，使计算量尽可能的小，是值得考虑的. 这只有通过多做题，多掌握一些同步变换的方法，才能简化运算. 3.3.15 是比较典型的例子，希望自己先算一算，再看看题解，从中也许能够有所体会.

§3.4 矩阵打洞与行列式的计算

从前面几节可以看到，矩阵的行或列的初等变换是整个线性代数或者矩阵论中的一种重要而基本的变换. 自然会想到将矩阵的初等变换推广到分块矩阵，即把分块矩阵中的每个子矩阵都当成矩阵中一个元素，然后对它施行初等变换. 其主要根据是 Schur 所发现的几个基本的矩阵恒等式，即下面的基本定理.

定理 设 A 是 m 阶可逆方阵，B、C 和 D 分别是 $m \times p$、$n \times m$ 和 $n \times p$ 矩阵，则有

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad ①$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad ②$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}, \quad ③$$

其中 $D - CA^{-1}B$ 称为 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 关于 A 的 Schur 补.

上述定理可以直接用分块矩阵的乘法加以证明. 应当说明的是，在上一定理式①中，当 m 阶方阵 A 可逆时，可以将分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 中每个子矩阵当成一个元素，然后用 A^{-1} 左乘以第一行，使分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 变为 $\begin{bmatrix} I_m & A^{-1}B \\ C & D \end{bmatrix}$，再用矩阵 $-C$ 右乘第一行，并将其加到第二行，则分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 即化为式①中右端的矩阵. 因此式①相当于对分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 施行分块矩阵的行的初等变换. 同理式②给出了分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的列的初等变换（注意此时是用子矩阵右乘于分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 的列），而式③则是对分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 同时施行行和列的初等变换. 因此上一定理是将矩阵的初等变换推广到分块矩阵的一个定理.

由于对分块矩阵施行初等变换后得到的矩阵将含有零子矩阵，即含有一个洞，因此我国已故著名数学家华罗庚将分块矩阵的初等变换称为矩阵打洞.

矩阵打洞是线性代数和矩阵论中一种十分重要的技巧，不论在解题或者证明定理时都有着广泛应用. 这节主要介绍它在行列式中的应用.

3.4.1 设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是 $m + n$ 阶方阵，其中 A 是 m 阶可逆方阵. 证明

$$\det M = \det A \det(D - CA^{-1}B). \quad ④$$

证 由式①，有

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

注意 $\det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix} = 1$. 因此上式两端取行列式，即得式①.

3.4.2 设 $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 是 $m+n$ 阶方阵，其中 D 是 n 阶可逆方阵. 证明

$$\det M = \det(A - BD^{-1}C)\det D. \qquad ⑤$$

证 由于

$$\begin{bmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}, \qquad ⑥$$

其中 $\det\begin{bmatrix} I_m & -BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = 1$，因此上式两端取行列式，即得式⑤.

注1 式⑥相当于将分块矩阵 M 中每个子矩阵视为一个元素，然后第2行右乘以 $-BD^{-1}$，并加到第1行，则分块矩阵 M 即变为式⑥右端的矩阵.

注2 例3.4.1和3.4.2通常称为行列式的降阶定理，它具有广泛的应用. 当然重要的不是降阶定理本身，而是如何对分块矩阵施行分块矩阵的行或列的初等变换，也即如何打洞.

3.4.3 计算5阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 6 & 1 & 4 \\ 4 & 5 & 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

解 记

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

由于 $\det A = 1$，因此 A 可逆，而且 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$. 因为

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -CA^{-1} & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix},$$

故两边取行列式即得

$$\det M = \det A \det(D - CA^{-1}B).$$

其中

$$D - CA^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 6 & -7 & 19 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 11 \\ 2 & 14 & -20 \end{pmatrix}.$$

再记 $\alpha^t = (8,2)$, $\beta = (0,2)$, $E = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 14 & -20 \end{bmatrix}$，则

$$D - CA^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ \alpha^t & E \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha & I_2 \end{bmatrix}(D - CA^{-1}B) = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & E - \alpha\beta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 14 & -24 \end{pmatrix}.$$

上式两端取行列式，得到

$$\det(D - CA^{-1}B) = \det\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 14 & -24 \end{bmatrix} = 118.$$

因此

$$\det M = \det A \det(D - CA^{-1}B) = 118.$$

3.4.4 求行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & 1 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & 1 + a_nb_n \end{pmatrix}.$$

解 记 $\alpha^t = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$，则

$$M = I_n + \alpha^t\beta.$$

注意 $M = I_n + \alpha^t\beta$ 是一种 Schur 补形式的矩阵，因此考虑下面的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha^t & I_n \end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\alpha^t & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha^t & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha^t & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha^t\beta & 0 \\ \alpha^t & I_n \end{bmatrix}.$$

故上两式取行列式即得

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ \alpha^t & I_n \end{bmatrix} = \det M = \det(1 + \alpha^t\beta).$$

注意上式右端 $1 + \alpha^t\beta = 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$ 是一个数，因此

$$\det M = 1 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n.$$

注 上例的关键是将 $M = I_n - \alpha'\beta$ 视为矩阵 A 关于西北角元素 1 的 Schur 补，然后将 n 阶矩阵 M 升阶为 $n+1$ 阶矩阵 A. 再对分块方阵 A 打洞. 所以学会观察一个方阵是否是某个方阵的 Schur 补，是很有用的.

3.4.5 设 A 是 n 阶可逆方阵，α 和 β 是两个 n 维行向量. 证明：n 阶方阵 $A+\alpha'\beta$ 是可逆的充要条件是 $1+\beta A^{-1}\alpha' \neq 0$.

证 考虑 $n+1$ 阶方阵

$$M = \begin{bmatrix} A & \alpha' \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

则

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \beta A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha' \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \alpha \\ 0 & 1+\beta A^{-1}\alpha' \end{bmatrix},$$

且

$$\begin{bmatrix} I_n & -\alpha' \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha' \\ -\beta & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+\alpha'\beta & 0 \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}.$$

上两式两端各取行列式，得到

$$\det M = \det A \det(1+\beta A^{-1}\alpha')$$

且

$$\det M = \det(A+\alpha'\beta).$$

注意 $\det(1+\beta A^{-1}\alpha') = 1+\beta A^{-1}\alpha'$. 因此

$$\det(A+\alpha'\beta) = (1+\beta A^{-1}\alpha')\det A.$$

由于 A 可逆，所以 $\det A \neq 0$. 因此 $\det(A+\alpha'\beta)\neq 0$ 的充要条件是 $1+\beta A^{-1}\alpha' \neq 0$. 即 n 阶方阵 $A+\alpha'\beta$ 可逆的充要条件是 $1+\beta A^{-1}\alpha' \neq 0$.

注 n 阶方阵 $A+\alpha'\beta$ 是 $n+1$ 阶方阵 $M = \begin{bmatrix} A & \alpha' \\ -\beta & 1 \end{bmatrix}$ 关于东南角元素 1 的 Schur 补.

3.4.6 设 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$. 求 n 阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & 0 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

解 容易看出，

$$M = \begin{pmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1+a_1 & a_1+a_2 & \cdots & a_1+a_n \\ a_2+a_1 & a_2+a_2 & \cdots & a_2+a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n+a_1 & a_n+a_2 & \cdots & a_n+a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}.$$

记

$$C = -\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -2a_n \end{pmatrix},$$

则

$$M = D - CI_2^{-1}B.$$

因此 n 阶方阵 M 是 $n+2$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_2 & B \\ C & D \end{bmatrix}$ 关于 I_2 的 Schur 补. 注意 $a_1a_2\cdots a_n \neq 0$，所以 D 是可逆的. 于是

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ -CI_2^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & B \\ 0 & D-CI_2^{-1}B \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & -BD^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_2 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2-BD^{-1}C & 0 \\ C & D \end{bmatrix}.$$

上两式各取行列式，得到

$$\det\begin{bmatrix} I_2 & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det I_2 \det(D-CI_2^{-1}B) = \det M,$$

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(I_2 - BD^{-1}C)\det D.$$

因此

$$\det M = \det(I_2 - BD^{-1}C)\det D.$$

易知 $\det D = (-1)^n 2^n a_1a_2\cdots a_n$. 而

$$I_2 - BD^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{1}{2a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & -\frac{n}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1-\frac{n}{2} & -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i & 1-\frac{n}{2}\end{pmatrix}.$$

因此

$$\det(I_2-BD^{-1}C)=(1-\frac{n}{2})^2-\frac{1}{4}(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2$$
$$=\frac{1}{4}[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2].$$

于是

$$\det M=(-1)^n2^{n-2}(\prod_{i=1}^{n}a_i)[(n-2)^2-(\sum_{i=1}^{n}a_i)^2].$$

3.4.7 求 $n+1$ 阶行列式 $\det M$，其中

$$M=\begin{pmatrix}0&1&2&\cdots&n\\1&1&0&\cdots&0\\2&0&2&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ n&0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

解 记

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}2&3&\cdots&n\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix},$$
$$C=\begin{bmatrix}2&0\\3&0\\ \cdots\\ n&0\end{bmatrix},D=\begin{pmatrix}2&0&\cdots&0\\0&3&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

则 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$.易知 D 是可逆的，且

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{3}&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n}\end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{bmatrix}I_2&-BD^{-1}\\0&I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_2-BD^{-1}C&0\\C&D\end{bmatrix},$$

所以

$$\det M=\det D\det(I_2-BD^{-1}C).$$

而 $\det D=n!$，且

$$I_2-BD^{-1}C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2&3&\cdots&n\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}$$
$$\times\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0&\cdots&0\\0&\frac{1}{3}&\cdots&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\frac{1}{n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\3&0\\ \cdots\\ n&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2+3+\cdots+n&0\\0&0\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-(1+2+\cdots+n)&0\\0&1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}2-\frac{n(n-1)}{2}&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

因此 $\det(I_2-BD^{-1}C)=2-\frac{n(n-1)}{2}$.于是

$$\det M=(2-\frac{n(n-1)}{2})\cdot n!.$$

3.4.8 求行列式 $\det A$，其中

$$A=\begin{pmatrix}a_0&-1&0&\cdots&0&0\\a_1&x&-1&\cdots&0&0\\a_2&0&x&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n-2}&0&0&\cdots&x&-1\\a_{n-1}&0&0&\cdots&0&x\end{pmatrix}.$$

解 当 $x\neq0$ 时，记 $\alpha^t=(a_1,a_2,\cdots,a_{n-1})$，$\beta=(-1,0,\cdots,0)$，且

$$D=\begin{pmatrix}x&-1&0&\cdots0&0\\0&x&-1&\cdots0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&x&-1\\0&0&0&\cdots0&x\end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)},$$

则 $A=\begin{bmatrix}a_0&\beta\\ \alpha&D\end{bmatrix}$，其中 $\det D=x^{n-1}\neq0$.因此 D 可逆，其逆为

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{x}&\frac{1}{x^2}&\cdots&\frac{1}{x^{n-2}}&\frac{1}{x^{n-1}}\\0&\frac{1}{x}&\ddots&&\frac{1}{x^{n-2}}\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&\frac{1}{x^2}\\0&\cdots&\cdots&0&\frac{1}{x}\end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix}1&-\beta D^{-1}\\0&I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0&\beta\\ \alpha&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_0-\beta D^{-1}\alpha&0\\ \alpha&D\end{bmatrix},$$

故两端取行列式即得

$$\det A=(a_0-\beta D^{-1}\alpha)\det D$$

$$= x^{n-1}(a_0 - \beta D^{-1}\alpha).$$

而

$$a_0 - \beta D^{-1}\alpha = a_0 - (-1,0,\cdots,0)$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x^2} & \cdots & \frac{1}{x^{n-2}} & \frac{1}{x^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{x} & \ddots & & \frac{1}{x^{n-2}} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{1}{x^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= a_0 - \left(-\frac{1}{x}, -\frac{1}{x^2}, \cdots, -\frac{1}{x^{n-1}}\right) \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix}$$
$$= a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}.$$

所以

$$\det A = x^{n-1}\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}\right)$$
$$= a_0 x^{n-1} + a_1 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}.$$

易见当 $x = 0$ 时,上式仍成立.

3.4.9 求 n 阶行列式 $\det M$,其中

$$M = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}.$$

解 当 $x \neq 0$ 时,记 $\alpha = (y,0,\cdots,0)$, $\beta = (0,0,\cdots,0,y)$,

$$A = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & y \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & x \end{pmatrix}_{(n-1)\times(n-1)}$$

则

$$M = \begin{bmatrix} A & \beta \\ \alpha & x \end{bmatrix},$$

其中 $\det A = x^{n-1} \neq 0$,故 A 是可逆的,其逆方阵为

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} & \frac{y^2}{x^3} & \cdots & (-1)^{n-2}\frac{y}{x^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{x} & \ddots & \frac{y}{x^3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{y}{x^2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{x} \end{pmatrix}$$

由于

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \beta \\ \alpha & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \beta \\ 0 & x - \alpha A^{-1}\beta \end{bmatrix},$$

故两端取行列式即得

$$\det M = (\det A)(x - \alpha A^{-1}\beta).$$

而

$$x - \alpha A^{-1}\beta = x - (y,0,\cdots,0)$$
$$\times \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} & \frac{y^2}{x^3} & \cdots & (-1)^{n-2}\frac{y^{n-2}}{x^{n-1}} \\ 0 & \frac{1}{x} & -\frac{y}{x^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{y}{x^3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & -\frac{y}{x^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{1}{x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ y \end{pmatrix}$$
$$= x - \left(\frac{y}{x}, -\frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}, \cdots, (-1)^{n-2}\frac{y^{n-1}}{x^{n-1}}\right)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ y \end{pmatrix}$$
$$= x + (-1)^{n-1}\frac{y^n}{x^{n-1}}.$$

因此

$$\det M = (\det A)(x - \alpha A^{-1}\beta) = x^n - (-y)^n.$$

易知,当 $x = 0$ 时, $\det M = (-1)^{n-1}y^n$. 故上式当 $x = 0$ 时仍成立.

3.4.10 求 n 阶行列式 $\det M$,其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 + a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & 1 + a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & 1 + a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

解 注意

$$M = I_n + \begin{pmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{pmatrix}.$$

$$= I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

$$= I_n + \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}.$$

所以 M 是方阵

$$\begin{bmatrix} I_2 & B \\ -C & I_n \end{bmatrix}$$

关于 I_2 的 Schur 补，其中 $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$,

$$C = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix} I_2 & 0 \\ C & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & B \\ -C & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_n + CB \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_2 & B \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & B \\ -C & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_2 + BC & 0 \\ C & I_n \end{bmatrix},$$

故上两式各取行列式，即得

$$\det M = \det(I_n + CB) = \det \begin{bmatrix} I_2 & B \\ -C & I_n \end{bmatrix} = \det(I_2 + BC).$$

而

$$I_2 + BC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_2 & 1 \\ \cdots \\ a_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i & n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & \sum_{i=1}^{n} b_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i & n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i b_i & 1 + \sum_{i=1}^{n} b_i \end{pmatrix},$$

所以

$$\det M = \det(I_2 + BC) = (1 + \sum_{i=1}^{n} a_i)(1 + \sum_{i=1}^{n} b_i) - n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

3.4.11 计算 $n+1$ 阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & -y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & -y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & -y_n \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 0 \end{pmatrix},$$

而且 n 阶方阵

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

是可逆的.

解 记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，则

$$M = \begin{bmatrix} A & -y' \\ x & 0 \end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -xA^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & -y' \\ x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -y' \\ 0 & xA^{-1}y' \end{bmatrix},$$

所以两端取行列式即得

$$\det M = (xA^{-1}y')\det A.$$

3.4.12 计算 $2n$ 阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ -\frac{1}{2} & \cdots & 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

解 记 $M = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{pmatrix}$. 由于

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ \frac{1}{2}I_n & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ -\frac{1}{2}I_n & \frac{1}{2}I_n \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix},$$

所以两端取行列式即得

$$\det M = 1.$$

3.4.13 求 $2n$ 阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 & 0 & \cdots & b \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & ⋰ & \vdots \\ 0 & \cdots & a & b & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & b & a & \cdots & 0 \\ \vdots & ⋰ & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

解 记 n 阶方阵

$$J_n=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&1&0\\\vdots&\iddots&\vdots&\vdots\\1&\cdots&0&0\end{bmatrix},$$

则 $J_n^2=I_n$，且

$$M=\begin{bmatrix}aI_n&bJ_n\\bJ_n&aI_n\end{bmatrix}.$$

当 $a\neq 0$ 时，由于

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\-\frac{b}{a}J_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}aI_n&bJ_n\\bJ_n&aI_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aI_n&bJ_n\\0&(a-\frac{b^2}{a})I_n\end{bmatrix},$$

故两端取行列式即得

$$\begin{aligned}\det M&=\det(aI_n)\det[(a-\frac{b^2}{a})I_n]\\&=a^n(a-\frac{b^2}{a})^n\\&=(a^2-b^2)^n.\end{aligned}$$

当 $a=0$ 时，$M=\begin{bmatrix}0&bJ_n\\bJ_n&0\end{bmatrix}=bJ_{2n}$. 而

$$\begin{bmatrix}I_n&J_n\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&J_n\\J_n&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&J_n\\J_n&0\end{bmatrix}.$$

所以

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\-J_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&J_n\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&J_n\\J_n&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n&J_n\\0&-I_n\end{bmatrix}.$$

上式两端取行列式，即得

$$\det\begin{bmatrix}I_n&0\\-J_n&I_n\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix}I_n&J_n\\0&I_n\end{bmatrix}\det J_{2n}=\det\begin{bmatrix}I_n&J_n\\0&-I_n\end{bmatrix},$$

即

$$\det J_{2n}=(-1)^n.$$

因此 $\det M=b^{2n}\det J_{2n}=(-1)^nb^{2n}$. 这说明，不论 a 是否为零，均有 $\det M=(a^2-b^2)^n$.

注 在上例中，我们遇到这样的情形，即设 $2n$ 阶分块矩阵 $M=\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$，其中 A 是 n 阶不可逆方阵，此时 Schur 三个恒等式已不再适用. 但仍然可以用分块矩阵的初等变换加以处理. 其主要根据是：

(1) $$\begin{bmatrix}I_n&I_n\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+C&B+D\\C&D\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\I_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\A+C&B+D\end{bmatrix}.$$

前一式相当于将分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的第 2 行加到第一行；后一式相当于将分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的第一行加到第 2 行.

(2) $$\begin{bmatrix}I_n&0\\0&E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&B\\EC&ED\end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix}E&0\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}EA&EB\\C&D\end{bmatrix}.$$

前一式相当于将分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的第 2 行遍左乘以矩阵 E；后一式相当于将分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的第 1 行遍左乘以矩阵 E.

(3) $$\begin{bmatrix}0&I_n\\I_n&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&D\\A&B\end{bmatrix}.$$

这相当于对调分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&B\\C&D\end{bmatrix}$ 的第 1,2 行.

分块矩阵的列的初等变换可以用左乘以适当的分块矩阵来表示.

3.4.14 计算 n 阶行列式 $\det M$，其中

$$M=\begin{bmatrix}2&1&\cdots&1\\1&3&\cdots&1\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&1&\cdots&n+1\end{bmatrix}$$

解 注意

$$\begin{aligned}M&=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\&\cdots\cdots&&\\1&1&\cdots&1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}[1,1,,\cdots1].\end{aligned}$$

记 n 维行向量 $\alpha=(1,1,\cdots,1)$，且

$$D=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&2&\cdots&0\\&\cdots\cdots&&\\0&0&\cdots&n\end{bmatrix}.$$

则 $M=D+\alpha'\alpha$. 因此 M 是 $n-1$ 阶方阵

$$\begin{bmatrix}1&\alpha\\-\alpha'&D\end{bmatrix}$$

关于 1 的 Schur 补. 由于

$$\begin{bmatrix}1&0\\\alpha'&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\alpha\\-\alpha'&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha\\0&D+\alpha'\alpha\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&\alpha\\0&M\end{bmatrix},$$

且

$$\begin{bmatrix}1&-\alpha D^{-1}\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&\alpha\\-\alpha'&D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1+\alpha D^{-1}\alpha'&0\\-\alpha'&D\end{bmatrix},$$

所以上两式各取行列式即得

$$\det M=\det\begin{bmatrix}1&\alpha\\-\alpha'&D\end{bmatrix}=(1+\alpha D^{-1}\alpha')\det D.$$

显然 $\det D = n!$，而

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

且 $1 + \alpha D^{-1}\alpha'$

$$= 1 + (1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

因此 $\det M = (1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}) \cdot n!$.

3.4.15 求 n 阶行列式 $\det M$，其中

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & \lambda_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & \lambda_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

解 注意，

$$M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 - a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}[a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

记 n 维行向量 $\alpha = (1,1,\cdots,1)$ 和 $\beta = (a_1,a_2,\cdots,a_n)$，另记

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 - a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - a_n \end{pmatrix}.$$

则 $M = D + \alpha'\beta$ 是 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\alpha' & D \end{bmatrix}$ 关于 1 的 Schur 补. 由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \alpha' & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\alpha' & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & D + \alpha'\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & M \end{bmatrix}$$

且

$$\begin{bmatrix} 1 & -\beta D^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\alpha' & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \beta D^{-1}\alpha' & 0 \\ -\alpha' & D \end{bmatrix},$$

故上两式各取行列式，即得

$$\det M = \det\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ -\alpha' & D \end{bmatrix} = (1 + \beta D^{-1}\alpha')\det D.$$

显然 $\det D = (\lambda_1 - a_1)(\lambda_2 - a_2)\cdots(\lambda_n - a_n)$，且由

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 - a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n - a_n} \end{pmatrix}$$

得到

$$1 + \beta D^{-1}\alpha' = 1 + (a_1,a_2,\cdots,a_n) \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1 - a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2 - a_2} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\lambda_n - a_n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + (\frac{a_1}{\lambda_1 - a_1},\frac{a_2}{\lambda_2 - a_2},\cdots,\frac{a_n}{\lambda_n - a_n})\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i - a_i}.$$

于是

$$\det M = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a_i)(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{\lambda_i - a_i})$$
$$= \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i - a_i) + \sum_{i=1}^{n}a_i\prod_{\substack{1\leq j\leq n \\ j\neq i}}(\lambda_j - a_j).$$

3.4.16 设 A,B,C 和 D 是 n 阶方阵，并且 A 和 C 可交换，即 $AC = CA$. 证明：

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

证 先证方阵 A 可逆的情形.由于 A 可逆,所以有

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

上式两端取行列式,得到

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det A \det(D - CA^{-1}B) \\ &= \det A(D - CA^{-1}B) \\ &= \det(AD - ACA^{-1}B). \end{aligned}$$

由于 $AC = CA$,所以

$$\begin{aligned} \det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} &= \det(AD - CAA^{-1}B) \\ &= \det(AD - CB). \end{aligned}$$

再证方阵 A 不可逆的情形.记

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon I_n = \begin{pmatrix} a_{11}+\varepsilon & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+\varepsilon & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+\varepsilon \end{pmatrix},$$

其中 $A = (a_{ij})$.容易看出,$\det A_\varepsilon = \det(A + \varepsilon I_n)$ 是关于 ε 的一个首项系数为1的 n 次多项式.它具有 n 个根,记作 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$.如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 不全为零,则记 $\varepsilon_0 = \min\{|\varepsilon_i| : \varepsilon_i \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.取正数 λ,使得 $0 < \lambda < \varepsilon_0$.则 $\det A_\lambda \neq 0$,即 A_λ 可逆;如果 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 全为零,则仍有正数 ε_0,使得对任意正数 λ,$0 < \lambda < \varepsilon_0$,$\det A_\lambda \neq 0$,即 A_λ 可逆.由于 $AC = CA$,故 $A_\lambda C = (A + \lambda I_n)C = AC + \lambda C = CA + \lambda C = C(A + \lambda I_n) = CA_\lambda$.应用上面的证明于可逆方阵 A_λ,得到

$$\det\begin{bmatrix} A_\lambda & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(A_\lambda D - CB).$$

上式两端都是关于 λ 的多项式,从而是关于 λ 的连续函数.因此当 λ 趋于零时,上式即化为

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \det(AD - CB).$$

注 3.4.16中处理 A 不可逆的情形所用的方法即是所谓微小摄动法.这是矩阵论中从可逆方阵过渡到不可逆方阵的一种重要的处理方法.

3.4.17 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵.证明:

$$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA).$$

证 注意,m 阶方阵

$$M = I_m - AB = I_m - AI_nB = I_m - AI_n^{-1}B$$

是 $m+n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix}$ 关于 I_n 的 Schur 补.所以考虑 $m+n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix}$.由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & I_m - AB \end{bmatrix},$$

因此两边取行列式,得到

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix} = \det(I_m - AB).$$

另一方面,

$$\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - BA & 0 \\ A & I_m \end{bmatrix}.$$

两端取行列式,得到

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_m \end{bmatrix} = \det(I_n - BA).$$

于是

$$\det(I_m - AB) = \det(I_n - BA).$$

注1 对于 $2n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_n \end{bmatrix}$,由于 $AI_n = I_nA$,所以当 $m = n$ 时,3.4.17 是 3.4.16 的特例.

注2 3.4.17给出了一种计算行列式的方法.当 $m < n$ 时,可以将 m 阶行列式 $\det(I_m - AB)$ 升阶为计算 n 阶行列式 $\det(I_n - BA)$.反之将 n 阶行列式 $\det(I_n - BA)$ 降阶为计算 m 阶行列式 $\det(I_m - AB)$.例如,欲计算 n 阶行列式

$$\begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix},$$

则可记

$$\begin{aligned} M &= \begin{pmatrix} 1 + x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & 1 + x_ny_n \end{pmatrix} \\ &= I_n - \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}[y_1, y_2, \cdots, y_n] \\ &= I_n - AB, \end{aligned}$$

其中 $A = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$ 是 $n \times 1$ 矩阵,$B = [y_1, y_2, \cdots, y_n]$ 是 $1 \times n$ 矩阵.于是由 3.4.17,

$$\det M = \det(I_n - AB) = \det(1 - BA)$$

$$= \det\left(1 - (y_1, y_2, \cdots, y_n)\begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$= 1 + x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

3.4.18　设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times m$ 矩阵. 证明:

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

证　注意,当 $\lambda = 0$ 时,结论显然成立. 下面设 $\lambda \neq 0$. 由于 m 阶方阵

$$M = \lambda I_m - AB = \lambda I_m - AI_nB$$
$$= \lambda I_m - AI_n^{-1}B,$$

所以 M 是 $m + n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix}$ 关于 I_n 的 Schur 补. 因此考虑方阵 $\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix}$ 的行列式. 由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & \lambda I_m - AB \end{bmatrix},$$

所以

$$\det\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} = \det(\lambda I_m - AB).$$

另一方面,

$$\begin{bmatrix} I_n & -\frac{1}{\lambda}B \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n - \frac{1}{\lambda}BA & 0 \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix},$$

所以

$$\det(\lambda I_m - AB) = \det\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & \lambda I_m \end{bmatrix}$$
$$= \det(\lambda I_m)\det(I_n - \frac{1}{\lambda}BA)$$
$$= \lambda^m \det \frac{1}{\lambda}(\lambda I_n - BA)$$
$$= \lambda^{m-n}\det(\lambda I_n - BA).$$

于是得到

$$\lambda^n \det(\lambda I_m - AB) = \lambda^m \det(\lambda I_n - BA).$$

3.4.19　设 A 和 B 是 n 阶复方阵, $i^2 = -1$. 证明:

$$\det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB).$$

证　将分块方阵 $\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$ 的第 2 行乘以 i 加到第 1 行,即得

$$\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + iB & iA - B \\ B & A \end{bmatrix}.$$

再将右端分块方阵的第 2 列乘以 i 加到第 1 列,得到

$$\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & iA - B \\ B + iA & A \end{bmatrix}.$$

再对调右端分块方阵的第 1,2 行,得到

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} B + iA & A \\ 0 & iA - B \end{bmatrix}.$$

上式两端取行列式,得到

$$\det\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{bmatrix}$$
$$= \det(iA + B)\det(iA - B).$$

由于

$$\det\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = (-1)^n,$$

$$\det\begin{bmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ iI_n & I_n \end{bmatrix} = 1,$$

$$\det(iA + B) = \det i(A - iB) = i^n\det(A - iB),$$

$$\det(iA - B) = \det i(A + iB) = i^n\det(A + iB),$$

所以

$$(-1)^n\det\begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix}$$
$$= i^{2n}\det(A + iB)\det(A - iB)$$
$$= (-1)^n\det(A + iB)\det(A - iB).$$

由此得所欲证之结论.

3.4.20　设 A 是 $2n$ 阶实方阵,它满足

$$A\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}A' = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

证明: $\det A = 1$.

证　记 $M = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$. 易知 $\det M \neq 0$. 因此由题设 $AMA' = M$ 可得 $(\det A)^2\det M = \det M$. 所以 $(\det A)^2 = 1$,从而 $\det A = \pm 1$. 于是只须证明 $\det A > 0$. 为此将 $2n$ 阶实方阵 A 分块为 $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$,其中 B, C, D 和 E 都是 n 阶的. 注意,

$$(AM + MA)A' = AMA' + MAA'.$$

由题设 $AMA' = M$,所以

$$(AM + MA)A' = M + MAA' = M(I_{2n} + AA').$$

上式两端取行列式,得到

$$\det(AM + MA)\det A' = \det M\det(I_{2n} + AA').$$

即

$$\det(AM + MA)\det A = \det M\det(I_{2n} + AA').$$

由于 AA' 是 $2n$ 阶半正定实对称方阵, I_{2n} 是 $2n$ 阶正定实对称方阵,因此 $I_{2n} + AA'$ 是正定的. 所以

$$\det(I_{2n} + AA') > 0.$$

现在计算 $M=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}$ 的行列式.将 M 的第2行加到第1行,即有

$$\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ 0 & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}.$$

再将第1列加到第2列,即得

$$\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ 0 & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ 0 & I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-I_n & 0\\ -I_n & -I_n\end{bmatrix}.$$

上式两端取行列式,即得

$$(\det M)\left(\det\begin{bmatrix}I_n & I_n\\ 0 & I_n\end{bmatrix}^2\right)=(-1)^{2n}=1.$$

所以 $\det M=1$.于是

$$\det(AM+MA)\det A=\det(I_{2n}+AA^t)>0, \quad ⑦$$

从而

$$\det(AM+MA)\neq 0.$$

现在

$$\begin{aligned}AM+MA&=\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-C & B\\ -E & D\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}D & E\\ -B & -C\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}D-C & B+E\\ -(B+E) & D-C\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由 3.4.19 得

$$\begin{aligned}\det(AM+MA)&=\det((D-C)+i(B+E))\det((D-C)-i(B+E))\\&=|\det((D-C)+i(B+E))|^2\\&>0.\end{aligned}$$

由式⑦即得 $\det A>0$.从而 $\det A=1$.

注 在典型群理论中,满足题设的 $2n$ 阶方阵 A 称为辛方阵(例如见华罗庚与万哲先著《典型群》(上海科学技术出版社,1963年版)).3.4.20 表明,任意一个实的辛方阵的行列式都是1.另外,在上面的证明中,主要用到的是辛方阵 A 的一个性质,即 $(AM+MA)A^t=M(I_{2n}+AA^t)$.这是证明的关键性一步.

3.4.21 设 A 是 $2n$ 阶复方阵,它满足

$$A\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}A^t=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}.$$

证明:$\det A=1$.

证 将 $2n$ 阶复方阵 A 分块为 $A=\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}$,其中 B、C、D 和 E 是 n 阶复方阵.由题设条件 $A\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}A^t=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}$ 得到

$$\begin{bmatrix}-CB^t+BC^t & -CD^t+BE^t\\ -EB^t+DC^t & -ED^t+DE^t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}.$$

由此得到

$$\begin{aligned}-CB^t+BC^t&=0,\\ -CD^t+BE^t&=I_n,\\ -EB^t+DC^t&=-I_n,\\ -ED^t+DE^t&=0.\end{aligned}$$

于是得到

$$BC^t=CB^t, \quad ⑧$$

$$BE^t=I_n+CD^t, \quad ⑨$$

$$DE^t=ED^t. \quad ⑩$$

设 n 阶方阵 B 可逆,则由

$$\begin{bmatrix}I_n & 0\\ -DB^{-1} & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B & C\\ D & E\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B & C\\ 0 & E-DB^{-1}C\end{bmatrix}$$

得到

$$\begin{aligned}\det A&=\det B\det(E-DB^{-1}C)\\&=\det B\det(E-DB^{-1}C)^t\\&=\det B\det(E^t-C^t(B^t)^{-1}D^t)\\&=\det B(E^t-C^t(B^t)^{-1}D^t)\\&=\det(BE^t-BC^t(B^t)^{-1}D^t).\end{aligned}$$

将式⑨和⑧代入,即得

$$\begin{aligned}\det A&=\det(I_n+CD^t-CB^t(B^t)^{-1}D^t)\\&=\det(I_n+CD^t-CD^t)=\det I_n=1.\end{aligned}$$

因此结论对 B 可逆的情形成立.

现在设 B 不可逆.注意此时式⑧,⑨和⑩仍成立.考虑矩阵方程 $XC^t=CX^t$ 的解.设 n 阶方阵 C 的秩为 $\operatorname{rank}C=r$,则存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$C=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

(见§3.6 矩阵在相抵下的 Hermite 标准形).由 $XC^t=CX^t$ 得到

$$P^{-1}XQ^t\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QX^t(P^{-1})^t.$$

将 n 阶方阵 $P^{-1}XQ^t$ 分块为 $P^{-1}XQ^t=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ X_{21} & X_{22}\end{bmatrix}$.

代入上式,得到

$$\begin{bmatrix}X_{11} & 0\\ X_{21} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{11}^t & X_{21}^t\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

因此 $X_{11}^t=X_{11}$,$X_{21}=0$.于是

$$P^{-1}XQ^t=\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ 0 & X_{22}\end{bmatrix},$$

其中 $X_{11}^t=X_{11}$,即

$$X=P\begin{bmatrix}X_{11} & X_{12}\\ 0 & X_{22}\end{bmatrix}(Q^t)^{-1}.$$

上式给出了矩阵方程 $XC^t = CX^t$ 的一般解. 取 $X_{11} = I_r, X_{22} = I_{n-r}$, 则 $X = P\begin{pmatrix} I_r & X_{12} \\ 0 & I_{r-r} \end{pmatrix}(Q^t)^{-1}$ 是方程 $XC^t = CX^t$ 的可逆解.

取方程 $XC^t = CX^t$ 的一个可逆解 X_0, 则 n 阶可逆方阵 X_0 满足 $X_0C^t = CX_0^t$. 于是对任意复数 λ, 有

$$(B + \lambda X_0)C^t = C(B + \lambda X_0)^t. \qquad ⑪$$

记 $A_\lambda = \begin{bmatrix} B + \lambda X_0 & C \\ D & E \end{bmatrix}$. 注意 A_λ 不再满足题设条件. 记 $f(\lambda) = \det(B + \lambda X_0)$, 则

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \det(\lambda I_n + BX_0^{-1})X_0 \\ &= \det(\lambda I_n + BX_0^{-1})\det X_0. \end{aligned}$$

由于方阵 X_0 可逆, 所以 $\det X_0 \neq 0$. 而 $\det(\lambda I_n + BX_0^{-1})$ 是关于 λ 的 n 次多项式, 因此存在任意小的正数 $\varepsilon > 0$, 使得 $\det(\varepsilon I_n + BX_0^{-1}) \neq 0$, 即 $f(\varepsilon) \neq 0$.

现在计算 $2n$ 阶方阵 $A_\varepsilon = \begin{bmatrix} B + \varepsilon X_0 & C \\ D & E \end{bmatrix}$ 的行列式. 由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -D(B + \varepsilon X_0^{-1}) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B + \varepsilon X_0 & C \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B + \varepsilon X_0 & C \\ 0 & E - D(B + \varepsilon X_0)^{-1}C \end{bmatrix},$$

故两边取行列式得到

$$\begin{aligned} \det A_\varepsilon &= \det(B + \varepsilon X_0)\det(E - D(B + \varepsilon X_0)^{-1}C) \\ &= \det(B + \varepsilon X_0)\det(E - D(B + \varepsilon X_0)^{-1}C)^t \\ &= \det(B + \varepsilon X_0)\det(E^t - C^t((B + \varepsilon X_0)^{-1})^tD^t) \\ &= \det[(B + \varepsilon X_0)E^t - (B + \varepsilon X_0)C^t((B + \varepsilon X_0)^t)^{-1}D^t] \\ &= \det[BE^t + \varepsilon X_0E^t - (B + \varepsilon X_0)C^t((B + \varepsilon X_0)^t)^{-1}D^t] \end{aligned}$$

由式⑨和⑪, 有

$$\begin{aligned} \det A_\varepsilon &= \det(I_n + CD^t + \varepsilon X_0E^t - C(B + \varepsilon X_0)^t((B + \varepsilon X_0)^t)^{-1}D^t) \\ &= \det(I_n + \varepsilon X_0E^t). \end{aligned}$$

令 ε 趋于 0, 上式即化为 $\det A = \det I_n = 1$.

注 3.4.21 的证明方法对 3.4.20 中实的情形也是适用的, 但 3.4.20 的证明方法对 3.4.21 不再适用, 究其原因是在 3.4.20 的证明中, 引用了 3.4.19 的结论: $\det\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = \det(A + iB)\det(A - iB)$. 其中当 A 和 B 为实方阵时, $\det\begin{bmatrix} A & B \\ -B & A \end{bmatrix} = |\det(A + iB)|^2 \geqslant 0$, 这一结论只对实方阵 A 和 B 成立. 其次, 在 3.4.21 中当 $A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ 中 B 不可逆时使用了微小摄动法, 但已不再单纯令 B 变为 $B + \varepsilon I_n$, 而是寻找一个满足 $XC^t = CX^t$ 的 n 阶可逆方阵 X_0, 并将 B 变为 $B + \varepsilon X_0$. 所以微小摄动法如何使用, 应从具体情况出发.

3.4.22 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称方阵, 记

$$\Delta_i = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix}, i = 1, 2, \cdots, n.$$

证明: 如果对于某个 $i, 1 < i < n, \Delta_i = 0$, 而 $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} \neq 0$, 则 Δ_{i-1} 和 Δ_{i+1} 不同号.

证 记

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1i} & a_{2i} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix},$$

$\alpha = (a_{1i}, a_{2i}, \cdots, a_{i-1,i})$, 则

$$A_i = \begin{bmatrix} A_{i-1} & \alpha^t \\ \alpha & a_{ii} \end{bmatrix}.$$

由于 $\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} \neq 0$, 即 $\Delta_{i-1} = \det A_{i-1} \neq 0$, 所以 A_{i-1} 可逆. 因此,

$$\begin{bmatrix} I_{i-1} & 0 \\ -\alpha A_{i-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{i-1} & \alpha^t \\ \alpha & a_{ii} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i-1} & \alpha^t \\ 0 & a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t \end{bmatrix}.$$

两端取行列式, 得到

$$\Delta_i = \Delta_{i-1}(a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t).$$

由于 $\Delta_{i-1} \neq 0, \Delta_i = 0$, 所以 $a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t = 0$.

另一方面, 记

$$A_{i+1} = \begin{pmatrix} A_{i-1} & \alpha^t & \beta^t \\ \alpha & a_{ii} & a_{i,i+1} \\ \beta & a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix},$$

其中 $\beta = (a_{1,i+1}, a_{2,i+1}, \cdots, a_{i-1,i+1})^t$. 由于 A_{i-1} 可逆, 所以

$$\begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 \\ -\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}A_{i-1}^{-1} & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{i-1} & \alpha^t & \beta^t \\ \alpha & a_{ii} & a_{i,i+1} \\ \beta & a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} A_{i-1} & (\alpha^t, \beta^t) \\ 0 & D \end{bmatrix}, \qquad ⑫$$

其中

$$D = \begin{bmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}A_{i-1}^{-1}(\alpha^t, \beta^t)$$

$$-\begin{pmatrix} a_{ii} & a_{i,i+1} \\ a_{i,i+1} & a_{i+1,i+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t & \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t \\ \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t & \beta A_{i-1}^{-1}\beta^t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t & a_{i,i+1} - \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t \\ a_{i,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t & a_{i+1,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\beta^t \end{pmatrix},$$

式 ⑫ 两端取行列式，得到

$$\Delta_{i+1} = \Delta_{i-1}\begin{vmatrix} a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t & a_{i,i+1} - \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t \\ a_{i,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t & a_{i+1,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\beta^t \end{vmatrix}.$$

由于 $a_{ii} - \alpha A_{i-1}^{-1}\alpha^t = 0$，所以

$$\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} = -\Delta_{i-1}^2(a_{i,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t)(a_{i,i+1} - \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t).$$

由于 A 是对称的，所以 A_{i-1} 也是对称的. 从而 A_{i-1}^{-1} 是对称的. 于是

$$(a_{i,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t) = (a_{i,i+1} - \beta A_{i-1}^{-1}\alpha^t)^t = a_{i,i+1} - \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t.$$

因此

$$\Delta_{i-1}\Delta_{i+1} = -\Delta_{i-1}^2(a_{i,i+1} - \alpha A_{i-1}^{-1}\beta^t)^2 < 0,$$

即 Δ_{i-1} 与 Δ_{i+1} 不同号.

3.4.23 设 K 是 $2n$ 阶可逆实斜对称方阵，α 是 $2n$ 维实的列向量. 证明：$2n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} K & \alpha \\ \alpha^t & a \end{bmatrix}$ 可逆的充要条件是 $a \neq 0$.

证 由于 K 可逆，所以

$$\begin{bmatrix} I_{2n} & 0 \\ -\alpha^t K^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & \alpha \\ \alpha^t & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K & \alpha \\ 0 & a - \alpha^t K^{-1}\alpha \end{bmatrix}.$$

两端取行列式，得到

$$\det\begin{bmatrix} K & \alpha \\ \alpha^t & a \end{bmatrix} = (\det K)(a - \alpha^t K^{-1}\alpha).$$

由于 K 是斜对称的，即 $K^t = -K$，所以 $a - \alpha^t K\alpha = (a - \alpha^t K\alpha)^t = a - \alpha^t K^t\alpha = a + \alpha^t K\alpha$. 因此 $-\alpha^t K\alpha = \alpha^t K\alpha = 0$. 即

$$\det\begin{bmatrix} K & \alpha \\ \alpha^t & a \end{bmatrix} = a\det K.$$

因为 K 可逆，所以 $\det K \neq 0$. 从而 $\det\begin{bmatrix} K & \alpha \\ \alpha^t & a \end{bmatrix} \neq 0$ 的充要条件是 $a \neq 0$.

3.4.24 设 n 阶实斜对称方阵 $A = (a_{ij})$ 的顺序主子式为

$$\Delta_i = \det A_i = \det\begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1i} & -a_{2i} & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

$i = 1, 2, \cdots, n$. 证明：如果对某个 $i, i \geqslant 2, \Delta_{2k-2}\Delta_{2k} \neq 0$，则 Δ_{2k-2} 与 Δ_{2k} 同号.

证 注意，

$$A_{2k-1} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \cdots & a_{1,2k-1} \\ -a_{12} & 0 & \cdots & a_{2,2k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1,2k-1} & -a_{2,2k-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

是斜对称的，即 $A_{2k-1}^t = -A_{2k-1}$. 因此 $\det A_{2k-1} = \det A_{2k-1}^t = (-1)^{2k-1}\det A_{2k-1}$. 所以 $\det A_{2k-1} = 0$. 记 $\alpha = (a_{1,2k-1}, a_{2,2k-1}, \cdots, a_{2k-2,2k-1})$，则

$$A_{2k-1} = \begin{bmatrix} A_{2k-2} & \alpha^t \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 $\Delta_{2k-2}\Delta_{2k} = \det A_{2k-2}\det A_{2k} \neq 0$，所以 $\det A_{2k-2} \neq 0$，即 A_{2k-2} 是可逆的，从而

$$\begin{bmatrix} I_{2k-2} & 0 \\ \alpha A_{2k-2}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{2k-2} & \alpha^t \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2k-2} & \alpha^t \\ 0 & \alpha A_{2k-2}^{-1}\alpha^t \end{bmatrix}.$$

两端取行列式得到

$$0 = \det A_{2k-1} = \Delta_{2k-2}(\alpha A_{2k-2}^{-1}\alpha^t).$$

从而 $\alpha A_{2k-2}^{-1}\alpha^t = 0$.

现在记

$$A_{2k} = \begin{pmatrix} A_{2k-2} & \alpha^t & \beta^t \\ -\alpha & 0 & a_{2k-1,2k} \\ -\beta & -a_{2k-1,2k} & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $\beta = (a_{1,2k}, a_{2,2k}, \cdots, a_{2k-2,2k})$. 记 $B = [\alpha^t, \beta^t]$，$D = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k-1,2k} \\ -a_{2k-1,2k} & 0 \end{bmatrix}$，即

$$A_{2k} = \begin{bmatrix} A_{2k-2} & B \\ -B^t & D \end{bmatrix}.$$

因为 $\Delta_{2k-2} = \det A_{2k-2} \neq 0$，即 A_{2k-2} 可逆，所以，

$$\begin{bmatrix} I_{2k-2} & 0 \\ B^t A_{2k-2}^{-1} & I_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{2k-2} & B \\ -B^t & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{2k-2} & B \\ 0 & D + B^t A_{2k-2}^{-1}B \end{bmatrix}.$$

两端取行列式得到

$$\Delta_{2k} = \Delta_{2k-2}\det(D + B^t A_{2k-2}^{-1}B).$$

所以

$$\Delta_{2k-2}\Delta_{2k} = (\Delta_{2k-2})^2\det(D + B^t A_{2k-2}^{-1}B). \quad ⑬$$

由于

$$D + B^t A_{2k-2}^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k-1,2k} \\ -a_{2k-1,2k} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} A_{2k-2}^{-1}[\alpha^t, \beta^t]$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & a_{2k-1,2k} \\ -a_{2k-1,2k} & 0 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha A_{2k-2}^{-1}\alpha^t & \alpha A_{2k-2}^{-1}\beta^t \\ \beta A_{2k-2}^{-1}\alpha^t & \beta A_{2k-2}^{-1}\beta^t \end{pmatrix},$$

因此，由 $\alpha A_{2k-2}^{-1}\alpha' = 0$ 得到

$$D + B'A_{2k-2}^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & a_{2k-1,2k} + \alpha A_{2k-2}^{-1}\beta' \\ -a_{2k-1,2k} + \beta A_{2k-2}^{-1}\alpha' & 0 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\det(D + B'A_{2k-2}^{-1}B) = -(a_{2k-1,2k} + \alpha A_{2k-2}^{-1}\beta')(-a_{2k-1,2k} + \beta A_{2k-2}^{-1}\alpha').$$

因为 A_{2k-2} 是斜对称的，即 $A'_{2k-2} = -A_{2k-2}$，所以 A_{2k-2}^{-1} 也是斜对称的. 因此

$$\beta A_{2k-2}^{-1}\alpha' = (\beta A_{2k-2}^{-1}\alpha')' = \alpha(A'_{2k-2})^{-1}\beta' = -\alpha A_{2k-2}^{-1}\beta'.$$

从而

$$\det(D + B'A_{2k-2}^{-1}B) = (a_{2k-1,2k} + \alpha A_{2k-2}^{-1}\beta')^2.$$

由式⑬得到

$$\Delta_{2k-2}\Delta_{2k} = (\Delta_{2k-2})^2(a_{2k-1,2k} + \alpha A_{2k-2}^{-1}\beta')^2.$$

由题设 $\Delta_{2k-2}\Delta_{2k} \neq 0$，所以 $\Delta_{2k-2}\Delta_{2k} > 0$，从而 Δ_{2k-2}、Δ_{2k} 同号.

3.4.25 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵. 记

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{pmatrix},$$

且 $\Delta_i = \det A_i, i = 1,2,\cdots,n$. 证明：如果 A 的所有非对角元素都是负的，而且 $\Delta_1,\Delta_2,\Delta_3,\cdots,\Delta_n$ 都是正的，则 A 的逆方阵 A^{-1} 的每个元素都是正的.

证 对方阵 A 的阶数 n 用归纳法. 当 $n = 1$ 时，$A = (a_{11})$. 由于 $\Delta_1 = \det A = a_{11} > 0$，所以 $a_{11}^{-1} > 0$，而 $A^{-1} = (a_{11}^{-1})$. 因此结论对 $n = 1$ 成立. 现在假设结论对 $n-1$ 阶方阵成立，往证结论对 n 阶方阵 A 成立. 为此，将 A 分块为 $A = \begin{bmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}$，其中 $\alpha = (a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{n,n-1})$，$\beta' = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})$. 由假设 $\Delta_{n-1} = \det A_{n-1} > 0$，即 A_{n-1} 是可逆的. 因此

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta \end{bmatrix}. \qquad ⑭$$

上式两端取行列式得到

$$\Delta_n = \det A = (\det A_{n-1})(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta) = \Delta_{n-1}(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)$$

由假设 $\Delta_{n-1} > 0, \Delta_n > 0$，所以 $a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta > 0$. 式⑭的两端取逆，并注意

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

所以有

$$\begin{bmatrix} I_{n-1} & A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{n-1} & \beta \\ \alpha & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ \alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1} \end{bmatrix}.$$

从而

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_{n-1}^{-1} & 0 \\ 0 & (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{n-1} & 0 \\ -\alpha A_{n-1}^{-1} & 1 \end{bmatrix}.$$

记 $A^{-1} = (b_{ij}) = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \beta_1 \\ \alpha_1 & b_{nn} \end{pmatrix}$，其中 B_{n-1} 是 A^{-1} 的 $n-1$ 阶子方阵. 则

$$B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}A_{n-1}^{-1}\beta\alpha,$$

$$\alpha_1 = -(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}\alpha A_{n-1}^{-1},$$

$$\beta_1 = -(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}A_{n-1}^{-1}\beta,$$

$$b_{nn} = (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}.$$

由于 $a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta > 0$，所以 $b_{nn} = (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1} > 0$. 其次 $\beta' = (a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{n-1,n})$ 中每个分量都是 A 的非对角元，由题设都是负的，又由于 $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_{n-1}$ 都是正的，而 A_{n-1} 中非对角元都是负的，由归纳假设，A_{n-1}^{-1} 的元素都是正的. 于是 $A_{n-1}^{-1}\beta$ 的每个元素都是负的，所以 $\beta_1 = -(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}A_{n-1}^{-1}\beta$ 的元素都是正的. 同理 $\alpha_1 = -(a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}\alpha A_{n-1}^{-1}\beta$ 的元素都是正的. 最后，β 和 α 的元素都是负的，所以 $n-1$ 阶方阵 $\beta\alpha$ 的元素都是正的，从而 $B_{n-1} = A_{n-1}^{-1} + (a_{nn} - \alpha A_{n-1}^{-1}\beta)^{-1}A_{n-1}^{-1}\beta\alpha$ 的元素都是正的. 这就证明，A^{-1} 中元素都是正的.

3.4.26 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵，记

$$A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & k \\ 12 & \cdots & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix},$$

$$1 \leqslant k \leqslant n-1,$$

$$A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & ki \\ 12 & \cdots & kj \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & a_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} & a_{kj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

$$k+1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

并记 $\Delta_k = \det A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & k \\ 12 & \cdots & k \end{pmatrix}$，

$$D_{ij} = \det A\begin{pmatrix}12 & \cdots & ki\\12 & \cdots & kj\end{pmatrix},\text{且}$$

$$D = \begin{vmatrix} D_{k+1,k+1} & D_{k+1,k+2} & \cdots & D_{k+1,n}\\ D_{k+2,k+1} & D_{k+2,k+2} & \cdots & D_{k+2,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ D_{n,k+1} & D_{n,k+2} & \cdots & D_{n,n}\end{vmatrix}.$$

证明:如果 $\Delta_k \neq 0$,则 $\det A = \dfrac{\det D}{\Delta_k^{n-k-1}}$.

证 将 n 阶方阵 A 分块为 $A = \begin{bmatrix} C & E\\ R & T\end{bmatrix}$,其中 $C = A\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots\\ 1 & 2 & \cdots\end{pmatrix}$. 由于 $\Delta_k = \det C \neq 0$,所以 C 是可逆的. 因此

$$\begin{bmatrix} I_k & 0\\ -RC^{-1} & I_{n-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & E\\ R & T\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -C^{-1}E\\ 0 & I_{n-k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0\\ 0 & T-RC^{-1}E\end{bmatrix}.$$

两端取行列式得到

$$\det A = \det\begin{bmatrix} C & E\\ R & T\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} C & 0\\ 0 & T-RC^{-1}E\end{bmatrix} = \det C\det(T-RC^{-1}E) = \Delta_k\det(T-RC^{-1}E).$$

现在求 $\det(T-RC^{-1}E)$. 由方阵 A 的分块方式 $A = \begin{bmatrix} C & E\\ R & T\end{bmatrix}$ 可知

$$T = \begin{vmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & \cdots & a_{k+1,n}\\ a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & \cdots & a_{k+2,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,k+1} & a_{n,k+2} & \cdots & a_{n,n}\end{vmatrix},$$

$$R = \begin{vmatrix} a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \cdots & a_{k+1,k}\\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & \cdots & a_{k+2,k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,k}\end{vmatrix},$$

$$E = \begin{vmatrix} a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,n}\\ a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,n}\end{vmatrix}.$$

记 $\alpha_i = (a_{k+i,1}, a_{k+i,2}, \cdots, a_{k+i,k})$, $\beta_j = (a_{1,k+j}, a_{2,k+j}, \cdots, a_{k,k+j})$,并记 $T-RC^{-1}E = (f_{k+i,k+j})$,则

$$f_{k+i,k+j} = a_{k+i,k+j} - \alpha_i C^{-1}\beta_j.$$

由于

$$A\begin{pmatrix}12\cdots k & k+i\\12\cdots k & k+j\end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C & \beta_j\\ \alpha_i & a_{k+i,k+j}\end{bmatrix},$$

其中 $\det C = \Delta_k \neq 0$,即 C 是可逆的,因此

$$\begin{bmatrix} I_k & 0\\ -\alpha_i C^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} C & \beta_j\\ \alpha_i & a_{k+i,k+j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_k & -C^{-1}\beta_j\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0\\ 0 & f_{k+i,k+j}\end{bmatrix}.$$

两端取行列式得到

$$D_{k+i,k+j} = \det A\begin{pmatrix}12\cdots k & k+i\\12\cdots k & k+j\end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} C & \beta_j\\ \alpha_i & a_{k+i,k+j}\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} C & 0\\ 0 & f_{k+i,k+j}\end{bmatrix} = f_{k+i,k+j}\det C = \Delta_k f_{k+i,k+j}.$$

因此 $f_{k+i,k+j} = \dfrac{1}{\Delta_k}D_{k+i,k+j}$. 于是得到

$$T - RC^{-1}E = \frac{1}{\Delta_k}D.$$

所以 $\det(T-RC^{-1}E) = \dfrac{1}{\Delta_k^{n-k}}\det D$(注意 D 是 $n-k$ 阶方阵). 于是

$$\det A = \Delta_k\det(T-RC^{-1}E) = \frac{\det D}{\Delta_k^{n-k-1}}.$$

3.4.27 设 $n-1$ 阶行列式 D_n 为

$$D_n = \det\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & n+1\end{vmatrix}.$$

问数列 $\dfrac{D_2}{2!}, \dfrac{D_3}{3!}, \cdots, \dfrac{D_n}{n!}, \cdots$ 是否是有界的.

解 记 $\alpha = (1,1,\cdots,1)$ 是 $n-1$ 维行向量,并且记

$$A_n = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 3 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & n\end{vmatrix}.$$

则

$$D_n = \det[A_n + \alpha^t\alpha].$$

而 $A_n + \alpha^t\alpha$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix}$ 关于1的Schur补. 由于

$$\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -\alpha^t & I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ 0 & A_n+\alpha^t\alpha\end{bmatrix},$$

所以两端取行列式得到

$$D_n = \det\begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix}.$$

另一方面,

$$\begin{bmatrix} 1 & \alpha A_n^{-1}\\ 0 & I_{n-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha A_n^{-1}\alpha^t & 0\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix},$$

故两端取行列式得到

$$D_n = \det\begin{bmatrix} 1 & -\alpha\\ \alpha^t & A_n\end{bmatrix} = (1+\alpha A_n^{-1}\alpha^t)\det A_n.$$

易知 $\det A_n = n!$,而

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix},$$

因此

$$\alpha A_n^{-1}\alpha' = (1,1,\cdots,1)\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

所以

$$D_n = (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n})n!$$

于是

$$\frac{D_n}{n!} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

因此数列$\frac{D_2}{2!},\frac{D_3}{3!},\cdots,\frac{D_n}{n!},\cdots$是无界的.

§3.5 矩阵打洞与矩阵的秩

根据Sylvester1851年的定义,一个 $m\times n$ 矩阵A的所有非零子式的最高阶数称为矩阵 A 的秩,记作rank$A$.矩阵的秩是一个基本概念,在线性空间理论和矩阵论中具有基本的重要性.在§3.3中我们曾经利用矩阵 行和列的初等变换来求一个给定的矩阵的秩.这一节我们将用矩阵打洞技巧,即分块矩阵的初等变换,来处理有关矩阵的秩的命题和矩阵的秩不等式.我们从 一些最基本的事实开始.

3.5.1 证明:设 $A=(a_{ij})$ 是任意一个 $m\times n$ 矩阵,取自矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $j_1,j_2,\cdots,j_l$ 列的交叉位置上的元素组成的 $k\times l$ 子矩阵记作 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}$,即

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_l} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_l} \end{pmatrix}.$$

其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m, 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_l\leqslant n$,则 rank$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}\leqslant$ rank$A$.换句话说,矩阵A的任何一个子矩阵B的秩不大于矩阵A的秩.

证 设 rank$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}=s$,则由秩的定义,子矩阵 $A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}$必有一个$s$阶子式$\Delta_s$不为零.由于$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}$是$A$的子矩阵,所以$\Delta_s$也是$A$的一个非零的子式. 由秩的定义,rank$A\geqslant s=$ rank$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_k \\ j_1 j_2\cdots j_l \end{pmatrix}$.

3.5.2 设A和B分别是 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵,C和D分别是 $p\times n$ 和 $m\times q$ 矩阵.证明:

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\leqslant \text{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}, \quad (1)$$

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\leqslant \text{rank}\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}. \quad (2)$$

证 由于矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$分别是矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B \end{bmatrix}$的子矩阵,所以由3.5.1即得3.5.2.

注 3.5.2尽管很简单,却非常有用.

3.5.3 设A和B分别是 $m\times n$ 和 $p\times q$ 矩阵.证明

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \text{rank}A + \text{rank}B. \quad (3)$$

证 设 rank$A=r$,rank$B=s$.则由秩的定义,分别存在A的r阶子矩阵$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r \end{pmatrix}$和$B$的$s$阶子矩阵$B\begin{pmatrix} k_1 k_2\cdots k_s \\ l_1 l_2\cdots l_s \end{pmatrix}$,其中 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_r\leqslant m$, $1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n, 1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_s\leqslant p$ 和 $1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_s\leqslant q$,使得

$$\det A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r \end{pmatrix}\neq 0, \det B\begin{pmatrix} k_1 k_2\cdots k_s \\ l_1 l_2\cdots l_s \end{pmatrix}\neq 0.$$

记 $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$,则

$$C\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r, m+k_1, m+k_2,\cdots,m+k_s \\ j_1 j_2\cdots j_r, n+l_1, n+l_2,\cdots,n+l_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & B\begin{pmatrix} k_1 k_2\cdots k_s \\ l_1 l_2\cdots l_s \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det C\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r, m+k_1, m+k_2,\cdots,m+k_s \\ j_1 j_2\cdots j_r, n+l_1, n+l_2,\cdots,n+l_s \end{pmatrix}$$

$$= \det A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_r \\ j_1 j_2\cdots j_r\end{pmatrix}\det B\begin{pmatrix} k_1 k_2\cdots k_s \\ l_1 l_2\cdots l_s\end{pmatrix}\neq 0.$$

因此由秩的定义,有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}\geqslant r+s=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B.$$

现在设D是C的任意一个$r+s+1$阶子矩阵,即

$$D=C\begin{pmatrix} i_1\ i_2\cdots i_{r+s+1} \\ j_1\ j_2\cdots j_{r+s+1}\end{pmatrix},$$

其中$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_f\leqslant m<i_{f+1}<\cdots<i_{r+s+1}\leqslant m+p$,$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_g\leqslant n<j_{g+1}<j_{g+2}<\cdots<j_{r+s+1}\leqslant n+q$.则

$$D=\begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2\end{pmatrix},$$

其中$D_1=A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_f \\ j_1 j_2\cdots j_g\end{pmatrix}$,

$$D_2=B\begin{pmatrix} i_{f+1}-m, i_{f+2}-m,\cdots, i_{r+s+1}-m \\ j_{g+1}-n, j_{g+2}-n,\cdots, j_{r+s+1}-n\end{pmatrix}.$$

如果$f\neq q$,则块对角方阵D的对角块

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_f \\ j_1 j_2\cdots j_g\end{pmatrix}$$

和

$$B\begin{pmatrix} i_{f+1}-m, i_{f+2}-m,\cdots, i_{r+s+1}-m \\ j_{g+1}-n, j_{g+2}-n,\cdots, j_{r+s+1}-n\end{pmatrix}$$

都不是方阵.因此由行列式的 Laplace 展开定理即知$\det D=0$;如果$f=g$,则块对角方阵D的对角块

$$A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_f \\ j_1 j_2\cdots j_g\end{pmatrix}$$

和

$$B\begin{pmatrix} i_{f+1}-m, i_{f+2}-m,\cdots, i_{r+s+1}-m \\ j_{g+1}-n, j_{g+2}-n,\cdots, j_{r+s+1}-n\end{pmatrix}$$

都是方的.因此

$$\det D=\det A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_f \\ j_1 j_2\cdots j_f\end{pmatrix}\times\det B\begin{pmatrix} i_{f+1}-m, i_{f+2}-m,\cdots, i_{f+s+1}-m \\ j_{g+1}-n, j_{g+2}-n,\cdots, j_{r+s+1}-n\end{pmatrix}.$$

如果$f>r=\operatorname{rank}A$,则由秩的定义,$\det A\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_f \\ j_1 j_2\cdots j_f\end{pmatrix}=0$,从而$\det D=0$;如果$f\leqslant r$,则$r+s+1-f>s=\operatorname{rank}B$,因此由秩的定义,$\det B\begin{pmatrix} i_{f+1}-m, i_{f+2}-m,\cdots, i_{f+s+1}-m \\ j_{g+1}-n, j_{g+2}-n,\cdots, j_{r+s+1}-n\end{pmatrix}=0$,从而$\det D=0$.所以$C$的任意一个$r+s+1$阶子式全为零.于是由秩的定义可知,$\operatorname{rank}C=r+s$.

注1 3.5.3的证明写得很形式化.其实只要注意,矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B\end{bmatrix}$的任何子矩阵都是由$A$和$B$的子矩阵构成的块对角矩阵即可.

注2 3.5.3往往和3.5.2连用,即有

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\leqslant\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & B\end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}B\leqslant\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & D \\ 0 & B\end{bmatrix}.$$

再结合矩阵打洞技巧,即可推导出许许多多奇妙的结论.

3.5.4 设A,B,C和D分别是$m\times m$,$m\times q$,$p\times m$和$p\times q$矩阵,其中A是可逆的.证明:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B),$$

而且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\operatorname{rank}A$$

的充要条件是$D=CA^{-1}B$.

证 因为A是可逆的,所以有

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_q\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}.\qquad ①$$

由于$\det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_p\end{bmatrix}=1$,$\det\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_q\end{bmatrix}=1$,所以方阵$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_p\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_q\end{bmatrix}$是可逆的,因此方阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_q\end{bmatrix}$是相抵的.由于矩阵的秩是矩阵在相抵下的不变量,因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\\&\quad\times\begin{bmatrix} I_m & -A^{-1}B \\ 0 & I_q\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

于是由式①,有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}.$$

由3.5.3,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}&=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D-CA^{-1}B\end{bmatrix}\\&=\operatorname{rank}A+\operatorname{rank}(D-CA^{-1}B).\end{aligned}$$

现在如果 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank}A$，则 $\operatorname{rank}(D - CA^{-1}B) = 0$ 由秩的定义，$D - CA^{-1}B$ 中任何一个1阶子式，即任意一个元素都是零，即 $D - CA^{-1}B = 0$，所以 $D = CA^{-1}B$. 反之，如果 $D = CA^{-1}B$，则 $D - CA^{-1}B = 0$ 从而 $\operatorname{rank}(D - CA^{-1}B) = 0$. 于是有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank}A.$$

3.5.5 设 A 和 B 是 n 阶方阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(AB - I_n) \leqslant \operatorname{rank}(A - I_n) + \operatorname{rank}(B - I_n).$$

证 由3.5.3，有

$$\operatorname{rank}(A - I_n) + \operatorname{rank}(B - I_n) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{pmatrix}.$$

将 $2n$ 阶分块方阵 $\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix}$ 的第2行左乘以 A 加到第1行，即有

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I_n & AB - A \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix}.$$

再将第2列加到第1列，即有

$$\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB - I_n & AB - A \\ B - I_n & B - I_n \end{bmatrix}.$$

由于 $\det\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = 1$，$\det\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = 1$，所以方阵 $\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$ 是可逆的，因此方阵 $\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}$ 是相抵的. 由于矩阵的秩是矩阵在相抵下的不变量，所以

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}(A - I_n) + \operatorname{rank}(B - I_n) \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A - I_n & 0 \\ 0 & B - I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB - I_n & AB - A \\ B - I_n & B - I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由3.5.1，有

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(AB - I_n) &\leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB - I_n & AB - A \\ B - I_n & B - I_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}(A - I_n) + \operatorname{rank}(B - I_n). \end{aligned}$$

注 3.5.5的证明中将 $A - I_n$ 与 $B - I_n$ 的秩之和视为矩阵 $\begin{pmatrix} A & I_n & 0 \\ 0 & B & I_n \end{pmatrix}$ 的秩，是关键性的一步.

3.5.6 设 A 和 B 是 $m \times n$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B. \tag{4}$$

证 由3.5.3，有

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

将 $2m \times 2n$ 矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的第2行加到第1行，即有

$$\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

再将第1列加到第2列，即有

$$\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & A + B \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由于 $\det\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = 1$，$\det\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = 1$，所以方阵 $\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 是可逆的，从而矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 是相抵的. 由于矩阵的秩是矩阵在相抵下的不变量，所以

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A + B \\ 0 & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由3.5.1，

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}(A + B) &\leqslant \operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & A + B \\ 0 & B \end{pmatrix} \\ &= \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B. \end{aligned}$$

3.5.7 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $m \times p$ 矩阵. 由矩阵 A 和 B 并排而成的 $m \times (n + p)$ 矩阵记作 $[A, B]$. 证明:

$$\operatorname{rank}[A, B] \leqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.$$

证 由3.5.3，有

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

将 $2m \times (n + p)$ 矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的第2行加到第1行，即有

$$\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

即矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_m & I_m \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 是相抵的，因此

$$\text{rank}A+\text{rank}B=\text{rank}\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}A&B\\0&B\end{bmatrix}.$$

注意$[A,B]$是矩阵$\begin{bmatrix}A&B\\0&B\end{bmatrix}$的子矩阵. 由3.5.1,有

$$\text{rank}[A,B]\leqslant\text{rank}\begin{bmatrix}A&B\\0&B\end{bmatrix}=\text{rank}A+\text{rank}B.$$

3.5.8 设A和B分别是$m\times n$和$n\times p$矩阵. 证明:

$$\text{rank}AB\leqslant\min\{\text{rank}A,\text{rank}B\}.\tag{5}$$

证 由3.5.3,有

$$\text{rank}A=\text{rank}[A,O_{m\times p}].$$

其中$O_{m\times p}$是$m\times p$零矩阵. 将矩阵$[A,O_{m\times p}]$的第1列右乘以B加到第2列,即有

$$[A,O_{m\times p}]\begin{bmatrix}I_n&B\\0&I_p\end{bmatrix}=[A,AB].$$

由于矩阵$[A,O_{m\times p}]$和$[A,O_{m\times p}]\begin{bmatrix}I_n&B\\0&I_p\end{bmatrix}$是相抵的,所以

$$\begin{aligned}\text{rank}A&=\text{rank}[A,O_{m\times p}]\\&=\text{rank}[A,O_{m\times p}]\begin{bmatrix}I_n&B\\0&I_p\end{bmatrix}\\&=\text{rank}[A,AB].\end{aligned}$$

由于AB是矩阵$[A,AB]$的子矩阵,所以由3.5.1,有

$$\text{rank}AB\leqslant\text{rank}[A,AB]=\text{rank}A.$$

同理,由3.5.3,有

$$\text{rank}B=\text{rank}\begin{bmatrix}B\\O_{m\times p}\end{bmatrix}.$$

将矩阵$\begin{bmatrix}B\\O_{m\times p}\end{bmatrix}$的第1行左乘以矩阵$A$加到第2行,即有

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\A&I_m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\O_{m\times p}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B\\AB\end{bmatrix}.$$

则

$$\text{rank}B=\text{rank}\begin{bmatrix}B\\O_{m\times p}\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{bmatrix}B\\AB\end{bmatrix}.$$

由3.5.1,有

$$\text{rank}AB\leqslant\text{rank}\begin{bmatrix}B\\AB\end{bmatrix}=\text{rank}B.$$

于是得到

$$\text{rank}AB\leqslant\min\{\text{rank}A,\text{rank}B\}.$$

3.5.9 如果n阶方阵A满足$A^2=A$,则A称为幂等的. 证明:对任意n阶方阵A,均有

$$\text{rank}A+\text{rank}(I_n-A)\geqslant n,$$

其中当且仅当A是幂等方阵时等式成立.

证 由3.5.3,有

$$\text{rank}A+\text{rank}(I_n-A)=\text{rank}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}$$

将$2n$阶方阵$\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}$的第1行加到第2行,即得

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\I_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&0\\A&I_n-A\end{bmatrix},$$

再将第1列加到第2列,得到

$$\begin{bmatrix}I_n&0\\I_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&I_n\\0&I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A&A\\A&I_n\end{bmatrix},$$

将第2行左乘以$-A$加到第1行,得到

$$\begin{bmatrix}I_n&-A\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&0\\I_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&I_n\\0&I_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A-A^2&0\\A&I_n\end{bmatrix},$$

再将第2列右乘以$-A$加到第1列,即得

$$\begin{bmatrix}I_n&-A\\0&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&0\\I_n&I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n&I_n\\0&I_n\end{bmatrix}$$

$$\times\begin{bmatrix}I_n&0\\-A&I_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A-A^2&0\\0&I_n\end{bmatrix}.$$

于是方阵$\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix}A-A^2&0\\0&I_n\end{bmatrix}$是相抵的. 所以有

$$\begin{aligned}\text{rank}A+\text{rank}(I_n-A)&=\text{rank}\begin{bmatrix}A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}\\&=\text{rank}\begin{bmatrix}A-A^2&0\\0&I_n\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

由3.5.3,有

$$\begin{aligned}&\text{rank}A+\text{rank}(I_n-A)\\&=\text{rank}I_n+\text{rank}(A-A^2)\\&=n+\text{rank}(A-A^2)\geqslant n.\end{aligned}$$

上式当且仅当$\text{rank}(A-A^2)=0$,即$A=A^2$时等式成立.

注 3.5.9说明,如果记$f(A)=\text{rank}A+\text{rank}(I_n-A)$,则$f(A)$是定义在所有$n$阶方阵$A$的集合上的函数,其最小值为$n$,而且当且仅当$A$为幂等方阵时$f(A)$取到最小值$n$.

3.5.10 如果n阶方阵A满足$A^2=I_n$,则A称为对合方阵. 证明:对于任意n阶方阵A均有

$$\text{rank}(I_n+A)+\text{rank}(I_n-A)\geqslant n,$$

其中等式当且仅当A为对合方阵时成立.

证 由3.5.3,有

$$\begin{aligned}&\text{rank}(I_n+A)+\text{rank}(I_n-A)\\&=\text{rank}\begin{bmatrix}I_n+A&0\\0&I_n-A\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

将 $2n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}$ 的第 2 行加到第 1 行，即得

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n+A & I_n-A \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}.$$

将第 2 列加到第 1 列，得到

$$\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & I_n-A \\ I_n-A & I_n-A \end{bmatrix}.$$

将第 1 行左乘以 $-\frac{1}{2}(I_n-A)$ 加到第 2 行，即得

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{1}{2}(I_n-A) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & I_n-A \\ 0 & \frac{1}{2}(I_n-A^2) \end{bmatrix}.$$

将第 1 列右乘以 $-\frac{1}{2}(I_n-A)$ 加到第 2 列，得到

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{1}{2}(I_n-A) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -\frac{1}{2}(I_n-A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2I_n & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(I_n-A^2) \end{bmatrix}.$$

最后第 1 行乘以 $\frac{1}{2}$，第 2 行乘于 2，即得

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}I_n & 0 \\ 0 & 2I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -\frac{1}{2}(I_n-A) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & I_n \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ I_n & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -\frac{1}{2}(I_n-A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{bmatrix}.$$

注意上式中 $2n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}$ 左乘和右乘的方阵都是可逆的，因此 $\begin{bmatrix} I_n+A & 0 \\ 0 & I_n-A \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{bmatrix}$ 是相抵的，所以

$$\operatorname{rank}(I_n+A)+\operatorname{rank}(I_n-A) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & I_n-A^2 \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\begin{aligned} &\operatorname{rank}(I_n+A)+\operatorname{rank}(I_n-A) \\ &= \operatorname{rank}I_n + \operatorname{rank}(I_n-A^2) \\ &= n + \operatorname{rank}(I_n-A^2) \geqslant n. \end{aligned}$$

等式当且仅当 $\operatorname{rank}(I_n-A^2)=0$ 即 $I_n=A^2$ 时成立.

3.5.11 设 A 是 n 阶可逆方阵，B 是 $m\times n$ 矩阵. 证明：

$$\operatorname{rank}(A-B'B)-\operatorname{rank}(I_m-BA^{-1}B') = n-m.$$

证 注意，$I_m-BA^{-1}B'$ 是 $n+m$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix}$ 关于 A 的 Schur 补(见 §3.4). 因此有

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B' \\ 0 & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m-BA^{-1}B' \end{bmatrix}.$$

由于 $n+m$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -BA^{-1} & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}B' \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以 $\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m-BA^{-1}B' \end{bmatrix}$ 是相抵的，所以

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & I_m-BA^{-1}B' \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(I_m-BA^{-1}B').$$

由题设 A 是可逆的，所以 $\operatorname{rank}A = n$. 因此

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(I_m-BA^{-1}B'). \quad ②$$

另一方面，

$$\begin{bmatrix} I_n & -B' \\ 0 & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-B'B & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

由于 $\begin{bmatrix} I_n & -B' \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -B & I_m \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以 $\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A-B'B & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}$ 是相抵的，因此

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A-B'B & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B' \\ B & I_m \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(A - B'B) + \operatorname{rank} I_m$$
$$= \operatorname{rank}(A - B'B) + m.$$

由式②即得

$$n + \operatorname{rank}(I_m - BA^{-1}B') = \operatorname{rank}(A - B'B) + m.$$

由此即得

$$\operatorname{rank}(A - B'B) - \operatorname{rank}(I_m - BA^{-1}B') = n - m.$$

3.5.12　设 A 是 n 阶可逆方阵，α 和 β 是 n 维列向量. 证明

$$\operatorname{rank}(A + \alpha\beta') \geqslant n - 1,$$

其中当且仅当 $\beta' A^{-1}\alpha = -1$ 时等式成立.

证　注意，n 阶方阵 $A + \alpha\beta'$ 是 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix}$ 关于东南角元素 1 的 Schur 补. 由于方阵 A 是可逆的，所以有

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \beta' A^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + \beta' A^{-1}\alpha \end{bmatrix}.$$

上式中 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \beta' A^{-1} & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & -A^{-1}\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + \beta' A^{-1}\alpha \end{bmatrix}$ 是相抵的，因此

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 + \beta' A^{-1}\alpha \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha).$$

由题设，方阵 A 是可逆的，所以 $\operatorname{rank}A = n$. 于是

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{pmatrix} = n + \operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha). \qquad ③$$

另一方面，

$$\begin{bmatrix} I_n & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \beta' & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + \alpha\beta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

因为 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} I_n & -\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ \beta' & 1 \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以 $n+1$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A + \alpha\beta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是相抵的. 因此

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A + \alpha\beta' & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & \alpha \\ -\beta' & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}(A + \alpha\beta') + 1.$$

于是由式③得到

$$\operatorname{rank}(A + \alpha\beta') + 1 = n + \operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha),$$

即

$$\operatorname{rank}(A + \alpha\beta') = n - 1 + \operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha).$$

显然 $\operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha) \geqslant 0$，且 $\operatorname{rank}(1 + \beta' A^{-1}\alpha) = 0$ 当且仅当 $1 + \beta' A^{-1}\alpha = 0$，即 $\beta' A^{-1}\alpha = -1$，所以

$$\operatorname{rank}(A + \alpha\beta') \geqslant n - 1,$$

其中当且仅当 $\beta' A^{-1}\alpha = -1$ 时等式成立.

3.5.13　(Sylvester 秩不等式)　设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times p$ 矩阵. 证明：

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B - n \leqslant \operatorname{rank}AB. \qquad (6)$$

证　由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

由 3.5.2，有

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}.$$

对调 $(n+m) \times (p+n)$ 矩阵 $\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}$ 的第 1，2 列，得到

$$\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

将第 1 行左乘以 $-A$ 加到第 2 行，即得

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_n & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ 0 & -AB \end{bmatrix}.$$

将第 1 列右乘以 $-B$ 加到第 2 列，得到

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -AB \end{bmatrix}.$$

第 2 行左乘以 $-I_m$，得到

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & -I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -A & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_p \\ I_n & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & -B \\ 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}.$$

上式中 $(n+m) \times (p+n)$ 矩阵 $\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}$ 是相抵的. 所以

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & I_n \\ 0 & A \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & AB \end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank} I_n + \operatorname{rank} AB$$
$$= n + \operatorname{rank} AB.$$

从而有

$$\operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B - n \leqslant \operatorname{rank} AB.$$

注 Sylvester秩不等式是一个基本的秩不等式，在论证秩不等式时非常有用.

3.5.14 （Frobenius秩不等式） 设 A,B 和 C 分别是 $m\times n, n\times p$ 和 $p\times q$ 矩阵. 证明：

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank} ABC. \qquad (7)$$

证 由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix}.$$

由 3.5.2，有

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ 0 & BC \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}. \qquad ①$$

将矩阵 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}$ 的第 1 列右乘以 $-C$ 加到第 2 列，得到

$$\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -C \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AB & -ABC \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

将第 2 行左乘以 $-A$ 加到第 1 行，即得

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -C \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -ABC \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

将第 1 行左乘以 $-I_m$，并和第 2 行对调，得到

$$\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_m & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_p & -C \\ 0 & I_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{bmatrix}.$$

上式中左乘和右乘于矩阵 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}$ 的方阵都是可逆的，因此矩阵 $\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{bmatrix}$ 是相抵的. 从而

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & ABC \end{bmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} AB & 0 \\ B & BC \end{bmatrix} = \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} ABC.$$

由式 ① 得到

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC \leqslant \operatorname{rank} B + \operatorname{rank} ABC.$$

从而

$$\operatorname{rank} AB + \operatorname{rank} BC - \operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank} ABC.$$

注 当 $B = I_n$ 时，Frobenius 秩不等式即化为 Sylvester 秩不等式. 换言之，Frobenius 秩不等式是 Sylverster 秩不等式的推广.

3.5.15 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 n 阶方阵，$k \geqslant 2$. 证明：

$$\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_k \leqslant n(k-1) + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k,$$

而且其中等式是可以达到的.

证 对 k 用归纳法. 当 $k=2$ 时，欲证的不等式为

$$\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 \leqslant n + \operatorname{rank} A_1A_2.$$

由 Sylvester 秩不等式知上式成立. 现在设结论对 k 成立. 下面证明结论对 $k+1$ 成立

设 $A_1, A_2, \cdots, A_{k-1}$ 是 n 阶方阵. 由归纳假设，

$$\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_k \leqslant n(k-1) + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k.$$

于是

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_{k+1} \\ &= (\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_k) + \operatorname{rank} A_{k+1} \\ &\leqslant n(k-1) + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k + \operatorname{rank} A_{k+1}.\end{aligned}$$

对 n 阶方阵 $A = A_1A_2\cdots A_k$ 和 $B = A_{k+1}$ 应用 Sylvester 秩不等式，得到

$$\operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k + \operatorname{rank} A_{k+1} \leqslant n + \operatorname{rank}(A_1A_2\cdots A_k)A_{k+1}.$$

因此

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_{k+1} \\ &\leqslant n(k-1) + n + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_{k+1} \\ &\leqslant nk + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_{k+1}.\end{aligned}$$

这就证明，欲证的秩不等式成立.

取 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = I_n$，则

$$\operatorname{rank} A_1 = \operatorname{rank} A_2 = \cdots = \operatorname{rank} A_k = n.$$

因此

$$\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_k = nk.$$

而 $A_1A_2\cdots A_k = I_n$，因此 $\operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k = n$. 所以 $n(k-1) + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k = n(k-1) + n = nk$. 于是

$$\operatorname{rank} A_1 + \operatorname{rank} A_2 + \cdots + \operatorname{rank} A_k = n(k-1) + \operatorname{rank} A_1A_2\cdots A_k.$$

因此题设的秩不等式中当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_k = I_n$ 时等号成立.

3.5.16 设 A 是 n 阶方阵. 证明：存在正整数 k，使得

$$\operatorname{rank} A^k = \operatorname{rank} A^{k+1} = \operatorname{rank} A^{k+2} = \cdots.$$

证 设 $r = \operatorname{rank} A$. 由 3.5.8，有

$$r = \operatorname{rank} A \geqslant \operatorname{rank} A^2 \geqslant \operatorname{rank} A^3 \geqslant \cdots.$$

记 $R = \{\operatorname{rank} A^i : i = 1,2,\cdots\}$. 由于 $\operatorname{rank} A^i$ 是非负整数，因此 R 是一个非增的非负整数序列. 所以存在正

整数 k，使得 $\text{rank}A^k=\text{rank}A^{k+1}$. 由 3.5.8，有 $\text{rank}A^{k+2}\leqslant\text{rank}A^{k+1}$. 另一方面，由 Frobenius 秩不等式，有

$$\begin{aligned}\text{rank}A^{k+2}&-\text{rank}AA^kA\\&\geqslant\text{rank}AA^k+\text{rank}A^kA-\text{rank}A^k\\&=2\text{rank}A^{k+1}-\text{rank}A^k.\end{aligned}$$

由于 $\text{rank}A^k=\text{rank}A^{k+1}$，所以

$$\text{rank}A^{k+2}\geqslant\text{rank}A^{k+1}.$$

于是得到

$$\text{rank}A^{k+2}=\text{rank}A^{k+1}=\text{rank}A^k.$$

现在记 $l=k+1$，则有 $\text{rank}A^l=\text{rank}A^{l+1}$. 重复上面证明，即得

$$\text{rank}A^{l+2}=\text{rank}A^{l+1}=\text{rank}A^l.$$

即

$$\text{rank}A^{k+3}=\text{rank}A^{k+2}=\text{rank}A^{k+1}=\text{rank}A^k.$$

如此继续，即得

$$\text{rank}A^k=\text{rank}A^{k+1}=\text{rank}A^{k+2}=\cdots.$$

3.5.17 (Ballantine,1978) 设 A 是 n 阶方阵，$r=\text{rank}A<n$. 证明：如果存在 k 个 n 阶幂等方阵 $B_1,B_2,\cdots,B_k$，使得 $A=B_1B_2\cdots B_k$，则

$$\text{rank}(I_n-A)\leqslant k(n-\text{rank}A).$$

证 首先注意

$$\begin{aligned}I_n-A=&(I_n-B_1)+(B_1-B_1B_2)+\cdots\\&+(B_1B_2\cdots B_{k-1}-B_1B_2\cdots B_{k-1}B_k).\end{aligned}$$

于是由 3.5.6，有

$$\begin{aligned}&\text{rank}(I_n-A)\\&=\text{rank}((I_n-B_1)+(B_1-B_1B_2)+\cdots\\&\quad+(B_1B_2\cdots B_{k-1}-B_1B_2\cdots B_{k-1}B_k))\\&\leqslant\text{rank}(I_n-B_1)+\text{rank}(B_1-B_1B_2)+\cdots\\&\quad+\text{rank}(B_1B_2\cdots B_{k-1}-B_1B_2\cdots B_{k-1}B_k).\end{aligned}\tag{⑤}$$

其次注意

$$\begin{aligned}&B_1B_2\cdots B_{i-1}-B_1B_2\cdots B_{i-1}B_i\\&=B_1B_2\cdots B_{i-1}(I_n-B_i).\end{aligned}$$

而 $(I_n-B_i)^2=I_n-2B_i+B_i^2$. 因为 B_i 是幂等的，即 $B_i^2=B_i$，所以 $(I_n-B_i)^2=I_n-B_i$，即 I_n-B_i 是幂等的. 由 3.5.9，有 $\text{rank}B_i+\text{rank}(I_n-B_i)=n$，即

$$\text{rank}(I_n-B_i)=n-\text{rank}B_i.$$

于是由 3.5.8，有

$$\begin{aligned}&\text{rank}(B_1B_2\cdots B_{i-1}-B_1B_2\cdots B_{i-1}B_i)\\&=\text{rank}(B_1B_2\cdots B_{i-1})(I_n-B_i)\\&\leqslant\text{rank}(I_n-B_i)=n-\text{rank}B_i.\end{aligned}$$

由于 $A=(B_1B_2\cdots B_i)(B_{i+1}\cdots B_k)$，故由 3.5.8，有

$$\begin{aligned}\text{rank}A&\leqslant\text{rank}B_1B_2\cdots B_i\\&=\text{rank}(B_1B_2\cdots B_{i-1})B_i\leqslant\text{rank}B_i.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\text{rank}(B_1B_2\cdots B_{i-1}-B_1B_2\cdots B_{i-1}B_i)\\&\leqslant n-\text{rank}B_i\leqslant n-\text{rank}A.\end{aligned}$$

于是由式⑤得到

$$\text{rank}(I_n-A)\leqslant k(n-\text{rank}A).$$

注 从3.5.15到3.5.17，主要用的是本节已经证明的秩不等式. 利用已知的基本秩不等式来证明新的秩不等式，也是一种重要的方法.

3.5.18 设 A 是 n 阶对称方阵，且 $r=\text{rank}A$. 证明：

(1) $r=0$ 的充要条件是，A 的所有1阶和2阶主子式都等于零；

(2) $r=n-1$ 的充要条件是，A 中有一个 $n-1$ 阶非零的主子式，而且 $\det A=0$；

(3) 当 $1\leqslant r\leqslant n-2$ 时，A 的秩为 r 的充要条件是，A 中有一个 r 阶非零的主子式，而且它的所有 $r+1$ 阶和 $r+2$ 阶加边主子式全为零.

证 (1) 设对称方阵 A 的秩为零，则由秩的定义，A 的所有 1 阶子式都是零，即 A 的所有元素都是零. 因此 A 是零矩阵，从而 A 的所有1阶和2阶主子式都是零. 反之，设对称方阵 A 的所有 1 阶和 2 阶主子式都是零，由于 A 的 1 阶主子式即是 A 的对角元，所以 A 的对角元都是零. 记 $A=(a_{ij})$. 对任意 $i,j,1\leqslant i\neq j\leqslant n$，$A$ 的第 i,j 行和第 i,j 列的 2 阶主子式 $A\begin{pmatrix}i&j\\i&j\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}0&a_{ij}\\a_{ij}&0\end{vmatrix}=-a_{ij}^2=0$. 因此 $a_{ij}=0$. 这表明，A 是零方阵. 所以 $\text{rank}A=0$. 这就证明了结论(1).

(2) 为证明结论(2)和(3)，先证明关于一般 n 阶方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$ 的一个结论如下：

设 n 阶方阵 $A=(a_{ij})$ 的特征多项式为 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$，对于任意 $i_1,i_2,\cdots,i_k,1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$，方阵 A 的取自第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 行和第 $i_1,i_2,\cdots,i_k$ 列的 k 阶主子式记作 $A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}$，则有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)=&\lambda^n-\left(\sum_{i_1=1}^{n}A\begin{pmatrix}i_1\\i_1\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-1}\\&+\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2\\i_1&i_2\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-2}+\cdots\\&+(-1)^k\left(\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\i_1&i_2&\cdots&i_k\end{pmatrix}\right)\lambda^{n-k}\\&+\cdots+(-1)^n\det A.\end{aligned}\tag{8}$$

事实上，由

$$\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$$

$$
= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}
$$

和行列式的定义容易看出，$\varphi(\lambda)$ 是关于 λ 的 n 次首项系数为 1 的多项式. 由于 $\varphi(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$，所以 $\varphi(\lambda)$ 的常数项为 $(-1)^n \det A$. 现在设 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，$1 \leqslant i_{k+1} < i_{k+2} < \cdots < i_n \leqslant n$，且 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，则有

$$
\begin{aligned}
&(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} \\
&= \lambda^k + \cdots + (-1)^k A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}, \\
&(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda^{n-k} + \cdots + (-1)^{n-k} A\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix} \\
&= \lambda^n + \cdots + (-1)^{n-k} A\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix}\lambda^k \\
&\quad + (-1)^k A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}\lambda^{n-k} + \cdots \\
&\quad + (-1)^n A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

即其中 λ^{n-k} 的系数为 $(-1)^k A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}$. 当 $i_1 i_2 \cdots i_k$ 遍历 $1,2,\cdots,n$ 的所有 k 元子集时，即得 λ^{n-k} 的系数为 $(-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}$. 由行列式的定义可知，行列式 $\det(\lambda I_n - A)$ 的展开式中所有含 λ^{n-k} 因子的项都是在形如行列式

$$
(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}(\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \\ i_{k+1}\ i_{k+2} \cdots i_n \end{pmatrix}
$$

的展开式中含有 λ^{n-k} 因子的项中. 反之亦然. 这表明，$(-1)^k \sum\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_k \\ i_1\ i_2 \cdots i_k \end{pmatrix}$ 即是 $\varphi(\lambda)$ 中 λ^{n-k} 的系数. 这就证明式(8)成立.

其次证明. 如果 n 阶对称方阵 A 的秩为 r，则必有一个 r 阶主子式不为零.

事实上，若 A 的所有 r 阶主子式都是零，则由式(8)可知

$$
\varphi(\lambda) = \lambda^n - \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}\right)\lambda^{n-1} + \cdots
$$

$$
+ (-1)^{r-1}\left(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_{r-1} \\ i_1\ i_2 \cdots i_{r-1} \end{pmatrix}\right)\lambda^{n-r+1}.
$$

这里注意，由于 A 的秩为 r，所以 A 的所有 k 阶主子式全为零，$k \geqslant r+1$. 所以 A 至多有 $r-1$ 个非零特征值，设为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{r-1}$. 由于 A 是 n 阶对称方阵，所以 A 正交相合于对角方阵 $\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_{r-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$. 由于正交相合一定是相抵，所以 A 的秩小于 r. 矛盾.

有了上面两个基本事实，现在证明结论(2).

设 $r = n-1$，则 A 必有一个 $n-1$ 阶非零的主子式，而且 $\det A = 0$. 反之设 A 有一个 $n-1$ 阶非零主子式，且 $\det A = 0$，则由秩的定义，$r = n-1$.

(3) 设对称方阵 A 的秩为 r，$1 \leqslant r \leqslant n-2$，则 A 中有 r 阶非零的主子式 $A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_r \\ i_1\ i_2 \cdots i_r \end{pmatrix}$，而 A 中所有包含 $A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_r \\ i_1\ i_2 \cdots i_r \end{pmatrix}$ 的 $r+1$ 阶和 $r+2$ 阶主子式全为零. 反之设 A 中 r 阶主子式 $A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_r \\ i_1\ i_2 \cdots i_r \end{pmatrix} \neq 0$. 由秩的定义，$\operatorname{rank} A \geqslant r$. 下面证明，$\operatorname{rank} A \leqslant r$. 首先对 A 作同步置换，即对调 A 的第 1 行和第 i_1 行，并对调 A 的第 1 列和第 i_1 列，再对调 A 的第 2 行和第 i_2 行，并对调 A 的第 2 列和第 i_2 列，…，最后对调 A 的第 r 行和第 i_r 行，并对调第 r 列和第 i_r 列，得到的方阵记作 $B = (b_{ij})$. 注意方阵 B 仍是对称的，而且 $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B$，$A\begin{pmatrix} i_1\ i_2 \cdots i_r \\ i_1\ i_2 \cdots i_r \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots r \\ 1\ 2 \cdots r \end{pmatrix} \neq 0$，$B$ 的 $r+1$ 阶主子式 $B\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots r\ i \\ 1\ 2 \cdots r\ i \end{pmatrix} = 0$，$r+2$ 阶主子式 $B\begin{pmatrix} 1\ 2 \cdots r\ i\ j \\ 1\ 2 \cdots r\ i\ j \end{pmatrix} = 0$，其中 $r+1 \leqslant i \neq j \leqslant n-2$. 考虑方阵 B 的 $r+2$ 阶主子方阵

$$
B_{ij} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} & b_{1i} & b_{1j} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2r} & b_{2i} & b_{2j} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{rr} & b_{ri} & b_{rj} \\ b_{1i} & b_{2i} & \cdots & b_{ri} & b_{ii} & b_{ij} \\ b_{1j} & b_{2j} & \cdots & b_{rj} & b_{ij} & b_{jj} \end{pmatrix}.
$$

记 $\alpha_i = (b_{1i}, b_{2i}, \cdots, b_{ri})$，$\alpha_j = (b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{rj})$，

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{12} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{1r} & b_{2r} & \cdots & b_{rr} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ij} & b_{jj} \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_j \end{bmatrix},$$

则

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} C & E^t \\ E & D \end{bmatrix},$$

且

$$\det C = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \neq 0, \tag{⑤}$$

$$\det \begin{bmatrix} C & \alpha_i^t \\ \alpha_i & b_{ii} \end{bmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & i \\ 1 & 2 & \cdots & r & i \end{pmatrix} = 0, \tag{⑦}$$

$$\det B_{ij} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & i & j \\ 1 & 2 & \cdots & r & i & j \end{pmatrix} = 0. \tag{⑧}$$

于是 C 是可逆的. 因此

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ \alpha_i C^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & \alpha_i^t \\ \alpha_i & b_{ii} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & -C^{-1}\alpha_i^t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & b_{ii} - \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t \end{bmatrix}.$$

两端取行列式,得到

$$\det \begin{bmatrix} C & \alpha_i^t \\ \alpha_i & b_{ii} \end{bmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & i \\ 1 & 2 & \cdots & r & i \end{pmatrix}$$

$$= (b_{ii} - \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t) B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix}.$$

由式⑥和⑦得到, $b_{ii} = \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t$. 同样, $b_{jj} = \alpha_j C^{-1}\alpha_j^t$. 由

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ EC^{-1} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & E^t \\ E & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & -C^{-1}E^t \\ 0 & I_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D - EC^{-1}E^t \end{bmatrix}$$

得到

$$B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & i & j \\ 1 & 2 & \cdots & r & i & j \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r \\ 1 & 2 & \cdots & r \end{pmatrix} \det(D - EC^{-1}E^t).$$

由式⑥和⑦得到 $\det(D - EC^{-1}E^t) = 0$. 而

$$D - EC^{-1}E^t$$

$$= \begin{bmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ij} & b_{jj} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t & \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t \\ \alpha_j C^{-1}\alpha_i^t & \alpha_j C^{-1}\alpha_j^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_{ii} - \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t & b_{ij} - \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t \\ b_{ij} - \alpha_j C^{-1}\alpha_i^t & b_{jj} - \alpha_j C^{-1}\alpha_j^t \end{bmatrix}.$$

注意 $\alpha_j C^{-1}\alpha_i^t = (\alpha_j C^{-1}\alpha_i^t)^t = \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t$, $b_{ii} = \alpha_i C^{-1}\alpha_i^t$, $b_{jj} = \alpha_j C^{-1}\alpha_j^t$, 所以

$$D - EC^{-1}E^t$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & b_{ij} - \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t \\ b_{ij} - \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 $\det(D - EC^{-1}E^t) = 0$, 所以 $b_{ij} = \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t$, 其中 $r+1 \leqslant i, j \leqslant n$. 现将方阵 B 分块为 $B = \begin{bmatrix} C & K^t \\ K & T \end{bmatrix}$, 则由 $b_{ij} = \alpha_i C^{-1}\alpha_j^t$, $r+1 \leqslant i, j \leqslant n$ 得到, $T = KTK^t$. 于是

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -KC^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & K^t \\ K & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_r & -C^{-1}T^t \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此 $\operatorname{rank} B = r$.

注 1 3.5.18 说明, 对于对称方阵 A, 其秩可以定义为对称方阵 A 的所有非零主子式的最高阶数.

注 2 3.5.18 的证明除了用到关于方阵 A 的特征多项式的一个基本事实和对称方阵的秩与其非零特征值的个数间的基本关系外, 主要用的是矩阵打洞的技巧.

注 3 一个对称方阵 A 的秩等于其非零特征值的个数这一事实对一般方阵并不成立. 反例是, 二阶方阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征值全是 0, 而其秩为 1.

注 4 对于 n 阶斜对称方阵 A, 其秩等于 A 的所有非零主子式的最高阶数. 其证明与 3.5.18 相仿, 读者可自证之.

3.5.19 设 A 和 B 分别是 $n \times m$ 和 $m \times p$ 矩阵, 且 $\operatorname{rank} AB = m$. 证明: $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} B = m$.

证 由于 $n \times m$ 矩阵 A 的秩等于 A 的所有非零子式的最高阶数, 所以 $\operatorname{rank} A \leqslant m$. 另一方面, 由 3.5.8, 有 $m = \operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} A \leqslant m$. 所以 $\operatorname{rank} A = m$. 同理可证 $\operatorname{rank} B = m$.

3.5.20 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $p \times n$ 矩阵. 证明:

$$\max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leqslant \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$
$$\leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B.$$

证 由于 A 是矩阵 $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 的子矩阵, 因此由 3.5.1, 有 $\operatorname{rank} A \leqslant \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$. 同理有 $\operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$, 于是

$$\max\{\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B\} \leqslant \operatorname{rank} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}.$$

另外, $\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$ 是矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & B \end{bmatrix}$ 的子矩阵, 所以由 3.5.1, 有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & B \end{bmatrix}. \qquad ⑨$$

将 $(m+p)\times(n+n)$ 矩阵 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ B & B \end{pmatrix}$ 的第 2 列右乘以 I_n 加到第 1 列，即得

$$\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由于方阵 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -I_n & I_n \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ B & B \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

于是由 3.5.3 和式 ⑨ 得到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.$$

3.5.21 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵. 对于 $i,j,2\leqslant i\leqslant m, 2\leqslant j\leqslant n$，记

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{1j} \\ a_{i1} & a_{ij} \end{vmatrix},$$

并记 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵 B 为

$$B = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

证明：如果 $a_{11}\neq 0$，则

$$\operatorname{rank}A = 1 + \operatorname{rank}B.$$

证 将 $m\times n$ 矩阵 A 分块为 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & \beta \\ \alpha & D \end{bmatrix}$，其中 $\alpha'=(a_{21},a_{31},\cdots,a_{m1})$，$\beta=(a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n})$ 且

$$D = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

由于 $a_{11}\neq 0$，所以有

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_{11}}\alpha & I_{m-1} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & \beta \\ \alpha & D \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\beta \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

因为方阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{a_{11}}\alpha & I_{m-1} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{a_{11}}\beta \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$ 是可逆的，因此

$$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} a_{11} & \beta \\ \alpha & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta \end{pmatrix}.$$

由 3.5.3，有

$$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(a_{11}) + \operatorname{rank}\left(D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta\right).$$

因为 $a_{11}\neq 0$，所以 $\operatorname{rank}(a_{11})=1$. 于是有

$$\operatorname{rank}A = 1 + \operatorname{rank}\left(D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta\right).$$

现在计算 $(m-1)\times(n-1)$ 矩阵 $D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta$. 由于

$$D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}[a_{12},a_{13},\cdots,a_{1n}]$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} - \frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix} a_{21}a_{12} & a_{21}a_{13} & \cdots & a_{21}a_{1n} \\ a_{31}a_{12} & a_{31}a_{13} & \cdots & a_{31}a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}a_{12} & a_{m1}a_{13} & \cdots & a_{m1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{22}-\frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23}-\frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{32}-\frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & a_{33}-\frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{3n}-\frac{a_{31}a_{1n}}{a_{11}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2}-\frac{a_{m1}a_{12}}{a_{11}} & a_{m3}-\frac{a_{m1}a_{13}}{a_{11}} & \cdots & a_{mn}-\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\times \begin{pmatrix} a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{2n}-a_{21}a_{1n} \\ a_{11}a_{32}-a_{31}a_{12} & a_{11}a_{33}-a_{31}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{3n}-a_{31}a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{11}a_{m2}-a_{m1}a_{12} & a_{11}a_{m3}-a_{m1}a_{13} & \cdots & a_{11}a_{mn}-a_{m1}a_{1n} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{a_{11}}\begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}}B.$$

由于 $a_{11}\neq 0$，所以 $\operatorname{rank}\left(D-\frac{1}{a_{11}}\alpha\beta\right)=\operatorname{rank}B$. 因此 $\operatorname{rank}A = 1+\operatorname{rank}B$.

3.5.22 设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵. 记

$$A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}\end{pmatrix},$$

对于 i 和 j, $k+1\leqslant i\leqslant m$, $k+1\leqslant j\leqslant n$, 记

$$A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&i\\1&2&\cdots&k&j\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1k}&a_{1j}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2k}&a_{2j}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{k1}&a_{k2}&\cdots&a_{kk}&a_{kj}\\a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ik}&a_{ij}\end{pmatrix},$$

另记 $\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&i\\1&2&\cdots&k&j\end{pmatrix}=B_{ij}$, 且

$$B=\begin{pmatrix}B_{k+1,k+1}&B_{k+1,k+2}&\cdots&B_{k+1,n}\\B_{k+2,k+1}&B_{k+2,k+2}&\cdots&B_{k+2,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\B_{m,k+1}&B_{m,k+2}&\cdots&B_{m,n}\end{pmatrix}.$$

证明: 如果 $\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}\neq 0$, 则

$$\operatorname{rank}A=k+\operatorname{rank}B.$$

证 将 $m\times n$ 矩阵 A 分块为 $A=\begin{bmatrix}C&D\\E&T\end{bmatrix}$, 其中 $C=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}$, 由于 $\det C=\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}$, 所以有

$$\begin{bmatrix}I_k&0\\-EC^{-1}&I_{m-k}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C&D\\E&T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_k&-C^{-1}D\\0&I_{n-k}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&0\\0&T-EC^{-1}D\end{bmatrix}.$$

因为方阵 $\begin{bmatrix}I_k&0\\-EC^{-1}&I_{m-k}\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}I_k&-C^{-1}D\\0&I_{n-k}\end{bmatrix}$ 是可逆的, 所以

$$\operatorname{rank}A=\operatorname{rank}C+\operatorname{rank}(T-EC^{-1}D).$$

由假设 $\det C=\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}\neq 0$, 所以 $\operatorname{rank}C=k$. 于是有

$$\operatorname{rank}A=k+\operatorname{rank}(T-EC^{-1}D).$$

下面证明, $\operatorname{rank}(T-EC^{-1}D)=\operatorname{rank}B$. 由矩阵 A 的分块方式可知

$$T=\begin{pmatrix}a_{k+1,k+1}&a_{k+1,k+2}&\cdots&a_{k+1,n}\\a_{k+2,k+1}&a_{k+2,k+2}&\cdots&a_{k+2,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m,k+1}&a_{m,k+2}&\cdots&a_{m,n}\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}a_{k+1,1}&a_{k+1,2}&\cdots&a_{k+1,k}\\a_{k+2,1}&a_{k+2,2}&\cdots&a_{k+2,k}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m,1}&a_{m,2}&\cdots&a_{m,k}\end{pmatrix},$$

$$D=\begin{pmatrix}a_{1,k+1}&a_{1,k+2}&\cdots&a_{1,n}\\a_{2,k+1}&a_{2,k+2}&\cdots&a_{2,n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{k,k+1}&a_{k,k+2}&\cdots&a_{k,n}\end{pmatrix}.$$

记 $EC^{-1}D=G=(g_{k+i,k+j})$, 其中 $1\leqslant i\leqslant m-k$, $1\leqslant j\leqslant n-k$, 则

$$g_{k+i,k+j}=(a_{k+i,1},a_{k+i,2},\cdots,a_{k+i,k})C^{-1}\begin{pmatrix}a_{1,k+j}\\a_{2,k+j}\\\vdots\\a_{k,k+j}\end{pmatrix}.$$

记 $T-EC^{-1}D=(f_{k+i,k+j})$, 且记 $\alpha_i=(a_{k+i,1},a_{k+i,2},\cdots,a_{k+i,k})$, $\beta_j^{\tau}=(a_{1,k+j},a_{2,k+j},\cdots,a_{k,k+j})$, 其中 $1\leqslant i\leqslant m-k$, $1\leqslant j\leqslant n-k$, 则

$$f_{k+i,k+j}=a_{k+i,k+j}-g_{k+i,k+j}=a_{k+i,k+j}-\alpha_iC^{-1}\beta_j.$$

考虑 $k+1$ 阶方阵 $A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k&k+i\\1&2&\cdots&k&k+j\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}C&\beta_j\\\alpha_i&a_{k+i,k+j}\end{bmatrix}$. 由于 k 阶方阵 $C=A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}$ 是可逆的, 所以

$$\begin{bmatrix}I_k&0\\-\alpha_iC^{-1}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C&\beta_j\\\alpha_i&a_{k+i,k+j}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_k&-C^{-1}\beta_j\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C&0\\0&f_{k+i,k+j}\end{bmatrix}.$$

两端取行列式得到

$$B_{k+i,k+j}=\det\begin{bmatrix}C&\beta_j\\\alpha_i&a_{k+i,k+j}\end{bmatrix}=f_{k+i,k+j}\det C=f_{k+i,k+j}\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}.$$

因此

$$B=\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}(T-EC^{-1}D).$$

由于 $\det A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&k\\1&2&\cdots&k\end{pmatrix}\neq 0$, 所以 $\operatorname{rank}B=\operatorname{rank}(T-EC^{-1}D)$. 从而 $\operatorname{rank}A=k+\operatorname{rank}B$.

3.5.23 设 A 是 n 阶方阵, $p(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 和 $q(\lambda)=b_l\lambda^l+b_{l-1}\lambda^{l-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0$ 分别是 λ 的 k 次和 l 次多项式, 即 $a_k\neq 0$, $b_l\neq 0$, 且 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ 是互素的. 记 $p(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n$, $q(A)=b_lA^l+b_{l-1}A^{l-1}+\cdots+b_1A+b_0I_n$, 且记

$$f(A)=\operatorname{rank}p(A)+\operatorname{rank}q(A).$$

则 $f(A)$ 是定义在所有 n 阶方阵 A 的集合上而取值为非负整数的函数. 求函数 $f(A)$ 的最小值, 并且求出所有使函数 $f(A)$ 取到最小值的 n 阶方阵 A.

解 由 3.5.3, 有

$$f(A) = \operatorname{rank}p(A) + \operatorname{rank}q(A) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}.$$

由题设多项式 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ 是互素的, 因此存在多项式 $u(\lambda)$ 和 $v(\lambda)$, 使得 $u(\lambda)p(\lambda) + v(\lambda)q(\lambda) = 1$. 所以有 $u(A)p(A) + v(A)q(A) = I_n$. 现在将 $2n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}$ 的第 2 行左乘以 $v(A)$ 加到第 1 行, 得到

$$\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(A) & v(A)q(A) \\ 0 & q(A) \end{bmatrix},$$

再将第 1 列乘以 $u(A)$ 加到第 2 列, 得到

$$\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(A) & p(A)u(A) + v(A)q(A) \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}.$$

由于 $p(A)$ 和 $u(A)$ 是方阵 A 的多项式, 所以 $p(A)u(A) = u(A)p(A)$. 又 $u(A)p(A) + v(A)q(A) = I_n$, 所以

$$\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(A) & I_n \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}.$$

将方阵 $\begin{bmatrix} p(A) & I_n \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}$ 的第 2 列右乘以 $-q(A)$ 加到第 1 列, 得到

$$\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -p(A) & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -p(A)q(A) & q(A) \end{bmatrix}.$$

再将第 1 行左乘以 $-q(A)$ 加到第 2 行, 得到

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -q(A) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ p(A) & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -p(A)q(A) & 0 \end{bmatrix},$$

于是

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -q(A) & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ p(A) & I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p(A)q(A) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}.$$

由于 $2n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} 0 & -I_n \\ I_n & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ q(A) & I_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_n & v(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} I_n & u(A) \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -p(A) & I_n \end{bmatrix}$ 都是可逆的, 所以

$$\begin{aligned} f(A) &= \operatorname{rank}p(A) + \operatorname{rank}q(A) \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} p(A) & 0 \\ 0 & q(A) \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{rank}\begin{bmatrix} p(A)q(A) & 0 \\ 0 & I_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由 3.5.3, 有

$$\begin{aligned} f(A) &= \operatorname{rank}p(A) + \operatorname{rank}q(A) \\ &= \operatorname{rank}p(A)q(A) + \operatorname{rank}I_n \\ &= n + \operatorname{rank}p(A)q(A) \\ &\geqslant n, \end{aligned}$$

其中当且仅当 $\operatorname{rank}p(A)q(A) = 0$, 即 $p(A)q(A) = 0$ 时等式成立. 于是 $f(A)$ 的最小值为 n, 且使 $f(A)$ 的最小值为 n 的方阵 A 是所有满足矩阵方程 $p(A)q(A) = 0$ 的所有解 A.

§3.6 矩阵在相抵下的 Hermite 标准形

除矩阵的行与列的初等变换和矩阵打洞技巧外, 处理矩阵问题的另一个基本技巧是应用矩阵在各种等价关系下的标准形. 应该说, 人们之所以千方百计地建立矩阵的各种标准形理论, 其目的主要是为解决各种有关矩阵问题提供有力的工具. 在线性代数中, 所遇到的标准形有矩阵在相抵下的 Hermite 标准形, λ 矩阵在相抵下的 Smith 标准形, 方阵在相似下的 Jordan 标准形, 方阵在合同下的标准形, 实方阵在正交相似下的标准形和复方阵在酉相似下的标准形. 本节主要介绍如何应用矩阵在相抵下的 Hermite 标准形来处理有关矩阵问题的方法. 为此简要地重述一下 Hermite 标准形理论的一些基本结论. 称 $m \times n$ 矩阵 A 和 B 是相抵的, 如果存在 m 和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得 $B = PAQ$. 设 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 r, 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q. \tag{1}$$

$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 称为 $m \times n$ 矩阵 A 的 Hermite 标准形. 另外,

$m\times n$ 矩阵 A 和 B 相抵的充要条件是，$\text{rank}A=\text{rank}B$. 换言之，相抵的矩阵的秩相等，反之秩相等的 $m\times n$ 矩阵 A 和 B 一定相抵. 简言之，矩阵的秩是矩阵在相抵下的全系不变量.

3.6.1 设 A 是 n 阶 2 次幂零方阵，即 $A\neq 0$，且 $A^2=0$. 证明：如果 $\text{rank}A=r$，则 A 相似于形如 $\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的方阵，其中 B 是 $r\times(n-r)$ 矩阵，而且 $2r\leqslant n$.

证 因为 $\text{rank}A=r$，所以 A 在相抵下的 Hermite 标准形为 $\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，即存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q，使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

由于 A 是 2 次幂零的，即 $A^2=0$，所以

$$A^2=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QP\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=0.$$

由于 P 和 Q 是可逆的，所以

$$\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}QP\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0. \qquad ①$$

将 n 阶方阵 QP 分块为 $QP=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}$，其中 B_{11} 是 r 阶方阵. 由式 ① 得到

$$\begin{bmatrix}B_{11} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}=0.$$

于是 $B_{11}=0$. 因此 $QP=\begin{bmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}$. 而 P 是可逆的，所以

$$Q=\begin{bmatrix}0 & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{bmatrix}P^{-1}.$$

因此

$$A=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=P\begin{bmatrix}0 & B_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}.$$

这就证明，A 相似于形如 $\begin{bmatrix}0 & B\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ 的方阵，其中 B 是 $r\times(n-r)$ 矩阵. 注意相似的方阵一定是相抵的，而相抵的方阵的秩相等，因此 $r=\text{rank}A=\text{rank}B$. 而 B 是 $r\times(n-r)$ 矩阵，即 B 的列数为 $n-r$. 因此 $\text{rank}B\leqslant n-r$. 从而 $r\leqslant n-r$，即得 $2r\leqslant n$.

3.6.2 设 A 是 n 阶方阵，B 是 A 中由 s 个行组成的 $s\times n$ 子矩阵. 证明

$$\text{rank}B\geqslant\text{rank}A+s-n.$$

证 设 B 是取自 A 中第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行的子矩阵. 依次将 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行调到第 $1,2,\cdots,s$ 行，得到的方阵为 $C=\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}$. 由于方阵 C 是由方阵 A 经行的初等变换得到的，所以 C 和 A 是相抵的，从而

$$\text{rank}A=\text{rank}C=\text{rank}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}.$$

现在设 $\text{rank}B=r$. 则存在 s 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q，使得

$$B=P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

因此

$$\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}P^{-1}BQ^{-1}\\ DQ^{-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ DQ^{-1}\end{bmatrix}.$$

将 $(n-s)\times n$ 矩阵 DQ^{-1} 分块为 $[D_1,D_2]$，其中 D_1 是 $(n-s)\times r$ 矩阵，则

$$\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\\ D_1 & D_2\end{pmatrix}.$$

将右端方阵第 1 行左乘以 $-D_1$ 加到第 3 行，得到

$$\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & I_{s-r} & 0\\ -D_1 & 0 & I_{n-s}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\\ 0 & D_2\end{pmatrix}.$$

对调右端方阵第 2 行和第 3 行，得到

$$\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{n-s}\\ 0 & I_{s-r} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & I_{s-r} & 0\\ -D_1 & 0 & I_{n-s}\end{pmatrix}\times\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}Q^{-1}=\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & D_2\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

由于方阵 $\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & 0 & I_{n-s}\\ 0 & I_{s-r} & 0\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}I_r & 0 & 0\\ 0 & I_{s-r} & 0\\ -D_1 & 0 & I_{n-s}\end{pmatrix}$，$\begin{bmatrix}P^{-1} & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix}$ 和 Q^{-1} 都是可逆的，所以

$$\begin{aligned}\text{rank}A&=\text{rank}\begin{bmatrix}B\\ D\end{bmatrix}=\text{rank}\begin{pmatrix}I_r & 0\\ 0 & D_2\\ 0 & 0\end{pmatrix}\\ &=\text{rank}I_r+\text{rank}D_2\\ &=r+\text{rank}D_2=\text{rank}B+\text{rank}D_2.\end{aligned}$$

由于 D_2 是 $(n-s)\times(n-r)$ 的，所以 $\text{rank}D_2\leqslant n-s$. 于是

$$\text{rank}A\leqslant\text{rank}B+n-s,$$

即

$$\text{rank}B \geqslant \text{rank}A + s - n.$$

注 3.6.2 的证明不但用到了矩阵在相抵下的 Hermite 标准形,还用了矩阵打洞技巧.在处理有关矩阵秩的问题时往往将相抵标准形和矩阵打洞技巧结合一起使用.

3.6.3 设 A 是 $m\times n$ 矩阵,B 是 A 的一个 $s\times t$ 子矩阵.证明:

$$\text{rank}B \geqslant \text{rank}A + s + t - m - n.$$

证 设 B 是取自 $m\times n$ 矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行与第 $j_1,j_2,\cdots,j_t$ 列的交叉位置上的元素组成的 $s\times t$ 子矩阵,即 $B=A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_s \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_t\end{pmatrix}$,而 C 是由 $m\times n$ 矩阵 A 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_s$ 行组成的 $s\times n$ 子矩阵.由 3.6.2 的证明可知

$$\text{rank}C \geqslant \text{rank}A + s - m. \qquad ②$$

而 B 是 $s\times n$ 矩阵 C 的一个 $s\times t$ 子矩阵,因此 B' 是 $n\times s$ 矩阵 C' 的一个 $t\times s$ 子矩阵.所以由 3.6.2 的证明,有

$$\text{rank}B' \geqslant \text{rank}C' + t - n.$$

而 $\text{rank}B'=\text{rank}B$,$\text{rank}C'=\text{rank}C$.于是由上式得到

$$\text{rank}B \geqslant \text{rank}C + t - n.$$

由式 ② 即得

$$\text{rank}B \geqslant \text{rank}A + s + t - m - n.$$

注 3.6.3 也可仿 3.6.2 用矩阵在相抵下的 Hermite 标准形来证明.读者无妨自证之.

3.6.4 设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵.证明:

$$\text{rank}AB \leqslant \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}, \qquad (2)$$

其中等式成立的充要条件是,下述两条件之一成立:

1. 存在 $p\times n$ 矩阵 C,使得 $A=ABC$;
2. 存在 $n\times m$ 矩阵 D,使得 $B=DAB$.

证 设 $\text{rank}A=r$,$\text{rank}B=s$,则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q 以及 n 阶和 p 阶可逆方阵 R 和 T,使得

$$A=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}Q,\quad B=R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}T.$$

因此

$$AB=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}QB=AR\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}T. \qquad ③$$

记 $QB=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2\end{bmatrix}$,$AR=[Y_1,Y_2]$,其中 X_1 和 Y_1 分别是 $r\times p$ 和 $m\times s$ 矩阵.则由式 ③ 得到

$$AB=P\begin{bmatrix} X_1 \\ 0\end{bmatrix}=[Y_1,0]T.$$

由于 P 和 Q 是可逆的,因此 AB,$\begin{bmatrix} X_1 \\ 0\end{bmatrix}$和$[Y_1\ 0]$是相抵的.而相抵的矩阵的秩相等,所以

$$\text{rank}AB=\text{rank}\begin{bmatrix} X_1 \\ 0\end{bmatrix}=\text{rank}[Y_1,0],$$

即有

$$\text{rank}AB=\text{rank}X_1=\text{rank}Y_1. \qquad ④$$

由于 X_1 和 Y_1 分别是 $r\times p$ 和 $m\times s$ 矩阵,所以 $\text{rank}X_1\leqslant r=\text{rank}A$,$\text{rank}Y_1\leqslant s=\text{rank}B$.由式 ④ 得到

$$\text{rank}AB\leqslant\text{rank}A,\ \text{rank}AB\leqslant\text{rank}B.$$

这就证明了(2)成立.

现在设式(2)中等式成立.如果 $\text{rank}AB=\text{rank}A$,则由上面的证明,有 $\text{rank}X_1=\text{rank}A=r$.因此存在 r 阶和 p 阶可逆方阵 K 和 T,使得

$$X_1=K[I_r,0]T.$$

因此

$$X_1=[K,0]T=[I_r,0]\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_{p-r}\end{bmatrix}T.$$

所以由 ④,

$$AB=P\begin{bmatrix} X_1 \\ 0\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_{p-r}\end{bmatrix}T.$$

记 $G=\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & I_{p-r}\end{bmatrix}T$,则 G 是可逆的.令 $C=G^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}Q$ 是 $p\times n$ 矩阵,则

$$\begin{aligned} ABC &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}G\cdot G^{-1}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}Q \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}Q=A.\end{aligned}$$

所以当 $\text{rank}AB=\text{rank}A$ 时,存在 $p\times n$ 矩阵 C,使得 $A=ABC$.如果 $\text{rank}AB=\text{rank}B$,则由式 ④ 有 $\text{rank}Y_1=\text{rank}B=s$.因此存在 m 阶和 s 阶可逆方阵 V 和 W,使得

$$Y_1=V\begin{bmatrix} I_s \\ 0\end{bmatrix}W.$$

即

$$Y_1=V\begin{bmatrix} W \\ 0\end{bmatrix}=V\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s \\ 0\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{aligned} AB &= [Y_1,0]T=\left[V\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s \\ 0\end{bmatrix},0\right]T \\ &= V\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-s}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix}T.\end{aligned}$$

记 $H=V\begin{bmatrix} W & 0 \\ 0 & I_{m-s}\end{bmatrix}$,则 H 是可逆的.取 $D=$

$R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}H^{-1}$，则 D 是 $n \times m$ 矩阵，且

$$DAB = R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}H^{-1} \cdot H\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T$$
$$= R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T = B.$$

于是存在 $n \times m$ 矩阵 D，使得 $B = DAB$.

最后，如果条件 1 成立，即 $A = ABC$，则由式(2)，$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}ABC \leqslant \operatorname{rank}AB \leqslant \operatorname{rank}A$，因此，$\operatorname{rank}AB = \operatorname{rank}A$；如果条件 2 成立，即 $B = DAB$，则由式(2)，$\operatorname{rank}B = \operatorname{rank}DAB \leqslant \operatorname{rank}AB \leqslant \operatorname{rank}B$. 因此 $\operatorname{rank}AB = \operatorname{rank}B$. 所以当条件 1 或 2 成立时式(2)取等号. 这就证明，式(2) 中当且仅当条件 1 或 2 成立时等式成立.

3.6.5　设 A 和 B 是 n 阶方阵，$AB = BA = 0$，且 $\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}A^2$. 证明：

$$\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B.$$

证　设 $\operatorname{rank}A = r$，则存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q，使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

由于 $AB = BA = 0$，所以有

$$P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB = BP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = 0.$$

由于 P 是可逆的，所以由 $P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QB = 0$ 得到

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QBP = 0. \qquad ⑤$$

同理，因为 Q 是可逆的，所以由 $BP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = 0$ 得到

$$QBP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0. \qquad ⑥$$

将 n 阶方阵 QBP 分块为 $QBP = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$，其中 B_{11} 是 r 阶的. 则由式 ⑤ 和式 ⑥ 得到

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

因此 $B_{11} = 0, B_{12} = 0$，且 $B_{21} = 0$. 于是 $QBP = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$，

即

$$B = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P(P^{-1}Q^{-1})\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}(P^{-1}Q^{-1})Q. \qquad ⑦$$

另一方面，我们有

$$A^2 = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

记 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$，其中 R_{11} 是 r 阶的. 则

$$A^2 = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$
$$= P\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

因此 $\operatorname{rank}A^2 = \operatorname{rank}R_{11}$. 由题设 $r = \operatorname{rank}A = \operatorname{rank}A^2$，所以 $\operatorname{rank}R_{11} = r$，即 R_{11} 是可逆的. 于是由

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}QP$$
$$= \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{bmatrix}$$

得到 $R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12}$ 是可逆的. 另外，

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{bmatrix}.$$

于是，

$$QP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

两边取逆得到

$$P^{-1}Q^{-1} = \begin{bmatrix} I_r & -R_{11}^{-1}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$\times \begin{bmatrix} R_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & (R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -R_{21}R_{11}^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}.$$

其中

$$C_{11} = R_{11}^{-1} + R_{11}^{-1}R_{12}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}R_{21}R_{11},$$
$$C_{12} = -R_{11}^{-1}R_{12}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1},$$
$$C_{21} = -(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}R_{21}R_{11}^{-1},$$
$$C_{22} = (R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}.$$

记 $P^{-1}Q^{-1} = T$，则 $P^{-1} = TQ$. 又由 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$，有 $P = Q^{-1}\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$. 于是

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = Q^{-1}\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ R_{21} & 0 \end{bmatrix}Q,$$

$$B = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} P^{-1} = Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix} TQ$$
$$= Q^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} Q,$$
其中 $D_{21} = -B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}$，
$D_{22} = B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}$.
因此
$$A + B = Q^{-1}\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix} Q,$$
其中 $X = R_{21} - B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1}R_{21}R_{11}^{-1}$. 则 $A + B$ 和 $\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}$ 相抵，所以
$$\text{rank}(A + B) = \text{rank}\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}.$$
由于 R_{11} 可逆，所以
$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ -XR_{11}^{-1} & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ X & B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & B_{22}(R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_{11} & 0 \\ 0 & (R_{22} - R_{21}R_{11}^{-1}R_{12})^{-1} \end{bmatrix}.$$
因此
$$\text{rank}(A + B) = \text{rank}I_r + \text{rank}B_{22} = r + \text{rank}B = \text{rank}A + \text{rank}B.$$

3.6.6　如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 m，则 A 称为行满秩的；同样，如果 $m \times n$ 矩阵 A 的秩为 n，则 A 称为列满秩的. 证明：

(1) $m \times n$ 矩阵 A 为列满秩的充要条件是，存在 m 阶可逆方阵 P，使得 $A = P\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$；

(2) $m \times n$ 矩阵 A 是行满秩的充要条件是，存在 n 阶可逆方阵 Q，使得 $A = [I_m, 0]Q$.

证　(1) 设 $m \times n$ 是列满秩的，则 $\text{rank}A = n$. 因此存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P_1 和 Q_1，使得
$$A = P_1\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} Q_1.$$
所以
$$A = P_1\begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \end{bmatrix} = P_1\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}.$$
记 $P = P_1\begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & I_{m-n} \end{bmatrix}$，则 P 是可逆的. 且 $A = P\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$. 这就证明了必要性. 反之，设 $A = P\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$，其中 P 是 m 阶可逆方阵，$\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 $m \times n$ 矩阵. 则 A 和 $\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix}$ 是相抵的，从而 $\text{rank}A = \text{rank}\begin{bmatrix} I_n \\ 0 \end{bmatrix} = \text{rank}I_n = n$，所以 A 是列满秩的，这就证明了充分性.

(2) 设 $m \times n$ 矩阵 A 是行满秩的，则 $\text{rank}A = m$. 因此存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P_2 和 Q_2，使得
$$A = P_2[I_m, 0]Q_2.$$
所以
$$A = [P_2, 0]Q_2 = [I_m, 0]\begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} Q_2.$$
记 $Q = \begin{bmatrix} P_2 & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix} Q_2$，则 Q 是 n 阶可逆方阵，而且
$$A = [I_m, 0]Q.$$
这就证明了必要性. 反之设 $A = [I_m, 0]Q$，其中 Q 是 n 阶可逆方阵，$[I_m, 0]$ 是 $m \times n$ 矩阵. 则 A 和 $[I_m, 0]$ 是相抵的. 因此 $\text{rank}A = \text{rank}[I_m, 0] = \text{rank}I_m = m$. 所以 A 是行满秩的. 这就证明了充分性.

3.6.7　（矩阵满秩分解定理）设 A 是 $m \times n$ 非零矩阵. 证明：矩阵 A 的秩为 r 的充要条件是，存在 $m \times r$ 列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 行满秩矩阵 C，使得 $A = BC$.

证　设 $\text{rank}A = r$，则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q，使得
$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$
注意，
$$A = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}[I_r, 0]Q,$$
其中 $\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$ 是 $m \times r$ 矩阵，$[I_r, 0]$ 是 $r \times n$ 矩阵. 记 $B = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}$，$C = [I_r, 0]Q$，则由 3.6.6，$B$ 和 C 分别是列满秩和行满秩的，而且 $A = BC$. 这就证明了必要性. 反之设 $A = BC$，其中 $m \times r$ 矩阵 B 是列满秩的，而 $r \times n$ 矩阵 C 是行满秩的. 由 3.6.6，存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q，使得
$$B = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}, C = [I_r, 0]Q,$$
于是
$$A = BC = P\begin{bmatrix} I_r \\ 0 \end{bmatrix}[I_r, 0]Q = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q.$$
由于 P 和 Q 是可逆的，所以 A 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是相抵的，因此 $\text{rank}A = r$. 这就证明了充分性.

注　矩阵满秩分解定理是矩阵论中一个基本定理，在处理有关矩阵的秩的问题时非常有用.

3.6.8 设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 1. 证明: $A=\alpha\beta$, 其中 α 是 m 维非零的列向量, 而 β 是 n 维非零的行向量.

证 由于 A 的秩为 1, 所以由满秩分解定理 3.6.7, 存在 $m\times 1$ 列满秩矩阵 B 和 $1\times n$ 行满秩矩阵 C, 使得 $A=BC$. 由 B 是 $m\times 1$ 矩阵, 且秩为 1, 所以 B 是 m 维非零的列向量, 而 C 是 $1\times n$ 矩阵, 且秩为 1, 所以 C 是 n 维非零的行向量. 因此取 $\alpha=B,\beta=C$ 即可.

也可用矩阵在相抵的 Hermite 标准形加以证明. 因为 $\mathrm{rank}A=1$, 所以存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\&\cdots\cdots&&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q.$$

将 m 阶方阵 P 按列分块为 $P=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]$, 其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 m 维列向量, 因为 P 是可逆的, 所以列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 都是非零的. 同样将 n 阶方阵 Q 按行分块为 $Q=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$, 其中 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 n 维非零的行向量. 于是

$$A=P\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\&\cdots\cdots&&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}Q$$

$$=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m]\begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\&\cdots\cdots&&\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}$$

$$=(\alpha_1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\vdots\\\beta_n\end{pmatrix}=\alpha_1\beta_1.$$

3.6.9 证明: 任意一个秩为 r 的 $m\times n$ 矩阵 A 都可表为 r 个秩为 1 的 $m\times n$ 矩阵之和.

证 因为 $\mathrm{rank}A=r$, 所以存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q.$$

记 $E_i=(e_{ij})$, 其中 $e_{ii}=1$, 其他 $e_{kl}=0$. 则 $\mathrm{rank}E_i=1$. 于是 $\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{r}E_i$. 因此

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q=P(\sum_{i=1}^{r}E_i)Q=\sum_{i=1}^{r}PE_iQ.$$

由于方阵 P 和 Q 是可逆的, 所以 $\mathrm{rank}PE_iQ=\mathrm{rank}E_i=1$. 所以 A 是 r 个秩为 1 的 $m\times n$ 矩阵 PE_1Q, $PE_2Q,\cdots,PE_rQ$ 之和.

3.6.10 设 A 是 n 阶方阵, $\mathrm{rank}A=r$. 证明:

(1) A 合同于形如 $\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}$ 的 n 阶方阵, 其中 B 是 $r\times n$ 行满秩矩阵;

(2) 如果 A 是对称的, 则 A 合同于形如 $\begin{bmatrix}S&0\\0&0\end{bmatrix}$ 的 n 阶方阵, 其中 S 是 r 阶可逆对称方阵;

(3) 在(2) 的条件下, A 可以表为 $A=RSR'$, 其中 S 是 r 阶可逆对称方阵, R 是 $n\times r$ 列满秩矩阵.

证 因为 $\mathrm{rank}A=r$, 所以存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q.$$

则

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q(P^{-1})'P'.$$

将 n 阶方阵 $Q(P^{-1})'$ 分块为 $Q(P^{-1})'=\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}$, 其中 B 是 $r\times n$ 矩阵. 由于 $(P^{-1})'$ 和 Q 都是可逆的, 因此 $Q(P^{-1})$ 是可逆的, 所以 B 是行满秩的. 于是

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}B\\C\end{bmatrix}P'=P\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}P'. \qquad ⑧$$

即 A 合同于矩阵 $\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}$, 其中 B 是行满秩的. 这就证明了结论(1).

其次, 如果方阵 A 是对称的, 即 $A'=A$, 则由式⑧, $A'=P[B',0]P'=P\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}P'=A$. 将 $r\times n$ 矩阵 B 分块为 $[B_{11},B_{12}]$, 其中 B_{11} 是 r 阶方阵. 则

$$A'=P\begin{pmatrix}B'_{11}&0\\B'_{12}&0\end{pmatrix}P'=P\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\0&0\end{pmatrix}P'=A.$$

由于 P 是可逆的, 所以由上式得到

$$\begin{bmatrix}B'_{11}&0\\B'_{12}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}\\0&0\end{bmatrix}.$$

从而 $B'_{11}=B_{11},B_{12}=0$. 于是式⑧化为

$$A=P\begin{bmatrix}B_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}P', \qquad ⑨$$

其中 B_{11} 是 r 阶对称方阵. 由于 $r=\mathrm{rank}A=$

$rank\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}B_{11}$，且 B_{11} 是 r 阶的．所以 B_{11} 是 r 阶可逆对称方阵．换言之，对称方阵 A 合同于形如 $\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的方阵，其中 B_{11} 是 r 阶可逆对称方阵．这就证明了结论(2)．

最后由式⑨，并将 n 阶可逆方阵 P 分块为 $P = [P_{11}, P_{12}]$，其中 P_{11} 是 $n \times r$ 的，从而是列满秩的，我们有

$$A = [P_{11}, P_{12}]\begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P'_{11} \\ P'_{12} \end{bmatrix} = P_{11}B_{11}P'_{11}.$$

这就证明了结论(3)．

3.6.11　设 A 是 n 阶对合方阵(即 $A^2 = I_n$)且 $\text{rank}(A + I_n) = r$．证明：A 相似于方阵 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$．

证　因为 $\text{rank}(A + I_n) = r$，所以存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q，使得

$$A + I_n = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q,$$

即

$$A + I_n = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)P^{-1}. \qquad ⑩$$

注意 QP 是可逆的．将 QP 分块为 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$，其中 R_{11} 是 r 阶方阵．由式⑩得到

$$A + I_n = P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}. \qquad ⑪$$

记

$$A - I_n = P\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}P^{-1}, \qquad ⑫$$

其中 X_{11} 是 r 阶方阵．由式⑪和⑫得到

$$2I_n = P\begin{bmatrix} R_{11} - X_{11} & R_{12} - X_{12} \\ -X_{21} & -X_{22} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

即

$$\begin{bmatrix} R_{11} - X_{11} & R_{12} - X_{12} \\ -X_{21} & -X_{22} \end{bmatrix} = 2I_n.$$

所以

$$R_{11} - X_{11} = 2I_r, R_{12} - X_{12} = 0,$$
$$-X_{21} = 0, \quad -X_{22} = 2I_{n-r}.$$

即有

$$X_{11} = R_{11} - 2I_r, X_{12} = R_{12},$$
$$X_{21} = 0, X_{22} = -2I_{n-r}.$$

由式⑫有

$$A - I_n = P\begin{bmatrix} R_{11} - 2I_r & R_{12} \\ 0 & -2I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}. \qquad ⑬$$

由式⑪和⑬得到

$$A = P\begin{bmatrix} R_{11} - I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}. \qquad ⑭$$

而 $A^2 = I_n$，所以

$$A^2 = P\begin{bmatrix} R_{11} - I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1} \times P\begin{bmatrix} R_{11} - I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} (R_{11} - I_r)^2 & (R_{11} - 2I_r)R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1} = I_n.$$

即

$$\begin{bmatrix} (R_{11} - I_r)^2 & (R_{11} - 2I_r)R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} = I_n.$$

因此

$$(R_{11} - I_r)^2 = I_r, (R_{11} - 2I_r)R_{12} = 0.$$

由前者得到

$$R_{11}^2 - 2R_{11} + I_r = I_r，即 (R_{11} - 2I_r)R_{11} = 0.$$

从而

$$(R_{11} - 2I_r)[R_{11}, R_{12}] = 0.$$

由于 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ 是可逆的，所以 $[R_{11}, R_{12}]$ 是行满秩的．由 3.6.6，有 $[R_{11}, R_{12}] = [I_r, 0]T$，其中 T 是 n 阶可逆方阵．于是

$$(R_{11} - 2I_r)[I_r, 0]T = [R_{11} - 2I_r, 0]T = 0.$$

因此 $[R_{11} - 2I_r, 0] = 0$，从而 $R_{11} - 2I_r = 0$，即 $R_{11} = 2I_r$．于是式⑭化为

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

即 A 和 $\begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 是相似的．注意，

$$\begin{bmatrix} I_r & \frac{1}{2}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & -\frac{1}{2}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix},$$

即 $\begin{bmatrix} I_r & R_{12} \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 相似，从而 A 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$ 相似．

注　3.6.11 可用矩阵在相似下的 Jordan 标准形来证明．但用矩阵在相抵下的 Hermite 标准形来证明，应该说是一道很好的习题．

3.6.12　如果 n 阶方阵 A 满足 $A^3 = A$，则 A 称为

3次幂等的. 证明:如果3次幂等方阵 A 的秩为 r,则 A 相似于形如 $\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 的方阵,其中 $0 \leqslant s \leqslant r$,且约定 $I_0 = 0$.

证 因为 $\text{rank}A = r$,所以存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

由于 $A^3 = A$,所以

$$A^3 = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$
$$= P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = A.$$

因为 P 和 Q 是可逆的,所以

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QP\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad ⑮$$

将 n 阶方阵 QP 分块为 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$,其中 R_{11} 是 r 阶方阵. 则由式⑮得到

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此 $R_{11}^2 = I_r$. 而 $Q = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}P^{-1}$,所以

$$R_{11} = T\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{bmatrix}T^{-1}.$$

因此

$$A = P\begin{bmatrix} T\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{bmatrix}T^{-1} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & -I_{r-s} \end{bmatrix} & T^{-1}R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

记 $K = P\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$,并记 $T^{-1}R_{12} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$,其中 R_1 和 R_2 分别是 $s \times (n-r)$ 和 $(r-s) \times (n-r)$ 矩阵. 则 K 是可逆的,且 $K^{-1} = \begin{bmatrix} T^{-1} & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}$. 所以

$$A = K\begin{bmatrix} I_s & 0 & R_1 \\ 0 & I_{r-s} & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}K^{-1}.$$

因此方阵 A 和 $\begin{bmatrix} I_s & 0 & R_1 \\ 0 & -I_{r-s} & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似. 由于

$$\begin{bmatrix} I_s & 0 & R_1 \\ 0 & I_{r-s} & R_2 \\ 0 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s & 0 & R_1 \\ 0 & -I_{r-s} & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\times \begin{bmatrix} I_s & 0 & -R_1 \\ 0 & I_{r-s} & -R_2 \\ 0 & 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所以方阵 $\begin{bmatrix} I_s & 0 & R_1 \\ 0 & -I_{r-s} & R_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似. 从而方阵 A 和 $\begin{bmatrix} I_s & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r-s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

3.6.13 设 A 是 n 阶方阵,且 $\text{rank}A = r, A^2 = kA, k \neq 0$. 证明:方阵 A 和 $\begin{bmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

证 因为 $\text{rank}A = r$,所以存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)P^{-1}.$$

记 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$,其中 R_{11} 是 r 阶方阵. 则

$$A = P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}.$$

由于 $A^2 = kA$,所以

$$A^2 = P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} \cdot P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{11}R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$
$$= P\begin{bmatrix} kR_{11} & kR_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = kA.$$

因此

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{11}R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} kR_{11} & kR_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

于是

$$R_{11}^2 = kR_{11}, R_{11}R_{12} = kR_{12},$$

即

$$(R_{11} - kI_r)R_{11} = 0, (R_{11} - kI_r)R_{12} = 0.$$

所以

$$(R_{11} - kI_r)[R_{11}, R_{12}] = 0.$$

由于 P 和 Q 是可逆的,所以 QP 可逆. 因此 $r \times n$ 矩阵 $[R_{11}, R_{12}]$ 是行满秩的. 于是 $R_{11} - kI_r = 0$,即 $R_{11} = kI_r$. 因此

$$A = P\begin{bmatrix} kI_r & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1},$$

即方阵 A 和 $\begin{bmatrix} kI_r & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似. 而

$$\begin{bmatrix} I_r & \frac{1}{k}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} kI_r & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & -\frac{1}{k}R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

即方阵 $\begin{bmatrix} kI_r & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是相似的. 从而 A 和 $\begin{bmatrix} kI_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

3.6.14　设 n 阶可逆方阵 A 满足 $A^{-1} = 2I_n - A$, 且 $\operatorname{rank}(I_n - A) = r$. 证明: A 相似于下面的方阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & I_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}.$$

证　因为 $\operatorname{rank}(I_n - A) = r$, 所以存在 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$I_n - A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}(QP)P^{-1}.$$

将 n 阶方阵 QP 分块为 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$, 则

$$I_n - A = P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}.$$

由于 $A^{-1} = 2I_n - A$, 所以 $I_n = 2A - A^2$, 即 $A^2 - 2A + I_n = (I_n - A)^2 = 0$. 因此

$$(I_n - A)^2 = P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} \times P\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{11}R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1} = 0.$$

从而

$$\begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{11}R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0.$$

所以, $R_{11}^2 = 0, R_{11}R_{12} = 0$, 即 $R_{11}[R_{11}, R_{12}] = 0$. 由于 n 阶方阵 P 和 Q 是可逆的, 所以 $QP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix}$ 是可逆的, 因此其中 $r \times n$ 矩阵 $[R_{11}, R_{12}]$ 是行满秩的. 从而 $R_{11} = 0$. 于是

$$I_n - A = P\begin{bmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}.$$

由此得到

$$A = I_n - P\begin{bmatrix} 0 & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$$

$$= P\begin{bmatrix} I_r & -R_{12} \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}P^{-1}.$$

另外, $[R_{11}, R_{12}] = [0, R_{12}]$ 是行满秩的, 即 $\operatorname{rank}[0, R_{12}] = \operatorname{rank}R_{12} = r$. 注意 R_{12} 是 $r \times (n-r)$ 矩阵, 所以存在 r 阶和 $n-r$ 阶可逆方阵 K 和 T, 使得

$$-R_{12} = K\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T.$$

(为什么?) 因此

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & K\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}P^{-1}.$$

所以 A 和 $\begin{pmatrix} I_r & K\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ 相似. 而

$$\begin{bmatrix} K^{-1} & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{pmatrix} I_r & K\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & I_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix},$$

所以 $\begin{pmatrix} I_r & K\begin{bmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} I_r & 0 & I_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}$ 相似. 从而 A 和 $\begin{pmatrix} I_r & 0 & I_r \\ 0 & I_{n-2r} & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{pmatrix}$ 相似.

3.6.15　设 A, B 和 C 是给定的 $m \times n$、$m \times p$ 和 $q \times n$ 矩阵, X 是任意一个 $q \times p$ 矩阵. 求 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix}$ 的最小值.

解　设 $\operatorname{rank}A = r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

于是

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q & B \\ C & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P^{-1}B \\ CQ^{-1} & X \end{pmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

由于 $m+q$ 和 $n+p$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ 是可逆的, 所以

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P^{-1}B \\ CQ^{-1} & X \end{pmatrix}. \quad ⑯$$

记 $P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$，$CQ^{-1} = [C_1, C_2]$，其中 B_1 和 C_1 分别是 $r \times p$ 和 $q \times r$ 矩阵. 则

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & P^{-1}B \\ CQ^{-1} & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ C_1 & C_2 & X \end{pmatrix}.$$

于是

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_{m-r} & 0 \\ -C_1 & 0 & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \\ C_1 & C_2 & X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & -B_1 \\ 0 & I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & C_2 & X \end{pmatrix}. \quad ⑰$$

设 $\operatorname{rank}B_2 = s$，$\operatorname{rank}C_2 = t$. 注意 B_2 和 C_2 分别是 $(m-r) \times p$ 和 $q \times (n-r)$ 矩阵. 对矩阵 B_2 和 C_2 再一次用矩阵在相抵下的 Hermite 标准形，则

$$B_2 = R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T,$$

$$C_2 = K\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W,$$

其中 R, T, K 和 W 分别是 $m-r$ 阶、p 阶、q 阶和 $n-r$ 阶可逆方阵. 于是

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \\ 0 & C_2 & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R\begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}T \\ 0 & K\begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}W & X \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0 & \begin{bmatrix} I_t & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & K^{-1}XT^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & T \end{pmatrix}. \quad ⑱$$

由式⑯、⑰和⑱得到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & X \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & \multicolumn{2}{c}{K^{-1}XT^{-1}} \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}. \quad ⑲$$

记 $K^{-1}XT^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$，其中 X_{11} 是 $t \times s$ 阶的. 考虑矩阵

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

将第 2 行分别左乘以 $-X_{11}$ 和 $-X_{21}$，并分别加到第 4 和 5 行，得到

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 & X_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{22} \end{pmatrix},$$

再将第 2 列右乘以 $-X_{12}$，并加到第 5 列，得到

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

由于分块矩阵的块初等变换不改变其秩，所以由式⑲得到

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_t & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X_{22} \end{pmatrix}$$

$$= r + s + t + \operatorname{rank}X_{22}.$$

因此

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \geqslant r + s + t, \quad ⑳$$

其中 $r = \operatorname{rank}A$，$s = \operatorname{rank}B_2$，$t = \operatorname{rank}C_2$. 由于 $P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$，即 $B = P\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$，而 $A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$，所以

$$[A, B] = P\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}.$$

又

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 & -B_1 \\ 0 & I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\text{rank}[A,B] = \text{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} = \text{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} = r + s.$$

同理

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r + t.$$

于是式 ⑳ 化为

$$\text{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \geqslant \text{rank}[A,B] + \text{rank}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - \text{rank}A.$$

注意其中等式是可以达到的.因此 $\text{rank}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$之最小值为 $\text{rank}[A,B] + \text{rank}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} - \text{rank}A$.

3.6.16(Ballantine,1968) 设 $A = (a_{ij})$ 和 $B = (b_{ij})$ 是 $m \times n$ 矩阵,记 $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$, $A \circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 乘积.证明:

$$\text{rank}A \circ B \leqslant (\text{rank}A)(\text{rank}B).$$

证 设 $\text{rank}A = r$, $\text{rank}B = s$,则由满秩分解定理,有

$$A = PQ, \quad B = RT,$$

其中 P 和 Q 分别是 $m \times r$ 和 $r \times n$ 列满秩矩阵,而 R 和 T 分别是 $m \times s$ 和 $s \times n$ 列满秩和行满秩矩阵.将 P 和 R 按列分块为 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$ 和 $R = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]$,其中 α_i 和 γ_j 是一维列向量,$1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$.将 R 和 T 按行分块为 $R = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix}$ 和 $T = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_s \end{bmatrix}$,其中 β_i 和 δ_j 是一维行向量,$1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant s$.则

$$A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\beta_i,$$

$$B = [\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_s]\begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \vdots \\ \delta_s \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j\delta_j.$$

容易验证,对任意 $m \times n$ 矩阵 A, B, C,有

$$(A + B) \circ C = A \circ C + B \circ C,$$
$$A \circ (B + C) = A \circ B + A \circ C.$$

所以

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (\alpha_i\beta_i) \circ (\gamma_j\delta_j).$$

记 $\alpha_i' = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$, $\beta_i = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$, $\gamma_j' = (c_1, c_2, \cdots, c_m)$ 和 $\delta_j = (d_1, d_2, \cdots, d_n)$.则

$$\alpha_i\beta_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}[b_1, b_2, \cdots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \cdots & a_mb_n \end{bmatrix} = (a_kb_l).$$

$$\gamma_j\delta_j = \begin{bmatrix} c_1d_1 & c_1d_2 & \cdots & c_1d_n \\ c_2d_1 & c_2d_2 & \cdots & c_2d_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_md_1 & c_md_2 & \cdots & c_md_n \end{bmatrix} = (c_kd_l).$$

于是

$$(\alpha_i\beta_i) \circ (\gamma_j\delta_j) = (a_kc_kb_ld_l) = (\alpha_i \circ \gamma_j)(\beta_i \circ \delta_j).$$

所以

$$A \circ B = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (\alpha_i \circ \gamma_j)(\beta_i \circ \delta_j).$$

由 3.5.6 得到

$$\text{rank}A \circ B = \text{rank}\left(\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} (\alpha_i \circ \gamma_j)(\beta_i \circ \delta_j)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{s} \text{rank}(\alpha_i \circ \gamma_j)(\beta_i \circ \delta_j).$$

由于 P 和 R 是列满秩的,Q 和 T 是行满秩的,所以 α_i, β_i, γ_j, δ_j 都是非零向量.从而 $\text{rank}(\alpha_i \circ \gamma_j)(\beta_i \circ \delta_j) = 1$.所以

$$\text{rank}A \circ B \leqslant rs = (\text{rank}A)(\text{rank}B).$$

3.6.17 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 n 阶方阵,$A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I_n$.证明:

(1) 如果对任意 i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$,有 $A_iA_j = 0$,则 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是幂等的,而且 $\text{rank}A_1 + \text{rank}A_2 + \cdots + \text{rank}A_k = n$;

(2) 如果 $\text{rank}A_1 + \text{rank}A_2 + \cdots + \text{rank}A_k = n$,则 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 都是幂等的,而且对任意 i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$,有 $A_iA_j = 0$.

证 设对任意 i, j, $1 \leqslant i \neq j \leqslant k$,有 $A_iA_j = 0$.则由 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I_n$ 得到

$$\begin{aligned}A_j &= A_j(A_1 + A_2 + \cdots + A_k)\\ &= A_jA_1 + A_jA_2 + \cdots + A_j^2 + A_jA_{j+1} + \cdots\\ &\quad + A_jA_k\\ &= A_j^2,\end{aligned}$$

即 A_j 是幂等的, $j = 1,2,\cdots,k$. 现在设 $\mathrm{rank}A_i = n_i$, $i = 1,2,\cdots,k$, 则由矩阵满秩分解定理, 存在 $n \times n_i$ 列满秩矩阵 P_i 和 $n_i \times n$ 列满秩矩阵 Q_i, 使得 $A_i = P_iQ_i$. 当 $i \neq j$ 时, 由 $A_iA_j = 0$ 得到, $P_iQ_iP_jQ_j = 0$. 于是 $P_i'P_i(Q_iP_j)Q_jQ_j' = 0$. 因为 $n \times n_i$ 矩阵 P_i 是列满秩的, 所以 P_i 有 n_i 个 n 维列向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_i}$ 是线性无关的. 因此存在 $n - n_i$ 个 n 维列向量 $\alpha_{n_i+1},\cdots,\alpha_n$, 使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是线性无关的, 于是 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{n_i},\alpha_{n_i+1},\cdots,\alpha_n]$ 是可逆的. 记 $P = [\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n] = [P_i,R_i]$, 其中 $R_i = [\alpha_{n_i+1},\cdots,\alpha_n]$. 则 $P'P$ 是正定的. 而 $P'P = \begin{bmatrix}P_i'\\ R_i'\end{bmatrix}[P_i,R_i] = \begin{bmatrix}P_i'P_i & P_i'R_i\\ R_i'P_i & R_i'R_i\end{bmatrix}$, 所以 $P_i'P_i$ 是正定的, 从而 $P_i'P_i$ 是可逆的. 同理 Q_jQ_j' 也是可逆的. 于是得到 $Q_iP_j = 0$; 当 $i = j$ 时, $A_i^2 = A_i$, 所以 $P_i(Q_iP_i)Q_i = P_iQ_i$. 因此有

$$P_i'P_i(Q_iP_i)Q_iQ_i' = (P_i'P_i)(Q_iQ_i').$$

由此得到, $Q_iP_i = I_{n_i}$, 于是

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}[P_1,P_2,\cdots,P_k]\\ &= \begin{bmatrix}Q_1P_1 & Q_1P_2 & \cdots & Q_1P_k\\ Q_2P_1 & Q_2P_2 & \cdots & Q_2P_k\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ Q_kP_1 & Q_kP_2 & \cdots & Q_kP_k\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}I_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & I_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & I_{n_k}\end{bmatrix}\\ &= I_{n_1+n_2+\cdots+n_k}.\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}&[P_1,P_2,\cdots,P_k]\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}\\ &= \sum_{i=1}^{k}P_iQ_i = \sum_{i=1}^{k}A_i = I_n.\end{aligned}$$

所以 $n \times (n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ 矩阵 $[P_1,P_2,\cdots,P_k]$ 和 $(n_1 + n_2 + \cdots + n_k) \times n$ 矩阵 $\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}$ 都是方阵(为什么?) 即 $\mathrm{rank}A_1 + \mathrm{rank}A_2 + \cdots + \mathrm{rank}A_k = n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. 这就证明了结论(1).

其次设 $\mathrm{rank}A_i = n_i$, $i = 1,2,\cdots,k$, 且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$. 从上面的证明, 可设 $A_i = P_iQ_i$, 其中 P_i 和 Q_i 分别是 $n \times n_i$ 列满秩和 $n_i \times n$ 行满秩矩阵. 由于 $A_1 + A_2 + \cdots + A_k = I_n$, 所以

$$[P_1,P_2,\cdots,P_k]\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix} = I_n.$$

注意 $[P_1,P_2,\cdots,P_k]$ 是 $n \times (n_1 + n_2 + \cdots + n_k)$ 矩阵. 由假设, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 所以 $[P_1,P_2,\cdots,P_k]$ 是 n 阶方阵. 同理 $\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}$ 是 n 阶方阵. 从而 $[P_1,P_2,\cdots,P_k]$ 和 $\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}$ 是可逆的, 因此

$$\begin{bmatrix}Q_1\\ Q_2\\ \vdots\\ Q_k\end{bmatrix}[P_1,P_2,\cdots,P_k] = I_n.$$

于是 $Q_iP_j = \delta_{ij}I_{n_i}$, $1 \leqslant i,j \leqslant k$. 从而当 $i = j$ 时, $A_i^2 = P_iQ_iP_iQ_i = P_iQ_i = A_i$, 即 A_i 是幂等的, 而当 $i \neq j$ 时, $A_iA_j = P_i(Q_iP_j)Q_j = 0$. 这就证明了结论(2).

3.6.18 设 A 是 $m \times n$ 已知矩阵. 求矩阵方程 $A'X = X'A$ 的所有解 X.

解 设 $\mathrm{rank}A = r$, 则存在 m 阶可逆方阵 P 和 n 阶可逆方阵 Q, 使得

$$A = P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

注意其中的方阵 P 和 Q 并不唯一. 设 P 和 Q 是取定的. 设 X 是原矩阵方程的一个解, 即 $A'X = X'A$, 则

$$Q'\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P'X = X'P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}Q.$$

因此

$$\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P'XQ^{-1} = (Q')^{-1}X'P\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

将矩阵 $P'XQ^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$,其中 X_{11} 是 r 阶方阵,代入上式得到

$$\begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11}' & 0 \\ X_{12}' & 0 \end{bmatrix}.$$

因此 $X_{11}' = X_{11}$,且 $X_{12} = 0$. 于是

$$P'XQ^{-1} = \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix},$$

即

$$X = (P')^{-1}\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}, \qquad ㉑$$

其中 X_{11} 是 r 阶对称方阵.

现在设矩阵 X 具有式㉑的形式,其中 X_{11} 是 r 阶对称方阵,X_{21} 是任意一个 $(m-r)\times r$ 矩阵,X_{22} 是任意一个 $(m-r)\times(n-r)$ 矩阵. 则

$$\begin{aligned} A'X &= Q'\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}P'\cdot(P')^{-1}\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}Q \\ &= Q'\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q, \\ X'A &= Q'\begin{bmatrix} X_{11}' & X_{21}' \\ 0 & X_{22}' \end{bmatrix}P^{-1}\cdot P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \\ &= Q'\begin{bmatrix} X_{11}' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q. \end{aligned}$$

由于 $X_{11}' = X_{11}$,所以有 $A'X = X'A$,即形如式㉑的矩阵 X 一定是原矩阵方程的解. 因此具有形式㉑的矩阵 X 是方程 $X'A = XA'$ 的一般解.

3.6.19 设 A 和 B 是给定的 $m\times n$ 和 $m\times p$ 矩阵,而 X 是 $n\times p$ 未知矩阵. 证明:矩阵方程 $AX = B$ 有解 X 的充要条件是,$\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}[A,B]$,其中 $[A,B]$ 是由矩阵 A 和 B 并排而成的矩阵.

证 设 $\mathrm{rank}A = r$,则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

现在设方程 $AX = B$ 有解 X_0,则

$$AX_0 = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QX_0 = B.$$

因此

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QX_0 = P^{-1}B.$$

将矩阵 QX_0 和 $P^{-1}B$ 分别分块为 $QX_0 = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ 和 $P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$,其中 X_1 和 B_1 是 $r\times p$ 矩阵. 则

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QX_0 = \begin{bmatrix} X_1 \\ 0 \end{bmatrix} = P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}.$$

所以 $X_1 = B_1$,$B_2 = 0$. 于是 $P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$,即 $B = P\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. 而

$$\begin{aligned} [A,B] &= \left[\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q, P\begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix}\right] \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由于 P 和 $\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}$ 是可逆的,所以 $[A,B]$ 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相抵,而

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 & -B_1 \\ 0 & I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相抵. 于是

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}[A,B] &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r \\ &= \mathrm{rank}A. \end{aligned}$$

这就证明,如果方程 $AX = B$ 有解,则 $\mathrm{rank}[A,B] = \mathrm{rank}A$.

反之设 $\mathrm{rank}[A,B] = \mathrm{rank}A = r$. 将矩阵 $P^{-1}B$ 分块为 $P^{-1}B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$,其中 B_1 是 $r\times p$ 矩阵. 则

$$\begin{aligned} [A,B] &= \left[P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q, PP^{-1}B\right] \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

所以矩阵 $[A,B]$ 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$ 相抵. 而

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_r & 0 & -B_1 \\ 0 & I_{n-r} & 0 \\ 0 & 0 & I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix},$$

即 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}$ 相抵. 于是

$$\begin{aligned} r = \mathrm{rank}[A,B] &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix} \\ &= \mathrm{rank}I_r + \mathrm{rank}B_2 \\ &= r + \mathrm{rank}B_2. \end{aligned}$$

因此 $B_2=0$. 所以 $P^{-1}B=\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}$, 即 $B=P\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}$. 令 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}$, 则 $AX_0=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}=P\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}=B$. 因此 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix}$ 是方程 $AX=B$ 的一个解. 这就证明, 当 $\text{rank}[A,B]=\text{rank}A$ 时方程 $AX=B$ 有解.

3.6.20 设 A 是给定的 $m\times n$ 矩阵, $m<n$, X 是 $n\times m$ 未知矩阵. 证明: 矩阵方程 $AX=I_m$ 有解的充要条件是, A 是行满秩的.

证 设 $\text{rank}A=r$, 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q, 使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q.$$

现在设方程 $AX=I_m$ 中有解 X_0. 如果 $r<m$, 则

$$AX_0=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QX_0=I_m.$$

因此

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QX_0=P^{-1}.$$

从而

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QX_0P=I_m. \quad ㉒$$

将 $n\times m$ 矩阵 QX_0P 分块为 $QX_0P=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}$, 其中 X_{11} 是 r 阶的. 由式㉒得到

$$\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\0&0\end{bmatrix}=I_m.$$

由于 $r<m$, 所以左端的 m 阶方阵 $\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\0&0\end{bmatrix}$ 含有零行, 不可能. 因此 $r=m$, 即 A 是行满秩的.

反之设 A 是行满秩的, 则 $A=P[I_m\ 0]Q$. 取 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_m\\0\end{bmatrix}P^{-1}$, 则

$$AX_0=P[I_m\ 0]Q\cdot Q^{-1}\begin{bmatrix}I_m\\0\end{bmatrix}P^{-1}=PI_mP^{-1}=I_m.$$

因此 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}I_m\\0\end{bmatrix}P^{-1}$ 是方程 $AX_0=0$ 的一个解.

3.6.21 设 A 和 B 是 n 阶方阵, $\text{rank}A=r$, $\text{rank}B=n-r$, X 是 n 阶未知方阵. 求矩阵方程 $AXB=0$ 的通解.

解 因为 $\text{rank}A=r$, $\text{rank}B=n-r$, 所以存在 n 阶可逆方阵 P,Q,R 和 T, 使得

$$A=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q,$$

$$B=R\begin{bmatrix}I_{n-r}&0\\0&0\end{bmatrix}T.$$

而且 P,Q,R 和 T 是取定的.

设 X_0 是方程 $AXB=0$ 的解, 则

$$AX_0B=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QX_0R\begin{bmatrix}I_{n-r}&0\\0&0\end{bmatrix}T=0.$$

由于 P 和 T 是可逆的, 所以

$$\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}QX_0R\begin{bmatrix}I_{n-r}&0\\0&0\end{bmatrix}=0. \quad ㉓$$

将方阵 QX_0R 分块为 $QX_0R=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}$, 其中 X_{11} 是 $r\times(n-r)$ 矩阵, 代入式㉓得到

$$\begin{bmatrix}X_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}=0.$$

因此 $X_{11}=0$. 于是

$$QX_0R=\begin{bmatrix}0&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix},$$

即

$$X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}0&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}R^{-1}. \quad ㉔$$

这表明, 如果 X_0 是原方程的解, 则 X_0 具有形式㉔.

现在设 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}0&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}R^{-1}$, 其中 X_{12}, X_{21} 和 X_{22} 分别是任意的 $r\times r$, $(n-r)\times(n-r)$ 和 $(n-r)\times r$ 矩阵. 则

$$AX_0B=P\begin{bmatrix}I_r&0\\0&0\end{bmatrix}Q\cdot Q^{-1}\begin{bmatrix}0&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}R^{-1}\cdot R\begin{bmatrix}I_{n-r}&0\\0&0\end{bmatrix}T=0.$$

因此 X_0 是原方程的解. 这表明, 原方程的通解是 $X_0=Q^{-1}\begin{bmatrix}0&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{bmatrix}R^{-1}$, 其中 X_{12}, X_{21} 和 X_{22} 分别是任意的 $r\times r$, $(n-r)\times(n-r)$ 和 $(n-r)\times r$ 矩阵.

3.6.22(Roth, 1952) 设 A,B 和 C 分别是给定的 $m\times n$, $p\times q$ 和 $m\times q$ 矩阵, 而 X 和 Y 分别是 $n\times q$ 和 $m\times p$ 未知矩阵. 证明: 矩阵方程

$$AX-YB=C \quad (3)$$

有解的充要条件是, 矩阵

$$\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix}A&C\\0&B\end{bmatrix}$$

相抵.

证 必要性. 设方程(3)有解 X_0,Y_0, 则 $AX_0-Y_0B=C$. 因此

$$\begin{bmatrix} I_m & -Y_0 \\ 0 & I_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & X_0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A & AX_0 - Y_0B \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

所以矩阵$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$相抵.

反之设$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$相抵,且设 $\mathrm{rank}A = r, \mathrm{rank}B = s$. 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q 以及 p 阶和 q 阶可逆方阵 R 和 T,使得

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$RBT = \begin{bmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PAQ & PCT \\ 0 & RBT \end{bmatrix}.$$

将 $m \times q$ 矩阵 PCT 分块为 $PCT = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$,其中 C_{11} 和 C_{22} 分别是 $r \times s$ 和 $(m-r) \times (n-s)$ 矩阵. 则

$$\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad ㉕$$

将右端矩阵的第3行分别左乘以 $-C_{11}$ 和 $-C_{21}$,并分别加到第1,2行,得到

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & -C_{11} & 0 \\ 0 & I_{m-r} & -C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p-s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad ㉖$$

将右端矩阵第1列右乘以 $-C_{12}$,加到第4列,得到

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & C_{12} \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & -C_{12} \\ 0 & I_{n-r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{q-s} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad ㉗$$

所以

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{22} \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= r + s + \mathrm{rank}C_{22}.$$

另一方面,有

$$r + s = \mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由假设,$\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$相抵,所以

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix},$$

即 $r + s = r + s + \mathrm{rank}C_{22}$. 从而 $\mathrm{rank}C_{22} = 0$,因此 $C_{22} = 0$. 记 $m \times p$ 矩阵 $K = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ C_{21} & 0 \end{bmatrix}$, $n \times q$ 矩阵 $L = \begin{bmatrix} 0 & C_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. 则由式㉕、㉖和㉗得到

$$\begin{bmatrix} I_m & -K \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & -L \\ 0 & I_q \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_m & -K \\ 0 & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & L \\ 0 & I_q \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q^{-1} & 0 \\ 0 & T^{-1} \end{bmatrix}.$$

所以

$$\begin{bmatrix} A & C - P^{-1}KRB \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & AQLT^{-1} \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$

由此得到

$$C - P^{-1}KRB = AQLT^{-1}.$$

即

$$A(QLT^{-1}) - (-P^{-1}KR)B = C.$$

于是 $X = QLT^{-1}, Y = -P^{-1}KR$ 是方程(3)的解.

3.6.23 设 A 是给定的 $m \times n$ 矩阵, X 是 $n \times m$ 未知矩阵. 求矩阵方程

$$AXA = A \quad (4)$$

的所有解.

解 设 $\mathrm{rank}A = r$,则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

设 X_0 是方程(4)的解,则

$$AX_0A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QX_0P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q$$

$$= A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q.$$

因此

$$\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}QX_0P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

将矩阵 QX_0P 分块为 $QX_0P = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}$，其中 X_{11} 是 r 阶方阵.则由上式得到

$$\begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

因此 $X_{11} = I_r$.所以

$$QX_0P = \begin{bmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}.$$

即

$$X_0 = Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix}P^{-1}. \tag{28}$$

现在设 X_0 是形如式㉘的 $n \times m$ 矩阵，其中 X_{12}，X_{21} 和 X_{22} 是任意的 $r \times (m-r)$，$(n-r) \times r$ 和 $(n-r) \times (m-r)$ 矩阵.则

$$\begin{aligned} AX_0A &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \cdot Q^{-1}\begin{bmatrix} I_r & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{bmatrix} \\ &\quad \cdot P^{-1} \cdot P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q \\ &= P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}Q = A. \end{aligned}$$

因此形如式㉘的 $n \times m$ 矩阵是方程(4)的解.所以式㉘给出了方程(4)的通解.

注 对于给定的 $m \times n$ 矩阵 A，满足 $AXA = A$ 的 $n \times m$ 矩阵 X 称为 A 的广义逆，记作 A^-.从通解公式㉘可以看出，对于秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵 A，$\mathrm{rank}A \leqslant \mathrm{rank}A^- \leqslant \min\{m,n\}$，而且对任意正整数 k，$\mathrm{rank}A \leqslant k \leqslant \min\{m,n\}$，恒存在 A^-，使得 $\mathrm{rank}A^- = k$.

3.6.24 设 A 是给定的 $m \times n$ 矩阵，$\mathrm{rank}A = r$，X 是 $n \times m$ 未知矩阵.证明：下列矩阵方程组

$$\begin{cases} AXA = A, \\ XAX = X, \\ (AX)^* = AX, \\ (XA)^* = XA \end{cases} \tag{5}$$

恒有解，而且解是唯一的，其中 A^* 是矩阵 A 的共轭转置.

证 因为 $\mathrm{rank}A = r$，所以由矩阵满秩分解定理，存在 $m \times r$ 列满秩矩阵 B 和 $r \times n$ 行满秩矩阵 C，使得 $A = BC$.由于 B 是列满秩的，所以 B 的 r 个列 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组 m 维线性无关的向量组，于是存在 $m-r$ 个 m 维列向量 $\alpha_{r+1}, \alpha_{r+2}, \cdots, \alpha_m$，使得 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m$ 是线性无关的.因此 m 阶方阵 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m] = [B, D]$ 是可逆的，其中 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r]$，$D = [\alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_m]$.从而

$$P^*P = \begin{pmatrix} B^* \\ D^* \end{pmatrix}[B, D] = \begin{pmatrix} B^*B & B^*D \\ D^*B & D^*D \end{pmatrix}$$是正定的.

所以其子方阵 B^*B 也是正定的.因此 B^*B 是可逆的.同理 CC^* 是可逆的.记

$$X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*. \tag{29}$$

将矩阵 X 代入方程组(5)，则

$$\begin{aligned} AXA &= BC(C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*)BC \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= BC = A, \\ XAX &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*(BC) \\ &\quad \times C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B) \\ &\quad \times (CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* = X. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{而}(AX)^* &= X^*A^* \\ &= [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]^*(BC)^* \\ &= B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}(CC^*)B^* \\ &= B(B^*B)^{-1}B^*, \\ AX &= BC[C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*] \\ &= B(CC^*)(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^* \\ &= B(B^*B)^{-1}B^*, \end{aligned}$$

即有

$$(AX)^* = AX.$$

又

$$\begin{aligned} (XA)^* &= A^*X^* \\ &= (BC)^*(C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*)^* \\ &= C^*B^*(B(B^*B)^{-1}(CC^*)^{-1}C) \\ &= C^*(CC^*)^{-1}C, \\ XA &= [C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*]BC \\ &= C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}(B^*B)C \\ &= C^*(CC^*)^{-1}C, \end{aligned}$$

所以有

$$(XA)^* = XA.$$

这表明，矩阵 $X = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$ 是方程组(5)的解.

现在设 $n \times m$ 矩阵 X_1 和 X_2 是方程组(5)的解.则由(5)中第2个方程，有

$$X_1 = X_1AX_1.$$

由第1个方程，有

$$A = AX_2A.$$

于是

$$X_1 = X_1AX_2AX_1 = X_1(AX_2)(AX_1).$$

由第 3 个方程，有 $AX_2=(AX_2)^*, AX_1=(AX_1)^*$ 所以

$$X_1=X_1(AX_2)^*(AX_1)^* = X_1(AX_1AX_2)^*.$$

由于 $AX_1A=A$，所以

$$X_1=X_1(AX_2)^*=X_1AX_2.$$

由于 $A=AX_2A$，所以

$$X_1=X_1AX_2AX_2=(X_1A)(X_2A)X_2.$$

由于 $X_1A=(X_1A)^*, X_2A=(X_2A)^*$. 所以

$$X_1=(X_1A)^*(X_2A)^*X_2=(X_2AX_1A)^*X_2.$$

而 $AX_1A=A$，所以由第 4 和第 2 方程，有

$$X_1=(X_2A)^*X_2=X_2AX_2=X_2.$$

这就证明，方程组(5)的解是唯一的.

注　方程组(5)称为 Penrose 方程组. 对于给定的 $m\times n$ 矩阵 A，Penrose 方程组(5)的解 X 称为 A 的 Moore-Penrose 广义逆，记作 A^+. 矩阵的广义逆是矩阵论的一个重要的研究课题，在计算数学和数理统计等中有着广泛的应用.

§ 3.7　矩阵在相似下的 Jordan 标准形

众所周知，线性代数就是线性空间的理论，主要研究的是线性空间上线性变换. 在线性空间中引进基之后，线性变换和矩阵之间便建立了一一对应. 在不同基下，同一个线性变换的方阵表示是相似的. 这就引出了方阵相似的概念，并产生了方阵在相似下的分类问题，由此建立了方阵在相似下的 Jordan 标准形理论. 因此可以说，Jordan 标准形理论是线性代数和矩阵论的最深刻的部分. 正因为如此，它在研究和处理线性代数和矩阵论的论题中是一个重要而基本的工具，具有广泛的应用. 本节将给出应用 Jordan 标准形来解题的基本技巧和方法. 为方便起见，我们对一些记号作些约定.

设 A 是 n 阶复方阵，$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是方阵A的初等因子组，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是 A 的特征值，$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 是正整数，且 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$. 初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$ 所决定的 Jordan 块记作 $J_{n_i}(\lambda_i)$，即 $J_{n_i}(\lambda_i)$ 是如下的 n_i 阶方阵：

$$J_{n_i}(\lambda_i)=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots 0\\ & & & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}.$$

由 Jordan 标准形理论可知，存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}.$$

上式右端方阵记作

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

3.7.1　设 A 是 n 阶幂等方阵，即 $A^2=A$，且 $\operatorname{rank}A=r$. 证明：方阵 A 相似于方阵 $\begin{bmatrix}I_r & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$，而且 $\operatorname{Tr}A=\operatorname{rank}A$，其中 $\operatorname{Tr}A$ 是方阵A 的迹，即方阵 A 的所有对角元之和.

证法 1　设$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组，则存在 n 阶可逆方阵P，使得

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

由于 A 是幂等的，即 $A^2=A$，因此 $P^{-1}A^2P=(P^{-1}AP)^2=P^{-1}AP$ 所以

$$J_{n_1}(\lambda_1)^2\oplus J_{n_2}(\lambda_2)^2\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k)^2 = J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

因此对于 $i=1,2,\cdots,k$，有 $J_{n_i}(\lambda_i)^2=J_{n_i}(\lambda_i)$，即

$$\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}. \quad ①$$

如果 $n_i=2$，则由式①得到

$$\begin{bmatrix}\lambda_i^2 & 2\lambda_i\\ 0 & \lambda_i^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_i & 1\\ 0 & \lambda_i\end{bmatrix}.$$

从而得到 $\lambda_i^2=\lambda_i, 2\lambda_i=1$，不可能；如果 $n_i\geqslant 3$，则由式①得到

$$\begin{pmatrix}\lambda_i^2 & 2\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_i^2 & 2\lambda_i & \ddots & & \vdots\\ & \ddots & \ddots & \ddots & & 0\\ & & & & & 1\\ \vdots & & & & \lambda_i^2 & 2\lambda_i\\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 & \lambda_i^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & & & 0\\ \vdots & & & & 1\\ 0 & & \cdots & 0 & \lambda_i\end{pmatrix}.$$

比较上式两端 n_i 阶方阵的(1,3)位置的元素,得到 1 = 0,不可能.因此 $n_i = 1, i = 1,2,\cdots,k$,而且 $k = n$.所以

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于 $P^{-1}A^2P = P^{-1}AP$,所以

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由此得到,$\lambda_i^2 = \lambda_i, i = 1,2,\cdots,n$.即 $\lambda_i = 0,1, i = 1,2,\cdots,n$.由于 $\mathrm{rank}A = r$,所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中恰有 r 个 1.于是方阵 A 相似于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.由于相似的方阵具有相同的迹,所以

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r = \mathrm{rank}A.$$

证法 2 由于 $A^2 = A$,所以 $A^2 - A = 0$,即多项式 $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda$ 是方阵 A 的化零多项式.于是方阵 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 整除 $f(\lambda)$,即 $d(\lambda)$ 是 $f(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$ 的一个因子.因此,$d(\lambda) = \lambda, \lambda - 1, \lambda(\lambda - 1)$.如果 $d(\lambda) = \lambda$,则 $d(A) = A = 0$,此时 $\mathrm{rank}A = r = 0$;如果 $d(\lambda) = \lambda - 1$,则 $d(A) = A - I_n = 0$,即 $A = I_n$.此时 $\mathrm{rank}A = r = n$;如果 $d(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)$,则因方阵 A 的最小多项式 $d(\lambda)$ 无重根,而且其根 0,1 是方阵 A 的所有不同特征值,故方阵 A 相似于方阵 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,其中 $r = \mathrm{rank}A$.再由方阵的迹是方阵在相似下的不变量,所以

$$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r = \mathrm{rank}A.$$

3.7.2 设 n 阶方阵 A 满足 $A^3 = A$,且 $\mathrm{rank}A = r$, $\mathrm{rank}(I_n - A) = s$.证明:方阵 A 相似于方阵 $I_{n-s} \oplus -I_{r+s-n} \oplus O_{n-r}$,其中 O_{n-r} 是 $n-r$ 阶零方阵,而且 $\mathrm{Tr}A = 2n - 2\mathrm{rank}(I_n - A) - \mathrm{rank}A$.

证 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_2)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组,则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

由于 $A^3 = A$,所以 $P^{-1}A^3P = (P^{-1}AP)^3 = P^{-1}AP$.因此

$$J_{n_1}(\lambda_1)^3 \oplus J_{n_2}(\lambda_2)^3 \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)^3$$
$$= J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

于是对于 $i = 1,2,\cdots,k$,有

$$J_{n_i}(\lambda_i)^3 = J_{n_i}(\lambda_i). \qquad ②$$

如果 $n_i = 2$,则由式②有

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 \\ 0 & \lambda_i^3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 \\ 0 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

由此得到,$\lambda_i^3 = \lambda_i, 3\lambda_i^2 = 1$.由前者有 $\lambda_i = 0,1$,由后者有 $\lambda_i = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,不可能;如果 $n_i = 3$,则由式②有

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i \\ 0 & \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 \\ 0 & 0 & \lambda_i^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

比较两端方阵的(1,2)和(1,3)位置上的元素,得到 $3\lambda_i^2 = 1, 3\lambda_i = 0$,不可能;如果 $n_i \geqslant 4$,则由式②得到

$$\begin{pmatrix} \lambda_i^3 & 3\lambda_i^2 & 3\lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 3\lambda_i \\ \vdots & & & & & \ddots & 3\lambda_i^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & & \lambda_i^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

比较上式两端方阵的(1,4)位置的元素得到 $1 = 0$,矛盾.这就证明,$n_i = 1, i = 1,2,\cdots,k$,且 $k = n$.于是

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于 $A^3 = A$,所以 $(P^{-1}AP)^3 = P^{-1}AP$,因此

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

从而 $\lambda_i^3 = \lambda_i, i = 1,2,\cdots,n$.由此得到 $\lambda_i = 0, \pm 1, i = 1,2,\cdots,n$.不妨设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 1, \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_{m+p} = -1, \lambda_{m+p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$.则

$$P^{-1}AP = I_m \oplus -I_p \oplus O_{n-m-p}.$$

由题设,$\mathrm{rank}A = r$,而矩阵的秩在相抵从而在相似下是不变的,因此

$$r = \mathrm{rank}A = \mathrm{rank}(I_m \oplus -I_p \oplus O_{n-m-p}) = m + p.$$

又由题设,$\mathrm{rank}(I_n - A) = s$.而

$$I_n - P^{-1}AP = P^{-1}(I_n - A)P$$

$$= O_m \oplus 2I_p \oplus I_{n-m-p}.$$

所以 $s = \text{rank}(I_n - A) = \text{rank}(O_m \oplus 2I_p \oplus I_{n-m-p}) = n - m$. 因此 $m = n - s, p = r - m = r + s - n$. 从而

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r+s-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

最后，由于方阵的迹是方阵在相似下的不变量，所以

$$\begin{aligned}\text{Tr}A &= \text{Tr}\begin{pmatrix} I_{n-s} & 0 & 0 \\ 0 & -I_{r+s-n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (n-s) - (r+s-n) \\ &= 2n - 2s - r \\ &= 2n - 2\text{rank}(I_n - A) - \text{rank}A.\end{aligned}$$

注 3.7.2 也可用方阵的化零多项式与最小多项式证明. 读者无妨自证之.

3.7.3 设 n 阶实方阵 A 满足 $A^2 = -I_n$. 证明：n 为偶数，而且方阵 A 实相似于方阵 $\begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$，其中 $n = 2m$.

证 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组，则存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

由于 $A^2 = -I_n$，所以 $P^{-1}A^2P = -I_n$，因此 $(P^{-1}AP)^2 = -I_n$. 于是

$$J_{n_1}(\lambda_1)^2 \oplus J_{n_2}(\lambda_2)^2 \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)^2 = -I_n.$$

所以对每个 $j = 1, 2, \cdots, k$,

$$J_{n_j}(\lambda_j)^2 = -I_{n_j},$$

即

$$\begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_j \end{pmatrix}^2 = -I_{n_j}.$$

仿 3.7.1 的证明，可知 $n_j = 1, j = 1, 2, \cdots, k$，且 $k = n, \lambda_j^2 = -1$，所以 $\lambda_j = \pm i$，这里 $i = \sqrt{-1}$. 不妨设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = i, \lambda_{m+1} = \cdots = \lambda_n = -i$. 于是

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_{n-m} \end{bmatrix}.$$

注意，方阵 A 的特征值是方阵在相似下的不变量，而对角方阵的对角元即是其特征值，所以方阵 A 的特征值为 $i, -i$. 由于 n 阶实方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 是 n 次实系数多项式，所以方阵 A 的复特征值共轭成对出现. 因此 $m = n - m$，即 $n = 2m$. 从而

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_m \end{bmatrix}.$$

另一方面，记 $B = \begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$，则 B 是 n 阶实方阵，且 $B^2 = -I_{2m} = -I_n$. 由上面的证明可知，存在 n 阶可逆方阵 Q，使得

$$Q^{-1}BQ = \begin{bmatrix} iI_m & 0 \\ 0 & -iI_m \end{bmatrix}.$$

从而 $P^{-1}AP = Q^{-1}BQ$，即

$$B = QP^{-1}APQ^{-1} = (PQ^{-1})^{-1}APQ^{-1}. \quad ③$$

所以实方阵 A 和 B 相似. 现在记 $PQ^{-1} = R + iT$，其中 R 和 T 是 n 阶实方阵. 则由式 ③ 得到

$$(R + iT)B = A(R + iT).$$

从而得到

$$RB = AR, \quad TB = AT. \quad ④$$

如果方阵 T 是零方阵，则 $R = PQ^{-1}$ 是可逆实方阵. 式 ③ 说明，A 和 B 是实相似的. 因此设 $T \neq 0$. 于是由式 ④ 得到，对于任意实数 λ,

$$(R + \lambda T)B = A(R + \lambda T). \quad ⑤$$

记

$$f(\lambda) = \det(R + \lambda T).$$

则 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的实系数多项式. 由于 $f(i) = \det(R + iT) = \det PQ^{-1} \neq 0$，所以 $f(\lambda)$ 是关于 λ 的非零的实系数多项式. 因此 $f(\lambda)$ 至多有有限个实根. 于是存在实数 λ_0，使得 $f(\lambda_0) \neq 0$，即实方阵 $R + \lambda_0 T$ 是可逆的. 由式 ⑤ 得到

$$B = (R + \lambda_0 T)^{-1}A(R + \lambda_0 T).$$

这就证明，A 和 B 是实相似的.

注 3.7.3 中证明，如果实方阵 A 和 B 相似，则方阵 A 和 B 是实相似的. 这一结论对任意两个相似的实方阵都成立.

3.7.4 设 A 是 n 阶对合方阵，即 A 满足 $A^2 = I_n$，则方阵 A 相似于方阵 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}$，其中 $r = \text{rank}(I_n + A)$.

证 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组，则存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

由于 A 是对合方阵，即 $A^2 = I_n$，所以 $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = I_n$. 因此

$$J_{n_1}(\lambda_1)^2 \oplus J_{n_2}(\lambda_2)^2 \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)^2 = I_n.$$

从而对 $i = 1, 2, \cdots, k$，有

$$J_{n_i}(\lambda_i)^2 = I_{n_i}.$$

和 3.7.1 的证明相仿,可证 $n_i = 1, i = 1,2,\cdots,k$,且 $k = n, \lambda_i^2 = 1$,从而 $\lambda_i = \pm 1$. 不妨设 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 1, \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = -1$. 所以

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & -I_{n-r} \end{bmatrix}.$$

由于 $P^{-1}(I_n + A)P = \begin{bmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,所以 $\operatorname{rank}(I_n + A)$ $= \operatorname{rank}P^{-1}(I_n + A)P = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 2I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = r$.

3.7.5 设 n 阶方阵 A 满足 $\operatorname{rank}A = \operatorname{Tr}A = 1$. 证明:方阵 A 是幂等的.

证 设 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}, (\lambda - \lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_k)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组,则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

如果 $n_1 = n_2 = \cdots = n_k = 1$,则 $k = n$,而且

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

由于方阵的迹是方阵在相似下的不变量,所以

$$\operatorname{Tr}A = \operatorname{Tr}P^{-1}AP = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

另一方面,由于相似的方阵一定是相抵的,而相抵的方阵的秩相等,因此

$$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}P^{-1}AP = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

易知对角方阵的秩等于其非零对角元之个数,所以

$$\operatorname{rank}A = \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \text{ 中非零的个数} = A \text{ 的非零特征值的个数}.$$

由题设,$\operatorname{rank}A = \operatorname{Tr}A = 1$,所以方阵 A 恰有一个非零特征值,而且这个非零特征值等于 1. 因此

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

于是 $P^{-1}A^2P = (P^{-1}AP)^2 = P^{-1}AP$. 从而 $A^2 = A$,即方阵 A 是幂等的;如果 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 中有一个 $n_i \geqslant 2$,则

$$\operatorname{rank}J_{n_i}(\lambda_i) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{cases} n_i - 1, & \text{当 } \lambda_i = 0 \text{ 时}, \\ n_i, & \text{当 } \lambda_i \neq 0 \text{ 时}. \end{cases}$$

因此

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}A &= \operatorname{Tr}P^{-1}AP \\ &= \operatorname{Tr}(J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)) \\ &= n_1\lambda_1 + n_2\lambda_2 + \cdots + n_k\lambda_k. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}A &= \operatorname{rank}P^{-1}AP \\ &= \operatorname{rank}(J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k)) \\ &= \operatorname{rank}J_{n_1}(\lambda_1) + \operatorname{rank}J_{n_2}(\lambda_2) + \cdots + \operatorname{rank}J_{n_k}(\lambda_k) \\ &\geqslant n_i - 1. \end{aligned}$$

由题设 $\operatorname{rank}A = 1$,所以 $n_1, n_2, \cdots, n_k$ 中恰有一个 $n_i = 2$,而且 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_k = 0$. 从而 $\operatorname{Tr}A = 0$. 因此 $\operatorname{rank}A \neq \operatorname{Tr}A$. 这说明后一种情形是不可能的.

3.7.6 证明:n 阶方阵 A 的秩等于 A^2 的秩的充要条件是,方阵 A 的特征值 0 的代数重数等于其几何重数.

证 必要性. 设 $\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \cdots, \lambda^{n_k}, (\lambda - \lambda_{k+1})^{n_{k+1}}, \cdots, (\lambda - \lambda_m)^{n_m}$ 是方阵 A 的初等因子组,其中 $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \cdots, \lambda_m$ 都是非零的,则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$\begin{aligned} P^{-1}AP = {} & J_{n_1}(0) \oplus J_{n_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(0) \\ & \oplus J_{n_{k+1}}(\lambda_{k+1}) \oplus \cdots \oplus J_{n_m}(\lambda_m). \end{aligned}$$

记

$$N = J_{n_1}(0) \oplus J_{n_2}(0) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(0),$$
$$Q = J_{n_{k+1}}(\lambda_{k+1}) \oplus \cdots \oplus J_{n_m}(\lambda_m).$$

则

$$P^{-1}AP = N \oplus Q. \qquad ⑥$$

注意,Q 是 $n_{k+1} + \cdots + n_m$ 阶上三角方阵,其对角元为 $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, \cdots, \lambda_m$,它们都是非零的. 因此 $\operatorname{rank}Q = n_{k+1} + \cdots + n_m$. 又 Jordan 块 $J_{n_i}(0)$ 为

$$J_{n_i}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{n_i\text{阶}}$$

所以 $\operatorname{rank}J_{n_i}(0) = n_i - 1$. 因此

$$\operatorname{rank}N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k - k.$$

由式⑥有

$$\begin{aligned} \operatorname{rank}A &= \operatorname{rank}P^{-1}AP = \operatorname{rank}N + \operatorname{rank}Q \\ &= n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1} + \cdots + n_m - k. \end{aligned}$$

注意,$n_1 + n_2 + \cdots + n_k + n_{k+1} + \cdots + n_m = n$,所以

$$\operatorname{rank}A = \operatorname{rank}N + \operatorname{rank}Q = n - k. \qquad ⑦$$

另一方面,由式⑥有

$$P^{-1}A^2P=(P^{-1}AP)^2=N^2\oplus Q^2.$$

由于 $n_{k+1}+\cdots+n_m$ 阶上三角方阵 Q 的对角元都是非零的,所以方阵 Q 是可逆的,因此方阵 Q^2 也是可逆的.从而 $\mathrm{rank}Q^2=n_{k+1}+\cdots+n_m$.另一方面,

$$N^2=J_{n_1}(0)^2\oplus J_{n_2}(0)^2\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(0)^2,$$

而当 $n_i\geqslant 2$ 时,

$$J_{n_i}(0)^2=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\ &\cdots&\cdots&\cdots& \\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0&\cdots&0\\0&0&0&1&\cdots&0\\ &\cdots&\cdots&\cdots&\cdots& \\0&0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&0&\cdots&0\\0&0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix},$$

因此,$\mathrm{rank}J_{n_i}(0)^2=n_i-2$;当 $n_i=1$ 时,显然 $\mathrm{rank}J_{n_i}(0)=0$.设 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 中有 l 个 $n_i\geqslant 2,0\leqslant l\leqslant k$,则

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}N^2&=\mathrm{rank}J_{n_1}(0)^2+\mathrm{rank}J_{n_2}(0)^2+\cdots\\&\quad+\mathrm{rank}J_{n_k}(0)^2\\&=n_1+n_2+\cdots+n_k-2l-(k-l)\\&=n_1+n_2+\cdots+n_k-k-l.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}A^2&=\mathrm{rank}(P^{-1}AP)^2=\mathrm{rank}N^2+\mathrm{rank}Q^2\\&=n_1+n_2+\cdots+n_m-k-l\\&=n-k-l.\end{aligned}\qquad ⑧$$

于是由题设得到

$$n-k=\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^2=n-k-l.$$

所以 $l=0$.这表明,$n_1=n_2=\cdots=n_k=1$,即 $N=O$,O 表示零方阵.因此,$A=O\oplus Q$.从而方阵 A 的相应于特征值0的特征子空间的维数为 $n_1+n_2+\cdots+n_k=k$.即 A 的特征值0的几何重数为 $n_1+n_2+\cdots+n_k=k$.而方阵 A 的相应于特征值0的所有初等因子为 $\lambda^{n_1},\lambda^{n_2},\cdots,\lambda^{n_k}$,所以特征值0的代数重数为 $n_1+n_2+\cdots+n_k=k$ 这就证明,方阵 A 的特征值0的代数重数等于其几何重数.

充分性.设方阵 A 的特征值0的代数重数等于其几何重数,则由式⑥可知,方阵 A 的属于特征值0的初等因子都是一次的.于是,由式⑦和⑧可知,$\mathrm{rank}A=\mathrm{rank}A^2$.

3.7.7 设 λ_1 是 n 阶方阵 A 的 k 重特征值.证明:

$$\mathrm{rank}(\lambda_1I_n-A)^k=n-k.$$

证 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_1)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_s},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_l)^{m_l}$ 是方阵 A 的初等因子组,其中 $\lambda_2,\cdots,\lambda_l$ 都不等于 λ_1.由于方阵 A 的所有初等因子的乘积等于方阵 A 的特征多项式,即有

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda)&=\det(\lambda I_n-A)\\&=(\lambda-\lambda_1)^{n_1+n_2+\cdots+n_s}(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_l)^{m_l}.\end{aligned}$$

所以 $k=n_1+n_2+\cdots+n_s$,$m_2+m_3+\cdots+m_l=n-k$.而由Jordan标准形理论可知,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$\begin{aligned}P^{-1}AP=&J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(\lambda_1)\\&\oplus J_{m_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_l}(\lambda_l).\end{aligned}$$

注意,

$$\begin{aligned}&\lambda I_m-J_m(\lambda_0)\\&=\begin{pmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\ &\cdots&\cdots& \\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_0&1&0&\cdots&0\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&1\\0&\cdots&0&&\lambda_0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\lambda-\lambda_0&-1&0&\cdots&0\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&&\ddots&-1\\0&\cdots&\cdots&0&\lambda-\lambda_0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

记上式右端 m 阶方阵为 $J_m{}'(\lambda-\lambda_0)$,则

$$\begin{aligned}&P^{-1}(\lambda_1I_n-A)P\\&=J_{n_1}{}'(0)\oplus J_{n_2}{}'(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}{}'(0)\\&\quad\oplus J_{m_2}{}'(\lambda_1-\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_l}{}'(\lambda_1-\lambda_l).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&P^{-1}(\lambda_1I_n-A)^kP\\&=J_{n_1}{}'(0)^k\oplus J_{n_2}{}'(0)^k\oplus\cdots\oplus J_{n_s}{}'(0)^k\\&\quad\oplus J_{m_2}{}'(\lambda_1-\lambda_2)^k\oplus\cdots\oplus J_{m_l}{}'(\lambda_1-\lambda_l)^k.\end{aligned}\qquad ⑨$$

由于 $n_1+n_2+\cdots+n_s=k$,所以对每个 $i=1,2,\cdots,s$,$n_i<k$.容易验证,$J_{n_i}{}'(0)^k=0$.而对每个 $j=2,\cdots,l$,$\lambda_1-\lambda_j\neq 0$,所以 m_j 阶上三角方阵 $J_{m_j}{}'(\lambda_1-\lambda_j)$ 是可逆的,因此方阵 $J_{m_j}{}'(\lambda_1-\lambda_j)^k$ 也是可逆的.于是由式⑨得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{rank}(\lambda_1I_n-A)^k\\&=\mathrm{rank}P^{-1}(\lambda_1I_n-A)^kP\\&=\sum_{i=1}^{s}\mathrm{rank}J_{n_i}{}'(0)^k+\sum_{j=2}^{l}J_{m_j}{}'(\lambda_1-\lambda_j)^k\\&=m_2+m_3+\cdots+m_l\\&=n-k.\end{aligned}$$

3.7.8 设 λ_1 是 n 阶方阵 A 的 m 重特征值,且 $\mathrm{rank}(A-\lambda_1I_n)>n-m$.证明:方阵 A 是不可对角化的,即不存在 n 阶可逆方阵 P,使得 $P^{-1}AP$ 是对角

方阵.

证 设$(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_1)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{n_s},(\lambda-\lambda_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\lambda_l)^{m_l}$是方阵$A$的初等因子组,则存在$n$阶可逆方阵$P$,使得

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(\lambda_1)\oplus J_{m_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_l}(\lambda_l).$$

由于

$$J_k(\lambda_k)-\lambda_1 I_k=\begin{pmatrix}\lambda_k & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & 0 & & \lambda_k\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\lambda_k-\lambda_1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots\\ & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & 1\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k-\lambda_1\end{pmatrix}=J_k(\lambda_k-\lambda_1),$$

所以

$$P^{-1}(A-\lambda_1 I_n)P=J_{n_1}(0)\oplus J_{n_2}(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)\oplus J_{m_2}(\lambda_2-\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{m_l}(\lambda_l-\lambda_1).$$

易知对每个$i=1,2,\cdots,s$,

$$\operatorname{rank}J_{n_i}(0)=n_i-1,$$

而对每个$j=2,3,\cdots,l$,

$$\operatorname{rank}J_{m_j}(\lambda_j-\lambda_1)=m_j.$$

所以

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I_n)\\&=\operatorname{rank}P^{-1}(A-\lambda_1 I_n)P\\&=\sum_{i=1}^{s}\operatorname{rank}J_{n_i}(0)+\sum_{j=2}^{l}\operatorname{rank}J_{m_j}(\lambda_j-\lambda_1)\\&=n_1+n_2+\cdots+n_s-s+m_2+\cdots+m_l.\end{aligned}\qquad ⑩$$

由于方阵A的所有初等因子的乘积等于方阵A的特征多项式$\varphi(\lambda)$,所以

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1+n_2+\cdots+n_s}\times(\lambda-\lambda_2)^{m_2}\cdots(\lambda-\lambda_l)^{m_l}.$$

因此$n_1+n_2+\cdots+n_s+m_2+\cdots+m_l=n$.由题设$n_1+n_2+\cdots+n_s=m$,且$\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I_n)>n-m$,所以由式⑩,

$$\operatorname{rank}(A-\lambda_1 I_n)=n-s>n-m,$$

即$s<m$.而$n_1+n_2+\cdots+n_s=m$,所以诸n_i中至少有一个大于1,不妨设$n_1>1$.这表明,方阵A的初等因子不都是一次的.从而方阵A不相似于对角方阵,即A是不可对角化的.

注 n阶方阵A相似于对角方阵的充要条件是,方阵A的初等因子都是一次的.3.7.8正是根据这一事实证明的.

3.7.9 设n阶方阵A具有n个不同的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,且设$n$阶方阵$B$和$A$可交换,即$AB=BA$.证明:方阵$B$是可对角化的.

证 由于方阵A具有n个不同特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,所以方阵$A$的初等因子组为$\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\cdots,\lambda-\lambda_n$.因此存在$n$阶可逆方阵$P$,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

由于$AB=BA$,所以$P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP$.记$P^{-1}BP=(b_{ij})$,则有

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_1 b_{12} & \cdots & \lambda_1 b_{1n}\\ \lambda_2 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_2 b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_n b_{n1} & \lambda_n b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 b_{11} & \lambda_2 b_{12} & \cdots & \lambda_n b_{1n}\\ \lambda_1 b_{21} & \lambda_2 b_{22} & \cdots & \lambda_n b_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \lambda_1 b_{n1} & \lambda_2 b_{n2} & \cdots & \lambda_n b_{nn}\end{pmatrix}.$$

比较上式两端方阵的(i,j)位置上的元素,得到

$$\lambda_i b_{ij}=\lambda_j b_{ij}.$$

当$i\neq j$时,由题设$\lambda_i\neq\lambda_j$,所以当$i\neq j$时$b_{ij}=0$.于是

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}b_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & b_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & b_{nn}\end{pmatrix}.$$

注 这里不但证明,方阵B是可对角化的,而且方阵A和B可以通过同一个可逆方阵P,使得$P^{-1}AP$和$P^{-1}BP$都是对角方阵,即方阵A和B可以同时化为对角方阵.

3.7.10 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$是$n$阶方阵$A$的所有不

同的特征值，而且方阵 A 相似于对角方阵. 求所有与方阵 A 可交换的 n 阶方阵 B.

解 设 n_i 是方阵 A 的特征值 λ_i 的代数重数，$i=1,2,\cdots,k$. 则由题设，存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k}\end{pmatrix}.$$

设 n 阶方阵 B 与 A 可交换，即 $AB=BA$，则

$$P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP. \qquad ⑪$$

将 n 阶方阵 $P^{-1}BP$ 分块为

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk}\end{pmatrix},$$

其中 B_{ij} 是 $n_i\times n_j$ 矩阵，$1\leqslant i,j\leqslant k$. 则由式⑪得到

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k}\\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ B_{k1} & B_{k2} & \cdots & B_{kk}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1 I_{n_1} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 I_{n_2} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k I_{n_k}\end{pmatrix}.$$

比较上式两端分块方阵的 (i,j) 块，得到

$$\lambda_i B_{ij}=\lambda_j B_{ij}.$$

即有 $(\lambda_i-\lambda_j)B_{ij}=0$，$1\leqslant i,j\leqslant k$. 当 $i\neq j$ 时，$\lambda_i-\lambda_j\neq 0$，所以 $B_{ij}=0$. 因此

$$P^{-1}BP=\begin{pmatrix}B_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk}\end{pmatrix}, \qquad ⑫$$

其中 B_{ii} 是 n_i 阶方阵.

反之设 $P^{-1}BP$ 具有形式⑫，则容易验证，$P^{-1}AP\cdot P^{-1}BP=P^{-1}BP\cdot P^{-1}AP$. 因此，$AB=BA$.

于是所有与方阵 A 可交换的 n 阶方阵 B 为

$$B=P\begin{pmatrix}B_{11} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & B_{22} & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & B_{kk}\end{pmatrix}P^{-1},$$

其中 B_{ii} 是任意一个 n_i 阶方阵，$i=1,2,\cdots,k$.

3.7.11 设 n 阶方阵 A 和 B 是可对角化的，而且方阵 A 和 B 可交换，即 $AB=BA$. 证明：方阵 A 和 B 可同时对角化，即存在 n 阶可逆方阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 都是对角方阵.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是方阵 A 的所有不同的特征值，其重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$. 则存在 n 阶可逆方阵 Q，使得

$$Q^{-1}AQ=\lambda_1 I_{n_1}\oplus\lambda_2 I_{n_2}\oplus\cdots\oplus\lambda_k I_{n_k}.$$

因为 $AB=BA$，故由 3.7.10 可知

$$Q^{-1}BQ=B_{11}\oplus B_{12}\oplus\cdots\oplus B_{kk},$$

其中 B_{ii} 是 n_i 阶方阵，$i=1,2,\cdots,k$. 由于方阵 B 是可对角化的，从而每个 B_{ii} 也都是可对角化的. 于是存在 n_i 阶可逆方阵 R_i，使得 $R_i^{-1}B_{ii}R_i$ 是对角方阵. 记

$$R=R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_k.$$

则 R 是 n 阶可逆方阵. 从而 $P=QR$ 是 n 阶可逆方阵，而且

$$\begin{aligned}P^{-1}AP&=R^{-1}(Q^{-1}AQ)R\\&=(R_1^{-1}\oplus R_2^{-1}\oplus\cdots\oplus R_k^{-1})(\lambda_1 I_{n_1}\\&\quad\oplus\lambda_2 I_{n_2}\oplus\cdots\oplus\lambda_k I_{n_k})(R_1\oplus R_2\oplus\cdots\\&\quad\oplus R_k)\\&=(R_1^{-1}(\lambda_1 I_{n_1})R_1)\oplus(R_2^{-1}(\lambda_2 I_{n_2})R_2)\\&\quad\oplus\cdots\oplus(R_k^{-1}(\lambda_k I_{n_k})R_k)\\&=\lambda_1 I_{n_1}\oplus\lambda_2 I_{n_2}\oplus\cdots\oplus\lambda_k I_{n_k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P^{-1}BP&=R^{-1}(Q^{-1}BQ)R\\&=(R_1^{-1}\oplus R_2^{-1}\oplus\cdots\oplus R_k^{-1})(B_{11}\oplus B_{22}\\&\quad\oplus\cdots\oplus B_{kk})(R_1\oplus R_2\oplus\cdots\oplus R_k)\\&=(R_1^{-1}B_{11}R_1)\oplus(R_2^{-1}B_{22}R_2)\oplus\cdots\\&\quad\oplus(R_k^{-1}B_{kk}R_k).\end{aligned}$$

由于每个 $R_i^{-1}B_{ii}R_i$ 是对角方阵，从而 $P^{-1}BP$ 是对角方阵.

3.7.12 设 n 阶方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 满足 $A_1+A_2+\cdots+A_k=I_n$，$k\geqslant 2$. 证明：下述条件是等价的：

(1) 方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是幂等的；

(2) $\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2+\cdots+\mathrm{rank}A_k=n$.

证 设条件(1)成立. 由于方阵 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是幂等的，所以由 3.7.1 有 $\mathrm{rank}A_i=\mathrm{Tr}A_i$，$i=1,2,\cdots,k$. 由题设，$A_1+A_2+\cdots+A_k=I_n$，两端取迹，并注意方阵的迹是方阵的线性函数，则有

$$\begin{aligned}n&=\mathrm{Tr}I_n=\mathrm{Tr}(A_1+A_2+\cdots+A_k)\\&=\mathrm{Tr}A_1+\mathrm{Tr}A_2+\cdots+\mathrm{Tr}A_k\\&=\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2+\cdots+\mathrm{rank}A_k.\end{aligned}$$

由此即得(2).

设条件(2)成立. 首先证明 $k=2$ 的情形. 设 $A_1+A_2=I_n$，且 $\mathrm{rank}A_1+\mathrm{rank}A_2=n$. 设方阵 A_1 的初等因子组为 $\lambda^{n_1},\lambda^{n_2},\cdots,\lambda^{n_s}$，$(\lambda-\lambda_1)^{m_1}$，$(\lambda-\lambda_2)^{m_2}$，$\cdots$，$(\lambda-\lambda_t)^{m_t}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 都是非零的，而且

$n_1+n_2+\cdots+n_s+m_1+m_2+\cdots+m_t=n$.则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}A_1P=J_{n_1}(0)\oplus J_{n_2}(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)\oplus J_{m_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{m_t}(\lambda_t).$$

由于 $A_2=I_n-A_1$,所以

$$P^{-1}A_2P=I_n-P^{-1}A_1P=J_{n_1}'(1)\oplus J_{n_2}'(1)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}'(1)\oplus J_{m_1}'(1-\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{m_t}'(\lambda_t),$$

其中

$$J_m'(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & & & \ddots & -1\\ 0 & \cdots & & 0 & \lambda\end{pmatrix}_{m\text{ 阶}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}A_1&=\operatorname{rank}P^{-1}A_1P\\&=\operatorname{rank}J_{n_1}(0)+\cdots+\operatorname{rank}J_{n_s}(0)\\&\quad+\operatorname{rank}J_{m_1}(\lambda_1)+\cdots+\operatorname{rank}J_{m_t}(\lambda_t).\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{rank}J_{n_i}(0)=n_i-1,\operatorname{rank}J_{m_j}(\lambda_j)=m_j,$$

所以

$$\operatorname{rank}A_1=n_1+n_2+\cdots+n_s-s+m_1+m_2+\cdots+m_t=n-s.$$

而

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}A_2&=\operatorname{rank}P^{-1}A_2P\\&=\operatorname{rank}J_{n_1}'(1)+\operatorname{rank}J_{n_2}'(1)+\cdots\\&\quad+\operatorname{rank}J_{n_s}'(1)+\operatorname{rank}J_{m_1}'(1-\lambda_1)\\&\quad+\cdots+\operatorname{rank}J_{m_t}'(1-\lambda_t).\end{aligned}$$

由于

$$\operatorname{rank}J_{n_i}'(1)=n_i,$$

$$\operatorname{rank}J_{m_j}'(1-\lambda_j)=\begin{cases}m_j, & \text{当 }\lambda_j\neq 1\text{ 时},\\ m_j-1, & \text{当 }\lambda_j=1\text{ 时},\end{cases}$$

所以

$$\operatorname{rank}A_2=n_1+n_2+\cdots+n_s+\operatorname{rank}J_{m_1}'(1-\lambda_1)+\cdots+\operatorname{rank}J_{m_t}'(1-\lambda_t).$$

另一方面,$\operatorname{rank}A_1+\operatorname{rank}A_2=n$,所以

$$\operatorname{rank}A_2=n-\operatorname{rank}A_1=s.$$

于是

$$\begin{aligned}&\operatorname{rank}J_{m_1}'(1-\lambda_1)+\cdots+\operatorname{rank}J_{m_t}'(1-\lambda_t)\\&=s-(n_1+n_2+\cdots+n_s)\\&=(1-n_1)+(1-n_2)+\cdots+(1-n_s)\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此,$n_1=n_2=\cdots=n_s=1$.从而

$$\operatorname{rank}J_{m_j}'(1-\lambda_j)=0.$$

所以 $m_j=1$,且 $\lambda_j=1$.这表明,方阵 A 的初等因子组由 s 个因子 λ 和 $n-s$ 个因子 $\lambda-1$ 组成.于是

$$P^{-1}A_1P=\begin{bmatrix}0_s & 0\\ 0 & I_{n-s}\end{bmatrix},$$

$$P^{-1}A_2P=\begin{bmatrix}I_s & 0\\ 0 & 0_{n-s}\end{bmatrix}.$$

因此,$P^{-1}A_1^2P=(P^{-1}A_1P)^2=P^{-1}A_1P$,即 $A_1^2=A_1$,同理 $A_2^2=A_2$,于是方阵 A_1,A_2 是幂等的.所以当 $k=2$ 时结论(1)成立.

现在转到一般的 k.对给定的 i,记 $B_i=A_1+A_2+\cdots+A_{i-1}+\cdots+A_{i-1}+A_k$.则 $A_i+B_i=I_n$.因为

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}B_i&=\operatorname{rank}(A_1+\cdots+A_{i-1}+A_{i+1}+\cdots+A_k)\\&\leqslant\operatorname{rank}A_1+\cdots+\operatorname{rank}A_{i-1}+\operatorname{rank}A_{i+1}+\cdots+\operatorname{rank}A_k,\end{aligned}$$

而且 $\operatorname{rank}A_1+\operatorname{rank}A_2+\cdots+\operatorname{rank}A_k=n$,所以,

$$\operatorname{rank}B_i\leqslant n-\operatorname{rank}A_i.$$

即

$$\operatorname{rank}A_i+\operatorname{rank}B_i\leqslant n.$$

另一方面,

$$\operatorname{rank}A_i+\operatorname{rank}B_i\geqslant\operatorname{rank}(A_i+B_i)=\operatorname{rank}I_n=n.$$

因此

$$\operatorname{rank}A_i+\operatorname{rank}B_i=n.$$

这说明,A_i 和 B_i 满足 $k=2$ 时的条件(2).由上面的证明,A_i 是幂等的,$i=1,2,\cdots,k$.所以结论(1)成立.

3.7.13　设 A 和 B 分别是 n 阶和 m 阶方阵,且 A 和 B 没有公共特征值.证明:如果 $n\times m$ 矩阵 X 满足 $AX=XB$,则 $X=0$.换言之,矩阵方程 $AX-XB=0$ 只有零解.

证法 1　设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是 n 阶方阵 A 的初等因子组,$(\lambda-\mu_1)^{m_1},(\lambda-\mu_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\mu_l)^{m_l}$ 是 m 阶方阵 B 的初等因子组,则存在 n 阶和 m 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_{n_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{n_2}(\lambda_2) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix},$$

$$Q^{-1}BQ=\begin{pmatrix}J_{m_1}(\mu_1) & 0 & \cdots & 0\\ 0 & J_{m_2}(\mu_2) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_l}(\mu_l)\end{pmatrix}.$$

由于 $AX=XB$,所以 $P^{-1}AP\cdot P^{-1}XQ=P^{-1}XQ\cdot Q^{-1}BQ$.将 $P^{-1}XQ$ 分块为

$$P^{-1}XQ=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1l}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2l}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\X_{k1}&X_{k2}&\cdots&X_{kl}\end{pmatrix},$$

其中 X_{ij} 是 $n_i\times m_j$ 矩阵. 则由 $P^{-1}AP\cdot P^{-1}XQ=P^{-1}XQ\cdot Q^{-1}BQ$ 得到

$$\begin{pmatrix}J_{n_1}(\lambda_1)&0&\cdots&0\\0&J_{n_2}(\lambda_2)&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&J_{n_k}(\lambda_k)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1l}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2l}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\X_{k1}&X_{k2}&\cdots&X_{kl}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}&\cdots&X_{1l}\\X_{21}&X_{22}&\cdots&X_{2l}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\X_{k1}&X_{k2}&\cdots&X_{kl}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}J_{m_1}(\mu_1)&0&\cdots&0\\0&J_{m_2}(\mu_2)&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&J_{m_l}(\mu_l)\end{pmatrix}$$

比较上式两端分块矩阵的 (i,j) 块,得到

$$J_{n_i}(\lambda_i)X_{ij}=X_{ij}J_{m_j}(\mu_j).$$

其中 $\lambda_i\neq\mu_j$, $1\leqslant i\leqslant k$, $1\leqslant j\leqslant l$. 于是问题化为证明:如果 $n_i\times m_j$ 矩阵 $Y=(y_{st})$ 满足

$$J_{n_i}(\lambda)Y=YJ_{m_j}(\mu), \qquad ⑬$$

$\lambda\neq\mu$,则 $Y=0$. 为简单起见,记 $n_i=a$, $m_j=b$. 则式⑬化为

$$\begin{pmatrix}\lambda&1&0&\cdots&0\\0&\lambda&1&\ddots&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&0\\\vdots&&\ddots&\ddots&1\\0&\cdots&\cdots&0&\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&\cdots&y_{1b}\\y_{21}&y_{22}&\cdots&y_{2b}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\y_{a1}&y_{a2}&\cdots&y_{ab}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}y_{11}&y_{12}&\cdots&y_{1b}\\y_{21}&y_{22}&\cdots&y_{2b}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\y_{a1}&y_{a2}&\cdots&y_{ab}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu&1&0&\cdots&0\\0&\mu&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\mu&1\\0&0&\cdots&\cdots&\mu\end{pmatrix}.$$

因此

$$\begin{pmatrix}\lambda y_{11}+y_{21}&\lambda y_{12}+y_{22}&\cdots&\lambda y_{1b}+y_{2b}\\\lambda y_{21}+y_{31}&\lambda y_{22}+y_{32}&\cdots&\lambda y_{2b}+y_{3b}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\lambda y_{a-1,1}+y_{a1}&\lambda y_{a-1,2}+y_{a2}&\cdots&\lambda y_{a-1,b}+y_{ab}\\\lambda y_{a1}&\lambda y_{a2}&\cdots&\lambda y_{ab}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\mu y_{11}&y_{11}+\mu y_{12}&\cdots&y_{1,b-1}+\mu y_{1b}\\\mu y_{21}&y_{21}+\mu y_{22}&\cdots&y_{2,b-1}+\mu y_{2b}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\mu y_{a-1,1}&y_{a-1,1}+\mu y_{a-1,2}&\cdots&y_{a-1,b-1}+\mu y_{a-1,b}\\\mu y_{a1}&y_{a1}+\mu y_{a2}&\cdots&y_{a,b-1}+\mu y_{ab}\end{pmatrix}.$$

比较上式两端矩阵的元素,从最后一行开始. 由 $(a,1)$ 位置上的元素得到,$\lambda y_{a1}=\mu y_{a1}$. 因为 $\lambda\neq\mu$,所以 $y_{a1}=0$. 而 $(a,2)$ 位置上的元素即为 $\lambda y_{a2}=\mu y_{a2}$. 所以 $y_{a2}=0$. 如此继续. 设 $y_{a,b-1}=0$,则由 (a,b) 位置的元素得到,$\lambda y_{ab}=\mu y_{ab}$,所以 $y_{ab}=0$. 再比较第 $a-1$ 行上的元素,即得 $y_{a-1,1}=y_{a-1,2}=\cdots=y_{a-1,b}=0$. 如此继续,即可证明,$Y$ 的每一行都是0. 从而 $Y=0$. 这就证明了3.7.11.

证法2 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1},(\lambda-\lambda_2)^{n_2},\cdots,(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是 n 阶方阵 A 的初等因子组. 则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k)=J_A.$$

注意,方阵 A 的初等因子组中所有初等因子之乘积即是方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_n-A)$. 因此

$$\varphi(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}.$$

所以

$$\begin{aligned}P^{-1}\varphi(A)P&=\varphi(P^{-1}AP)=\varphi(J_A)\\&=(J_A-\lambda_1I_n)^{n_1}(J_A-\lambda_2I_n)^{n_2}\\&\quad\cdots(J_A-\lambda_kI_n)^{n_k},\end{aligned}$$

其中对每个 $i=1,2,\cdots,k$,

$$\begin{aligned}(J_A-\lambda_iI_n)^{n_i}&=J_{n_1}(\lambda_1-\lambda_i)^{n_i}\oplus J_{n_2}(\lambda_2-\lambda_i)^{n_i}\\&\quad\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k-\lambda_i)^{n_i}.\end{aligned}$$

注意,$(J_A-\lambda_iI_n)^{n_i}$ 是一个块对角方阵,其中第 i 个块是

$$J_{n_i}(\lambda_i-\lambda_i)^{n_i}=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\0&0&0&\cdots&0\end{pmatrix}^{n_i}_{n_i阶}=0$$

于是

$$P^{-1}\varphi(A)P=\varphi(J_A)=0.$$

从而 $\varphi(A)=0$.

设 $(\lambda-\mu_1)^{m_1},(\lambda-\mu_2)^{m_2},\cdots,(\lambda-\mu_l)^{m_l}$ 是 m 阶方阵 B 的初等因子组,则存在 m 阶可逆方阵 Q,使得

$$Q^{-1}BQ=J_{m_1}(\mu_1)\oplus J_{m_2}(\mu_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_l}(\mu_l)=J_B.$$

将其代入方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$,得到

$$\begin{aligned}Q^{-1}\varphi(B)Q&=\varphi(Q^{-1}BQ)=\varphi(J_B)\\&=(J_B-\lambda_1I_m)^{n_1}(J_B-\lambda_2I_m)^{n_2}\\&\quad\cdots(J_B-\lambda_kI_m)^{n_k},\end{aligned}$$

其中对每个 $i=1,2,\cdots,k$,

$$\begin{aligned}(J_B-\lambda_iI_m)^{n_i}&=J_{m_1}(\mu_1-\lambda_i)^{n_i}\\&\oplus J_{m_2}(\mu_2-\lambda_i)^{n_i}\oplus\cdots\oplus J_{m_l}(\mu_l-\lambda_i)^{n_i}.\end{aligned}$$

注意,对每个 $j=1,2,\cdots,l$, $J_{m_j}(\mu_j-\lambda_i)$ 是对角元非零的上三角方阵(其对角元为 $\mu_j-\lambda_i$,由题设 $\mu_j-\lambda_i\neq 0$),即 $J_{m_j}(\mu_j-\lambda_i)$ 是可逆的.因此, $J_{m_j}(\mu_j-\lambda_i)^{n_i}$ 是可逆的.所以块对角方阵 $(J_B-\lambda_i I_m)^{n_i}$ 是可逆的.从而 $Q^{-1}\varphi(B)Q$ 是可逆的.于是 $\varphi(B)$ 是 m 阶可逆方阵.

现在设 $n\times m$ 矩阵 X 满足 $AX=BX$,并设 $\varphi(\lambda)=a_n\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_1\lambda+a_0$,其中 $a_n=1$.则对于正整数 i, $i=1,2,\cdots,n$, $A^iX=XB^i$.于是,由 $\varphi(A)=0$ 得到

$$
\begin{aligned}
0=\varphi(A)X&=(\sum_{i=0}^{n}a_iA^i)X\\
&=\sum_{i=0}^{n}a_iA^iX=\sum_{i=0}^{n}a_iXB^i\\
&=X\sum_{i=0}^{n}a_iB^i=X\varphi(B).
\end{aligned}
$$

由于 $\varphi(B)$ 是可逆的,所以 $X=0$.

注 3.7.13 的证法 2 主要用了这样一个事实,即一个 n 阶方阵 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)$ 是方阵 A 的化零多项式,即 $\varphi(A)=0$,而如果 m 阶方阵 B 和方阵 A 没有公共特征值,则 $\varphi(B)$ 是一个 m 阶可逆方阵.

3.7.14 证明:任意一个 n 阶方阵 A 都可以表为两个 n 阶对称方阵的乘积,而且可以指定其中某一个是可逆的.

证 设 n 阶方阵 A 的初等因子组 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}$, $(\lambda-\lambda_2)^{n_2}$, $\cdots$, $(\lambda-\lambda_k)^{n_k}$.则存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k). \quad ⑭$$

设 n_i 阶方阵 Q_i 为

$$Q_i=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}.$$

则 Q_i 是可逆的,而且 $Q_i^2=I_{n_i}$,即 $Q_i^{-1}=Q_i$.注意,

$$
\begin{aligned}
Q_i^{-1}J_{n_i}(\lambda_i)Q_i&=\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\\
&\times\begin{pmatrix}\lambda_i&1&0&\cdots&0&0\\0&\lambda_i&1&\cdots&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&\lambda_i&1\\0&0&0&\cdots&0&\lambda_i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&\cdots&0&1\\0&0&\cdots&1&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&1&\cdots&0&0\\1&0&\cdots&0&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\lambda_i&0&\cdots&0&0&0\\1&\lambda_i&\cdots&0&0&0\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1&\lambda_i&0\\0&0&\cdots&0&1&\lambda_i\end{pmatrix}=J_{n_i}(\lambda_i)^{t}. \quad ⑮
\end{aligned}
$$

记 $Q=Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots\oplus Q_k$,则 Q_i 是 n 阶可逆的对称方阵,而且 $Q^{-1}=Q$,于是,由式⑮,

$$
\begin{aligned}
&Q^{-1}P^{-1}APQ\\
&=(Q_1^{-1}J_{n_1}(\lambda_1)Q_1)\oplus(Q_2^{-1}J_{n_2}(\lambda_2)Q_2)\oplus\cdots\\
&\quad\oplus(Q_k^{-1}J_{n_k}(\lambda_k)Q_k)\\
&=J_{n_1}(\lambda_1)^t\oplus J_{n_2}(\lambda_2)^t\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k)^t\\
&=(J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k))^t.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\begin{aligned}
&((P^t)^{-1}Q^{-1}P^{-1})A(PQP^t)\\
&=(P^t)^{-1}(J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k))^tP^t\\
&=(P(J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k))P^{-1})^t.
\end{aligned}
$$

记 $S=PQP^t$,则 S 是可逆对称的.由式(14),

$$S^{-1}AS=A^t. \quad ⑯$$

即 $A=SA^tS^{-1}$.记 $A^tS^{-1}=S_1$,则 $A=SS_1$.由于 $(A^tS^{-1})^t=(S^t)^{-1}A=S^{-1}A$,所以由式⑯, $(A^tS^{-1})^t=S^{-1}A=A^tS^{-1}$.因此 S_1 是对称的.这就证明,方阵 A 可以表为可逆对称方阵 S 和对称方阵 S_1 的乘积.记 $SA^t=S_2$,则 $A=S_2S^{-1}$.由于 $(SA^t)^t=AS^t=AS$,所以由式⑯, $(SA^t)^t=AS=SA^t$,因此 S_2 是对称的.这就证明,方阵 A 可以表为对称方阵 S_2 和可逆对称方阵 S^{-1} 的乘积.

注 在 3.7.14 的证明中,我们证明了这样一个事实,即任意 n 阶方阵 A 可以通过一个可逆 n 阶对称方阵 S 相似于方阵 S 的转置 A^t.

3.7.15 如果 n 阶方阵 R 相似于如下的方阵 T,

$$T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\oplus I_{n-2},$$

则方阵 R 称为反射方阵.证明: n 阶非单位的对合方阵 A(即方阵 $A\neq I_n$,且 $A^2=I_n$)可以分解为有限个 n 阶反射方阵的乘积.

证 由 3.7.4,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$P^{-1}AP=I_r\oplus(-I_{n-r}). \quad ⑰$$

由于 A 不是单位方阵,所以 $0\leqslant r\leqslant n-1$.由式⑰有

$$A=P(I_r\oplus(-I_{n-r}))P^{-1}.$$

记

$$R_i = P_i \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} P_i^{-1},$$

$$r+1 \leqslant i \leqslant n.$$

则方阵 R_i 的初等因子组由 $n-1$ 个因子 $\lambda-1$ 和 1 个因子 $\lambda+1$ 组成，而且

$$A = R_{r+1}R_{r+2}\cdots R_n.$$

另一方面，块对角方阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$ 的初等因子组由对角块 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的初等因子组和 I_{n-2} 的初等因子组合并而成. 易知 I_{n-2} 的初等因子组由 $n-2$ 个因子 $\lambda-1$ 组成. 由于方阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 的特征多项式 $\varphi(\lambda) = \det\begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)$，所以其初等因子组为 $\lambda-1, \lambda+1$. 因此方阵 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$ 的初等因子组由 $n-1$ 个因子 $\lambda-1$ 和 1 个因子 $\lambda+1$ 组成. 所以方阵 R_i 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$ 具有相同的初等因子组，从而是相似的. 于是 R_i 是反射方阵.

注 3.7.15 的几何意义是：设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基. 对给定的 n 阶方阵 A，可以确定 V 上一个线性变换 $\mathscr{A}$，使得 $\mathscr{A}$ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的方阵为 A，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

如果方阵 B 和 A 相似，即存在 n 阶可逆方阵 P，使得 $B = P^{-1}AP$，则由

$$(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P$$

所确定的向量组 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 是 V 的一组基，而且

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) &= \mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)P \\ &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)AP \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)P^{-1}AP \\ &= (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)B. \end{aligned}$$

因此相似的方阵 A 和 B 是线性变换 $\mathscr{A}$ 在不同基下的方阵. 记 $T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2}$，则由 T 所确定的线性变换 $\mathscr{T}$ 满足

$$\begin{aligned} \mathscr{T}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) &= (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \times \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus I_{n-2} \\ &= (\alpha_2, \alpha_1, \alpha_3, \cdots, \alpha_n), \end{aligned}$$

即 $\mathscr{T}$ 将基向量 α_1 变为 α_2，α_2 变为 α_1，其他基向量保持不变. 这说明，$\mathscr{T}$ 在由基向量 α_1 和 α_2 所确定的 2 维超平面上的作用是一个反射，而在由基向量 $\alpha_3, \cdots, \alpha_n$ 所确定的 $n-2$ 维子空间上的作用是一个恒同变换. 于是 3.7.13 表明，n 维线性空间 V 上的对合变换 $\mathscr{A}$，只要它不是恒同变换，则可经过有限次的反射而实现.

3.7.16 设 A 是 n 阶可逆方阵. 证明：存在 n 阶可逆方阵 B，使得 $A = B^2$.

证 设 $(\lambda-\lambda_1)^{n_1}, (\lambda-\lambda_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda-\lambda_k)^{n_k}$ 是方阵 A 的初等因子组，则存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_k}(\lambda_k).$$

记

$$J_{n_i}(\lambda_i) = \lambda_i I_{n_i} - N_{n_i},$$

其中 N_{n_i} 是如下的 n_i 阶方阵

$$N_{n_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

取 n_i 阶方阵 $D_i = \sqrt{\lambda_i} I_{n_i} + N_{n_i}$，则

$$D_i^2 = \lambda_i I_{n_i} + 2\sqrt{\lambda_i} N_{n_i} + N_{n_i}^2$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i & 2\sqrt{\lambda_i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ \vdots & & & & \ddots & 2\sqrt{\lambda_i} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

容易求得 D_i^2 的特征多项式为 $\varphi_i(\lambda) = \det(\lambda I_{n_i} - D_i^2) = (\lambda-\lambda_i)^{n_i}$. 由于方阵 D_i^2 的最小多项式 $d_i(\lambda)$ 是特征多项式 $\varphi_i(\lambda)$ 的一个因子，因此 $d_i(\lambda) = (\lambda-\lambda_i)^{l_i}$，其中 $1 \leqslant l_i \leqslant n_i$. 如果 $l_i < n_i$，则由方阵 D_i^2 的最小多项式 $d_i(\lambda)$ 是方阵 D_i^2 的化零多项式可知

$$\begin{aligned} d_i(D_i^2) &= (D_i^2 - \lambda_i I_{n_i})^{l_i} \\ &= (D_i - \sqrt{\lambda_i} I_{n_i})^{l_i}(D_i + \sqrt{\lambda_i} I_{n_i})^{l_i} \\ &= N_{n_i}^{l_i}(2\sqrt{\lambda_i} I_{n_i} + N_{n_i})^{l_i} = 0. \end{aligned} \quad ⑱$$

由于方阵 A 是可逆的，所以其特征值 $\lambda_i \neq 0$，从而 n_i 阶方阵

$$2\sqrt{\lambda_i} I_{n_i} + N_{n_i}$$

$$=\begin{pmatrix} 2\sqrt{\lambda_i} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 2\sqrt{\lambda_i} \end{pmatrix}$$

是可逆的.因此$(2\sqrt{\lambda_i}I_{n_i}+N_{n_i})^{l_i}$是可逆的.于是由式⑱得到,$N_{n_i}^{l_i}=0$.但是,当$l_i<n_i$时,$N_{n_i}^{l_i}\neq 0$,矛盾.所以方阵$D_i^2$的最小多项式$d_i(\lambda)=(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$,即$d_i(\lambda)$即是方阵$D_i^2$的特征多项式$\varphi_i(\lambda)$.因此,方阵$D_i^2$的初等因子组由1个初等因子$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$组成.而$n_i$阶Jordan块$J_{n_i}(\lambda_i)$的初等因子由也仅由因子$(\lambda-\lambda_i)^{n_i}$组成.所以方阵$D_i$与$J_{n_i}(\lambda_i)$相似.于是存在$n_i$阶可逆方阵$Q_i$使得$Q_i^{-1}D_i^2Q_i=J_{n_i}(\lambda_i)$.记

$$Q=Q_1\oplus Q_2\oplus\cdots\oplus Q_k,$$

则Q是n阶可逆方阵,其逆方阵为$Q^{-1}=Q_1^{-1}\oplus Q_2^{-1}\oplus\cdots\oplus Q_k^{-1}$,记

$$D=D_1\oplus D_2\oplus\cdots\oplus D_k.$$

则

$$D^2=D_1^2\oplus D_2^2\oplus\cdots\oplus D_k^2.$$

于是

$$\begin{aligned}(Q^{-1}DQ)^2&=Q^{-1}D^2Q\\&=(Q_1^{-1}D_1^2Q_1)\oplus(Q_2^{-1}D_2^2Q_2)\oplus\cdots\oplus(Q_k^{-1}D_k^2Q_k)\\&=J_{n_1}(\lambda_1)\oplus J_{n_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{n_k}(\lambda_k)\\&=P^{-1}AP.\end{aligned}$$

所以

$$A=P(Q^{-1}DQ)^2P^{-1}=(PQ^{-1}DQP^{-1})^2.$$

记$B=PQ^{-1}DQP^{-1}$,则$A=B^2$.由于方阵A是可逆的,所以方阵B一定是可逆的.

注1 3.7.16关于方阵A可逆的假设是不能省略的.例如,设$A=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$,则0是2阶方阵$A$的2重特征值.设存在2阶方阵$B$,使得$B^2=A$,则0也是$B$的2重特征值,因此方阵$B$的特征多项式为$\varphi_B(\lambda)=\lambda^2$.所以方阵$B$的初等因子组只能是$\{\lambda,\lambda\}$,或$\{\lambda^2\}$.若为前者,则存在2阶可逆方阵$P$,使得$P^{-1}BP=0$,从而$B=0$,因此$B^2=0=A$,不可能;若为后者,则存在2阶可逆方阵$P$,使得$P^{-1}BP=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}$.从而$P^{-1}B^2P=(P^{-1}BP)^2=0$.于是$B^2=0$,与$B^2=A\neq 0$矛盾.这就证明,不存在2阶方阵$B$,使得$B^2=A$.

注2 3.7.16可以推广为,对于n阶可逆方阵A,存在n阶可逆方阵B,使得$B^k=A$,这里k是给定的正整数.读者可自证之.

3.7.17 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$n$阶方阵$A$的所有不同的特征值.证明:

$$n(t-1)\leqslant\sum_{j=1}^{t}\operatorname{rank}(\lambda_jI_n-A).$$

证 设n阶方阵A的初等因子组为

$$(\lambda-\lambda_1)^{e_{11}},(\lambda-\lambda_1)^{e_{12}},\cdots,(\lambda-\lambda_1)^{e_{1n_1}},$$
$$(\lambda-\lambda_2)^{e_{21}},(\lambda-\lambda_2)^{e_{22}},\cdots,(\lambda-\lambda_2)^{e_{2n_2}},$$
$$\cdots\cdots$$
$$(\lambda-\lambda_t)^{e_{t1}},(\lambda-\lambda_t)^{e_{t2}},\cdots,(\lambda-\lambda_t)^{e_{tn_t}}.$$

则存在n阶可逆方阵P,使得

$$P^{-1}AP=J_1\oplus J_2\oplus\cdots\oplus J_t,$$

其中$J_i=J_{e_{i1}}(\lambda_i)\oplus J_{e_{i2}}(\lambda_i)\oplus\cdots\oplus J_{e_{in_i}}(\lambda_i)$,$i=1,2,\cdots,t$,因此

$$A-\lambda_jI_n=(J_1-\lambda_jI_{m_1})\oplus(J_2-\lambda_jI_{m_2})\oplus\cdots\oplus(J_t-\lambda_jI_{m_t}),$$

其中$m_i=e_{i1}+e_{i2}+\cdots+e_{in_i}$,且

$$\begin{aligned}J_i-\lambda_jI_{m_i}&=(J_{e_{i1}}(\lambda_i)-\lambda_jI_{e_{i1}})\oplus(J_{e_{i2}}(\lambda_i)-\lambda_jI_{e_{i2}})\\&\quad\oplus\cdots\oplus(J_{e_{in_i}}(\lambda_i)-\lambda_jI_{e_{in_i}})\\&=J_{e_{i1}}(\lambda_i-\lambda_j)\oplus J_{e_{i2}}(\lambda_i-\lambda_j)\oplus\cdots\\&\quad\oplus J_{e_{in_i}}(\lambda_i-\lambda_j).\end{aligned}$$

当$i=j$时,有

$$J_{e_{il}}(\lambda_i-\lambda_j)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&&0\end{pmatrix}_{e_{il}阶},$$

因此$\operatorname{rank}J_{e_{il}}(\lambda_i-\lambda_j)=e_{il}-1$.当$i\neq j$时,$\lambda_i\neq\lambda_j$,所以

$$J_{e_{il}}(\lambda_i-\lambda_j)=$$
$$\begin{pmatrix}\lambda_i-\lambda_j&1&0&\cdots&0\\ &\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&&\ddots&\ddots&0\\ \vdots&&&\ddots&1\\ 0&\cdots&\cdots&0&\lambda_i-\lambda_j\end{pmatrix}$$

是可逆的.从而$\operatorname{rank}J_{e_{il}}(\lambda_i-\lambda_j)=e_{il}$.而

$$\operatorname{rank}(J_i-\lambda_jI_{m_i})=\sum_{l=1}^{n_i}\operatorname{rank}J_{e_{il}}(\lambda_i-\lambda_j)=\begin{cases}m_i-n_i,&当\ i=j\ 时,\\ m_i,&当\ i\neq j\ 时.\end{cases}$$

所以

$$\operatorname{rank}(A-\lambda_jI_n)=\sum_{i=1}^{t}\operatorname{rank}(J_i-\lambda_jI_{m_i})$$

$= m_1 + m_2 + \cdots + m_t - n_j.$

注意 $m_1 + m_2 + \cdots + m_t = (e_{11} + e_{12} + \cdots + e_{1n_1}) + \cdots + (e_{t1} + e_{t2} + \cdots + e_{tn_t}) = n$. 于是

$$\operatorname{rank}(A - \lambda_j I_n) = n - n_j.$$

由于 $\lambda_j I_n - A = -(A - \lambda_j I_n)$,所以

$$\operatorname{rank}(\lambda_j I_n - A) = \operatorname{rank}(A - \lambda_j I_n) = n - n_j.$$

于是

$$\sum_{j=1}^{t}\operatorname{rank}(\lambda_j I_n - A) = tn - (n_1 + n_2 + \cdots + n_t)$$

而 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t$ 是 n 阶方阵 A 的所有初等因子的个数,故 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t \leqslant n$. 因此

$$\sum_{j=1}^{t}\operatorname{rank}(\lambda_j I_n - A) \geqslant tn - n = (t-1)n.$$

3.7.18 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$ 和 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 分别是 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 的特征值. 证明:如果对给定的 m 阶方阵 A, n 阶方阵 B 和 $m \times n$ 矩阵 C,矩阵方程 $AX + XB' = C$ 有唯一解,则对于每个 $i = 1, 2, \cdots, m$ 和每个 $j = 1, 2, \cdots, n$,有

$$\lambda_i + \mu_j \neq 0.$$

证 设 $(\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda - \lambda_s)^{m_s}$ 和 $(\lambda - \mu_1)^{n_1}, (\lambda - \mu_2)^{n_2}, \cdots, (\lambda - \mu_t)^{n_t}$ 分别是 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 的初等因子组. 则存在 m 阶和 n 阶可逆方阵 P 和 Q,使得

$$P^{-1}AP = J_{m_1}(\lambda_1) \oplus J_{m_2}(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus J_{m_s}(\lambda_s) = J_A,$$

$$Q^{-1}BQ = J_{n_1}(\mu_1) \oplus J_{n_2}(\mu_2) \oplus \cdots \oplus J_{n_t}(\mu_t) = J_B.$$

将原方程 $AX + XB' = C$ 变形:用 P^{-1} 和 $(Q')^{-1}$ 分别左乘和右乘于原方程,得到

$$P^{-1}AP \cdot P^{-1}X(Q')^{-1} + P^{-1}X(Q')^{-1} \cdot Q'B'(Q')^{-1} = P^{-1}C(Q')^{-1},$$

即

$$(P^{-1}AP)(P^{-1}X(Q')^{-1}) + (P^{-1}X(Q')^{-1})(Q^{-1}BQ)' = P^{-1}C(Q')^{-1}.$$

记 $Y = P^{-1}X(Q')^{-1}$, $D = P^{-1}C(Q')^{-1}$,则上式化为

$$J_A Y + YJ_B' = D. \tag{19}$$

注意,如果原矩阵方程有唯一解,则方程 ⑲ 有唯一解.

现在设 Y_0 是方程⑲的唯一解. 将 $m \times n$ 矩阵 Y_0 和 D 分块为

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1t} \\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ Y_{s1} & Y_{s2} & \cdots & Y_{st} \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & \cdots & D_{1t} \\ D_{21} & D_{22} & \cdots & D_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{s1} & D_{s2} & \cdots & D_{st} \end{pmatrix}.$$

其中 Y_{ij} 和 D_{ij} 是 $m_i \times n_j$ 矩阵. 比较方程⑲两端分块矩阵的 (i, j) 块,得到

$$J_{m_i}(\lambda_i)Y_{ij} + Y_{ij}J_{n_j}(\mu_j)' = D_{ij}. \tag{20}$$

由于方程⑲具有唯一解,从而方程⑳也具有唯一解. 为简单起见,记方程 ⑳ 为

$$J_m(\lambda)Y + YJ_n(\mu)' = D. \tag{21}$$

另记 m 阶方阵 N_m 为

$$N_m = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & & 0 \end{pmatrix},$$

则 $J_m(\lambda) = \lambda I_m + N_m$, $J_n(\mu)' = \lambda I_n + N_n'$. 设 $\lambda + \mu = 0$,则由式 ㉑ 得到

$$N_m Y + YN_n' = D.$$

考虑方程

$$N_m Y + YN_n' = 0. \tag{22}$$

显然,$m \times n$ 矩阵

$$Y_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

是方程 ㉒ 的非零解. 于是当 $\lambda + \mu = 0$ 时,如果 Y 是方程㉑的解,则 $Y + Y_0$ 也是方程㉑的解. 这就证明,如果方程⑳有唯一解,则 $\lambda_i + \mu_j \neq 0$. 于是得到,原矩阵方程有唯一解,则 $\lambda_i + \mu_j \neq 0, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$.

注 应用Jordan标准形可以证明3.7.18的逆命题成立. 限于篇幅,这里从略.

3.7.19(Fitting定理) 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明:存在线性变换 $\mathscr{A}$ 的不变子空间 V_1 与 V_2,使得 $V = V_1 \oplus V_2$,而且线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V_1 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 是可逆的,而在 V_2 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 是幂零的. 简言之,V 上任意一个线性变换 $\mathscr{A}$ 都可以分解为可逆线性变换 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 与幂零变换 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 的直和. 这里所谓幂零变换 $\mathscr{B}$ 是指,存在正整数 k,使得 $\mathscr{B}^k$ 为零变换.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基,线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的方阵为 A,即

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

设 $\lambda^{n_1}, \lambda^{n_2}, \cdots, \lambda^{n_t}, (\lambda - \lambda_1)^{m_1}, (\lambda - \lambda_2)^{m_2}, \cdots, (\lambda -$

$\lambda_t)^{m_t}$ 是方阵A的初等因子组，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_s+m_1+m_2+\cdots+m_t=n$，且 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 是非零的，则存在 n 阶可逆方阵P，使得

$$P^{-1}AP=J_{n_1}(0)\oplus J_{n_2}(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)\oplus J_{m_1}(\lambda_1)\oplus\cdots\oplus J_{m_t}(\lambda_t)=J_A.$$

设

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P.$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)&=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)P\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)AP\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)P^{-1}AP\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)J_A.\end{aligned}\qquad ㉓$$

因为方阵 P 是可逆的，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是V的一组基. 记 $n_1+n_2+\cdots+n_s=k,m_1+m_2+\cdots+m_t=l$，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 与$\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n$ 生成的子空间分别记作 V_2 和 V_1. 则

$$V=V_1\oplus V_2.$$

而且$\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n$ 和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 分别是V_1 与 V_2 的基. 记

$$J_{n_1}(0)\oplus J_{n_2}(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)=J_2,$$

$$J_{m_1}(\lambda_1)\oplus J_{m_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_t}(\lambda_t)=J_1.$$

则由式㉓，有

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)J_2,\qquad ㉔$$

$$\mathscr{A}(\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n)=(\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n)J_1.\qquad ㉕$$

对于任意 $\alpha\in V_2$，由于 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 是 V_2 的基，因此

$$\begin{aligned}\alpha&=a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_k\beta_k\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)x,\end{aligned}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 是纯量，且 $x'=(a_1,a_2,\cdots,a_k)$. 于是

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\alpha)&=\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)x\\&=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k)J_2x\in V_2.\end{aligned}$$

所以 V_2 是$\mathscr{A}$的不变子空间. 同理可证，V_1 是$\mathscr{A}$的不变子空间. 由式㉔和㉕可知，线性变换$\mathscr{A}$在 V_1 和 V_2 上的限制 $\mathscr{A}|_{V_1}$ 和 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 在基 $\beta_{k+1},\beta_{k+2},\cdots,\beta_n$ 和$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$ 下的方阵分别为J_1和J_2. 由于$J_1=J_{m_1}(\lambda_1)\oplus J_{m_2}(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus J_{m_t}(\lambda_t)$，所以$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$是$J_1$的特征值，其重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_t$，而 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 全是非零的，所以 $\det J_1=\lambda_1^{m_1}\lambda_2^{m_2}\cdots\lambda_t^{m_t}\neq 0$，即 J_1 是可逆的，从而线性变换$\mathscr{A}$在 V_1 上的限制$\mathscr{A}|_{V_1}$是可逆的. 另外，由于 $J_2=J_{n_1}(0)\oplus J_{n_2}(0)\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)$，而

$$J_{n_i}(0)=\begin{pmatrix}0&1&0&\cdots&0\\ & & & &\vdots\\ \vdots& & & &0\\ \vdots& & & &1\\ 0&\cdots&\cdots& &0\end{pmatrix}_{n_i\text{阶}},$$

因而 $J_{n_i}(0)^{n_i}=0,i=1,2,\cdots,s$. 记 $n_0=\max\{n_1,n_2,\cdots,n_s\}$，则$J_{n_i}(0)^{n_0}=0,i=1,2,\cdots,s$. 所以$J_2^{n_0}=J_{n_1}(0)^{n_0}\oplus J_{n_2}(0)^{n_0}\oplus\cdots\oplus J_{n_s}(0)^{n_0}=0$. 这表明,$J_2$ 是幂零方阵. 从而 $\mathscr{A}|_{V_2}$ 也是幂零的.

注1 对于 n 维线性空间V上的线性变换$\mathscr{A}$，在 V 中取定一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则由

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$$

便可将线性变换$\mathscr{A}$表示为一个 n 阶方阵A. 于是关于线性变换$\mathscr{A}$的命题即可转化为关于 n 阶方阵A 的命题. 然后应用矩阵的方法来处理关于方阵 A 的命题. 最后再将它还原到关于线性变换的命题. 这种将线性变换和方阵相互转化的方式是联系线性空间理论与矩阵论的桥梁. 务必加以高度重视. 可以说，只有学会了这种相互转化，线性代数才算真正学到手.

注2 Fitting 定理可以用纯几何方法加以证明.

3.7.20 如果对于 n 维线性空间V上的线性变换$\mathscr{D}$，存在 V 的一组基，使得 $\mathscr{D}$ 在这组基下的方阵 D 是对角方阵，则 $\mathscr{D}$ 称为可对角化的. 证明：3 维线性空间 V 上的任意一个线性变换 $\mathscr{A}$ 均可表为一个可对角化线性变换 $\mathscr{D}$ 和一个幂零变换 $\mathscr{N}$之和，即 $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$，而且 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{N}$是可交换的，即 $\mathscr{D}\mathscr{N}=\mathscr{N}\mathscr{D}$.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维线性空间 V 的一组基，而线性变换 $\mathscr{A}$在这组基下的方阵为 A，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A.$$

由于 A 是 3 阶方阵，所以 A 的特征多项式 $\varphi(\lambda)=\det(\lambda I_3-A)$ 是关于 λ 的三次多项式. 因此，方阵 A 的初等因子组只有三种可能：$(\lambda-\lambda_1),(\lambda-\lambda_2),(\lambda-\lambda_3)$；$(\lambda-\lambda_1)^2,(\lambda-\lambda_2)$；$(\lambda-\lambda_1)^3$. 我们按这三种可能分别进行讨论.

设 $\lambda-\lambda_1,\lambda-\lambda_2,\lambda-\lambda_3$ 是 A 的初等因子组，则存在 3 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}.$$

记

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P.$$

由于 P 是可逆的，所以 β_1,β_2,β_3 是 V 的一组基. 而

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)&=\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)AP\end{aligned}$$

$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)P^{-1}AP$$
$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}.$$

因此 $\mathscr{A}$ 在基 β_1,β_2,β_3 下的方阵是对角方阵，即 $\mathscr{A}$ 本身即是可对角化的. 取 $\mathscr{D}=\mathscr{A}$，$\mathscr{N}=0$，这里 0 是零变换，从而是幂零变换. 显然 $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$，且 $\mathscr{D}\mathscr{N}=\mathscr{N}\mathscr{D}=0$.

设 $(\lambda-\lambda_1)^2$，$\lambda-\lambda_2$ 是 A 的初等因子组，则存在 3 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = J_2(\lambda_1)\oplus J_1(\lambda_2) = \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

记

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P,$$

则 β_1,β_2,β_3 是 V 的一组基，而且

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}.$$

令

$$\mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}, \quad ㉖$$

$$\mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}. \quad ㉗$$

则

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) + \mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3). \quad ㉘$$

由式 ㉖ 和 ㉗ 分别确定的 V 上的变换 $\mathscr{D}$ 和 $\mathscr{N}$ 分别是可对角化和幂零线性变换(注意 $\mathscr{N}^2=0$). 由式 ㉘ 可知，$\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$. 另外，由式 ㉖ 和 ㉗ 有

$$\mathscr{N}\mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$= \mathscr{N}\left((\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}\right)$$
$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}$$
$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&\lambda_1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

而

$$\mathscr{D}\mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$
$$= (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&\lambda_1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

所以 $\mathscr{N}\mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\mathscr{D}\mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，从而 $\mathscr{N}\mathscr{D}=\mathscr{D}\mathscr{N}$.

设 $(\lambda-\lambda_1)^3$ 是 A 的初等因子组，则存在 n 阶可逆方阵 P，使得

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&1\\0&0&\lambda_1\end{pmatrix}.$$

于是在基

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)P$$

下有

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&1&0\\0&\lambda_1&1\\0&0&\lambda_1\end{pmatrix}.$$

记

$$\mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_1&0\\0&0&\lambda_1\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

则 $\mathscr{D}$ 是 V 上的可对角化线性变换. 由于

$$\mathscr{N}^2(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\mathscr{N}^3(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = (\beta_1,\beta_2,\beta_3)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 $\mathscr{N}^3=0$. 从而 $\mathscr{N}$ 是 V 上的幂零线性变换. 容易验证

$$\mathscr{N}\mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \mathscr{D}\mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3),$$

所以 $\mathscr{N}\mathscr{D}=\mathscr{D}\mathscr{N}$. 又

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \mathscr{D}(\beta_1,\beta_2,\beta_3) + \mathscr{N}(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$$
$$= (\mathscr{D}+\mathscr{N})(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$$

因此 $\mathscr{A}=\mathscr{D}+\mathscr{N}$.

注 3.7.20 对 n 维线性空间 V 上的线性变换也成立.

§ 3.8 正交相似与合同

设 A 和 B 是 n 阶实方阵. 如果存在 n 阶正交实方阵 O，使得 $B=O'AO$，则称方阵 A 和 B 是正交相似的. 对一般的 n 阶实方阵，其正交相似下的标准形并未最后建立. 只是对一些特殊的实方阵类，如实对称方阵类、斜对称实方阵类、实正交方阵类和实规范方

阵类,其正交相似下的标准形理论已经建立.由于实方阵的对称性、斜对称性、正交性以及规范性在方阵的正交相似下是保持不变的,即若方阵 A 是对称的,O 是同阶正交方阵,则 $O'AO$ 也是对称的,而若方阵 A 是斜对称的,O 是同阶正交方阵,则 $O'AO$ 也是斜对称的,等等.因此实方阵在正交相似下的标准形是处理这些特殊方阵类的基本工具.

对于 n 阶实方阵 A 和 B,如果存在 n 阶可逆方阵 P,使得 $B=P'AP$,则称方阵 A 和 B 是合同的.对于实对称方阵和斜对称实方阵,其合同标准形理论是完备的.由于实方阵的对称性和斜对称性在方阵的合同变换下是保持的,因此实方阵在合同下的标准形在处理有关实对称方阵、斜对称实方阵的问题时特别有用.

由于复方阵的酉相似是实方阵的正交相似在复情形的推广,复方阵的合同则是实方阵的合同的复情形推广,而复方阵的Hermite性、斜Hermite性、酉性质以及规范性分别是实方阵的对称性、斜对称性、正交性以及规范性在复情形的推广,因此复方阵在酉相似下的标准形是处理有关 Hermite 方阵、斜 Hermite 方阵、酉方阵以及规范方阵的有力工具,而复方阵在合同下的标准形则在解决有关 Hermite 方阵与斜 Hermite 方阵的问题中有着广泛的应用.

3.8.1 设 n 阶实正交方阵 O 满足 $\operatorname{rank}(O-I_n)=1$.证明:方阵 O 正交相似于对角方阵 $\operatorname{diag}(-1,1,1,\cdots,1)$,其中 1 出现 $n-1$ 次.

证 设 $e^{\pm i\theta_1},e^{\pm i\theta_2},\cdots,e^{\pm i\theta_s},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{t},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{n-2s-t}$ 是方阵 O 的特征值,其中 $0<\theta_j<\pi,j=1,2,\cdots,s$,则存在 n 阶实正交方阵 O_1,使得

$$O_1'OO_1=\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_2 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_s & \sin\theta_s\\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s\end{bmatrix}\oplus I_t\oplus -I_{n-2s-t}. \quad ①$$

因此

$$\begin{aligned}&O_1'(O-I_n)O_1\\=&\begin{bmatrix}\cos\theta_1-1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1-1\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_2-1 & \sin\theta_2\\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2-1\end{bmatrix}\oplus\cdots\\&\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_s-1 & \sin\theta_s\\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s-1\end{bmatrix}\oplus O_t\oplus -2I_{n-2s-t},\end{aligned} \quad ②$$

其中 O_t 是 t 阶零方阵.如果 $\cos\theta_j-1\neq0$,则

$$\det\begin{bmatrix}\cos\theta_j-1 & \sin\theta_j\\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j-1\end{bmatrix}=2(1-\cos\theta_j)\neq0,$$

即 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\cos\theta_j-1 & \sin\theta_j\\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j-1\end{bmatrix}=2$.于是,当 $s\neq0$ 时,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(O-I_n)&=\operatorname{rank}O_1'(O-I_n)O\\&=\sum_{j=1}^{s}\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\cos\theta_j-1 & \sin\theta_j\\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j-1\end{bmatrix}+\operatorname{rank}(-2I_{n-2s-t})\\&=2s+(n-2s-t)\geqslant2s>1,\end{aligned}$$

与题设矛盾.因此 $s=0$,即式②化为

$$O_1'(O-I_n)O_1=O_t\oplus -2I_{n-t}.$$

从而由题设,

$$\begin{aligned}\operatorname{rank}(O-I_n)&=\operatorname{rank}O_1'(O-I_n)O\\&=n-t=1,\end{aligned}$$

即 $t=n-1$.于是由式①得到

$$O_1'OO_1=I_{n-1}\oplus -I_1=\operatorname{diag}(\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1},-1).$$

对方阵 $O_1'OO_1$ 作同步置换:对调方阵 $O_1'OO_1$ 的第 1 行和第 n 行,同时对调第 1 列和第 n 列,则方阵 $O_1'OO_1$ 化为 $\operatorname{diag}(-1,\underbrace{1,1,\cdots,1}_{n-1})$.记对调 n 阶单位方阵 I_n 的第 1 行和第 n 行得到的方阵为 P_{1n},则 $P_{1n}'P_{1n}=I_n=P_{1n}P_{1n}'$,即 P_{1n} 是正交方阵,而且

$$P_{1n}'O_1'OO_1P_{1n}=\operatorname{diag}(-1,\underbrace{1,\cdots,1}_{n-1}).$$

因此方阵 O 正交相似于对角方阵 $\operatorname{diag}(-1,1,\cdots,1)$.

3.8.2 证明:任意一个 n 阶实正交方阵 O 均可表为两个 n 阶正交对称实方阵的乘积.

证 设 $e^{\pm i\theta_1},e^{\pm i\theta_2},\cdots,e^{\pm i\theta_s},\underbrace{1,1,\cdots,1}_{t},\underbrace{-1,-1,\cdots,-1}_{n-2s-t}$ 是方阵 O 的所有特征值,其中 $0<\theta_j<\pi,j=1,2,\cdots,s$.则存在 n 阶实正交方阵 O_1,使得

$$O=O_1'\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_1 & \sin\theta_1\\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_s & \sin\theta_s\\ -\sin\theta_s & \cos\theta_s\end{bmatrix}\oplus I_t\oplus -I_{n-2s-t}\right)O_1.$$

注意,

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta_j & \sin\theta_j\\ -\sin\theta_j & \cos\theta_j\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sin\theta_j & \cos\theta_j\\ \cos\theta_j & \sin\theta_j\end{bmatrix}$$

是实对称正交的,而且

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}^t\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=I_2.$$

记

$$O_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\oplus\cdots\oplus\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\oplus I_{n-2t},$$

则 O_2 是 n 阶实对称正交方阵，而且

$$O=(O_1'O_2)\left(O_2\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_1&\sin\theta_1\\-\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{bmatrix}\oplus\cdots\right.\right.$$

$$\left.\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_s&\sin\theta_s\\-\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{bmatrix}\oplus I_t\oplus-I_{n-2s-t}\right)O_1.$$

记

$$O_1'O_2O_1=O_3,$$

$$O_4=O_1'O_2\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_1&\sin\theta_1\\-\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{bmatrix}\oplus\cdots\right.$$

$$\left.\oplus\begin{bmatrix}\cos\theta_s&\sin\theta_s\\-\sin\theta_s&\cos\theta_s\end{bmatrix}\oplus I_t\oplus-I_{n-2s-t}\right)O_1,$$

则 O_3 与 O_4 是 n 阶实对称正交方阵，而且

$$O=O_3O_4.$$

这就证明，任意一个 n 阶实正交方阵均可表为两个 n 阶实对称正交方阵的乘积.

3.8.3　设 A 是 n 阶半正定实对称方阵. 证明：存在唯一 n 阶半正定实对称方阵 B，使得 $A=B^2$.

证　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是方阵 A 的所有特征值，则存在 n 阶实正交方阵 O，使得

$$A=O'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)O.\qquad ③$$

因为方阵 A 是半正定的，因此其特征值 $\lambda_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n$. 所以 $\sqrt{\lambda_j}\geqslant 0,j=1,2,\cdots,n$. 于是

$$A=(O'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O)\times(O'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O).\qquad ④$$

记

$$B=O'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O,$$

则方阵 B 是对称的，且 $\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n}$ 是方阵 B 的所有特征值. 由于方阵 B 的特征值全是非负的，所以方阵 B 是半正定的. 由式①，$A=B^2$. 这就证明，存在半正定实对称方阵 B，使得 $A=B^2$.

现在设 B 和 C 是 n 阶半正定对称实方阵，$B^2=A=C^2$，且设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 与 $\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n$ 分别是方阵 B 和 C 的所有特征值，其中 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n\geqslant 0$，$\nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\cdots\geqslant\nu_n\geqslant 0$. 则存在 n 阶实正交方阵 O_1 与 O_2，使得

$$B=O_1'\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)O_1,$$

$$C=O_2'\operatorname{diag}(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_n)O_2.$$

因此

$$A=B^2=O_1'\operatorname{diag}(\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_n^2)O_1,\qquad ⑤$$

$$A=C^2=O_2'\operatorname{diag}(\nu_1^2,\nu_2^2,\cdots,\nu_n^2)O_2.\qquad ⑥$$

这说明，$\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_n^2$ 是方阵 A 的所有特征值，且 $\mu_1^2\geqslant\mu_2^2\geqslant\cdots\geqslant\mu_n^2>0$. 因此 $\mu_j^2=\lambda_j$，从而 $\mu_j=\sqrt{\lambda_j}$，$j=1,2,\cdots,n$. 同理 $\nu_j=\sqrt{\lambda_j}=\mu_j,j=1,2,\cdots,n$. 于是由式⑤与⑥得到

$$O_1'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)O_1=O_2'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)O_2.$$

从而

$$O_2O_1'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)O_2O_1'.$$

记 $O_2O_1'=(p_{ij})$. 比较上式两端方阵的 (i,j) 位置上的元素，得到

$$p_{ij}\lambda_j=\lambda_ip_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n.$$

由此可得

$$p_{ij}\sqrt{\lambda_j}=\sqrt{\lambda_i}p_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n.$$

写成矩阵形式，上式即为

$$O_2O_1'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})=\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O_1'O_2.$$

即

$$O_1'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O_2=O_2'\operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1},\sqrt{\lambda_2},\cdots,\sqrt{\lambda_n})O_2.$$

因此 $B=C$. 这就证明了唯一性.

3.8.4　对于给定的 n 阶实对称方阵 A，记

$$V_0=\{x\in R^n\mid x'Ax=0\},$$

其中 R^n 是 n 维列向量空间. 证明：V_0 是 R^n 的子空间的充要条件是，A 是半正定或半负定的，这里所谓 A 是半负定的，如果对每个 $x\in R^n$，均有 $x'Ax\leqslant 0$.

证　设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 是方阵 A 的所有非零特征值，则存在 n 阶实正交方阵 O，使得

$$A=O'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)O.$$

则对任意 $x\in R^n$，有

$$f(x)=x'Ax=x'O'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)Ox.$$

记 $Ox=y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)'$，则

$$f(x)=y'\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)y=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ry_r^2.\qquad ⑦$$

现在证必要性. 设 V_0 是子空间，而方阵 A 既非半正定，也非半负定，则方阵 A 的所有非零特征值不可能都同号. 不妨设 $\lambda_1>0,\lambda_r<0$. 取 $y=\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}}e_r$，其中 e_j 是第 j 个分量为 1 且其他分量全为 0 的 n 维列向量，并令 $x=O'y$，则由式⑦，

$$f(x)=\lambda_1\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^2+\lambda_r\left(\frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}}\right)^2=1-1=0.$$

因此 $x\in V_0$. 同理，取 $z=-\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}e_1+\frac{1}{\sqrt{-\lambda_r}}e_r$，并令

$\tilde{x} = O'z$，则 $f(\tilde{x}) = 0$，即 $\tilde{x} \in V_0$. 由于 V_0 是子空间，因此 $x + \tilde{x} = O'(y + z) \in V_0$. 而 $y + z = -\frac{2}{\sqrt{-\lambda_r}} e_r$，因此

$$f(x + \tilde{x}) = 4\lambda_r \frac{1}{-\lambda_r} = -4 \neq 0.$$

矛盾. 从而方阵 A 是半正定或半负定的.

最后证充分性. 设方阵 A 是半正定或半负定的，则方阵 A 的所有非零特征值都同号. 现在设 $x \in V_0$，且 $y = Ox = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$. 则由式⑦，

$$f(x) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0.$$

由于 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 同号，所以 $y_1 = y_2 = \cdots = y_r = 0$. 因此 $y = y_{r+1}e_{r+1} + y_{r+2}e_{r+2} + \cdots + y_n e_n$. 从而

$$x = O'y = y_{r+1}O'e_{r+1} + y_{r+2}O'e_{r+2} + \cdots + y_n O'e_n. \qquad ⑧$$

反之设 $x \in R^n$ 具有式⑧的形式，则由式⑦容易验证，$f(x) = 0$，即 $x \in V_0$. 于是

$$V_0 = \{y_{r+1}O'e_{r+1} + y_{r+2}O'e_{r+2} + \cdots + y_n O'e_n \mid y_{r+1}, y_{r+2}, \cdots, y_n \in \mathbf{R}\}.$$

因此 V_0 是 R^n 中由 $O'e_{r+1}, O'e_{r+2}, \cdots, O'e_n$ 生成的子空间.

3.8.5 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times p$ 实矩阵. 证明：

$$\mathrm{Tr}(AB)(AB)' \leqslant \mathrm{Tr}(AA')\max\{\lambda(BB')\}, \qquad (1)$$

其中 $\max\{\lambda(BB')\}$ 表示方阵 BB' 的最大特征值.

证 注意 BB' 是 n 阶实对称方阵. 对于任意 n 维实的列向量 x，$B'x$ 是 p 维实的列向量. 记 $y = B'x = (y_1, y_2, \cdots, y_p)'$，则 $x'BB'x = y'y = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2 \geqslant 0$. 因此 BB' 是半正定的. 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 BB' 的所有特征值，其中 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$. 则存在 n 阶实正交方阵 O，使得

$$BB' = O\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'.$$

于是

$$(AB)(AB)' = AO\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'A'.$$

记 $AO = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 m 维实的列向量. 则 $O'A' = (OA)' = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$，且

$$(AB)(AB)' = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}$$

注意，对任意 $r \times s$ 实矩阵 R 和 $s \times r$ 实矩阵 T，有 $\mathrm{Tr}(RT) = \mathrm{Tr}(TR)$. 所以

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Tr}(AB)(AB)' \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\left\{\begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}[\lambda_1\alpha_1, \lambda_2\alpha_2, \cdots, \lambda_n\alpha_n]\right\} \\
&= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \lambda_1\alpha_1'\alpha_1 & \lambda_2\alpha_1'\alpha_2 & \cdots & \lambda_n\alpha_1'\alpha_n \\ \lambda_1\alpha_2'\alpha_1 & \lambda_2\alpha_2'\alpha_2 & \cdots & \lambda_n\alpha_2'\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1\alpha_n'\alpha_1 & \lambda_2\alpha_n'\alpha_2 & \cdots & \lambda_n\alpha_n'\alpha_n \end{bmatrix} \\
&= \lambda_1\alpha_1'\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2'\alpha_2 + \cdots + \lambda_n\alpha_n'\alpha_n \\
&\leqslant \lambda_1(\alpha_1'\alpha_1 + \alpha_2'\alpha_2 + \cdots + \alpha_n'\alpha_n). \qquad ⑨
\end{aligned}$$

另一方面，

$$(O'A')(AO) = \begin{bmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{bmatrix}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{bmatrix} \alpha_1'\alpha_1 & \alpha_1'\alpha_2 & \cdots & \alpha_1'\alpha_n \\ \alpha_2'\alpha_1 & \alpha_2'\alpha_2 & \cdots & \alpha_2'\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_n'\alpha_1 & \alpha_n'\alpha_2 & \cdots & \alpha_n'\alpha_n \end{bmatrix}.$$

因此

$$\alpha_1'\alpha_1 + \alpha_2'\alpha_2 + \cdots + \alpha_n'\alpha_n = \mathrm{Tr}(O'A'AO) = \mathrm{Tr}(A'AOO').$$

由于 O 是实正交的，所以

$$\alpha_1'\alpha_1 + \alpha_2'\alpha_2 + \cdots + \alpha_n'\alpha_n = \mathrm{Tr}(A'A) = \mathrm{Tr}(AA').$$

于是由式⑨得到

$$\mathrm{Tr}(AB)(AB)' \leqslant \lambda_1\mathrm{Tr}(AA').$$

其中 λ_1 即是 n 阶方阵 BB' 的最大特征值，因此式(1)成立.

注 一般地说，两个矩阵 R 与 T 的乘积是不可交换的，即 $RT \neq TR$. 但作为 $r \times s$ 矩阵 R 与 $s \times r$ 矩阵 T 的实函数 $\mathrm{Tr}(RT)$，则恒有 $\mathrm{Tr}(RT) = \mathrm{Tr}(TR)$，即实函数 $\mathrm{Tr}(RT)$ 关于两个变矩阵元 R 与 T 是对称的. 这是迹函数 $\mathrm{Tr}(RT)$ 的一个重要性质. 3.8.5 的证明除了应用对称方阵在正交相似下的标准性，还一再使用迹函数 $\mathrm{Tr}(RT)$ 关于 R 与 T 的对称性.

3.8.6 （奇异值分解定理）对于 $m \times n$ 实矩阵 A，n 阶方阵 $A'A$ 的非零特征值的算术平方根称为矩阵 A

的奇异值. 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 是 $m\times n$ 矩阵 A 的所有奇异值,其中 $\mu_1\geqslant\mu_2\geqslant\cdots\geqslant\mu_r>0$,且 $r=\operatorname{rank}A$. 证明:存在 m 阶与 n 阶实正交方阵 O_1 与 O_2,使得

$$A=O_1\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O_2, \tag{2}$$

其中 $D=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r)$.

证 因为 $A'A$ 是 n 阶半正定对称方阵,它的所有非零特征值都是正的,且为 $\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_r^2$. 因此存在 n 阶实正交方阵 O,使得

$$A'A=O\begin{bmatrix}D^2&0\\0&0\end{bmatrix}O'. \tag{⑩}$$

将方阵 O 分块为 $O=[O_1,O_2]$,其中 O_1 是 $n\times r$ 子矩阵. 则由式⑩得到

$$A'A=O_1D^2O_1'. \tag{⑪}$$

因为方阵 O 是正交的,所以

$$O'O=\begin{bmatrix}O_1'\\O_2'\end{bmatrix}[O_1,O_2]=\begin{bmatrix}O_1'O_1&O_1'O_2\\O_2'O_1&O_2'O_2\end{bmatrix}=I_n.$$

因此

$$O_1'O_1=I_r,O_1'O_2=0,O_2'O_1=0.$$

于是由式⑪得到

$$(AO_1D^{-1})'(AO_1D^{-1})=I_r,$$

$$(AO_2)'(AO_2)=0.$$

这表明,$P_1=AO_1D^{-1}$ 是由 r 个两两正交的 m 维实的单位列向量构成的 $m\times r$ 矩阵,而 AO_2 是 $m\times(n-r)$ 零矩阵. 所以可以将 $m\times r$ 矩阵 P_1 的 r 个列向量扩充成为 m 维实的列向量空间 R^m 的一组标准正交基,即存在 $m\times(m-r)$ 矩阵 P_2,使得 $P=[P_1,P_2]$ 是一个 m 阶正交方阵. 因此

$$P\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O'=[P_1,P_2]\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}O_1'\\O_2'\end{bmatrix}=P_1DO_1'=AO_1O_1'. \tag{⑫}$$

由于方阵 O 是正交的,所以 $OO'=[O_1,O_2]\begin{bmatrix}O_1'\\O_2'\end{bmatrix}=O_1O_1'+O_2O_2'=I_n$. 因此 $O_1O_1'=I_n-O_2O_2'$. 于是由式⑫得到

$$P\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O'=A(I_n-O_2O_2')=A-AO_2O_2'.$$

注意 AO_2 为零矩阵,所以

$$A=P\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O'.$$

取 $O_1=P,O_2=O'$. 上式即是式(2).

注 设 A 和 B 是 $m\times n$ 实矩阵. 如果存在 m 阶和 n 阶实正交方阵 P 和 Q,使得 $B=PAQ$,则称矩阵 A 和 B 是正交相抵的. 易知如果矩阵 A 和 B 正交相抵,则 A 和 B 相抵,反之不真. 另外,矩阵之间的正交相抵关系是所有 $m\times n$ 实矩阵集合 $M_{m\times n}$ 的一种等价关系. 在此等价关系下,$M_{m\times n}$ 分解为正交相抵等价类之并. 可以证明,对于 $A,B\in M_{m\times n}$,A 和 B 正交相抵的充要条件是,A 和 B 具有相同的奇异值,因此 3.8.6 实际上给出了矩阵 A 在正交相抵下的标准形. 最后应指出的是,奇异值分解定理 3.8.6 具有广泛的应用.

3.8.7 (极分解定理) 设 A 是 n 阶实方阵. 证明:存在 n 阶半正定对称方阵 S 和 n 阶正交方阵 O,使得

$$A=SO, \tag{3}$$

而且方阵 S 是由方阵 A 唯一确定的.

证 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 是方阵 A 的所有奇异值,则由 3.8.6,存在 n 阶正交方阵 O_1 与 O_2,使得

$$A=O_1\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O_2,$$

其中 $D=\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r)$. 易知

$$A=\left(O_1\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O_1'\right)(O_1O_2).$$

记

$$S=O_1\begin{bmatrix}D&0\\0&0\end{bmatrix}O_1',$$

$$O=O_1O_2.$$

则方阵 S 是对称的,且其所有非零特征值为 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$,从而方阵 S 是半正定的. 而方阵 O 是正交的. 于是式(3) 成立.

现在设 $A=SO=S_1O_1$,其中 S 和 S_1 是半正定对称方阵,而 O 和 O_1 是正交方阵. 则

$$AA'=S^2=S_1^2.$$

由于 AA' 是半正定的,而 S 和 S_1 也是半正定的,所以由 3.8.3,$S=S_1$. 这就证明,式(3) 中半正定对称方阵 S 是唯一的.

注 可以证明,如果方阵 A 是可逆的,则式(3) 中正交方阵 O 也是唯一的. 另外,同样可证,对方阵 A,有 $A=OS$,其中 S 是半正定的,O 是正交的,而且 S 也是由 A 所唯一确定的.

3.8.8 设 A 和 B 是 n 阶实对称方阵,而且 A 是正定的. 证明:存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A=PP',B=P\operatorname{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P', \tag{4}$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是实数. 简单地说,A 和 B 可同时合同于对角方阵.

证 因为方阵 A 是正定的,所以存在 n 阶可逆方阵 Q,使得

$$Q'AQ=I_n.$$

注意,方阵 $Q'BQ$ 是对称的,所以存在 n 阶正交方阵 O,使得

$$O'Q'BQO = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n), \qquad ⑬$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是方阵 $Q'BQ$ 的所有特征值.由于 O 是正交的,所以

$$O'Q'AQO = I_n. \qquad ⑭$$

由于 Q 和 O 是可逆的,所以 QO 是可逆的.记 $QO = (P')^{-1}$,则由式⑬和⑭得到

$$A = PP',$$
$$B = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'.$$

3.8.9 设 A 和 B 是 n 阶实对称方阵,且 A 是正定的.证明:$A+B$ 是正定的充要条件是,$A^{-1}B$ 的特征值都大于 -1.

证 由 3.8.8,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A = PP',$$
$$B = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P',$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 为实数.于是

$$A + B = P\mathrm{diag}(1+\mu_1,1+\mu_2,\cdots,1+\mu_n)P'. \qquad ⑮$$

$$A^{-1}B = (P')^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'. \qquad ⑯$$

现在设 $A+B$ 是正定的.由于对称方阵的正定性在合同下是不变的,所以

$$\mathrm{diag}(1+\mu_1,1+\mu_2,\cdots,1+\mu_n) \qquad ⑰$$

是正定的,从而 $1+\mu_j > 0, j = 1,2,\cdots,n$.即 $\mu_j > -1, j = 1,2,\cdots,n$.由式⑯,$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是 $A^{-1}B$ 的所有特征值.从而 $A^{-1}B$ 的特征值都大于 -1.反之若 $A^{-1}B$ 的特征值都大于 -1,即 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 都大于 -1,则 $1+\mu_1,1+\mu_2,\cdots,1+\mu_n$ 都是正的.所以对角方阵⑰是正定的.由式⑮,$A+B$ 是正定的.

3.8.10 设 A 和 B 是 n 阶正定实对称方阵,而且 $A-B$ 是正定的.证明:方阵 $B^{-1}-A^{-1}$ 是正定的.

证 因为 A 是正定的,因此由 3.8.8,存在 n 阶可逆实方阵 P,使得

$$A = PP' \qquad ⑱$$
$$B = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'. \qquad ⑲$$

由于 B 是正定的,所以 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 都是正的.而

$$A - B = P\mathrm{diag}(1-\mu_1,1-\mu_2,\cdots,1-\mu_n)P'$$

是正定的,所以 $1-\mu_j > 0, j = 1,2,\cdots,n$.于是 $0 < \mu_j < 1, j = 1,2,\cdots,n$.由式⑱和⑲得到

$$A^{-1} = (P')^{-1}P^{-1},$$
$$B^{-1} = (P')^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1^{-1},\mu_2^{-1},\cdots,\mu_n^{-1})P^{-1}.$$

因此

$$B^{-1} - A^{-1}$$
$$= (P')^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1^{-1}-1,\mu_2^{-1}-1,\cdots,\mu_n^{-1}-1)P^{-1}. \qquad ⑳$$

由于 $\mu_j < 1$,所以 $\mu_j^{-1} > 1$,从而 $\mu_j^{-1} - 1 > 0, j = 1,2,\cdots,n$.因此对角方阵 $\mathrm{diag}(\mu_1^{-1}-1,\mu_2^{-1}-1,\cdots,\mu_n^{-1}-1)$ 是正定的.由于对称方阵的正定性在合同下是不变的,所以由式⑳,$B^{-1}-A^{-1}$ 是正定的.

3.8.11 设 B 和 C 分别是 n 阶正定和负定实对称方阵.设 n 阶实方阵 A 满足

$$AB + BA' = C. \qquad (5)$$

证明:方阵 A 的特征值的实部都小于零.

证 因为 B 是页定的,C 是对称的,因此由 3.8.8,存在 n 阶可逆实方阵 P,使得

$$B = PP', \qquad ㉑$$
$$C = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'. \qquad ㉒$$

由于 C 是负定的,而对称方阵的负定性在合同下是不变的,所以对角方阵 $\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 是负定的,因此 $\mu_j < 0, j = 1,2,\cdots,n$.将式㉑和㉒代入式(5),得到

$$APP' + PP'A' = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'.$$

分别将 P^{-1} 与 P' 左乘与右乘上式,得到

$$P^{-1}AP + (P^{-1}AP)' = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).$$

设 $A_1 = P^{-1}AP$,则上式化为

$$A_1 + A_1' = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n). \qquad ㉓$$

设 λ 是方阵 A 的特征值,由于 A_1 和 A 是相似的,所以 λ 是方阵 A_1 的特征值.设 x 是方阵 A_1 的相应于 λ 的特征向量,则 $A_1x = \lambda x$.因此 $x^*A_1x = \lambda x^*x$.取其共轭转置,得到 $x^*A_1'x = \bar{\lambda}x^*x$.记 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_n)'$.分别用 x^* 与 x 左乘和右乘式㉓得到

$$(\lambda+\bar{\lambda})x^*x = \mu_1|x_1|^2 + \mu_2|x_2|^2 + \cdots$$
$$+ \mu_n|x_n|^2. \qquad ㉔$$

由于 $\mu_j < 0, j = 1,2,\cdots,n$,且特征向量 x 是非零的,所以 $x^*x > 0$,$\mu_1|x_1|^2 + \mu_2|x_2|^2 + \cdots + \mu_n|x_n|^2 < 0$.因此由式㉔得到,$\lambda + \bar{\lambda} < 0$.即 λ 的实部小于零.

3.8.12 设 A 和 B 是 n 阶可逆实对称方阵.证明:如果方阵 A 为正定的,则对任意正定方阵 B,恒有

$$\mathrm{Tr}(AB) > 0. \qquad (6)$$

证 设方阵 A 是正定的,而 B 是任意一个正定方阵.则由 3.8.8,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A = PP',$$
$$B = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \mathrm{Tr}(PP')(P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P') \\ &= \mathrm{Tr}[PP'P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)]P' \\ &= \mathrm{Tr}P'[PP'P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)] \\ &= \mathrm{Tr}(P'P)^2\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n).\end{aligned}$$

因为方阵 P 是可逆的,所以 $P'P$ 是正定的,从而

$(P'P)^2$ 是正定的.因此$(P'P)^2$ 的主对角元都是正的.由于方阵 B 是正定的,所以 $\mu_j>0, j=1,2,\cdots,n$.于是,$(P'P)^2\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 的主对角元都是正的.因此 $\mathrm{Tr}(AB)>0$.

3.8.13 (樊畿(Ky Fan)和 Taussky)设 A 和 B 是 n 阶实对称方阵,且 A 是正定的.证明:AB 为正定的充要条件是,B 为正定的.

证 因为 A 是正定的,所以 A^{-1} 是正定的.而 B 是对称的,因此由 3.8.8,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A^{-1}=PP',$$
$$B=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'. \quad ㉕$$

于是

$$AB=(P')^{-1}\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'. \quad ㉖$$

现在设方阵 AB 是正定的,则由式㉖,对角方阵 $\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 是正定的.从而由式㉕,方阵 B 是正定的.反之设方阵 B 是正定的,则由式㉕,方阵 $\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)$ 是正定的.于是由式㉖,方阵 AB 是正定的.

3.8.14 设 A 和 B 是 n 阶实对称方阵,且 A 和 $B-A$ 是正定的.证明:$\det B>\det A$.

证 因为 A 是正定的,B 是对称的,因此存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A=PP',$$
$$B=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'.$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 是实数.所以

$$\det A=\det P\det P'=(\det P)^2, \quad ㉗$$
$$\det B=\det P\det(\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n))\det P'=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n(\det P)^2. \quad ㉘$$

由题设,$B-A$ 是正定的,而

$$B-A=P(\mathrm{diag}(\mu_1-1,\mu_2-1,\cdots,\mu_n-1)P'.$$

从而对角方阵 $\mathrm{diag}(\mu_1-1,\mu_2-1,\cdots,\mu_n-1)$ 是正定的.所以 $\mu_j-1>0$,即 $\mu_j>1, j=1,2,\cdots,n$.于是由式㉘和㉗得到

$$\det B>(\det P)^2=\det A.$$

3.8.15 (Minkowski 不等式)设 A 和 B 是 n 阶正定实对称方阵.证明:

$$\det(A+B)^{1/n}\geqslant(\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}.$$

证 由 3.8.8,存在 n 阶可逆方阵 P,使得

$$A=PP',$$
$$B=P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P'.$$

由于 B 是正定的,所以 $\mu_j>0, j=1,2,\cdots,n$.于是

$$A+B=P\mathrm{diag}(1+\mu_1,1+\mu_2,\cdots,1+\mu_n)P'.$$

因此

$$\det A=(\det P)^2,$$
$$\det B=\mu_1\mu_2\cdots\mu_n(\det P)^2,$$
$$\det(A+B)=(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)(\det P)^2.$$

注意 $\mu_j>0, j=1,2,\cdots,n$,所以

$$[(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)]^{1/n}\geqslant 1+(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{\frac{1}{n}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\det(A+B)^{1/n}&=[(1+\mu_1)(1+\mu_2)\cdots(1+\mu_n)]^{1/n}(\det P)^{2/n}\\&\geqslant(1+(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{1/n})(\det P)^{2/n}\\&=(\det P)^{2/n}+(\mu_1\mu_2\cdots\mu_n)^{1/n}(\det P)^{2/n}\\&=(\det A)^{1/n}+(\det B)^{1/n}.\end{aligned}$$

注 当 A 和 B 为半正定时,Minkowski 不等式也成立.另外,Minkowski 不等式对半正定 Hermite 方阵也成立.

3.8.16 (Ostrowski-Taussky 不等式)设 $S(A)=\frac{1}{2}(A+A')$ 和 $K(A)=\frac{1}{2}(A-A')$ 分别是 n 阶实方阵 A 的对称分量和斜对称分量.证明:如果 $S(A)$ 是正定的,则

$$\det A\geqslant\det S(A).$$

证 因为方阵 $S(A)$ 是正定的,所以存在 n 阶可逆实方阵 P,使得

$$S(A)=PP'.$$

易知方阵 $P^{-1}K(A)(P^{-1})'$ 是斜对称的,所以存在 n 阶实正交方阵 O,使得

$$O'P^{-1}K(A)(P^{-1})'O=\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}0&a_1\\-a_1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&a_2\\-a_2&0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0&a_s\\-a_s&0\end{bmatrix},0,\cdots,0\right).$$

其中 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_s>0$.记 $Q=PO$,则

$$S(A)=QQ',$$
$$K(A)=Q\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}0&a_1\\-a_1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&a_2\\-a_2&0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}0&a_s\\-a_s&0\end{bmatrix},0,\cdots,0\right)Q'.$$

于是

$$A=S(A)+K(A)=Q\mathrm{diag}\left(\begin{bmatrix}1&a_1\\-a_1&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&a_2\\-a_2&1\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}1&a_s\\-a_s&1\end{bmatrix},1,\cdots,1\right)Q'.$$

因此

$$\det S(A)=(\det Q)^2,$$
$$\det A=(1+a_1^2)(1+a_2^2)\cdots(1+a_s^2)(\det Q)^2$$

$$\geqslant (1+a_1^2a_2^2\cdots a_r^2)(\det Q)^2$$
$$\geqslant (\det Q)^2 = \det S(A).$$

3.8.17 设 A 和 B 是 n 阶半正定实对称方阵. 证明:存在 n 阶可逆实方阵 P, 使得 PAP' 和 PBP' 都是对角方阵. 简单地说, 半正定方阵 A 和 B 可同时合同于对角方阵.

证 因为 A 和 B 是半正定的, 所以方阵 $A+B$ 也是半正定的. 因此存在 n 阶可逆实方阵 Q, 使得

$$Q(A+B)Q' = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 r 是方阵 $A+B$ 的秩. 记

$$QAQ' = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 A_{11} 是 r 阶方阵. 由于 A 是半正定的, 所以 A_{11} 和 A_{22} 是半正定的. 于是

$$QBQ' = \begin{bmatrix} I_r - A_{11} & -A_{12} \\ -A_{12}' & -A_{22} \end{bmatrix}.$$

因为 B 是半正定的, 所以 QBQ' 是半正定的, 因此 $-A_{22}$ 是半正定的. 但 A_{22} 是半正定的, 从而 $A_{22}=0$. 因为 A 是半正定的, 所以 QAQ' 是半正定的, 而其主子方阵 $A_{22}=0$, 因此 $A_{12}=0$. 于是

$$QAQ' = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$QBQ' = \begin{bmatrix} I_r - A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因为 A_{11} 是 r 阶半正定方阵, 所以存在 r 阶实正交方阵 O_1, 使得

$$O_1A_{11}O_1' = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r),$$

其中 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_r \geqslant 0$. 注意, $O = \begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$ 是 n 阶正交方阵, 且

$$\begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} QAQ' \begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}'$$
$$= \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0).$$

记 $P = \begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} Q$, 则 P 是 n 阶可逆方阵, 且 $PAP' = \mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)$. 而

$$\begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix} QBQ' \begin{bmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}'$$
$$= \begin{bmatrix} I_r - O_1A_{11}O_1' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此

$$PBP' = \mathrm{diag}(1-\mu_1, 1-\mu_2, \cdots, 1-\mu_r, 0, \cdots, 0).$$

即方阵 A 和 B 用同一个可逆方阵 P 合同于对角方阵.

3.8.18 设 A 和 B 是 n 阶半正定对称方阵. 证明:

$$\det(A+B) \geqslant \det A + \det B.$$

证 由 3.8.17, 存在 n 阶可逆方阵 P, 使得

$$A = P\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)P',$$
$$B = P\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)P',$$

其中 λ_i, μ_j 均为非负实数. 因此

$$A+B$$
$$= P\mathrm{diag}(\lambda_1+\mu_1, \lambda_2+\mu_2, \cdots, \lambda_n+\mu_n)P'.$$

于是

$$\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n(\det P)^2,$$
$$\det B = \mu_1\mu_2\cdots\mu_n(\det P)^2,$$
$$\det(A+B)$$
$$= (\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)(\det P)^2.$$

易知

$$(\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)$$
$$\geqslant \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n + \mu_1\mu_2\cdots\mu_n.$$
$$\det(A+B)$$
$$= (\lambda_1+\mu_1)(\lambda_2+\mu_2)\cdots(\lambda_n+\mu_n)(\det P)^2$$
$$\geqslant (\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n + \mu_1\mu_2\cdots\mu_n)(\det P)^2$$
$$= \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n(\det P)^2 + \mu_1\mu_2\cdots\mu_n(\det P)^2$$
$$= \det A + \det B.$$

3.8.19 (Fischer) 设 A 是 n 阶半正定对称方阵. 对于 $i_1, i_2, \cdots, i_k, 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$, 用 $A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k \end{pmatrix}$ 表示方阵 A 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行和第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 列的交叉位置上的元素构成的主子矩阵的行列式. 证明:

$$\det A \leqslant A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & k \\ 12 & \cdots & k \end{pmatrix} A\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \cdots & n \\ k+1 & k+2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \quad (7)$$

证 设 $A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & k \\ 12 & \cdots & k \end{pmatrix} \neq 0$. 将方阵 A 分块为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}' & A_{22} \end{bmatrix},$$

其中 A_{11} 是 k 阶的. 由于 $\det A_{11} = A\begin{pmatrix} 12 & \cdots & k \\ 12 & \cdots & k \end{pmatrix} \neq 0$, 所以方阵 A_{11} 是可逆的. 因为

$$\begin{bmatrix} I_k & 0 \\ -A_{12}'A_{11}^{-1} & I_{n-k} \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} I_k & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I_{n-k} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} - A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix},$$

所以有

$$\det A = \det A_{11}\det(A_{22} - A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}). \quad ⑳$$

由于 A 是半正定的, 所以 A_{11} 和 $A_{22} - A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}$ 是半正定的. 而 $\det A_{11} \neq 0$, 所以 A_{11} 是正定的, 因此, A_{11}^{-1} 是正定的, 从而 $A_{12}'A_{11}^{-1}A_{12}$ 是半正定的. 对半正

定方阵 $B = A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}$ 和 $C = A_{22} - A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}$，由 3.8.18，有

$$\det A_{22} = \det(B + C) \geqslant \det B + \det C \geqslant \det C = \det(A_{22} - A'_{12}A_{11}^{-1}A_{12}).$$

于是由式㉙得到

$\det A \leqslant \det A_{11}\det A_{22}$，即式(7)成立.

设 $A\begin{pmatrix}12 & \cdots & k\\ 12 & \cdots & k\end{pmatrix} = 0$，则 A 是半正定但不是正定的. 因此 $\det A = 0$. 所以式(7)仍成立.

3.8.20 (Hadamard) 设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶半正定对称方阵. 证明：

$$\det A \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证 记

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \alpha \\ \alpha' & A_1 \end{bmatrix},$$

其中 A_1 是 $n-1$ 阶方阵. 则由 3.8.19，有

$$\det A \leqslant a_{11}\det A_1.$$

由于 A 是半正定的，而 A_1 是 A 的 $n-1$ 阶主子矩阵，所以 A_1 是半正定的. 注意

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

对半正定方阵 A_1 反复应用 3.8.19，有

$$\det A_1 \leqslant a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

因此

$$\det A \leqslant a_{11}\det A_1 \leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3.8.21 (Hadamard) 设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶实方阵. 证明：

$$|\det A| \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{1/2}. \tag{8}$$

证 注意，方阵 $A'A$ 是半正定的. 记 $A'A = (b_{ij})$. 则由 3.8.20，有

$$(\det A)^2 = \det(A'A) \leqslant b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}.$$

由于 $(b_{ij}) = A'A$，所以

$$b_{jj} = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{nj})\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2.$$

于是

$$(\det A)^2 \leqslant \prod_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}^2\right).$$

由此易知式(8)成立.

3.8.22 设 A 是 n 阶正定对称方阵. 证明：对任意 n 阶正定对称方阵 B，$\det B = 1$，有

$$(\det A)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB). \tag{9}$$

证 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是方阵 A 的所有特征值，$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$. 则存在 n 阶正交方阵 O，使得

$$A = O\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'.$$

因此，

$$AB = O[\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'BO]O'.$$

由于方阵 A 的迹 $\mathrm{Tr}A$ 是在方阵相似变换下不变的，所以

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'BO).$$

记 $O'BO = (b_{ij})$. 由于方阵 B 是正定的，而方阵 O 是正交的，因此方阵 $O'BO$ 也是正定的，所以其对角元 $b_{11}, b_{22}, \cdots, b_{nn}$ 都是正定的. 注意方阵

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)O'BO$$

的对角元是 $\lambda_1 b_{11}, \lambda_2 b_{22}, \cdots, \lambda_n b_{nn}$，所以

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB) = \frac{1}{n}(\lambda_1 b_{11} + \lambda_2 b_{22} + \cdots + \lambda_n b_{nn}).$$

由算术平均与几何平均不等式得到

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB) \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i b_{ii}\right)^{1/n} = \left(\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\right)^{1/n}\left(\prod_{i=1}^{n}b_{ii}\right)^{1/n}.$$

易知 $\det A = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$. 由 3.8.20，$\det B \leqslant b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}$. 因此

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB) \geqslant (\det A)^{1/n}(\det B)^{1/n}.$$

由于 $\det B = 1$，所以

$$\frac{1}{n}\mathrm{Tr}(AB) \geqslant (\det A)^{1/n}.$$

3.8.23 设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶半正定对称方阵，其第 i 行上元素之和 $R_i = \sum_{j=1}^{n}a_{ij} = 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$. 证明：

$$2\max\{\sqrt{a_{ii}} \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_{ii}}. \tag{10}$$

证 因为 A 是半正定的，所以存在 n 阶方阵 P，使得 $A = P'P$. 将方阵 P 按列分块为 $P = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，则

$$A = P'P = \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \vdots \\ \alpha'_n \end{pmatrix}[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = \begin{pmatrix} \alpha'_1\alpha_1 & \alpha'_1\alpha_2 & \cdots & \alpha'_1\alpha_n \\ \alpha'_2\alpha_1 & \alpha'_2\alpha_2 & \cdots & \alpha'_2\alpha_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha'_n\alpha_1 & \alpha'_n\alpha_2 & \cdots & \alpha'_n\alpha_n \end{pmatrix}$$

因此 $a_{ij}=\alpha_i^t\alpha_j,1\leqslant i,j\leqslant n$. 由于对每个 $i=1,2,\cdots,n$, $R_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}=0$, 所以

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}=\sum_{j=1}^n \alpha_i^t\alpha_j=\alpha_i^t(\sum_{j=1}^n \alpha_j)=0.$$

上式对 i 求和得到

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i^t)(\sum_{j=1}^n \alpha_j)=0,$$

即

$$(\sum_{i=1}^n \alpha_i)^t(\sum_{j=1}^n \alpha_j)=0.$$

记 $\beta=\sum_{j=1}^n \alpha_j$, 则 β 是 n 维实的列向量, 且 $\beta^t\beta=0$. 所以

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j=0.$$

于是

$$\alpha_i=-\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\alpha_j.$$

上式两边取向量的范数, 得到

$$\|\alpha_i\|\leqslant\sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}}\|\alpha_j\|,$$

其中 $\|\alpha_i\|=\sqrt{\alpha_i^t\alpha_i}$. 因此

$$2\|\alpha_i\|\leqslant\sum_{j=1}^n\|\alpha_j\|.$$

由于 $a_{ii}=\alpha_i^t\alpha_i$, 所以由上式得到, 对每个 i,

$$2\sqrt{a_{ii}}\leqslant\sum_{j=1}^n\sqrt{a_{jj}}.$$

因此式(10)成立.

3.8.24 设 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶实方阵, 记 $M_A=\max\{|a_{ij}|\mid 1\leqslant i,j\leqslant n\}$. 证明:

$$|\det A|\leqslant M_A^n n^{n/2}. \qquad (11)$$

证 注意, 方阵 A^tA 是半正定的. 记 $A^tA=[b_{ij}]$, 则

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj},1\leqslant i,j\leqslant n.$$

由 Hadamard 不等式(见 3.8.20), 有

$$(\det A)^2=\det(A^tA)\leqslant b_{11}b_{22}\cdots b_{nn}=\prod_{i=1}^n(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2).$$

由于 $|a_{ij}|\leqslant M_A$, 所以

$$\sum_{k=1}^n a_{ki}^2\leqslant nM_A^2.$$

于是

$$(\det A)^2\leqslant n^nM_A^{2n}.$$

因此式(11)成立.

3.8.25 设 A 是 n 阶正定对称方阵. 证明:

$$\det A=\min\{\prod_{i=1}^n\alpha_i^tA\alpha_i\mid \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \text{ 是 } R^n \text{ 的标准正交基}\}, \qquad (12)$$

其中 R^n 是 n 维实的列向量空间, 且对 $\alpha,\beta\in R^n$, 其内积 (α,β) 为 $(\alpha,\beta)=\alpha^t\beta$.

证 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 R^n 的标准正交基, 则方阵 $O=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$ 是正交方阵. 由于方阵 A 是正定的, 所以 O^tAO 是正定的. 注意方阵 O^tAO 的对角元为 $\alpha_1^tA\alpha_1,\alpha_2^tA\alpha_2,\cdots,\alpha_n^tA\alpha_n$, 于是由 Hadamard 不等式, 有

$$\det A=\det(O^tAO)\leqslant\prod_{i=1}^n\alpha_i^tA\alpha_i. \qquad ㉚$$

另外, 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是方阵 A 的所有特征值, $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$, 则存在 n 阶正交方阵 O_1, 使得

$$O_1^tAO_1=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n). \qquad ㉛$$

将方阵 O_1 按列分块为 $O_1=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$. 由于方阵 O_1 是正交的, 所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 是 R^n 的标准正交基. 由式㉛得到

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)=\begin{bmatrix}\beta_1^t\\ \beta_2^t\\ \vdots\\ \beta_n^t\end{bmatrix}A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]=\begin{bmatrix}\beta_1^tA\beta_1 & \beta_1^tA\beta_2 & \cdots & \beta_1^tA\beta_n\\ \beta_2^tA\beta_1 & \beta_2^tA\beta_2 & \cdots & \beta_2^tA\beta_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \beta_n^tA\beta_1 & \beta_n^tA\beta_2 & \cdots & \beta_n^tA\beta_n\end{bmatrix}.$$

因此

$$\beta_i^tA\beta_j=\lambda_i\delta_{ij},1\leqslant i,j\leqslant n,$$

其中 $\delta_{ij}=0,i\neq j$ 且 $\delta_{ii}=1$. 于是

$$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^n\beta_i^tA\beta_i.$$

这说明, 对 R^n 的标准正交基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$, 式㉚中等式成立. 因此式(12)成立.

3.8.26 设 A 是 n 阶实方阵. 证明:

$$\mathrm{Tr}A\leqslant\mathrm{Tr}(AA^t)^{1/2}, \qquad (13)$$

其中 $(AA^t)^{1/2}$ 是半正定方阵 AA^t 的平方根, 且等式当且仅当 A 为半正定对称方阵时成立.

证 设 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 是方阵 A 的所有奇异值, 则由奇异值分解定理(3.8.6), 存在 n 阶正交方阵 O_1 和 O_2, 使得

$$A=O_1\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)O_2=O_1(\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)O_2O_1)O_1^t. \qquad ㉜$$

由于方阵 A 的迹 $\mathrm{Tr}A$ 是方阵在相似下不变的, 所以

$\mathrm{Tr}A = \mathrm{Tr}(\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)O_2O_1)$.
记 $O = O_2O_1 = [b_{ij}]$,则

$$\mathrm{Tr}A = \mu_1 b_{11} + \mu_2 b_{22} + \cdots + \mu_r b_{rr}.$$

由于方阵 O_1 和 O_2 是正交的,所以方阵 O 也是正交的.因此方阵 O 的每一行是一个单位行向量,即若记方阵 O 的第 i 行为 $\alpha_i = (b_{i1}, b_{i2},\cdots,b_{in})$,则

$$| b_{ii} | \leqslant \sqrt{\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^2} = \alpha_i\alpha_i' = 1.$$

由于方阵 A 的奇异值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r$ 都是正的,所以

$$\mathrm{Tr}A \leqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r. \quad ㉝$$

另一方面,由式㉜

$$AA' = O_1\mathrm{diag}(\mu_1^2,\mu_2^2,\cdots,\mu_r^2,0,\cdots,0)O_1'.$$

所以

$$(AA')^{1/2} = O_1\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)O_1'.$$

因此

$$\mathrm{Tr}(AA')^{1/2} = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r. \quad ㉞$$

由式㉝和㉞,即得式(13).

现在设方阵 A 是半正定的,则 $AA' = A^2$.因此 A 即是方阵 AA' 的平方根.所以 $A = (AA')^{1/2}$.显然此时式(13)中等式成立.反之设式(13)中等式成立,则由上式的证明,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}A &= \mu_1 b_{11} + \mu_2 b_{22} + \cdots + \mu_r b_{rr}\\ &= \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r,\end{aligned}$$

即

$$\mu_1(1 - b_{11}) + \mu_2(1 - b_{22}) + \cdots + \mu_r(1 - b_{rr}) = 0.$$

由于奇异值 $\mu_i > 0, i = 1,2,\cdots,r$,而 $| b_{jj} | \leqslant 1, j = 1,2,\cdots,r$,所以 $b_{jj} = 1, j = 1,2,\cdots,r$.因此

$$O = O_2O_1 = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & O_3 \end{bmatrix}.$$

于是式㉜化为

$$A = O_1\mathrm{diag}(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0)O_1'.$$

这说明,方阵 A 是对称的,且其特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_r,0,\cdots,0$ 都是非负的,因而方阵 A 是半正定的.

§ 3.9 线性映射的象与核

设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射.V 中所有向量在线性映射 $\mathscr{A}$ 下的象的集合记作 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$,或者 $\mathscr{A}(V)$,即

$$\mathrm{Im}\mathscr{A} = \{\mathscr{A}(\alpha) \mid \alpha \in V\}.$$

$\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 是 U 的一个子空间,称为线性映射 $\mathscr{A}$ 的象空间,简称为 $\mathscr{A}$ 的象.V 中所有在线性映射 $\mathscr{A}$ 下映为零向量的向量集合记作 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$,即

$$\mathrm{Ker}\mathscr{A} = \{\alpha \in V \mid \mathscr{A}(\alpha) = 0\}.$$

$\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 是 V 的一个子空间,称为线性映射 $\mathscr{A}$ 的核.当 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 到自身的线性映射时,$\mathscr{A}$ 称为 V 上的线性变换,而线性变换 $\mathscr{A}$ 的象 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 和核 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 都是 V 的子空间,而且都是 $\mathscr{A}$ 不变的子空间.

众所周知,所谓线性代数即是线性空间理论,它主要研究的是线性空间之间的线性映射,特别是线性空间上的线性变换.研究的方法有两种,一是几何方法;另一个是代数方法,即矩阵方法.几何方法主要从在一个线性变换下线性空间如何分解为不变子空间之直和入手,而线性变换的象与核是两个基本的不变子空间,是在研究线性变换时首先必须搞清楚的不变子空间.所以线性变换的象与核在线性空间理论中具有基本的重要性;矩阵方法则是通过在线性空间中建立一组基,将一个线性变换 $\mathscr{A}$ 表成一个矩阵 A,然后用矩阵论方法来研究矩阵 A,进而研究线性变换 $\mathscr{A}$ 的几何性质.

本节将阐述如何通过线性变换的象与核来研究线性变换的几何性质,以及如何利用它来处理有关的矩阵论的问题.

3.9.1 设 $R_n[x]$ 是所有次数为 n 的实系数多项式组成的 $n+1$ 维实线性空间.定义 $R_n[x]$ 到自身的微商变换 $\mathscr{D}$ 如下:对任意 $p(x) \in R_n[x]$,$\mathscr{D}(p(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)$.易知 $\mathscr{D}$ 是 $R_n[x]$ 上的线性变换.试确定 $\mathscr{D}$ 的象 $\mathrm{Im}\mathscr{D}$ 与核 $\mathrm{Ker}\mathscr{D}$,以及它们的维数 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{D}$ 和 $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{D}$.

解 设 $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 \in R_n[x]$,其中 $a_n, a_{n-1},\cdots,a_0$ 是实数,则

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(p(x)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p(x))\\ &= na_nx^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + 2a_2x + a_1.\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{D}(p(x)) \in R_{n-1}[x]$,从而 $\mathrm{Im}\mathscr{D} \subseteq R_{n-1}[x]$.反之,设 $q(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 \in R_{n-1}[x]$,其中 $a_{n-1}, a_{n-2},\cdots,a_0$ 是实数.取 $p(x) = \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \frac{a_{n-2}}{n-1}x^{n} + \cdots + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + b$,其中 b 是实数,则

$$\mathscr{D}(p(x)) = q(x).$$

从而 $R_{n-1}[x] \subseteq \mathrm{Im}\mathscr{D}$.于是 $\mathrm{Im}\mathscr{D} = R_{n-1}[x]$.由于 $R_{n-1}[x]$ 是一个 n 维线性空间(注意,$1, x,\cdots,x^{n-1}$ 是 $R_{n-1}[x]$ 的一组基),因此有 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{D} = n-1$.

其次设 $p(x) = a \in R_n[x]$,a 为实数,则 $\mathscr{D}(p(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = 0$.因此 $p(x) \in \mathrm{Ker}\mathscr{D}$.这表明,所有零次多项式,即所有实数构成的实数域 $\mathbf{R}$ 被含在 $\mathrm{Ker}\mathscr{D}$ 中,即 $\mathbf{R} \subseteq \mathrm{Ker}\mathscr{D}$.反之设 $p(x) \in \mathrm{Ker}\mathscr{D}$,则 $\mathscr{D}(p(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x) = 0$,从而 $p(x)$ 是零次多项式,即 $p(x)$ 是一个实数.因此 $\mathrm{Ker}\mathscr{D} \subseteq \mathbf{R}$.所以 $\mathrm{Ker}\mathscr{D} = \mathbf{R}$.由于实数域 $\mathbf{R}$ 作为实线性空间是一维的,因此,

$\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}=1$.

3.9.2 设 $\mathscr{C}^{2\times 2}$ 是所有2阶复方阵组成的4维复线性空间. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -4 & 4\end{bmatrix}$. 定义 $\mathscr{C}^{2\times 2}$ 上的线性变换 $\mathscr{A}$ 如下：对任意2阶方阵 $X\in\mathscr{C}^{2\times 2}$，令 $\mathscr{A}(X)=AX$. 试确定线性变换 $\mathscr{A}$ 的象 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 与核 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，并确定它们的维数 $\dim \operatorname{Im}\mathscr{A}$ 与 $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A}$.

解 设 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\in\mathscr{C}^{2\times 2}$，则

$$\mathscr{A}(X)=AX=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_{11}-x_{21} & x_{12}-x_{22}\\ -4x_{11}+4x_{21} & -4x_{12}+4x_{22}\end{bmatrix}.$$

记 $x_{11}-x_{21}=x$，$x_{12}-x_{22}=y$，则

$$\mathscr{A}(X)=\begin{bmatrix}x & y\\ -4x & -4y\end{bmatrix}. \qquad ①$$

记

$$M=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ -4x & -4y\end{bmatrix}\ \middle|\ x,y\in\mathscr{C}\right\},$$

其中 $\mathscr{C}$ 为复数域. 式 ① 表明，$\mathscr{A}(X)\in M$. 即 $\operatorname{Im}\mathscr{A}\subseteq M$. 反之设 $Y=\begin{bmatrix}x & y\\ -4x & -4y\end{bmatrix}\in M$，则

$$\mathscr{A}\left(\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & -y\end{bmatrix}\right)=A\begin{bmatrix}x & 0\\ 0 & -y\end{bmatrix}=Y.$$

因此，$Y\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$，即 $M\subseteq\operatorname{Im}\mathscr{A}$. 从而 $\operatorname{Im}\mathscr{A}=M$. 设 $X_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -4 & 0\end{bmatrix}$，$X_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -4\end{bmatrix}$. 则对任意 $Y=\begin{bmatrix}x & y\\ -4x & 4y\end{bmatrix}\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$，有

$$Y=xX_1+yX_2.$$

则 Y 可由 X_1 和 X_2 线性表出，又若 X_1,X_2 线性相关，则存在不全为零的复数 λ_1,λ_2，使得

$$\lambda_1X_1+\lambda_2X_2=0,$$

即

$$\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ -4\lambda_1 & -4\lambda_2\end{bmatrix}=0.$$

从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$，矛盾. 因此 X_1,X_2 是线性无关的. 即 X_1,X_2 是 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的一组基. 于是 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}=2$.

其次设 $X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{bmatrix}\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，则

$$\mathscr{A}(X)=AX=\begin{bmatrix}x_{11}\ \ x_{21} & x_{12}-x_{22}\\ -4x_{11}+4x_{21} & -4x_{12}+4x_{22}\end{bmatrix}=0.$$

因此

$$x_{11}-x_{21}=0,\quad x_{12}-x_{22}=0,$$
$$-4x_{11}+4x_{21}=0,\ -4x_{12}+4x_{22}=0.$$

解得 $x_{11}=x_{21}$，$x_{12}=x_{22}$. 记

$$N=\left\{\begin{bmatrix}x & y\\ x & y\end{bmatrix}\ \middle|\ x,y\in\mathscr{C}\right\}.$$

则

$$X=\begin{bmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{11} & x_{12}\end{bmatrix}\in N.$$

从而 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\subseteq N$. 反之设 $X=\begin{bmatrix}x & y\\ x & y\end{bmatrix}\in N$，则

$$\mathscr{A}(X)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ x & y\end{bmatrix}=0.$$

因此 $X\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$，即 $N\subseteq\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 从而 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}=N$. 记

$$X_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix},\ X_4=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

设 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathscr{C}$，且 $\lambda_1X_3+\lambda_2X_4=0$，则

$$\lambda_1X_3+\lambda_2X_4=\begin{bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\\ \lambda_1 & \lambda_2\end{bmatrix}=0.$$

从而 $\lambda_1=\lambda_2=0$. 因此 X_3,X_4 是线性无关的. 又对任意 $X=\begin{bmatrix}x & y\\ x & y\end{bmatrix}\in N$，有

$$X=xX_3+yX_4.$$

即 N 中任意 X 都可由 X_3,X_4 线性表出，从而 X_3,X_4 是 $N=\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的一组基. 于是 $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=2$.

3.9.3 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射. 证明：$\mathscr{A}$ 的象空间 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 与核 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的维数和等于 V 的维数，即

$$\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}+\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=n. \qquad (1)$$

证 设 $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}=n-r$，则存在 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的一组基 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$. 显然，$\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 是 V 中一组线性无关的向量. 由于 V 是 n 维的，所以存在 V 的线性无关向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基. 记 $\mathscr{A}(\alpha_i)=\beta_i$，$i=1,2,\cdots,r$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是纯量，且 $a_1\beta_1+a_2\beta_2+\cdots+a_r\beta_r=0$，则 $a_1\mathscr{A}(\alpha_1)+a_2\mathscr{A}(\alpha_2)+\cdots+a_r\mathscr{A}(\alpha_r)=0$. 因为 $\mathscr{A}$ 是线性的，所以 $\mathscr{A}(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r)=0$，从而 $a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 由于 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的基，所以存在纯量 $a_{r+1},a_{r+2},\cdots,a_n$，使得

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r$$
$$=a_{r+1}\alpha_{r+1}+a_{r+2}\alpha_{r+2}+\cdots+a_n\alpha_n.$$

即

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r+(-a_{r+1})\alpha_{r+1}$$
$$+(-a_{r+2})\alpha_{r+2}+\cdots+(-a_n)\alpha_n=0.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基，所以是线性无关的，从而 $a_1=a_2=\cdots=a_r=-a_{r+1}=\cdots=-a_n=0$. 这表明，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 中一组线性无关的向量. 现在设 $\beta\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$，则存在 $\alpha\in V$，使得 $\beta=$

$\mathscr{A}(\alpha)$. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基，所以

$$\alpha = b_1\alpha_1 + b_2\alpha_2 + \cdots + b_r\alpha_r + b_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + b_n\alpha_n.$$

因为 $\mathscr{A}$ 是线性的，所以

$$\beta = \mathscr{A}(\alpha) = b_1\mathscr{A}(\alpha_1) + b_2\mathscr{A}(\alpha_2) + \cdots + b_r\mathscr{A}(\alpha_r) + b_{r+1}\mathscr{A}(\alpha_{r+1}) + \cdots + b_n\mathscr{A}(\alpha_n).$$

注意，当 $1 \leqslant i \leqslant r$ 时，$\beta_i = \mathscr{A}(\alpha_i)$，当 $r+1 \leqslant i \leqslant n$ 时，$\alpha_i \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$，所以 $\mathscr{A}(\alpha_i) = 0$. 因此

$$\beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_r\beta_r.$$

这表明，$\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 中每个向量 β 是 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 的线性组合. 又 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是线性无关的，所以 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的基. 从而 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = r$. 于是

$$\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = n.$$

注 尽管 3.9.3 证明了 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \dim V$，但并不一定有 $\operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{A} = V$. 其原因是，一般说来，$\operatorname{Im}\mathscr{A} \subseteq U$，而 V 并不一定是 U. 即便 $U = V$，即 $\mathscr{A}$ 是 V 到自身的线性变换，也不一定有 $\operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{A} = V$. 例如，在 3.9.1 中，对线性变换 $\mathscr{D}$，有 $\operatorname{Im}\mathscr{D} = R_{n-1}[x]$，$\operatorname{Ker}\mathscr{D} = \mathbf{R} \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{D}$. 因此

$$\operatorname{Im}\mathscr{D} + \operatorname{Ker}\mathscr{D} = R_{n-1}[x] \subsetneqq R_n[x].$$

3.9.4 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射，且 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = r$. 则存在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 U 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，使得

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

即 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 U 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 下的方阵为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

证 由 3.9.3 可知，$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = n - r$. 设 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的基. 由于 $\dim V = n$，故可将 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$ 扩充为 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 记 $\beta_i = \mathscr{A}(\alpha_i)$，$i = 1,2,\cdots,r$. 由 3.9.3 的证明可知，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 是 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的基. 由于 $\operatorname{Im}\mathscr{A} \subseteq U$，且 $\dim U = m$，所以可将 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 扩充为 U 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_m$. 注意，

$$\mathscr{A}(\alpha_i) = \beta_i, 1 \leqslant i \leqslant r,$$
$$\mathscr{A}(\alpha_i) = 0, r+1 \leqslant r \leqslant n.$$

于是即得式(2).

3.9.5 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的线性映射，且 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = r$. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 是 U 的基，且

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A, \quad (3)$$

即设 $m \times n$ 矩阵 A 是线性映射 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 与 U 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 下的矩阵表示. 证明：$\operatorname{rank}A = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

证 因为 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A} = r$，所以由 3.9.5 可知，存在 V 的基 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'$ 与 U 的基 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m'$，使得 $\mathscr{A}$ 在这对基下的矩阵表示为 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，即

$$\mathscr{A}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n') = (\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m')\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 到基 $\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n'$ 的过渡矩阵为 Q，即

$$(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n') = (\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q, \quad ②$$

且设 U 的基 $\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m'$ 到基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 的过渡矩阵为 P，即

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m) = (\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m')P. \quad ③$$

则由式 ② 得到

$$\mathscr{A}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n') = \mathscr{A}((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q).$$

因为 $\mathscr{A}$ 是线性的，所以由 ③

$$\mathscr{A}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n') = \mathscr{A}((\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)Q) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)AQ.$$

由式 ③，

$$\mathscr{A}(\alpha_1',\alpha_2',\cdots,\alpha_n') = (\beta_1',\beta_2',\cdots,\beta_m')PAQ.$$

于是得到

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由于 P 和 Q 是基的过渡矩阵，因此是可逆的，所以 A 和 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是相抵的. 于是有 $\operatorname{rank}A = r = \dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$.

注 1 仿 3.9.5 的证明可证，线性映射 $\mathscr{A}$ 在不同的两对基下的矩阵表示是相抵的.

注 2 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 取 n 维线性空间 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 和 m 维线性空间 U 的一组基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，由

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)A$$

便可确定 V 到 U 的线性映射 $\mathscr{A}$. 3.9.5 表明，矩阵 A 的秩即是线性映射 $\mathscr{A}$ 的象的维数. 由 3.9.3 可知，线性映射 $\mathscr{A}$ 的核的维数 $\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A} = \dim V - \operatorname{rank}A$. 这不但给出了 $m \times n$ 矩阵 A 的几何意义，即 $m \times n$ 矩阵 A 即是 n 维线性空间 V 到 m 维线性空间 U 的一个线性映射 $\mathscr{A}$，还给出了 $m \times n$ 矩阵 A 的秩的几何意义，即 $\operatorname{rank}A$ 即是 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}$，或者 $n - \dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 于是即可用线性映射 $\mathscr{A}$ 的象 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 和核 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 来处理有关矩阵 A 的秩的问题.

3.9.6 设 A 和 B 是 $m \times n$ 矩阵. 证明：

$$\operatorname{rank}(A + B) \leqslant \operatorname{rank}A + \operatorname{rank}B, \quad (4)$$

其中等式当且仅当存在 m 阶与 n 阶可逆方阵 P 与 Q、

使得

$$A = P\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q,$$

$$B = P\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix} Q$$

时成立，这里 $r = \operatorname{rank} A$，$s = \operatorname{rank} B$，且 $r + s \leqslant n$.

证 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的基，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m$ 是 m 维线性空间 U 的基. 令

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)A,$$

$$\mathscr{B}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)B,$$

则 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{B}$ 是 V 到 U 的线性映射. 由 3.9.5，$\operatorname{rank} A = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}$，$\operatorname{rank} B = \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}$，$\operatorname{rank}(A + B) = \dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B})$. 于是式(4) 等价于

$$\dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) \leqslant \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}. \quad ④$$

现在设 $\beta \in \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B})$，则存在 $\alpha \in V$，使得 $\beta = (\mathscr{A} + \mathscr{B})(\alpha) = \mathscr{A}(\alpha) + \mathscr{B}(\alpha) \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Im}\mathscr{B}$. 所以有

$$\operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) \subseteq \operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Im}\mathscr{B}.$$

于是

$$\dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) \leqslant \dim(\operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Im}\mathscr{B}).$$

其中等式当且仅当 $\operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Im}\mathscr{B}$ 时成立. 由维数定理(即对两个线性空间 V_1 与 V_2，有 $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$. 例如见李炯生、查建国编著《线性代数》，中国科技大学出版社，1989 年版) 得到

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) &\leqslant \dim(\operatorname{Im}\mathscr{A} + \operatorname{Im}\mathscr{B}) \\ &\leqslant \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}, \end{aligned}$$

其中等式当且仅当 $\operatorname{Im}\mathscr{A} \cap \operatorname{Im}\mathscr{B} = 0$ 时成立. 这就证明了式④，即式(4) 成立.

从上面的证明可知，式(4) 等式成立的充要条件是

$$\operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \operatorname{Im}\mathscr{A} \oplus \operatorname{Im}\mathscr{B}. \quad ⑤$$

下面证明，式⑤等价于

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B} = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}), \quad ⑥$$

$$\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B} = V \quad ⑦$$

同时成立.

事实上由 3.9.3，有

$$\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} = n - \dim \operatorname{Im}\mathscr{A}, \quad ⑧$$

$$\dim \operatorname{Ker}\mathscr{B} = n - \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}, \quad ⑨$$

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = n - \dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}). \quad ⑩$$

现在设式⑤成立，则

$$\dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}.$$

因此

$$\begin{aligned} \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) &= n - \dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) \\ &= n - (\dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}). \end{aligned}$$

由式⑧和⑨，有

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Ker}\mathscr{B} - n.$$

由维数定理，有

$$\begin{aligned} &\dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) \\ &= \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) + \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B}) - n. \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} &\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \\ &= n + \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) - \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B}). \end{aligned}$$

容易证明，$\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B} \subseteq \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B})$，从而 $\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B})$. 又 $\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B} \subseteq V$. 因此有 $\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \leqslant n$. 于是，

$$\begin{aligned} n &\geqslant \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \\ &= n + \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) - \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \\ &\geqslant n. \end{aligned}$$

从而 $\dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B})$，$\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) = n$. 因此式⑥和⑦成立.

反之设式⑥和⑦成立，则由式⑦和维数定理有

$$\begin{aligned} n &= \dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A} + \operatorname{Ker}\mathscr{B}) \\ &= \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Ker}\mathscr{B} - \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} \cap \operatorname{Ker}\mathscr{B}. \end{aligned}$$

由式⑥有

$$n = \dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Ker}\mathscr{B} - \dim \operatorname{Ker}(\mathscr{A} + \mathscr{B}).$$

由式⑧和⑨有

$$\begin{aligned} n = {} & n - \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + n - \dim \operatorname{Im}\mathscr{B} \\ & - (n - \dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B})). \end{aligned}$$

所以

$$\dim \operatorname{Im}(\mathscr{A} + \mathscr{B}) = \dim \operatorname{Im}\mathscr{A} + \dim \operatorname{Im}\mathscr{B}.$$

从而式⑤成立.

现在由于 $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{B} = n - \dim \operatorname{Im}\mathscr{B} = n - \operatorname{rank}\mathscr{B} = n - s$，所以 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 含有基 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_{n-s}'$，将它扩充为 V 的基 $\alpha_1', \alpha_2', \cdots, \alpha_{n-s}', \alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n'$. 则由 3.9.3 的证明可知，$\mathscr{B}(\alpha_{n-s+1}'), \cdots, \mathscr{B}(\alpha_n')$ 是 $\operatorname{Im}\mathscr{B}$ 的基，依次记为 $\beta_{m-s+1}', \cdots, \beta_m'$. 由式⑦，$\alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n' \in \operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 由于 $\dim \operatorname{Ker}\mathscr{A} = n - r$，所以可将 $\alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n'$ 扩充为 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}$ 的基 $\gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{n-s}, \alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n'$. 再扩充为 V 的基 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_r, \gamma_{r+1}, \cdots, \gamma_{n-s}, \alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n'$. 由 3.9.3 的证明可知，$\mathscr{A}(\gamma_1), \mathscr{A}(\gamma_2), \cdots, \mathscr{A}(\gamma_r)$ 是 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 的基，依次记为 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_r'$. 由于 $\operatorname{Im}\mathscr{A} \cap \operatorname{Im}\mathscr{B} = 0$，所以 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_r', \beta_{m-s+1}', \beta_m'$ 是 U 中一组线性无关的向量，将其扩充为 U 的基 $\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_r', \beta_{r+1}', \beta_{m-s}', \beta_{m-s+1}', \cdots, \beta_m'$. 则

$$\begin{aligned} &\mathscr{A}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-s}, \alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n') \\ &= (\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_m')\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ &\mathscr{B}(\gamma_1, \cdots, \gamma_{n-s}, \alpha_{n-s+1}', \cdots, \alpha_n') \\ &= (\beta_1', \beta_2', \cdots, \beta_m')\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

设

$$(\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-s},\alpha_{n-s+1}{}',\cdots,\alpha_n{}') = (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Q,$$

$$(\beta_1,\cdots,\beta_m) = (\beta_1{}',\beta_2{}',\cdots,\beta_m{}')P,$$

则 Q 和 P 分别是 n 阶和 m 阶可逆方阵. 于是

$$\begin{aligned}&\mathscr{A}(\gamma_1,\cdots,\gamma_{n-s},\alpha_{n-s+1}{}',\cdots,\alpha_n{}')\\&= \mathscr{A}(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Q = (\beta_1,\cdots,\beta_m)AQ\\&= (\beta_1{}',\cdots,\beta_m{}')PAQ.\end{aligned}$$

从而

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

同理

$$PBQ = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_t \end{bmatrix}.$$

3.9.7 设 A 和 B 分别是 $m\times n$ 和 $n\times p$ 矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank}AB \leqslant \min\{\operatorname{rank}A,\operatorname{rank}B\}. \quad (5)$$

证 设 V,U 与 W 分别是 p 维、n 维与 m 维线性空间, 且设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$, $\{\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n\}$ 与 $\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m\}$ 分别是 V,U 与 W 的基. 令

$$\mathscr{A}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n) = (\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)A,$$

$$\mathscr{B}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) = (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B,$$

则 $\mathscr{A}$ 是 U 到 W 的线性映射, $\mathscr{B}$ 是 V 到 U 的线性映射. 由于

$$\begin{aligned}\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p) &= \mathscr{A}((\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)B)\\&= (\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m)AB,\end{aligned}$$

所以由 V 到 W 的线性映射 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 在 V 的基 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p\}$ 与 W 的基 $\{\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_m\}$ 下的矩阵为 AB.

注意, 线性映射 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的象 $\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 与线性映射 $\mathscr{A}$ 的象 $\operatorname{Im}\mathscr{A}$ 都是 W 的子空间. 对于任意 $\gamma\in\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}$, 由映射的象的定义, 一定有 $\alpha\in V$, 使得 $\gamma=\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha)$. 而 $\gamma=\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))$. 由于 $\mathscr{B}$ 是 V 到 U 的线性映射, 所以 $\mathscr{B}(\alpha)\in U$, 因此 $\gamma=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))\in\operatorname{Im}\mathscr{A}$. 从而有

$$\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\subseteq\operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

于是

$$\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\leqslant\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}.$$

由 3.9.5 有

$$\operatorname{rank}AB\leqslant\operatorname{rank}A. \quad ⑪$$

另一方面, 由于 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是 V 到 W 的线性映射, $\mathscr{B}$ 是 V 到 U 的线性映射, 因此 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 与 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 是 V 的子空间. 对于任意 $\alpha\in\operatorname{Ker}\mathscr{B}$, 由核的定义, 有 $\mathscr{B}(\alpha)=0$. 而 $\mathscr{A}$ 是线性映射, 所以 $\mathscr{A}(0)=0$. 于是 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))=\mathscr{A}(0)=0$. 因此 $\alpha\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$. 从而有

$$\operatorname{Ker}\mathscr{B}\subseteq\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}.$$

由此得到

$$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{B}\leqslant\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}.$$

由 3.9.3 有

$$p-\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}\leqslant p-\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B},$$

即

$$\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\leqslant\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}.$$

由 3.9.5 有

$$\operatorname{rank}AB\leqslant\operatorname{rank}B. \quad ⑫$$

由式 ⑪ 和 ⑫ 即得式(5).

3.9.8 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 U 到 m 维线性空间 W 的线性映射, $\mathscr{B}$ 是 p 维线性空间 V 到 n 维线性空间 U 的线性映射. 证明

$$\dim(\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap\operatorname{Im}\mathscr{B}) = \dim\operatorname{Im}\mathscr{B}-\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}. \quad (6)$$

证 由于 $\mathscr{B}$ 是 V 到 U 的线性映射, $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是 V 到 W 的线性映射, 所以 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 与 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是 V 的子空间. 对于任意 $\alpha\in\operatorname{Ker}\mathscr{B}$, 有 $\mathscr{B}(\alpha)=0$. 由于 $\mathscr{A}$ 是线性的, 所以 $\mathscr{A}(0)=0$. 因此 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha)=\mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha))=\mathscr{A}(0)=0$. 从而 $\alpha\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$. 于是 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}\subseteq\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$. 因而,

$$\dim\operatorname{Ker}\mathscr{B}\leqslant\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}.$$

记 $s=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{B}$, $t=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$, 则 $s\leqslant t$, 且存在 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$. 由于 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}\subseteq\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$, 且 $t=\dim\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$, 所以可将 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 中线性无关的向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 扩充为 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_t$. 而 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}\subseteq V$, 因此可将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_t$ 扩充为 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_t,\alpha_{t+1},\cdots,\alpha_p$.

记 $\mathscr{B}(\alpha_i)=\beta_i$, $i=s+1,\cdots,t$. 显然 $\beta_i\in\operatorname{Im}\mathscr{B}$. 又因 $\alpha_i\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$, $i=s+1,\cdots,t$, 所以 $\mathscr{A}(\beta_i)=\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha_i)=0$. 从而 $\beta_i\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}$. 即 $\beta_i\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap\operatorname{Im}\mathscr{B}$, $i=s+1,\cdots,t$. 由 3.9.3, $\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}=p-s$, $\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}=p-t$, 所以 $\dim\operatorname{Im}\mathscr{B}-\dim\operatorname{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}=t-s$. 于是为证式 ⑥, 只须证明, $\beta_{s+1},\cdots,\beta_t$ 是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap\operatorname{Im}\mathscr{B}$ 的基.

首先设 $\lambda_{s+1},\lambda_{s+2},\cdots,\lambda_t$ 是满足 $\lambda_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+\lambda_t\beta_t=0$ 的纯量, 则

$$\begin{aligned}&\lambda_{s+1}\beta_{s+1}+\cdots+\lambda_t\beta_t\\&=\lambda_{s+1}\mathscr{B}(\alpha_{s+1})+\cdots+\lambda_t\mathscr{B}(\alpha_t)\\&=\mathscr{B}(\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+\lambda_t\alpha_t)=0.\end{aligned}$$

因此 $\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+\lambda_t\alpha_t\in\operatorname{Ker}\mathscr{B}$. 由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是 $\operatorname{Ker}\mathscr{B}$ 的基, 所以

$$\lambda_{s+1}\alpha_{s+1}+\cdots+\lambda_t\alpha_t=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是纯量. 因此

$$\begin{aligned}&\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_s\alpha_s+(-\lambda_{s+1})\alpha_{s+1}+\cdots\\&\quad+(-\lambda_t)\alpha_t=0.\end{aligned}$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\alpha_{s+1},\cdots,\alpha_t$ 是 $\operatorname{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的基, 从而是线性无关的, 因此 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_s=-\lambda_{s+1}=\cdots=-\lambda_t=0$, 即 $\lambda_{s+1}=\cdots=\lambda_t=0$. 这就证明, $\beta_{s+1},\cdots,\beta_t$ 是线性无关的.

其次设 $\beta\in\operatorname{Ker}\mathscr{A}\cap\operatorname{Im}\mathscr{B}$, 则 $\mathscr{A}(\beta)=0$, 且存在 α

$\in V$, 使得 $\beta = \mathscr{B}(\alpha)$. 所以 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = 0$, 即 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$. 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \cdots, \alpha_t$ 是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}\mathscr{B}$ 的基, 所以

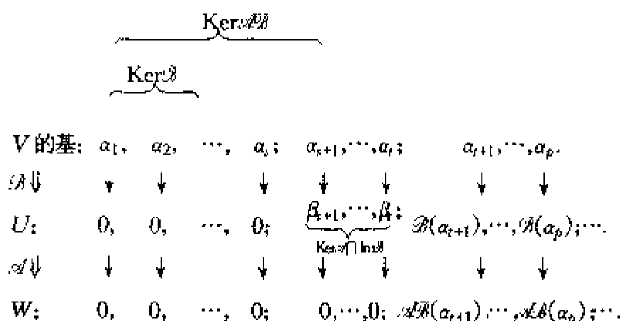
$$\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_s\alpha_s + a_{s+1}\alpha_{s+1} + \cdots + a_t\alpha_t,$$

其中 $a_1, \cdots, a_s, a_{s+1}, \cdots, a_t$ 是纯量. 由于 $\mathscr{B}$ 是线性的, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s \in \mathrm{Ker}\mathscr{B}$, 所以,

$$\begin{aligned}\beta = \mathscr{B}(\alpha) &= a_1\mathscr{B}(\alpha_1) + \cdots + a_s\mathscr{B}(\alpha_s) \\ &\quad + a_{s+1}\mathscr{B}(\alpha_{s+1}) + \cdots + a_t\mathscr{B}(\alpha_t) \\ &= a_{s+1}\beta_{s+1} + \cdots + a_t\beta_t.\end{aligned}$$

因此, $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}$ 中每个向量均可由 $\beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \cdots, \beta_t$ 线性表出. 从而 $\beta_{s+1}, \beta_{s+2}, \cdots, \beta_t$ 是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}$ 的基.

注 3.9.8是一个很有用的结论. 其证明有很强的几何背景. 其证明关键可从下面的示意图表看出:



3.9.8证明示意图

3.9.9 (Sylvester秩不等式) 设 A 和 B 分别是 $m \times n$ 和 $n \times p$ 矩阵. 证明:

$$\mathrm{rank}A + \mathrm{rank}B - n \leqslant \mathrm{rank}AB. \tag{7}$$

证 式(7)等价于

$$\mathrm{rank}B - \mathrm{rank}AB \leqslant n - \mathrm{rank}A. \quad ⑬$$

将 $m \times n$ 矩阵 A 与 $n \times p$ 矩阵 B 分别视为 n 维线性空间 U 到 m 维线性空间 W 与 p 维线性空间 V 到 n 维线性空间 U 的线性映射 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$, 即

$$\mathscr{A}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m)A,$$

$$\mathscr{B}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n)B,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_p; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 与 $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ 分别是 V, U 与 W 的基. 于是由 3.9.3 与 3.9.5, 有

$$n - \mathrm{rank}\mathscr{A} = \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}.$$

由 3.9.8 与 3.9.5, 有

$$\begin{aligned}\mathrm{rank}B - \mathrm{rank}AB &= \dim \mathrm{Im}\mathscr{B} - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B} \\ &= \dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}).\end{aligned}$$

于是式 ⑬ 等价于

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}) \leqslant \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}. \quad ⑭$$

显然有 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B} \subseteq \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 因此式 ⑭ 成立. 从而式(7)成立.

注 从3.9.9的证明可知, 式(7)中等式成立等价于式 ⑭ 中等式成立, 也即 $\mathrm{Im}\mathscr{B} \cap \mathrm{Ker}\mathscr{A} = \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 由此可以给出式(7)中等式成立的充要条件. 限于篇幅, 这里从略.

3.9.10 (Frobenius秩不等式) 设 A, B 与 C 分别是 $m \times n, n \times p$ 与 $p \times q$ 矩阵. 证明:

$$\mathrm{rank}AB + \mathrm{rank}BC - \mathrm{rank}B \leqslant \mathrm{rank}ABC. \tag{8}$$

证 式(8)等价于

$$\mathrm{rank}BC - \mathrm{rank}ABC \leqslant \mathrm{rank}B - \mathrm{rank}AB. \quad ⑮$$

设 V, U, W 与 T 分别是 q 维, p 维, n 维与 m 维线性空间. 将矩阵 A, B 和 C 分别视为 W 到 T, U 到 W 和 V 到 U 的线性映射 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 与 $\mathscr{C}$, 即

$$\mathscr{A}(\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n) = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m)A,$$

$$\mathscr{B}(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p) = (\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n)B,$$

$$\mathscr{C}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q) = (\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p)C,$$

其中 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_q; \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_p; \gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_n$ 与 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_m$ 分别是 V, U, W 与 T 的基. 由 3.9.5 有

$$\mathrm{rank}BC = \dim \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C},$$

$$\mathrm{rank}ABC = \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C},$$

$$\mathrm{rank}B = \dim \mathrm{Im}\mathscr{B},$$

$$\mathrm{rank}AB = \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}.$$

于是式 ⑮ 等价于

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C} - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C} \leqslant \dim \mathrm{Im}\mathscr{B} - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}. \quad ⑯$$

由 3.9.8 有

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C} - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B}\mathscr{C} = \dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C}),$$

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{B} - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\mathscr{B} = \dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}).$$

于是式 ⑯ 等价于

$$\dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C}) \leqslant \dim(\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}). \quad ⑰$$

易知 $\mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C} \subseteq \mathrm{Im}\mathscr{B}$, 从而 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C} \subseteq \mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}$. 即 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}\mathscr{C}$ 是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \cap \mathrm{Im}\mathscr{B}$ 的子空间, 故式 ⑰ 成立, 从而式(8)成立.

3.9.11 设 A 是 n 阶方阵. 证明: 存在正整数 k, 使得

$$\mathrm{rank}A^k = \mathrm{rank}A^{k+1} = \mathrm{rank}A^{k+2} = \cdots \tag{9}$$

证 将 n 阶方阵 A 视为 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$, 使得 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 下的方阵表示为 A, 即令线性变换 $\mathscr{A}$ 为

$$\mathscr{A}(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)A.$$

将方阵 A 的秩 $\mathrm{rank}A$ 视为线性变换 $\mathscr{A}$ 的象 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的维数 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}$(据 3.9.5). 考虑 V 上线性变换序列: $\mathscr{A}, \mathscr{A}^2, \mathscr{A}^3, \cdots, \mathscr{A}^m, \cdots$. 于是得到线性变换的象空间序列: $\mathrm{Im}\mathscr{A}, \mathrm{Im}\mathscr{A}^2, \cdots, \mathrm{Im}\mathscr{A}^m, \cdots$. 对于象空间 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^m$ 与 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{m+1}$, 设 $\beta \in \mathrm{Im}\mathscr{A}^{m+1}$, 则存在 $\alpha \in V$, 使得 $\beta = \mathscr{A}^{m+1}(\alpha) = \mathscr{A}^m(\mathscr{A}(\alpha))$. 由于 $\mathscr{A}$ 是 V 上线性变换, 所

以 $\mathscr{A}(\alpha)\in V$，从而 $\mathscr{A}^m(\mathscr{A}(\alpha))\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^m$，因此有 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{m+1}\subseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^m$. 令 $m=1,2,\cdots$，即得到象空间序列的一条降链：

$$\mathrm{Im}\mathscr{A}\supseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^2\supseteq\cdots\supseteq\mathrm{Im}\mathscr{A}^m\supseteq\cdots.$$

于是有

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}\geqslant \dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^2\geqslant\cdots\geqslant\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^m\geqslant\cdots.$$

由于 $V\supseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^m\supseteq 0$，所以 $n\geqslant \dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^m\geqslant 0$. 于是序列 $\{\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^m\mid m=1,2,\cdots\}$ 是一个有界的非增非负整数序列. 所以存在正整数 k 使得 $\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$. 由于 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}\subseteq\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$，即 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$ 是 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 的子空间，且 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 与 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$ 的维数相等，所以有

$$\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}.$$

现在证明，$\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}$. 首先如前已指出，$\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}\subseteq\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$. 其次设 $\alpha\in\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$，则存在 $\beta\in V$，使得 $\alpha=\mathscr{A}^{k+1}(\beta)=\mathscr{A}(\mathscr{A}^k(\beta))$. 由于 $\mathscr{A}^k(\beta)\in\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$，而 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}$，所以存在 $\gamma\in V$，使得 $\mathscr{A}^k(\beta)=\mathscr{A}^{k+1}(\gamma)$. 因此 $\alpha=\mathscr{A}(\mathscr{A}^k(\beta))=\mathscr{A}(\mathscr{A}^{k+1}(\gamma))=\mathscr{A}^{k+2}(\gamma)$，即 $\alpha\in\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}(\gamma)$. 从而 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}\subseteq\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}$. 于是有 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}$.

重复上述证明即得

$$\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+3}=\cdots.$$

于是有

$$\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+1}=\dim\mathrm{Im}\mathscr{A}^{k+2}=\cdots.$$

由 3.9.5，有

$$\mathrm{rank}A^k=\mathrm{rank}A^{k+1}=\mathrm{rank}A^{k+2}=\cdots.$$

注 由3.9.5与3.9.3，$\dim\mathrm{Ker}\mathscr{A}=n-\mathrm{rank}A$，所以也可以通过考虑线性变换序列 $\mathscr{A},\mathscr{A}^2,\cdots,\mathscr{A}^m,\cdots$ 所确定的核序列 $\mathrm{Ker}\mathscr{A},\mathrm{Ker}\mathscr{A}^2,\cdots,\mathrm{Ker}\mathscr{A}^m,\cdots$ 来证明3.9.11.

3.9.12 设 A 是 n 阶方阵. 证明：

$$\mathrm{rank}(I_n+A)+\mathrm{rank}(I_n-A)\geqslant n,\qquad(10)$$

其中等式当且仅当 A 是对合方阵，即 $A^2=I_n$ 时成立.

证 将 n 阶方阵 A 视为 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$，即令

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A,$$

其中 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的一组基. 将 n 阶单位方阵 I_n 视为 n 维线性空间 V 上的恒同变换 $\mathscr{I}$，即

$$\mathscr{I}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)I_n.$$

由 3.9.5，可将 $\mathrm{rank}(I_n+A)$ 与 $\mathrm{rank}(I_n-A)$ 分别视为线性变换 $\mathscr{I}+\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{I}-\mathscr{A}$ 的象 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})$ 与 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$ 的维数 $\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})$ 与 $\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$. 于是由子空间的维数定理有

$$\begin{aligned}&\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})\\&=\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A}))\\&\quad+\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})).\qquad⑱\end{aligned}$$

易见 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})\subseteq V$. 对于任意 $\alpha\in V$，有

$$\alpha=(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)+(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha).$$

由于 $(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})$，$(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$，所以 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$. 由 α 的任意性，有 $V\subseteq\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$. 于是 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=V$. 从而

$$\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A}))=\dim V=n.$$

由式⑱得到

$$\begin{aligned}&\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})\\&=n+\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})).\end{aligned}$$

而 $\dim(\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A}))\geqslant 0$，所以

$$\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})+\dim\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})\geqslant n.\qquad⑲$$

其中当且仅当 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=0$ 时等式成立. 由 3.9.5，式⑲即为式(10).

现在设 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=0$，则对任意 $\alpha\in V$，$(\mathscr{I}-\mathscr{A}^2)(\alpha)=(\mathscr{I}+\mathscr{A})((\mathscr{I}-\mathscr{A})(\alpha))=(\mathscr{I}-\mathscr{A})((\mathscr{I}+\mathscr{A})(\alpha))\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=0$，所以 $\mathscr{I}-\mathscr{A}^2=0$. 反之设 $\mathscr{I}-\mathscr{A}^2=0$. 且 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$. 由于 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})$，所以存在 $\beta\in V$，使得 $\alpha=(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\beta)$. 因此 $(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\alpha)=(\mathscr{I}-\mathscr{A}^2)(\beta)=0$. 又由于 $\alpha\in\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})$，所以存在 $\gamma\in V$，使得 $\alpha=(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\gamma)$. 于是 $(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\alpha)=(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\gamma)=(\mathscr{I}-\mathscr{A}^2)(\gamma)=0$. 而

$$\alpha=\frac{1}{2}\{(\mathscr{I}-\mathscr{A})(\alpha)+(\mathscr{I}+\mathscr{A})(\alpha)\},$$

所以 $\alpha=0$. 从而 $\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=0$. 这就证明，$\mathrm{Im}(\mathscr{I}+\mathscr{A})\cap\mathrm{Im}(\mathscr{I}-\mathscr{A})=0$ 等价于 $\mathscr{I}-\mathscr{A}^2=0$. 而

$$\begin{aligned}&(\mathscr{I}-\mathscr{A}^2)(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)(I_n-A^2).\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{I}-\mathscr{A}^2=0$ 等价于 $I_n-A^2=0$，即 A 是对合方阵.

3.9.13 设 $p(\lambda)=a_k\lambda^k+a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1\lambda+a_0$ 和 $q(\lambda)=b_l\lambda^l+b_{l-1}\lambda^{l-1}+\cdots+b_1\lambda+b_0$ 分别是关于 λ 的 k 次和 l 次多项式，其中 $a_k\neq 0$，$b_l\neq 0$，而且 $p(\lambda)$ 和 $q(\lambda)$ 是互素的. 设 A 是 n 阶方阵. 记

$$p(A)=a_kA^k+a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1A+a_0I_n,$$
$$q(A)=b_lA^l+b_{l-1}A^{l-1}+\cdots+b_1A+b_0I_n.$$

证明：

$$\mathrm{rank}\,p(A)+\mathrm{rank}\,q(A)\geqslant n,\qquad(11)$$

其中当且仅当 $p(A)q(A)=0$ 时等式成立.

证 视 n 阶方阵 A 为 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$，即线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的一组基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的

方阵为 A,也即

$$\mathscr{A}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A.$$

于是

$$\mathscr{A}^2(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^2.$$

对非负整数 m,

$$\mathscr{A}^m(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A^m.$$

从而

$$p(\mathscr{A})(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)p(A),$$
$$q(\mathscr{A})(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)q(A),$$

即方阵 A 的多项式 $p(A)$ 与 $q(A)$ 分别是线性变换 $\mathscr{A}$ 的多项式 $p(\mathscr{A})$ 与 $q(\mathscr{A})$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下方阵表示. 由 3.9.5 可知,式(11) 等价于

$$\dim \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\dim \mathrm{Im}q(\mathscr{A})\geqslant n. \qquad ⑳$$

由子空间的维数定理,有

$$\begin{aligned}&\dim \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\dim \mathrm{Im}q(\mathscr{A})\\&=\dim(\mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A}))\\&\quad+\dim(\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})).\end{aligned} \qquad ㉑$$

易见 $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A})\subseteq V$. 下面证明

$$\mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A})=V. \qquad ㉒$$

为此只须证明, $V\subseteq \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A})$. 由题设,多项式 $p(\lambda)$ 与 $q(\lambda)$ 是互素的,即 $p(\lambda)$ 与 $q(\lambda)$ 的最大公因子是 1. 于是存在多项式 $u(\lambda)$ 与 $v(\lambda)$,使得

$$u(\lambda)p(\lambda)+v(\lambda)q(\lambda)=1.$$

将线性变换 $\mathscr{A}$ 代入上式,得到

$$\mathscr{I}=p(\mathscr{A})u(\mathscr{A})+q(\mathscr{A})v(\mathscr{A}),$$

其中用到了同一个线性变换 $\mathscr{A}$ 的两个多项式是可交换的,而 $\mathscr{I}$ 是 V 上的恒同变换. 现在对任意 $\alpha\in V$,有

$$\begin{aligned}\alpha=\mathscr{I}(\alpha)&=(p(\mathscr{A})u(\mathscr{A})+q(\mathscr{A})v(\mathscr{A}))(\alpha)\\&=p(\mathscr{A})(u(\mathscr{A})(\alpha))+q(\mathscr{A})(v(\mathscr{A})(\alpha)).\end{aligned}$$

其中 $p(\mathscr{A})(u(\mathscr{A})(\alpha))\in \mathrm{Im}p(\mathscr{A})$, $q(\mathscr{A})(v(\mathscr{A})(\alpha))\in \mathrm{Im}q(\mathscr{A})$. 因此 $\alpha\in \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A})$. 由 α 的任意性,有 $V\subseteq \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\mathrm{Im}q(\mathscr{A})$. 这就证明了式 ㉒. 由式 ㉒ 有

$$\begin{aligned}&\dim \mathrm{Im}p(\mathscr{A})+\dim \mathrm{Im}q(\mathscr{A})\\&=\dim V+\dim(\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A}))\\&=n+\dim(\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A}))\\&\geqslant n,\end{aligned}$$

其中等式当且仅当 $\dim(\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A}))=0$,即 $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$ 时成立. 这就证明了式 ⑳,也即式(11) 成立.

现在给出使式 ⑳ 取等式的充要条件 $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$ 的矩阵形式. 设 $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$,则对于任意 $\alpha\in V$, $p(\mathscr{A})(q(\mathscr{A})(\alpha))=q(\mathscr{A})(p(\mathscr{A})(\alpha))\in \mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$. 因此 $p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})$ 是 V 上的零变换. 反之设 $p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})$ 是 V 上的零变换. 对任意 $\alpha\in \mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})$,因 $\alpha\in \mathrm{Im}p(\mathscr{A})$,故存在 $\beta\in V$,使得 $\alpha=p(\mathscr{A})(\beta)$,所以, $q(\mathscr{A})(\alpha)=p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})(\beta)=0$. 又 $\alpha\in \mathrm{Im}q(\mathscr{A})$,所以存在 $\gamma\in V$,使得 $\alpha=q(\mathscr{A})(\gamma)$,从而 $p(\mathscr{A})(\alpha)=p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})(\gamma)=0$. 因而

$$\begin{aligned}\alpha&=\mathscr{I}(\alpha)\\&=u(\mathscr{A})(p(\mathscr{A})(\alpha))+v(\mathscr{A})(q(\mathscr{A})(\alpha))=0.\end{aligned}$$

于是 $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$. 这就证明, $\mathrm{Im}p(\mathscr{A})\cap \mathrm{Im}q(\mathscr{A})=0$ 等价于 $p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})$ 是 V 上的零变换. 而

$$\begin{aligned}&p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\\&=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)p(A)q(A),\end{aligned}$$

即 $p(\mathscr{A})q(\mathscr{A})$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的方阵为 $p(A)q(A)$. 易知零变换在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的方阵是零方阵. 这就证明,式(11) 中等式成立的充要条件为 $p(A)q(A)=0$.

3.9.14 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换. 证明:对正整数 k,

$$V=\mathrm{Im}\mathscr{A}^k\oplus \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$$

的充要条件为

$$\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}.$$

证 必要性. 设 $V=\mathrm{Im}\mathscr{A}^k\oplus \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 显然有 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}\subseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$. 现在设 $\alpha\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$,则存在 $\beta\in V$,使得 $\alpha=\mathscr{A}^k(\beta)$. 由于 V 是 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 与 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$ 的直和,而 $\beta\in V$,所以存在 $\xi\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 与 $\eta\in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,使得 $\beta=\xi+\eta$. 因为 $\xi\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$,故存在 $\zeta\in V$,使得 $\xi=\mathscr{A}^k(\zeta)$. 于是 $\beta=\mathscr{A}^k(\zeta)+\eta$. 因此 $\alpha=\mathscr{A}^k(\mathscr{A}^k(\zeta)+\eta)=\mathscr{A}^{2k}(\zeta)+\mathscr{A}^k(\eta)$. 由于 $\eta\in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,所以 $\mathscr{A}^k(\eta)=0$. 从而 $\alpha=\mathscr{A}^{2k}(\zeta)\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$. 由 α 的任意性,故有 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k\subseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$. 这就证明, $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$.

充分性. 设 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$,则 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$. 由 3.9.3, $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k=n-\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$, $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k}=n-\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$,所以 $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k=\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k}$. 注意,若 $\alpha\in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,则 $\mathscr{A}^k(\alpha)=0$,从而 $\mathscr{A}^{2k}(\alpha)=\mathscr{A}^k(\mathscr{A}^k(\alpha))=\mathscr{A}^k(0)=0$,因此 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k\subseteq \mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k}$. 于是得到, $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k=\mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k}$.

现在证明, $V=\mathrm{Im}\mathscr{A}^k+\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 首先由于 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 与 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$ 是 V 的子空间,所以 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k+\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k\subseteq V$. 其次设 $\alpha\in V$,则 $\mathscr{A}^k(\alpha)\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$. 由于 $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k=\mathrm{Im}\mathscr{A}^{2k}$,所以存在 $\beta\in V$,使得 $\mathscr{A}^k(\alpha)=\mathscr{A}^{2k}(\beta)$. 因此

$$\mathscr{A}^k(\alpha)-\mathscr{A}^{2k}(\beta)=\mathscr{A}^k(\alpha-\mathscr{A}^k(\beta))=0.$$

从而 $\alpha-\mathscr{A}^k(\beta)\in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 于是 $\alpha=\mathscr{A}^k(\beta)+(\alpha-\mathscr{A}^k(\beta))$,其中 $\mathscr{A}^k(\beta)\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k$, $\alpha-\mathscr{A}^k(\beta)\in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 所以 $\alpha\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k+\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 由 α 的任意性可知, $V\subseteq \mathrm{Im}\mathscr{A}^k+\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$. 这就证明, $V=\mathrm{Im}\mathscr{A}^k+\mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$.

最后证明, $V=\mathrm{Im}\mathscr{A}^k\oplus \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,为此只须证明, $\mathrm{Im}\mathscr{A}^k\cap \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k=0$. 设 $\alpha\in \mathrm{Im}\mathscr{A}^k\cap \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,则由 $\alpha\in$

$\mathrm{Im}\mathscr{A}^k$ 可知,存在 $\beta \in V$,使得 $\alpha = \mathscr{A}^k(\beta)$. 又 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$,所以 $\mathscr{A}^k(\alpha) = 0$. 因此 $\mathscr{A}^k(\mathscr{A}^k(\beta)) = \mathscr{A}^{2k}(\beta) = 0$. 于是 $\beta \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k}$. 由于 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}^{2k} = \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k$, 所以 $\mathscr{A}^k(\beta) = 0$. 而 $\alpha = \mathscr{A}^k(\beta)$,故 $\alpha = 0$. 这就证明,$\mathrm{Im}\mathscr{A}^k \cap \mathrm{Ker}\mathscr{A}^k = 0$.

3.9.15 证明:对于 n 维线性空间 V 上的线性变换 $\mathscr{A}$,恒存在 V 上的线性变换 $\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是零变换,而且

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{A} + \dim \mathrm{Im}\mathscr{B} = n. \qquad (12)$$

证 由 3.9.3 可知,$\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A} = n - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}$. 因此,如果 3.9.15 成立,则应有 $\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A} = \dim \mathrm{Im}\mathscr{B}$. 所以为证明 3.9.15,应从 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 入手.

由于 $\mathscr{A}$ 的核 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 是 V 的子空间,所以存在 V 的子空间 U,使得

$$V = U \oplus \mathrm{Ker}\mathscr{A}.$$

于是对于任意 $\alpha \in V$,必有唯一一对向量 $\beta,\gamma,\beta \in V,\gamma \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$,使得 $\alpha = \beta + \gamma$. 现在定义 V 上的变换 $\mathscr{B}$ 如下:对于 $\alpha = \beta + \gamma \in V$,令 $\mathscr{B}(\alpha) = \gamma$,易证变换 $\mathscr{B}$ 是线性的. 对任意 $\alpha = \beta + \gamma \in V$,由于 $\mathscr{B}(\alpha) = \gamma \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$,所以 $\mathscr{A}\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\alpha)) = \mathscr{A}(\gamma) = 0$. 因此,$\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是 V 上的零变换. 其次证明,$\mathrm{Im}\mathscr{B} = \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 设 $\alpha \in \mathrm{Im}\mathscr{B}$,则存在 $\beta \in V$,使得 $\alpha = \mathscr{B}(\beta)$. 由于 $\mathscr{A}\mathscr{B}$ 是 V 上的零变换,所以 $\mathscr{A}(\alpha) = \mathscr{A}(\mathscr{B}(\beta)) = \mathscr{A}\mathscr{B}(\beta) = 0$,因此 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 从而 $\mathrm{Im}\mathscr{B} \subseteq \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 反之设 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$,则 $\alpha = 0 + \alpha \in U \oplus \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 因此由变换 $\mathscr{B}$ 的定义,$\mathscr{B}(\alpha) = \alpha$,即 $\alpha \in \mathrm{Im}\mathscr{B}$. 所以 $\mathrm{Ker}\mathscr{A} \subseteq \mathrm{Im}\mathscr{B}$. 这就证明,$\mathrm{Im}\mathscr{B} = \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 从而 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{B} = \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}$. 由 3.9.3, 有 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{B} = n - \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}$. 即式(12)成立.

3.9.16 证明:对 n 维线性空间 V 上任意一个线性变换 $\mathscr{A}$,总存在 V 上可逆线性变换 $\mathscr{B}$,使得 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 是幂等变换,即 $(\mathscr{B}\mathscr{A})^2 = \mathscr{B}\mathscr{A}$.

证 设 $\dim \mathrm{Im}\mathscr{A} = r$,则由 3.9.3 可知,$\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A} = n - r$. 设 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 是 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}$ 的基. 将 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$ 扩充成 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n$. 由 3.9.3 的证明可知,$\mathscr{A}(\alpha_1),\mathscr{A}(\alpha_2),\cdots,\mathscr{A}(\alpha_r)$ 是 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的基. 记 $\beta_i = \mathscr{A}(\alpha_i), i = 1,2,\cdots,r$. 将 $\mathrm{Im}\mathscr{A}$ 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 扩充为 V 的基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$. 对任意 $\alpha \in V$,α 在基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r,\beta_{r+1},\cdots,\beta_n$ 下的坐标记作 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,即 $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r + a_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + a_n\beta_n$. 定义 V 上的变换 $\mathscr{B}$ 如下:设 $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r + a_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + a_n\beta_n \in V$,令 $\mathscr{B}(\alpha) = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_n\alpha_n$.

首先验证,V 上的变换 $\mathscr{B}$ 是线性的. 设 $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r + a_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + a_n\beta_n, \beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_r\beta_r + b_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + b_n\beta_n \in V$,$\lambda,\mu$ 是纯量,则

$$\lambda\alpha + \mu\beta = (\lambda a_1 + \mu b_1)\beta_1 + \cdots + (\lambda a_r + \mu b_r)\beta_r + (\lambda a_{r+1} + \mu b_{r+1})\beta_{r+1} + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)\beta_n.$$

由变换 $\mathscr{B}$ 的定义,有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{B}(\lambda\alpha + \mu\beta)\\
&= (\lambda a_1 + \mu b_1)\alpha_1 + \cdots + (\lambda a_r + \mu b_r)\alpha_r + (\lambda a_{r+1} + \mu b_{r+1})\alpha_{r+1} + \cdots + (\lambda a_n + \mu b_n)\alpha_n\\
&= \lambda(a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_n\alpha_n) + \mu(b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r + b_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + b_n\alpha_n)\\
&= \lambda\mathscr{B}(\alpha) + \mu\mathscr{B}(\beta).
\end{aligned}$$

因此 $\mathscr{B}$ 是线性的.

其次证明,$\mathscr{B}$ 是可逆的. 设 $\alpha = a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r + a_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + a_n\beta_n, \beta = b_1\beta_1 + b_2\beta_2 + \cdots + b_r\beta_r + b_{r+1}\beta_{r+1} + \cdots + b_n\beta_n \in V$,且 $\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta)$,则由 $\mathscr{B}$ 的定义,有

$$\mathscr{B}(\alpha) = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_n\alpha_n,$$
$$\mathscr{B}(\beta) = b_1\alpha_1 + \cdots + b_r\alpha_r + b_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + b_n\alpha_n.$$

由于 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 V 的基,所以由 $\mathscr{B}(\alpha) = \mathscr{B}(\beta)$ 得到 $a_i = b_i, i = 1,2,\cdots,n$. 因此,$\alpha = \beta$,即 $\mathscr{B}$ 是单射. 另外,若 $\alpha \in \mathrm{Ker}\mathscr{B}$,则

$$\mathscr{B}(\alpha) = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_n\alpha_n = 0.$$

所以 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$,即 $\alpha = 0$. 因此 $\mathrm{Ker}\mathscr{B} = 0$. 于是由 3.9.3,$\dim \mathrm{Im}\mathscr{B} = n - \dim \mathrm{Ker}\mathscr{B} = n$. 从而 $\mathrm{Im}\mathscr{B} = V$. 所以 $\mathscr{B}$ 是满射. 由于 $\mathscr{B}$ 既是单射,又是满射,因此 $\mathscr{B}$ 是双射,即 $\mathscr{B}$ 是可逆的.

最后证明 $\mathscr{B}\mathscr{A}$ 是幂等的. 设 $\alpha = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r + a_{r+1}\alpha_{r+1} + \cdots + a_n\alpha_n$. 由于 $\alpha_{r+1},\cdots,\alpha_n \in \mathrm{Ker}\mathscr{A}$,所以

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}(\alpha) &= a_1\mathscr{A}(\alpha_1) + a_2\mathscr{A}(\alpha_2) + \cdots + a_r\mathscr{A}(\alpha_r)\\
&= a_1\beta_1 + a_2\beta_2 + \cdots + a_r\beta_r.
\end{aligned}$$

由变换 $\mathscr{B}$ 的定义,

$$\begin{aligned}
\mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha) &= \mathscr{B}(\mathscr{A}(\alpha))\\
&= a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r.
\end{aligned}$$

因此

$$(\mathscr{B}\mathscr{A})^2(\alpha) = a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_r\alpha_r = \mathscr{B}\mathscr{A}(\alpha).$$

由 α 的任意性即得 $(\mathscr{B}\mathscr{A})^2 = \mathscr{B}\mathscr{A}$.

3.9.17 设 $V_0,V_1,\cdots,V_{m+1}$ 是 $m+2$ 个有限维线性空间,其中 $V_0 = V_{m+1} = 0$. 设 $\mathscr{A}_i$ 是 V_i 到 V_{i+1} 的线性映射,$i = 0,1,\cdots,m$,而且 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}_{i+1} = \mathrm{Im}\mathscr{A}_i, i = 0,1,\cdots,m-1$. 证明:

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim V_i = 0.$$

证 考虑 V_i 到 V_{i+1} 的线性映射 $\mathscr{A}_i$,其中 $i = 0,$

$1,\cdots,m$. 由 3.9.3,有

$$\dim \mathrm{Im}\mathscr{A}_i + \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_i = \dim V_i. \quad ㉓$$

由题设,当 $i = 0,1,\cdots,m-1$ 时有 $\mathrm{Im}\mathscr{A}_i = \dim \mathscr{A}_{i+1}$. 代入上式得到

$$\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_1 + \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_0 = \dim V_0,$$

$$-\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_2 - \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_1 = -\dim V_1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(-1)^i \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_{i+1} + (-1)^i \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_i = (-1)^i \dim V_i,$$

$$\cdots\cdots$$

$$(-1)^{m-1}\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_m + (-1)^{m-1}\dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_{m-1} = (-1)^{m-1}\dim V_{m-1},$$

$$(-1)^m \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}_m + (-1)^m \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_m = (-1)^m \dim V_m.$$

将上述诸式相加,得到

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim V_i = \dim \mathrm{Ker}\mathscr{A}_0 + (-1)^m \dim \mathrm{Im}\mathscr{A}_m.$$

由于 $\mathrm{Ker}\mathscr{A}_0 \subseteq V_0 = 0, \mathrm{Im}\mathscr{A}_m \subseteq V_{m+1} = 0$,所以有

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \dim V_i = 0.$$

3.9.18 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 上线性变换. $\mathscr{I}$ 是 V 上的恒同变换,λ 是复数,则 $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ 是 V 上的线性变换. 如果 $\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}$ 的核 $\mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})$ 是非零子空间,则 λ 称为 $\mathscr{A}$ 的特征值,$\mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})$ 称为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间,记作 E_λ,而 E_λ 中非零向量称为 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量. 证明:如果 λ_1 与 λ_2 是 $\mathscr{A}$ 的不同特征值,则 $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = 0$.

证 设 $\alpha \in E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2}$,则 $\alpha \in E_{\lambda_1}$ 且 $\alpha \in E_{\lambda_2}$. 由于 $E_{\lambda_1} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_1\mathscr{I}), E_{\lambda_2} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_2\mathscr{I})$,所以 $(\mathscr{A} - \lambda_1\mathscr{I})(\alpha) = 0$, 且 $(\mathscr{A} - \lambda_2\mathscr{I})(\alpha) = 0$. 因此 $\mathscr{A}(\alpha) - \lambda_1\alpha = 0$, 且 $\mathscr{A}(\alpha) - \lambda_2\alpha = 0$. 从而 $\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_1\alpha$ 且 $\mathscr{A}(\alpha) = \lambda_2\alpha$, 即 $\lambda_1\alpha = \lambda_2\alpha$, 于是 $(\lambda_1 - \lambda_2)\alpha = 0$. 由于 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以 $\alpha = 0$. 因此 $E_{\lambda_1} \cap E_{\lambda_2} = 0$.

注 如果线性变换 $\mathscr{A}$ 在 V 的基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的方阵为 A,则 $\mathscr{A}$ 的特征值 λ 即是方阵 A 的特征值,而 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量 α 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 下的坐标 x(n 维复的列向量)即是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 3.9.18 即是说,方阵 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

3.9.19 设 $\mathscr{A}$ 是 n 维复线性空间 V 上的线性变换. 如果存在正整数 k,使得 $\mathscr{A}^k = 0$,则 $\mathscr{A}$ 称为幂零的. 证明:线性变换 $\mathscr{A}$ 为幂零的充要条件是,$\mathscr{A}$ 的所有特征值全为零.

证 设 $\mathscr{A}$ 是幂零的,则存在正整数 k,使得 $\mathscr{A}^k = 0$. 如果 $\mathscr{A}$ 具有非零特征值 λ,则 $\mathscr{A}$ 的属于特征值 λ 的特征子空间 $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I})$ 是非零的. 因此存在非零向量 $\alpha \in E_\lambda$, 从而 $\mathscr{A}(\alpha) = \lambda\alpha$. 于是 $\mathscr{A}^2(\alpha) = \lambda\mathscr{A}(\alpha) = \lambda^2\alpha,\cdots,\mathscr{A}^k(\alpha) = \lambda^k\alpha$. 由于 $\lambda \neq 0, \alpha \neq 0$, 所以 $\mathscr{A}^k(\alpha) = \lambda^k\alpha \neq 0$. 另一方面,$\mathscr{A}^k = 0$,所以 $\mathscr{A}^k(\alpha) = 0$,矛盾. 因此幂零变换 $\mathscr{A}$ 的特征值全为零.

反之设 $\mathscr{A}$ 的所有特征值全是零. 如果 $\mathscr{A}^n \neq 0$,即 $\mathscr{A}^n$ 不是零变换,则 V 中必有向量 α,使得 $\mathscr{A}^n(\alpha) \neq 0$. 注意,向量 $\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^n(\alpha)$ 都是非零的. 由于 V 是 n 维的,所以 $n+1$ 个非零向量 $\alpha,\mathscr{A}(\alpha),\cdots,\mathscr{A}^n(\alpha)$ 线性相关,因此存在不全为零的复数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$,使得

$$a_0\alpha + a_1\mathscr{A}(\alpha) + \cdots + a_n\mathscr{A}^n(\alpha) = 0.$$

设 $a_{k-1} \neq 0$,而 $a_k = a_{k+1} = \cdots = a_n = 0$,则上式化为

$$a_0\alpha + a_1\mathscr{A}(\alpha) + \cdots + a_{k-1}\mathscr{A}^{k-1}(\alpha) = 0.$$

记 $b_i = \dfrac{a_i}{a_{k-1}}, i = 0,1,\cdots,k-1$,则由上式即得

$$b_0\alpha + b_1\mathscr{A}(\alpha) + \cdots + b_{k-2}\mathscr{A}^{k-2}(\alpha) + \mathscr{A}^{k-1}(\alpha) = 0. \quad ㉔$$

由于 $\mathscr{A}^{k-1}(\alpha) \neq 0$,所以 $b_0,b_1,\cdots,b_{k-2}$ 不全为零. 由式㉔得到

$$(b_0\mathscr{I} + b_1\mathscr{A} + \cdots + b_{k-2}\mathscr{A}^{k-2} + \mathscr{A}^{k-1})(\alpha) = 0. \quad ㉕$$

记 $f(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \cdots + b_{k-2}\lambda^{k-2} + \lambda^{k-1}$,则由式㉕得到

$$f(\mathscr{A})(\alpha) = 0.$$

多项式 $f(\lambda)$ 即是向量 α 的化零多项式. 向量 α 的所有化零多项式中次数最小的首一多项式即是 α 的最小多项式,记作 $d(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_{m-1}\lambda^{m-1} + \lambda^m$. 显然 $m \leqslant k-1$,而且 $c_0,c_1,\cdots,c_{m-1}$ 不全为零. 于是 $d(\lambda)$ 含有非零的根 λ_1. 记 $d(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^s p(\lambda)$,其中 $p(\lambda)$ 是与 $\lambda - \lambda_1$ 互素的多项式. 由于 $d(\lambda)$ 是 α 的化零多项式,因此

$$d(\mathscr{A})(\alpha) = (\mathscr{A} - \lambda_1\mathscr{I})^s p(\mathscr{A})(\alpha) = 0. \quad ㉖$$

记 $\beta = (\mathscr{A} - \lambda_1\mathscr{I})^{s-1}p(\mathscr{A})(\alpha)$. 由于 $d(\lambda)$ 是 α 的化零多项式中次数最小的,因此 $\beta \neq 0$. 由式㉖有 $(\mathscr{A} - \lambda_1\mathscr{I})(\beta) = 0$,即 $\beta \in E_{\lambda_1}$. 于是 λ_1 是 $\mathscr{A}$ 的一个非零特征值,矛盾. 这就证明,$\mathscr{A}^n = 0$. 从而 $\mathscr{A}$ 是幂零的.

注 3.9.19 的充分性证明是纯几何的. 也可用矩阵方法加予证明. 尽管纯几何证明可能复杂些,但熟悉几何方法总是有益的.

3.9.20 证明:n 维线性空间 V 上线性变换 $\mathscr{A}$ 是幂等的,即 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$ 的充要条件为,V 可以分解为 $\mathscr{A}$ 的特征子空间 E_1 与 E_0 的直和,即 $V = E_1 \oplus E_0$.

证 设 $\mathscr{A}$ 是幂等的,即 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^2 = \mathscr{A}$. 设 λ 是 $\mathscr{A}$ 的特征值,则 $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \lambda\mathscr{I}) \neq 0$. 设 α 是 E_λ 中非零

向量,则$(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})(\alpha)=0$,即$\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$.于是$\mathscr{A}^2(\alpha)=\lambda\mathscr{A}(\alpha)=\lambda^2\alpha$.由于$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$,所以$\mathscr{A}^2(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha)$.于是$\lambda^2\alpha=\lambda\alpha$,即$(\lambda^2-\lambda)\alpha=0$.因为$\alpha\neq0$,所以$\lambda^2-\lambda=0$.因此$\lambda=0,1$,即$\mathscr{A}$的特征值只能是1或0.显然$E_1,E_0\subseteq V$,所以$E_1+E_0\subseteq V$.反之设$\alpha\in V$,则$\alpha=(\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\alpha)+\mathscr{A}(\alpha)$,其中$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\alpha)$满足$\mathscr{A}((\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\alpha))=(\mathscr{A}^2-\mathscr{A})(\alpha)=0$,即$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\alpha)\in E_0$,而$\mathscr{A}(\alpha)$满足$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\mathscr{A}(\alpha))=(\mathscr{A}^2-\mathscr{A})(\alpha)=0$,即$\mathscr{A}(\alpha)\in E_1$.因此$\alpha\in E_1+E_0$,即$V\subseteq E_1+E_0$.从而$V=E_1+E_0$.由3.9.18有,$E_1\cap E_0=0$,所以$V=E_1\oplus E_0$.

反之设对线性变换$\mathscr{A}$有$V=E_1\oplus E_0$,则对任意$\alpha\in V$,存在$\beta\in E_1,\gamma\in E_0$,使得$\alpha=\beta+\gamma$.因此$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(\beta)+\mathscr{A}(\gamma)$.由于$\beta\in E_1=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$,所以$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\beta)=0$,即$\mathscr{A}(\beta)=\beta$.又$\gamma\in E_0=\mathrm{Ker}\mathscr{A}$,所以$\mathscr{A}(\gamma)=0$.于是$\mathscr{A}(\alpha)=\beta$.从而$\mathscr{A}^2(\alpha)=\mathscr{A}(\beta)=\beta=\mathscr{A}(\alpha)$,即$(\mathscr{A}^2-\mathscr{A})(\alpha)=0$.由$\alpha$的任意性可得$\mathscr{A}^2-\mathscr{A}=0$,即$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$.因此$\mathscr{A}$是幂等的.

注 试与3.5.9中等式情形以及3.7.1比较.这里是它们的几何形式.

3.9.21 证明:n维线性空间V上线性变换$\mathscr{A}$为对合,即$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$的充要条件是,$V$可以分解为$\mathscr{A}$的特征子空间$E_1$与$E_{-1}$的直和,即$V=E_1\oplus E_{-1}$.

证 设$\mathscr{A}$是对合,即$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$.如果$\lambda$是$\mathscr{A}$的特征值,则$\mathscr{A}$的特征子空间$E_\lambda\neq0$.设$\alpha$是$E_\lambda$中非零向量.由于$E_\lambda=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})$,所以$(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})(\alpha)=0$,即$\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$.因此$\mathscr{A}^2(\alpha)=\lambda\mathscr{A}(\alpha)=\lambda^2\alpha$.因为$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$,所以$\mathscr{A}^2(\alpha)=\mathscr{E}(\alpha)=\alpha$,于是$\lambda^2\alpha=\alpha$.即$(\lambda^2-1)(\alpha)=0$.因为$\alpha\neq0$,所以$\lambda^2-1=0$,即$\lambda=\pm1$.因此$\mathscr{A}$的特征值只能是$1,-1$.显然$E_1,E_{-1}\subseteq V$,所以$E_1+E_{-1}\subseteq V$.反之设$\alpha\in V$,记$\alpha=(\mathscr{A}+\mathscr{E})(\frac{1}{2}\alpha)+(\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\frac{1}{2}\alpha)$.则$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\mathscr{A}+\mathscr{E})(\frac{1}{2}\alpha)=(\mathscr{A}^2-\mathscr{E})(\frac{1}{2}\alpha)$.由于$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$,所以$(\mathscr{A}-\mathscr{E})((\mathscr{A}+\mathscr{E})(\frac{1}{2}\alpha))=0$.因此$(\mathscr{A}+\mathscr{E})(\frac{1}{2}\alpha)\in E_1$.另外,$(\mathscr{A}+\mathscr{E})((\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\frac{1}{2}\alpha))=(\mathscr{A}^2-\mathscr{E})(-\frac{1}{2}\alpha)=0$,因此$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(-\frac{1}{2}\alpha)\in E_{-1}$.所以$\alpha\in E_1+E_{-1}$.于是$V\subseteq E_1+E_{-1}$,从而$V=E_1+E_{-1}$.由3.9.18有,$E_1\cap E_{-1}=0$,因此$V=E_1\oplus E_{-1}$.

反之设对线性变换$\mathscr{A}$,有$V=E_1\oplus E_{-1}$.则对任意$\alpha\in V$,存在$\beta\in E_1,\gamma\in E_{-1}$,使得$\alpha=\beta+\gamma$.于是$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(\beta)+\mathscr{A}(\gamma)$.因为$\beta\in E_1=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{E})$,所以$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\beta)=0$,即$\mathscr{A}(\beta)=\beta$.对$\gamma\in E_{-1}=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}+\mathscr{E})$,因此$(\mathscr{A}+\mathscr{E})(\gamma)=0$,即$\mathscr{A}(\gamma)=-\gamma$.于是

$$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(\beta)+\mathscr{A}(\gamma)=\beta-\gamma.$$

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^2(\alpha)&=\mathscr{A}(\beta-\gamma)\\&=\mathscr{A}(\beta)-\mathscr{A}(\gamma)=\beta+\gamma=\alpha.\end{aligned}$$

即$(\mathscr{A}^2-\mathscr{E})(\alpha)=0$.由$\alpha$的任意性得到,$\mathscr{A}^2-\mathscr{E}=0$,即$\mathscr{A}^2=\mathscr{E}$.因此$\mathscr{A}$是对合.

3.9.22 证明:n维线性空间V上线性变换$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^3=\mathscr{A}$的充要条件是,$V$可以分解为$\mathscr{A}$的特征子空间$E_1,E_{-1},E_0$的直和,即$V=E_1\oplus E_{-1}\oplus E_0$.

证 设$\mathscr{A}$满足$\mathscr{A}^3=\mathscr{A}$.如果$\lambda$是$\mathscr{A}$的特征值,则$E_\lambda=\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})$是非零的.设$\alpha$是$E_\lambda$中非零向量,则$(\mathscr{A}-\lambda\mathscr{E})(\alpha)=0$,即$\mathscr{A}(\alpha)-\lambda\alpha=0$,也即$\mathscr{A}(\alpha)=\lambda\alpha$.于是$\mathscr{A}^2(\alpha)=\lambda\mathscr{A}(\alpha)=\lambda^2\alpha$,$\mathscr{A}^3(\alpha)=\mathscr{A}(\lambda^2\alpha)=\lambda^2\mathscr{A}(\alpha)=\lambda^3\alpha$.因为$\mathscr{A}^3=\mathscr{A}$,所以$\mathscr{A}^3(\alpha)=\mathscr{A}(\alpha)$,即$\lambda^3\alpha=\lambda\alpha$.因此$(\lambda^3-\lambda)\alpha=0$.由于$\alpha\neq0$,所以$\lambda^3-\lambda=0$.于是$\lambda=1,-1,0$.因此$\mathscr{A}$的特征值只能是$1,-1,0$.显然$E_1,E_{-1},E_0\subseteq V$,所以$E_1+E_{-1}+E_0\subseteq V$.反之设$\alpha\in V$.记

$$\begin{aligned}\alpha=&(\mathscr{A}^2+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)+(\mathscr{A}^2-\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)\\&+(\mathscr{A}^2-\mathscr{E})(-\alpha).\end{aligned}$$

由于$(\mathscr{A}-\mathscr{E})((\mathscr{A}^2+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha))=(\mathscr{A}^3-\mathscr{A})(\alpha)$,而$\mathscr{A}^3-\mathscr{A}=0$,所以,$(\mathscr{A}-\mathscr{E})((\mathscr{A}^2+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha))=0$,因此$(\mathscr{A}^2+\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)\in\mathrm{Ker}(\mathscr{A}-\mathscr{E})=E_1$.同理,$(\mathscr{A}^2-\mathscr{A})(\frac{1}{2}\alpha)\in\mathrm{Ker}(\mathscr{A}+\mathscr{E})=E_{-1}$,$(\mathscr{A}^2-\mathscr{E})(-\alpha)\in E_0$.因此$\alpha\in E_1+E_{-1}+E_0$.于是$V\subseteq E_1+E_{-1}+E_0$.从而$V=E_1+E_{-1}+E_0$.下面证明,$V$是$E_1,E_{-1},E_0$的直和.为此设$\alpha\in V$,且

$$\alpha=\beta_1+\gamma_1+\xi_1=\beta_2+\gamma_2+\xi_2, \qquad ㉗$$

其中$\beta_1,\beta_2\in E_1,\gamma_1,\gamma_2\in E_{-1},\xi_1,\xi_2\in E_0$.由于$\xi_1,\xi_2\in E_0=\mathrm{Ker}\mathscr{A}$,所以将$\mathscr{A}$作用于式㉗得到

$$\mathscr{A}(\alpha)=\mathscr{A}(\beta_1)+\mathscr{A}(\gamma_1)=\mathscr{A}(\beta_2)+\mathscr{A}(\gamma_2).$$

由于$\beta_1,\beta_2\in E_1$,所以$(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\beta_1)=0,(\mathscr{A}-\mathscr{E})(\beta_2)=0$,即$\mathscr{A}(\beta_1)=\beta_1,\mathscr{A}(\beta_2)=\beta_2$.同理,$\mathscr{A}(\gamma_1)=-\gamma_1,\mathscr{A}(\gamma_2)=-\gamma_2$.因此

$$\mathscr{A}(\alpha)=\beta_1-\gamma_1=\beta_2-\gamma_2.$$

由此得到

$$\beta_1-\beta_2=\gamma_1-\gamma_2.$$

由于$\beta_1,\beta_2\in E_1$,所以$\beta_1-\beta_2\in E_1$,同理$\gamma_1-\gamma_2\in E_{-1}$.于是

$$\beta_1-\beta_2=\gamma_1-\gamma_2\in E_1\cap E_{-1}.$$

由3.9.18有,$E_1\cap E_{-1}=0$,因此$\beta_1-\beta_2=\gamma_1-\gamma_2$

$= 0$. 从而 $\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$. 同理将 $\mathscr{A} - \mathscr{I}$ 作用于式㉗得到

$$\xi_2 - \xi_1 = 2(\gamma_1 - \gamma_2) \in E_0 \cap E_{-1} = 0.$$

从而 $\xi_1 = \xi_2$. 这就证明, V 中向量 α 表为 E_1, E_{-1} 和 E_0 中向量的和的方式是唯一的. 因此 $V = E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_0$.

反之设对于线性变换 $\mathscr{A}$, 有 $V = E_1 \oplus E_{-1} \oplus E_0$. 则对任意 $\alpha \in V$, 存在 $\beta \in E_1, \gamma \in E_{-1}, \xi \in E_0$, 使得

$$\alpha = \beta + \gamma + \xi.$$

由于 $\beta \in E_1 = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \mathscr{I})$, 所以 $(\mathscr{A} - \mathscr{I})(\beta) = 0$. 从而 $(\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\beta) = (\mathscr{A}^2 + \mathscr{A})(\mathscr{A} - \mathscr{I})(\beta) = 0$. 而 $\gamma \in E_{-1} = \mathrm{Ker}(\mathscr{A} - \mathscr{I})$, 所以 $(\mathscr{A} + \mathscr{I})(\gamma) = 0$, 因此 $(\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\gamma) = (\mathscr{A}^2 - \mathscr{A})(\mathscr{A} + \mathscr{I})(\gamma) = 0$. 同理 $(\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\xi) = 0$. 于是

$$(\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\alpha) = (\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\beta) + (\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\gamma) + (\mathscr{A}^3 - \mathscr{A})(\xi) = 0.$$

由 α 的任意性得到, $\mathscr{A}^3 - \mathscr{A} = 0$. 即线性变换 $\mathscr{A}$ 满足 $\mathscr{A}^3 = \mathscr{A}$.

§ 3.10　方阵的特征值与值域

设 λ 是 n 阶复方阵 A 的特征值, n 维复的列向量 x 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则 $Ax = \lambda x$. 用向量 x 的共轭转置 x^* 左乘于等式的两端, 即得 $x^*Ax = \lambda x^*x$. 由于特征向量 x 是非零的, 所以其范数 $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ 的平方 $\|x\|^2 = (x,x) = x^*x \neq 0$, 其中 $(x,y) = x^*y$ 是 n 维复的列向量空间 C^n 中向量 x 与 y 的内积. 因此

$$\lambda = \frac{x^*Ax}{x^*x}.$$

记 n 维复的列向量空间 C^n 中所有非零向量的集合为 $(C^n)^\#$, 并记

$$R(A) = \left\{\frac{x^*Ax}{x^*x} \mid x \in (C^n)^\#\right\}.$$

则 $\lambda \in R(A)$. $R(A)$ 称为方阵 A 的 Rayleigh-Ritz 商. 记

$$F(A) = \{x^*Ax \mid x^*x = 1, x \in C^n\}.$$

容易验证, $R(A) = F(A)$. $F(A)$ 称为方阵 A 的值域 (the field of values). 于是 $\lambda \in F(A)$. 这说明, 为了讨论一个方阵 A 的特征值 λ 的性质, 可以从方阵 A 的 Rayleigh-Ritz 商或者值域入手. 因此, 应用方阵的特征值的定义以及方阵的 Rayleigh-Ritz 商或者值域是处理方阵的特征值的基本方法. 许多解题基本技巧皆由此发端.

3.10.1　设 A 是 n 阶方阵. 证明:

(1) 如果 A 是幂等的, 即 $A^2 = A$, 则 A 的特征值为 0, 1;

(2) 如果 A 是对合, 即 $A^2 = I_n$, 则 A 的特征值为 ± 1;

(3) 如果 A 是幂零的, 即存在正整数 k, 使得 $A^k = 0$. 则 A 的特征值为 0;

(4) 如果 A 满足 $A^2 = -I_n$, 则 A 的特征值为 $\pm i$.

证　(1) 设 λ 是方阵 A 的特征值, 所以存在相应于 λ 的特征向量 x, 使得 $Ax = \lambda x$. 因此 $A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda Ax = \lambda^2 x$. 因为 A 是幂等的, 所以 $A^2 = A$. 因此 $\lambda^2 x = A^2 x = Ax = \lambda x$. 从而 $(\lambda^2 - \lambda)x = 0$. 由于 x 是非零的, 从而 $\lambda^2 - \lambda = 0$, 即 $\lambda = 0, 1$.

(2) 设 λ 是方阵 A 的特征值, 则 $Ax = \lambda x$, 其中 x 是相应于 λ 的特征向量. 因此 $A^2x = \lambda^2 x$. 由于 A 是对合, 所以 $A^2 = I_n$. 因此 $\lambda^2 x = A^2 x = I_n x = x$. 于是 $(\lambda^2 - 1)x = 0$. 因为特征向量 x 是非零的, 所以 $\lambda^2 - 1 = 0$, 即 $\lambda = \pm 1$.

(3) 设 A 是幂零的, 且 $Ax = \lambda x$, λ 是 A 的特征值, x 是属于 λ 的特征向量. 则 $A^2x = \lambda^2 x$, $A^3x = A(A^2x) = A(\lambda^2 x) = \lambda^2 Ax = \lambda^3 x, \cdots, A^k x = \lambda^k x$. 因为 $A^k = 0$, 所以 $\lambda^k x = A^k x = 0 \cdot x = 0$. 由于 x 是非零的, 因此 $\lambda^k = 0$, 从而 $\lambda = 0$.

(4) 设 $A^2 = -I_n$, 且 $Ax = \lambda x$, λ 是 A 的特征值, 且 x 是属于 λ 的特征向量. 于是 $A^2x = \lambda^2 x$. 所以 $\lambda^2 x = A^2 x = -I_n x = -x$. 因此 $\lambda^2 + 1 = 0$, 即有 $\lambda = \pm i$.

3.10.2　证明: 方阵 A 的属于不同特征值的特征向量线性无关.

证　设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_t$ 是方阵 A 的不同特征值, x_i 是方阵 A 的属于特征值 λ_i 的特征向量, $i = 1, 2, \cdots, t$. 如果存在复数 $a_1, a_2, \cdots, a_t$, 使得

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t = 0.$$

则

$$0 = A0 = A(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t) = a_1Ax_1 + a_2Ax_2 + \cdots + a_tAx_t. \quad ①$$

因为 x_i 是 A 的属于 λ_i 的特征向量, 所以 $Ax_i = \lambda_i x_i$. 因此由式①得到

$$\lambda_1a_1x_1 + \lambda_2a_2x_2 + \cdots + \lambda_ta_tx_t = 0. \quad ②$$

由式②得到

$$0 = A0 = A(\lambda_1a_1x_1 + \lambda_2a_2x_2 + \cdots + \lambda_ta_tx_t) = \lambda_1a_1Ax_1 + \lambda_2a_2Ax_2 + \cdots + \lambda_ta_tAx_t.$$

由于 $Ax_i = \lambda_i x_i, i = 1, 2, \cdots, t$, 所以

$$\lambda_1^2a_1x_1 + \lambda_2^2a_2x_2 + \cdots + \lambda_t^2a_tx_t = 0. \quad ③$$

如此继续, 即得方程组

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_tx_t = 0, \\ \lambda_1a_1x_1 + \lambda_2a_2x_2 + \cdots + \lambda_ta_tx_t = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{t-1}a_1x_1 + \lambda_2^{t-1}a_2x_2 + \cdots + \lambda_t^{t-1}a_tx_t = 0. \end{cases} \quad ④$$

设 n 维列向量 x_i 的第 j 个分量为 $x_j^{(i)}, j = 1,2,\cdots,n$. 考虑向量方程组 ④ 的第 j 个分量,得到

$$\begin{cases} a_1x_j^{(1)} + a_2x_j^{(2)} + \cdots + a_tx_j^{(t)} = 0, \\ \lambda_1a_1x_j^{(1)} + \lambda_2a_2x_j^{(2)} + \cdots + \lambda_ta_tx_j^{(t)} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1^{t-1}a_1x_j^{(1)} + \lambda_2^{t-1}a_2x_j^{(2)} + \cdots + \lambda_t^{t-1}a_tx_j^{(t)} = 0. \end{cases} \quad ⑤$$

记 $a_kx_j^{(k)} = y_k, k = 1,2,\cdots,t$,则式 ⑤ 是关于 $y_1,y_2,\cdots,y_k$ 的线性齐次方程.其系数方阵为

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_t \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_t^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{t-1} & \lambda_2^{t-1} & \cdots & \lambda_t^{t-1} \end{bmatrix},$$

其行列式 $\det D = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant t}(\lambda_j - \lambda_i)$. 由于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_t$ 互异,因此 $\det D \neq 0$. 所以方程组 ⑤ 只有零解,即 $a_1x_j^{(1)} = 0, a_2x_j^{(2)} = 0,\cdots,a_tx_j^{(t)} = 0, j = 1,2,\cdots,t$. 于是 $a_ix_i = 0, i = 1,2,\cdots,t$. 由于 x_i 是非零的,所以 $a_i = 0, i = 1,2,\cdots,t$. 因此 $x_1,x_2,\cdots,x_t$ 是线性无关的.

3.10.3 设 A 是 n 阶方阵,M 是 m 阶方阵,P 是 $n \times m$ 列满秩矩阵,且 $AP = PM$. 证明:方阵 M 的特征值是方阵 A 的特征值.

证 设 λ 是方阵 M 的特征值,x 是方阵 M 的属于特征值 λ 的特征向量,则 $Mx = \lambda x$. 由于 $AP = PM$,所以 $APx = P(Mx) = \lambda Px$. 注意,x 是 m 维复的非零列向量. 记 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_m)'$,且将 $n \times m$ 矩阵 P 按列分块为 $P = [p_1,p_2,\cdots,p_m]$,其中 p_i 是 n 维列向量. 如果 $Px = 0$,则 $x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_mp_m = 0$. 由于 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 不全为零,所以 $p_1,p_2,\cdots,p_m$ 线性相关. 从而 $\operatorname{rank}P < m$,与 P 为列满秩的假设相矛盾. 因此 Px 是一个 n 维非零列向量. 由于 $A(Px) = \lambda(Px)$,所以 λ 是 A 的特征值,而 Px 是 A 的属于 λ 的特征向量.

3.10.4 (Geršgorin(1931)圆盘定理)证明:n 阶复方阵 $A = [a_{ij}]$ 的特征值 λ 一定落在复平面 Z 上 n 个圆盘

$$|z - a_{ii}| \leqslant R_i, i = 1,2,\cdots,n \quad (1)$$

的并集中,其中 $R_i = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|$.

证 设 x 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量,则 $Ax = \lambda x$. 记 $x' = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$. 由 $Ax = \lambda x$ 得到

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n. \end{cases} \quad ⑥$$

因为 x 是方阵 A 的属于 λ 的特征向量,所以 x 是非零的. 设 x 的分量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中模最大的分量为 x_k,即 $|x_k| = \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$. 考虑式 ⑥ 中第 k 个方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n = \lambda x_k.$$

则

$$(\lambda - a_{kk})x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n.$$

两端取复数的模,得到

$$\begin{aligned} &|\lambda - a_{kk}||x_k| \\ =& |a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n| \\ \leqslant& |a_{k1}||x_1| + |a_{k2}||x_2| + \cdots + |a_{k,k-1}||x_{k-1}| + |a_{k,k+1}||x_{k+1}| + \cdots + |a_{kn}||x_n|. \end{aligned}$$

因为 $|x_k| = \max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_n|\}$,所以

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leqslant (|a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{k,n}|) \times |x_k|.$$

即

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leqslant R_k|x_k|.$$

由于 x 是非零的,所以 $|x_k| > 0$. 因此

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant R_k.$$

这说明,λ 落在复平面 Z 上以 a_{kk} 为圆心,以 R_k 为半径的圆盘. 从而 λ 落在复平面 Z 上 n 个圆盘 $|z - a_{ii}| \leqslant R_i, i = 1,2,\cdots,n$ 的并集中.

注 Geršgorin 圆盘定理给出了复方阵 A 的特征值 λ(视为复平面 Z 上的点)的几何位置,是关于方阵的特征值的界的一个十分有用的基本定理. 其证明方法主要是根据方阵 A 的特征值 λ 及其特征向量 x 的基本关系 $Ax = \lambda x$,转化为讨论线性方程组 ⑥ 的非零解 x 的最大模分量. 这一方法是非常典型的.

3.10.5 (Brauer,1946) 证明:n 阶复方阵 $A = [a_{ij}]$ 的特征值 λ 一定落在复平面 Z 上 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 Cassini 卵形区域

$$|z - a_{ii}||z - a_{jj}| \leqslant R_iR_j, 1 \leqslant i \neq j \leqslant n \quad (2)$$

的并集中,其中 $R_i = \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} |a_{ij}|, i = 1,2,\cdots,n$.

证 设 x 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $Ax = \lambda x$，即有

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda_1 x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda_2 x_2, \\ \cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda_n x_n. \end{cases} \quad ⑦$$

设 x_k 是向量 x 的 n 个分量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中模最大的分量，即设 $|x_k| = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_n|\}$. 因为 x 是非零的，所以 $|x_k| > 0$. 如果 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-1} = x_{k+1} = \cdots = x_n = 0$，则方程组 ⑦ 化为 $a_{kk}x_k = \lambda x_k$. 因此 $\lambda = a_{kk}$. 注意方阵 A 的所有对角元都落在式(2) 所给的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 Cassini 卵形区域之并集中，而 $\lambda = a_{kk}$ 也落在此并集中，故结论成立. 因此设 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}, x_{k+1}, \cdots, x_n$ 不全为零. 其中模最大的记作 x_l，即设 $x_l = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_{k-1}|, |x_{k+1}|, \cdots, |x_n|\}$. 则 $|x_k| \geqslant |x_l| > 0$. 考虑式 ⑦ 中第 k, l 个方程

$$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n = \lambda x_k,$$
$$a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{ln}x_n = \lambda x_l.$$

则

$$(\lambda - a_{kk})x_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{k,k-1}x_{k-1} + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n,$$
$$(\lambda - a_{ll})x_l = a_{l1}x_1 + a_{l2}x_2 + \cdots + a_{l,l-1}x_{l-1} + a_{l,l+1}x_{l+1} + \cdots + a_{ln}x_n.$$

上两式各取模，得到

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{kk}||x_k| &\leqslant |a_{k1}||x_1| + |a_{k2}||x_2| + \cdots + |a_{k,k-1}||x_{k-1}| + |a_{k,k+1}||x_{k+1}| + \cdots + |a_{kn}||x_n| \\ &\leqslant (|a_{k1}| + |a_{k2}| + \cdots + |a_{k,k-1}| + |a_{k,k+1}| + \cdots + |a_{kn}|)|x_l|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\lambda - a_{ll}||x_l| &\leqslant |a_{l1}||x_1| + |a_{l2}||x_2| + \cdots + |a_{l,l-1}||x_{l-1}| + |a_{l,l+1}||x_{l+1}| + \cdots + |a_{ln}||x_n| \\ &\leqslant (|a_{l1}| + |a_{l2}| + \cdots + |a_{l,l-1}| + |a_{l,l+1}| + \cdots + |a_{l,n}|)|x_k|. \end{aligned}$$

即

$$|\lambda - a_{kk}||x_k| \leqslant R_k|x_l|,$$
$$|\lambda - a_{ll}||x_l| \leqslant R_l|x_k|.$$

于是

$$|\lambda - a_{kk}||\lambda - a_{ll}||x_k||x_l| \leqslant R_kR_l|x_k||x_l|.$$

从而

$$|\lambda - a_{kk}||\lambda - a_{ll}| \leqslant R_kR_l.$$

这说明，方阵 A 的特征值 λ 落在 Cassini 卵形区域 $|z - a_{kk}||z - a_{ll}| \leqslant R_kR_l$ 中，从而落在式(2) 给出的 $\frac{n(n-1)}{2}$ 个 Cassini 卵形区域之并集中.

3.10.6 （列形式的 Geršgorin 圆盘定理）证明：n 阶复方阵 $A = [a_{ij}]$ 的特征值 λ 一定落在复平面 Z 上 n 个圆盘

$$|z - a_{jj}| \leqslant S_j, j = 1, 2, \cdots, n \quad (3)$$

的并集中，其中 $S_j = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} |a_{ij}|, j = 1, 2, \cdots, n$.

证 设 x 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $Ax = \lambda x$. 因此 $(Ax)^t = (\lambda x)^t$，即 $x^tA^t = \lambda x^t$. 从而 $x^t(A^t - \lambda I_n) = 0$. 这说明，线性方程组 $x^t(A^t - \lambda I_n) = 0$ 具有非零解 x^t. 所以 $\det(A^t - \lambda I_n) = 0$. 因此线性方程组 $(A^t - \lambda I_n)y = 0$ 具有非零解 y. 由 $(A^t - \lambda I_n)y = 0$ 得到 $A^ty = \lambda y$，所以 y 是方阵 A^t 的属于特征值 λ 的特征向量. 注意，如果记 $A^t = [b_{ij}]$，则 $b_{ij} = a_{ji}$. 因此

$$\sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |b_{ij}| = \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} |a_{ji}| = S_i.$$

于是由 3.10.4，方阵 A^t 的特征值 λ（也即方阵 A 的特征值）一定落在复平面 Z 上形如(3) 的 n 个圆盘的并集中.

注 3.10.6 的证明主要用到这样的事实：方阵 A 与它的转置 A^t 具有相同的特征值. 根据这一事实，同样有列形式的 Brauer 定理.

3.10.7 设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶方阵，$p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是正数. 证明：方阵 A 的特征值 λ 一定落在复平面 Z 上 n 个圆盘

$$|z - a_{ii}| \leqslant \frac{1}{p_i} \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} p_j |a_{ij}|, i = 1, 2, \cdots, n \quad (4)$$

的并集中.

证 记

$$D = \operatorname{diag}(p_1, p_2, \cdots, p_n),$$

即 D 是对角元依次为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的 n 阶对角方阵. 则 D 是可逆方阵，而且 $D^{-1}AD = [b_{ij}]$ 与 A 相似. 由于相似的方阵具有相同的特征值，所以方阵 A 的特征值 λ 也是方阵 $D^{-1}AD$ 的特征值. 由 Geršgorin 圆盘定理，$D^{-1}AD$ 的特征值 λ 一定落在复平面 Z 上 n 个圆盘

$$|z - b_{ii}| \leqslant R_i, i = 1, 2, \cdots, n \quad ⑧$$

的并集中，其中 $R_i = \sum\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} |b_{ij}|$. 由于 $D^{-1}AD = [b_{ij}]$，所以 $b_{ij} = p_i^{-1}a_{ij}p_j, 1 \leqslant i, j \leqslant n$，特别当 $i = j$ 时有 $b_{ii} = a_{ii}$. 由于 p_i, p_j 是正数，所以 $|b_{ij}| = \frac{1}{p_i}|a_{ij}|p_j$，因此

$$R_i = \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} |b_{ij}| = \sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} \frac{1}{p_i}|a_{ij}|p_j$$
$$= \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}} p_j|a_{ij}|.$$

于是由式⑧即得式(4).

3.10.8 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$n$阶方阵$A=[a_{ij}]$的所有特征值.记

$\rho(A)=\max\{|\lambda_1|,|\lambda_2|,\cdots,|\lambda_n|\}$. 它称为方阵$A$的谱半径.证明:

(1) $\rho(A)\le \min\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_n>0}\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{p_i}\sum\limits_{j=1}^{n}p_j|a_{ij}|\right\}$;

(2) $|\det A|\le \prod\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

证 (1) 设λ是方阵A的任意一个特征值,$p_1,p_2,\cdots,p_n$是任意n个正数.由3.10.7,λ一定落在复平面Z上的n个圆盘(4)的并集中,因此必有某个$i,1\le i\le n$,使得

$$|\lambda - a_{ii}|\le \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}p_j|a_{ij}|.$$

所以

$$|\lambda|-|a_{ii}|\le \frac{1}{p_i}\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}p_j|a_{ij}|.$$

因此

$$|\lambda|\le|a_{ii}|+\frac{1}{p_i}\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}p_j|a_{ij}|$$
$$=\frac{1}{p_i}\sum_{1\le j\le n}p_j|a_{ij}|$$
$$\le\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{p_i}\sum_{1\le j\le n}p_j|a_{ij}|\right\}.$$

特别对于方阵A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$中模最大的特征值$\lambda$,有$\rho(A)=|\lambda|$,且

$$\rho(A)=|\lambda|\le\max_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{p_i}\sum_{1\le j\le n}p_j|a_{ij}|\right\}. \qquad ⑨$$

式⑨对任意n个正数$p_1,p_2,\cdots,p_n$成立.所以$\rho(A)$一定小于等于所有$\max\limits_{1\le i\le n}\left\{\frac{1}{p_i}\sum\limits_{1\le j\le n}p_j|a_{ij}|\right\}$之最小者,这就证明了结论(1).

(2) 如果n阶方阵$A=[a_{ij}]$有一行,其元素全是零,则方阵A的行列式$\det A=0$.因此结论(2)成立.所以设方阵A不具有零行.因此,对每个$i=1,2,\cdots,n$,$p_i=\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|>0$.记$D=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_n)$,并记$D^{-1}A=[b_{ij}]$,其中$b_{ij}=\frac{1}{p_i}a_{ij}$,$1\le i,j\le n$.则由Geršgorin圆盘定理,必有某个$i,1\le i\le n$,使得

$$|\rho(D^{-1}A)|-|b_{ii}|\le\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}|b_{ij}|,$$

因此

$$\rho(D^{-1}A)-|b_{ii}|\le\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}|b_{ij}|.$$

于是

$$\rho(D^{-1}A)\le\sum_{j=1}^{n}|b_{ij}|.$$

由于$b_{ij}=\frac{1}{p_i}a_{ij}$,所以

$$\rho(D^{-1}A)\le\frac{1}{p_i}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=1.$$

设$\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$是方阵$D^{-1}A$的所有特征值,则对每个$i=1,2,\cdots,n$,有$|\mu_i|\le\rho(D^{-1}A)\le1$.因此

$$|\det D^{-1}A|=|\mu_1\mu_2\cdots\mu_n|\le1.$$

而$\det D=p_1p_2\cdots p_n$,$\det D^{-1}=(\det D)^{-1}$.因此

$|\det D^{-1}A|=|\det D^{-1}||\det A|=\dfrac{|\det A|}{p_1p_2\cdots p_n}\le1$.

从而$|\det A|\le p_1p_2\cdots p_n$.这就证明了结论(2).

3.10.9 设λ是n阶方阵$A=[a_{ij}]$的特征值.证明:

$$|\lambda|\le\min\left\{\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|\right\}. \qquad (5)$$

证 由Geršgorin圆盘定理,必有某个$i,1\le i\le n$,使得

$$|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{ij}|.$$

因此

$$|\lambda|-|a_{ii}|\le|\lambda-a_{ii}|\le\sum_{\substack{1\le j\le n\\ j\ne i}}|a_{ij}|.$$

所以

$$|\lambda|\le\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

从而

$$|\lambda|\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \qquad ⑩$$

由列形式的Geršgorin圆盘定理可知,必有某个$j,1\le j\le n$,使得

$$|\lambda|\le\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|.$$

从而

$$|\lambda|\le\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|. \qquad ⑪$$

由式⑩与⑪即得式(5).

3.10.10 设$A=[a_{kl}]$是n阶方阵,它的第k行上元素的模之和记作P_k,即$P_k=\sum\limits_{l=1}^{n}|a_{kl}|$,$k=1,2,\cdots,n$.证明:

$$\mathrm{rank}A\ge\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kk}|}{P_k}, \qquad (6)$$

其中约定$\frac{0}{0}=0$.

证 记$a_{kk}=|a_{kk}|e^{i\theta_k}$,其中$i=\sqrt{-1}$,$k=1,2,\cdots,n$.用$e^{-i\theta_k}$遍乘方阵$A$的第$k$行,$k=1,2,\cdots,n$,得到的方阵记作$B=[b_{kl}]$,则方阵$B$的第$k$行上元素的模之和为$\sum_{l=1}^{n}|b_{kl}|=\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}e^{-i\theta_k}|=\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|=P_k$,$k=1,2,\cdots,n$,而且$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}A$.若$P_k\neq 0$,则用$P_k^{-1}$遍乘方阵$B$的第$k$行,得到的方阵记作$C=[c_{kl}]$,则对于$P_k\neq 0$的$k$,方阵$C$的第$k$行上元素的模之和为$P_k'=\sum_{l=1}^{n}|c_{kl}|=\sum_{l=1}^{n}\frac{|b_{kl}|}{P_k}=\frac{1}{P_k}\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|=1$.而对于$P_k=0$的$k$,方阵$C$的第$k$行上元素的模之和$P_k'=\sum_{l=1}^{n}|c_{kl}|=\sum_{l=1}^{n}|b_{kl}|=\sum_{l=1}^{n}|a_{kl}|=P_k=0$.而且$\mathrm{rank}C=\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}A$.对方阵$C$用3.10.9,有

$$|\lambda|\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}P_k'\leqslant 1, \qquad ⑫$$

其中λ是方阵C的特征值.注意,方阵C的对角元为$c_{kk}=\frac{b_{kk}}{P_k}=\frac{|a_{kk}|}{P_k}$,其中$P_k\neq 0$.而当$P_k=0$时,$c_{kk}=b_{kk}=|a_{kk}|=0=\frac{|a_{kk}|}{P_k}$.因此

$$\mathrm{Tr}C=\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kk}|}{P_k}. \qquad ⑬$$

另一方面,

$\mathrm{Tr}C=$ 方阵C的特征值之和

$\leqslant$ 方阵C的特征值的模之和.

于是由式⑫与式⑬得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kk}|}{P_k}\leqslant \text{方阵} C \text{的非零特征值的个数}. \qquad ⑭$$

注意,一个方阵的秩不小于其非零特征值之个数.因此由式⑭和$\mathrm{rank}C=\mathrm{rank}A$得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{kk}|}{P_k}\leqslant \mathrm{rank}C=\mathrm{rank}A.$$

所以式(6)成立.

3.10.11 证明:n阶Hermite方阵A的特征值是实数.

证 设λ是Hermite方阵A的特征值,x是方阵A的属于特征值λ的特征向量,则$Ax=\lambda x$.于是$x^*Ax=\lambda x^*x$.注意,x^*Ax是一个复数,因此$(x^*Ax)^*=(\lambda x^*x)^*$,从而$x^*A^*x=\bar{\lambda}x^*x$,其中$\bar{\lambda}$是$\lambda$的共轭复数.因为方阵$A$是Hermite的,所以$A^*=A$.因此有$x^*Ax=\bar{\lambda}x^*x$.从而$\lambda x^*x=\bar{\lambda}x^*x$,即$(\bar{\lambda}-\lambda)x^*x=0$.记$x$的$n$个分量为$x_1,x_2,\cdots,x_n$,则$x^*x=|x_1|^2+|x_2|^2+\cdots+|x_n|^2$.作为特征向量,$x$是非零的,即其分量$x_1,x_2,\cdots,x_n$不全为零.所以$x^*x>0$.因此$\bar{\lambda}=\lambda$.这就证明,$\lambda$是实数.

注1 由于n阶实对称方阵是实的Hermite方阵,因此实对称方阵的特征值也是实数.

注2 设A是n阶Hermite方阵,x是n维复的列向量.记$x^*Ax=\mathrm{Re}(x^*Ax)+i\mathrm{Im}(x^*Ax)$,其中$\mathrm{Re}z$和$\mathrm{Im}z$分别是复数$z$的实部与虚部.于是

$$\begin{aligned}(x^*Ax)^*&=\overline{(x^*Ax)}\\&=\mathrm{Re}(x^*Ax)-i\mathrm{Im}(x^*Ax).\end{aligned}$$

另一方面,

$$\begin{aligned}(x^*Ax)^*&=x^*A^*x=x^*Ax\\&=\mathrm{Re}(x^*Ax)+i\mathrm{Im}(x^*Ax).\end{aligned}$$

因此$\mathrm{Im}(x^*Ax)=0$.这表明,对任意n维复的列向量x,x^*Ax恒为实数.从而Hermite方阵A的Rayleigh-Ritz商或者值域是实数的子集.3.10.11的证明正是利用了Hermite方阵的值域的这一性质的.

3.10.12 证明:n阶实斜对称方阵A的非零特征值是纯虚数.

证 设λ是斜对称方阵A的非零特征值,x是A的属于λ的特征向量,则$Ax=\lambda x$.于是$x^*Ax=\lambda x^*x$.两端取共轭转置得到$x^*A^*x=\bar{\lambda}x^*x$.因$A$是实方阵,所以$A^*=A'$.又$A$是斜对称的,所以$A'=-A$.于是$x^*A^*x=-x^*Ax=\bar{\lambda}x^*x$.而$x^*Ax=\lambda x^*x$.因此$\lambda x^*x=-\bar{\lambda}x^*x$,即$(\lambda+\bar{\lambda})x^*x$.因为特征向量$x$是非零的,所以$x^*x>0$.从而$\lambda+\bar{\lambda}=0$.这表示,$\lambda$是纯虚数.

注 对于实斜对称方阵A,记$x^*Ax=\mathrm{Re}(x^*Ax)+i\mathrm{Im}(x^*Ax)$,其中$x$是$n$维复的非零列向量.则$(x^*Ax)^*=\overline{(x^*Ax)}=\mathrm{Re}(x^*Ax)-i\mathrm{Im}(x^*Ax)$,又$(x^*Ax)^*=x^*A'x=-x^*Ax=-\mathrm{Re}(x^*Ax)-i\mathrm{Im}(x^*Ax)$.因此,$\mathrm{Re}(x^*Ax)=0$.这说明,实斜对称方阵$A$的值域$F(A)$由零与纯虚数组成.而方阵$A$的特征值$\lambda\in F(A)$.从而$\lambda$只能是0或纯虚数.这是3.10.12证明的实质.另外,如果A是n阶斜Hermite方阵,即$A^*=-A$,则类似可证,A的值域$F(A)$由零和纯虚数组成.从而斜Hermite方阵A的特征值也只能是零或纯虚数.

3.10.13 证明:n阶酉方阵A的特征值λ的模为1.

证 设x是酉方阵A的属于特征值λ的特征向量,则$Ax=\lambda x$.两边取共轭转置,得到$x^*A^*=\bar{\lambda}x^*$.因此$x^*A^*Ax=\lambda\bar{\lambda}x^*x$.因为$A$是酉方阵,所以$A^*A=I_n$.因此$x^*x=\lambda\bar{\lambda}x^*x$.而$x^*x>0$,所以$|\lambda|^2=\lambda\bar{\lambda}=1$,从而$|\lambda|=1$.

注 由于n阶正交实方阵A一定是酉方阵,所以实正交方阵A的特征值λ的模为1.

3.10.14 (Hirsch, 1900) 设 $A=[a_{kl}]$ 是 n 阶复方阵. 记 $H(A)=\frac{1}{2}(A+A^*)=[b_{kl}]$, $K(A)=\frac{1}{2}(A-A^*)=[c_{kl}]$. 显然, $H(A)^*=H(A)$, $K(A)^*=-K(A)$, 且 $A=H(A)+K(A)$, $H(A)^*$ 和 $K(A)^*$ 分别称为 A 的 Hermite 与斜 Hermite 部分. 记

$$M_A=\max\{|a_{kl}|\mid 1\leqslant k,l\leqslant n\}.$$

设 λ 是方阵 A 的特征值, $\mathrm{Re}\lambda$ 和 $\mathrm{Im}\lambda$ 分别是 λ 的实部与虚部. 证明:

$$|\lambda|\leqslant nM_A,\ |\mathrm{Re}\lambda|\leqslant nM_{H(A)},$$
$$|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant nM_{K(A)}. \tag{7}$$

当 A 是实方阵时有

$$|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant M_{K(A)}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}. \tag{8}$$

证 设 x 是复方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则 $Ax=\lambda x$. 两边同乘以 x^*, 得到 $x^*Ax=\lambda x^*x$. 记 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 则

$$x^*Ax=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\times\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\left(\sum_{k=1}^n a_{k1}\bar{x}_k,\sum_{k=1}^n a_{k2}\bar{x}_k,\cdots,\sum_{k=1}^n a_{kn}\bar{x}_k\right)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n a_{kl}\bar{x}_k x_l,$$

而

$$\lambda x^*x=\lambda(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

$$=\lambda\sum_{k=1}^n\bar{x}_k x_k=\lambda\sum_{k=1}^n|x_k|^2.$$

因此

$$\lambda\sum_{k=1}^n|x_k|^2=\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n a_{kl}\bar{x}_k x_l.$$

两端取模得到

$$|\lambda|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right)=\left|\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n a_{kl}\bar{x}_k x_l\right|$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n|a_{kl}||\bar{x}_k||x_l|$$
$$\leqslant M_A\left(\sum_{l=1}^n\sum_{k=1}^n|x_k||x_l|\right)$$
$$=M_A\left(\sum_{k=1}^n|x_k|\right)^2.$$

由 Cauchy 不等式得到

$$|\lambda|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right)\leqslant nM_A\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right).$$

因为特征向量 x 是非零的, 所以 $x^*x=\sum_{k=1}^n|x_k|^2>0$. 从而

$$|\lambda|\leqslant nM_A.$$

其次由 $x^*Ax=\lambda x^*x$ 得到, $x^*A^*x=\bar{\lambda}x^*x$. 因此

$$x^*H(A)x=x^*\left(\frac{A+A^*}{2}\right)x=\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}x^*x$$
$$=(\mathrm{Re}\lambda)x^*x,$$
$$x^*\frac{1}{i}K(A)x=x^*\left(\frac{A-A^*}{2i}\right)x=\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2i}x^*x$$
$$=(\mathrm{Im}\lambda)x^*x. \tag{⑮}$$

其中 $i=\sqrt{-1}$. 将 $H(A)$ 与 $\mathrm{Re}\lambda$ 分别视为等式 $x^*Ax=\lambda x^*x$ 中之方阵 A 与数 λ, 并重复上面的证明, 即得 $|\mathrm{Re}\lambda|\leqslant nM_{H(A)}$. 同理有 $|\mathrm{Im}\lambda|\leqslant nM_{K(A)}$.

现在设 $A=[a_{kl}]$ 为实方阵, 则 $K(A)'=\frac{1}{2}(A-A')'=\frac{1}{2}(-A+A')=-K(A)'$. 即 $K(A)=[c_{kl}]$ 是实的斜对称方阵. 因此 $c_{kk}=0$, $k=1,2,\cdots,n$, 且 $c_{lk}=-c_{kl}$, $1\leqslant k\neq l\leqslant n$. 由式⑮得到

$$|\mathrm{Im}\lambda|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right)$$
$$=\left|\sum_{1\leqslant k\neq l\leqslant n}c_{kl}\bar{x}_k x_l\right|$$
$$=\left|\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}c_{kl}(\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l)\right|$$
$$\leqslant\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}|c_{kl}||\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l|$$
$$\leqslant M_{K(A)}\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}|\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l|.$$

由 Cauchy 不等式得到

$$|\mathrm{Im}\lambda|\left(\sum_{k=1}^n|x_k|^2\right)$$
$$\leqslant M_{K(A)}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$\times\left(\sum_{1\leqslant k<l\leqslant n}|\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l|^2\right)^{1/2}. \tag{⑯}$$

由于

$$|\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l|^2$$
$$=(\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l)(\overline{\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l})$$
$$=(\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l)(x_k\bar{x}_l-\bar{x}_k x_l)$$
$$=-(\bar{x}_k x_l-x_k\bar{x}_l)^2,$$

因此

$$\sum_{1\le k<l\le n} |\bar{x}_k x_l - x_k\bar{x}_l|^2$$
$$= -\sum_{1\le k<l\le n} (\bar{x}_k x_l - x_k\bar{x}_l)^2$$
$$= (\sum_{k=1}^{n} \bar{x}_k x_k)^2 - (\sum_{k=1}^{n}\bar{x}_k^2)(\sum_{l=1}^{n} x_l^2)$$
$$\leqslant (\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2)^2.$$

由式 ⑯ 得到

$$|\operatorname{Im}\lambda|(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2)$$
$$\leqslant (M_{K(A)}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}})(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2).$$

而 $x^*x = \sum_{k=1}^{n}|x_k|^2 > 0$，因此

$$|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant M_{K(A)}\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

注 Hirsch 定理的证明仍是从方阵 A 的值域入手. 这是关键性一步. 而所谓值域 $F(A)$ 实际上是和方阵 A 所确定的二次型 $q(A) = x^*Ax$ 有密切联系. 这样就可以用分析方法(例如 Cauchy 不等式)来处理方阵 A 的特征值.

3.10.15 (Bendixson, 1902) 设 A 是 n 阶实方阵. 记 $S(A) = \dfrac{A+A'}{2}$，$K(A) = \dfrac{A-A'}{2}$，则 $S(A)$ 是对称的，$K(A)$ 是斜对称的，而且 $A = S(A) + K(A)$. $S(A)$ 与 $K(A)$ 分别称为方阵 A 的对称部分与斜对称部分. 设 $S(A)$ 的最大与最小特征值分别记作 μ_1 与 μ_n. 证明：如果 λ 是实方阵 A 的特征值，则

$$\mu_n \leqslant \operatorname{Re}\lambda \leqslant \mu_1. \tag{9}$$

证 设 x 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量，则 $Ax = \lambda x$. 因此

$$x^*Ax = \lambda x^*x.$$

两端取共轭转置，并注意 A 是实方阵，得到

$$x^*A'x = \bar{\lambda}x^*x.$$

因此

$$x^*S(A)x = x^*\left(\frac{A+A'}{2}\right)x$$
$$= (\operatorname{Re}\lambda)x^*x. \tag{⑰}$$

设实对称方阵 $S(A)$ 的所有特征值为 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$，其中 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$，则存在 n 阶实正交方阵 O，使得

$$S(A) = O'\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)O.$$

代入式 ⑰ 得到

$$x^*O'\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)Ox$$
$$= (\operatorname{Re}\lambda)x^*O'\cdot Ox. \tag{⑱}$$

记 $y = Ox = (y_1, y_2, \cdots, y_n)'$. 因为 O 是正交的，从而是可逆的，而特征向量 x 是非零的，所以 $y = Ox \neq 0$. 由式 ⑱ 得到

$$y^*\operatorname{diag}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)y = (\operatorname{Re}\lambda)y^*y.$$

即

$$(\operatorname{Re}\lambda)y^*y = \sum_{k=l}^{n}\mu_k|y_k|^2.$$

由于 $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$，所以

$$\mu_n y^*y = \mu_n(\sum_{k=l}^{n}|y_k|^2) \leqslant (\operatorname{Re}\lambda)y^*y$$
$$\leqslant \mu_1(\sum_{k=l}^{n}|y_k|^2) = \mu_1 y^*y.$$

因为 $y \neq 0$，所以 $y^*y > 0$. 于是由上式即得式(9).

3.10.16 设 $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 是 n 阶对角复方阵，U 是 n 阶酉方阵，λ 是方阵 UA 的特征值，证明： $\min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$
$\leqslant |\lambda| \leqslant \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$.

证 设 x 是方阵 UA 的相应于特征值 λ 的特征向量，则 $UAx = \lambda x$. 由于 U 是酉方阵，因此 $U^{-1} = U^*$. 所以由 $UAx = \lambda x$ 得到 $Ax = \lambda U^*x$. 两边取共轭转置，得到 $x^*A^* = \bar{\lambda}x^*U$. 因此

$$x^*A^*Ax = \lambda\bar{\lambda}x^*UU^*x. \tag{⑲}$$

因为 U 是酉方阵，所以 $UU^* = I_n$，又 $A^*A = \operatorname{diag}(|a_1|^2, |a_2|^2, \cdots, |a_n|^2)$. 记 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$，则由式 ⑲ 得到

$$|\lambda|^2x^*x = \sum_{j=1}^{n}|a_j|^2|x_j|^2. \tag{⑳}$$

记 $a = \max\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$，
$b = \min\{|a_1|, |a_2|, \cdots, |a_n|\}$.

则由式 ⑳ 得到

$$b^2x^*x = b^2\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right) \leqslant |\lambda|^2x^*x$$
$$\leqslant a^2\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2\right) = a^2x^*x. \tag{㉑}$$

因为特征向量 x 是非零的，所以 $x^*x > 0$. 因此由式 ㉑ 即得

$$b \leqslant |\lambda| \leqslant a.$$

这就是所要证明的.

3.10.17 设 U_1 是 n 阶酉方阵 U 的任意一个 k 阶子方阵，λ 是 U_1 的特征值. 证明：$|\lambda| \leqslant 1$.

证 设 $U\begin{pmatrix} i_1\, i_2 \cdots i_k \\ j_1\, j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$ 是酉方阵 U 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行与第 $j_1, j_2, \cdots, j_k$ 列的交叉位置上元素组成的 k 阶子方阵，其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，$1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_k \leqslant n$.

先考虑 $U_1 = U\begin{pmatrix} 1\,2 \cdots k \\ 1\,2 \cdots k \end{pmatrix} = U_{11}$. 设 λ 是 U_{11} 的特征值，x 是 U_{11} 的相应于 λ 的特征向量，则 $U_{11}x =$

λx.因此 $x^* U_{11}^* = \bar{\lambda} x^*$,从而

$$x^* U_{11}^* U_{11} x = \lambda\bar{\lambda} x^* x = |\lambda|^2 x^* x. \quad ㉒$$

将 n 阶酉方阵U分块为$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}$,因为 U 为酉方阵,所以

$$I_n = U^* U = \begin{bmatrix} U_{11}^* & U_{21}^* \\ U_{12}^* & U_{22}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{11}^* U_{11} + U_{21}^* U_{21} & U_{11}^* U_{12} + U_{21}^* U_{22} \\ U_{12}^* U_{11} + U_{22}^* U_{21} & U_{12}^* U_{12} + U_{22}^* U_{22} \end{bmatrix}$$

因此

$$U_{11}^* U_{11} + U_{21}^* U_{21} = I_k.$$

将上式代入式 ㉒,得到

$$x^*(I_k - U_{21}^* U_{21})x = |\lambda|^2 x^* x,$$

即 $|\lambda|^2 x^* x + (x^* U_{21}^*)(U_{21} x) = x^* x$. ㉓

记 $y = U_{21} x$,则$(x^* U_{21}^*)(U_{21} x) = y^* y \geqslant 0$.所以由式 ㉓ 得到

$$|\lambda|^2 x^* x \leqslant x^* x.$$

因为特征向量 x 是非零的,所以 $x^* x > 0$.于是由上式得到 $|\lambda|^2 \leqslant 1$,即 $|\lambda| \leqslant 1$.

再考虑 $U_1 = U\begin{pmatrix} i_1 i_2 \cdots i_k \\ j_1 j_2 \cdots j_k \end{pmatrix}$.设 $i_1 i_2 \cdots i_k i_{k+1} \cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列,其中 $1 \leqslant i_{k+1} < i_{k+2} < \cdots < i_n \leqslant n$.将 n 阶单位方阵I_n 的第$i_1, i_2, \cdots, i_n$ 行依次调为第 $1,2,\cdots,n$ 行得到的方阵记作P,则 P 是元素为 0 或 1 的 n 阶方阵,而且 $P'P = I_n = PP'$,即 P 是一个酉方阵.因此 PU 是酉方阵,而且是将方阵 U 的第 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 行依次调为第 $1,2,\cdots,n$ 行得到的.同样设 $j_1 j_2 \cdots j_k j_{k+1} \cdots j_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列,其中 $1 \leqslant j_{k+1} < j_{k+2} < \cdots < j_n \leqslant n$.将 n 阶单位方阵I_n 的第$j_1, j_2, \cdots, j_n$ 列依次调为第 $1,2,\cdots,n$ 列得到的方阵记作Q,则 Q 是酉方阵,而且 PUQ 是将PU 的第$j_1, j_2, \cdots, j_n$ 列调到第 $1,2,\cdots,n$ 列得到的酉方阵.因此 U_1 是酉方阵 PUQ 的西北角k 阶子矩阵.从而由上一段的证明,U_1 的特征值 λ 的模不大于 1.

3.10.18 设 A 是n 阶复正交方阵,即 $A'A = I_n = AA'$,且 x 是方阵 A 的属于特征值λ 的特征向量,$\lambda \neq \pm 1$.证明:$x'x = 0$.

证 因为x 是方阵A 的属于特征值λ 的特征向量,因此 $Ax = \lambda x$.两边取转置得到,$x'A' = \lambda x'$.因此 $x'A'Ax = \lambda^2 x'x$.由于 A 是复正交的,所以 $A'A = I_n$.因此$\lambda^2 x'x = x'A'Ax = x'x$.于是$(\lambda^2 - 1)x'x = 0$.由题设 $\lambda \neq \pm 1$,即 $\lambda^2 - 1 \neq 0$,所以 $x'x = 0$.

3.10.19 (Rayleigh-Ritz 定理)设 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶实对称方阵.n 维实的列向量空间 R^n 中所有满足 $\|x\| = \sqrt{x'x} = 1$ 的向量集合 S 称为R^n 中 n 维单位超球面.记

$$f(x) = x'Ax, \quad x \in S.$$

证明:单位超球面 S 上实函数$f(x)$ 具有最大值 λ_1 与最小值 λ_n,λ_1 与 λ_n 分别是方阵A 的最大与最小特征值,而且满足 $f(y) = \lambda_1$ 的单位向量 y 是方阵A 的相应于特征值λ_1 的特征向量,而满足 $f(z) = \lambda_n$ 的单位向量 z 是方阵A 的相应于特征值λ_n 的特征向量.

证 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)' \in S$,则

$$f(x) = x'Ax = (x_1, x_2, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j.$$

因此 $f(x)$ 是关于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的二次实函数,所以 $f(x)$ 是定义在单位超球面 S 上的连续函数.而单位超球面S是R^n 中一个有界闭集,所以 $f(x)$ 在 S 上具有最大值 λ_1 和最小值 λ_n.

其次记

$$F(A) = \{f(x) = x'Ax \mid x \in S\},$$

$$R(A) = \{g(x) = \frac{x'Ax}{x'x} \mid x \in R^n \setminus \{0\}\}.$$

显然,$F(A) \subseteq R(A)$.反之设 $g(x) = \dfrac{x'Ax}{x'x} \in R(A)$,其中 $x \in R^n \setminus \{0\}$.记 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x'x}} x$,则 $y'y = \dfrac{1}{x'x} x'x = 1$,即 $y \in S$.而

$$f(y) = y'Ay = \frac{1}{x'x} x'Ax = g(x).$$

即$g(x) = f(y) \in F(A)$.因此$R(A) \subseteq F(A)$.所以 $F(A) = R(A)$.这说明 $F(A)$ 与 $R(A)$ 具有相同的最大值与最小值.

现在设 $y \in R^n \setminus \{0\}$,使得 $g(y) = \lambda_1$.记

$$h(\lambda) = g(y + \lambda\omega), \quad \omega \in R^n.$$

因为

$$h(\lambda) = g(y + \lambda\omega) = \frac{(y + \lambda\omega)'A(y + \lambda\omega)}{(y + \lambda\omega)'(y + \lambda\omega)} = \frac{y'Ay + \lambda(\omega'Ay + y'A\omega) + \lambda^2\omega'A\omega}{y'y + \lambda(\omega'y + y'\omega) + \lambda^2\omega'\omega},$$

所以 $h(\lambda)$ 是关于 λ 的连续函数,而且 $h(0) = g(y) = \lambda_1$,即 $h(\lambda)$ 在 $\lambda = 0$ 处取到最大值 λ_1.对 $h(\lambda)$ 求微商得到

$$h'(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}h(\lambda) = \frac{d}{d\lambda}\frac{(y + \lambda\omega)'A(y + \lambda\omega)}{(y + \lambda\omega)'(y + \lambda\omega)}$$

$$= \frac{1}{(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(y+\lambda\omega)^t A(y+\lambda\omega)$$
$$- \frac{(y+\lambda\omega)^t A(y+\lambda\omega)}{[(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega)]^2} \times$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega). \quad ㉔$$

由于

$$(y+\lambda\omega)^t A(y+\lambda\omega)$$
$$= y^t Ay + \lambda(\omega^t Ay + y^t A\omega) + \lambda^2\omega^t A\omega$$
$$= y^t Ay + 2\lambda\omega^t Ay + \lambda^2\omega^t A\omega,$$

其中用到 $y^t A\omega = (y^t A\omega)^t = \omega^t A^t y = \omega^t Ay$,所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(y+\lambda\omega)^t A(y+\lambda\omega) = 2\omega^t Ay + 2\lambda\omega^t A\omega. \quad ㉕$$

而

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega)$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}[y^t y + 2\lambda\omega^t y + \lambda^2\omega^t\omega]$$
$$= 2\omega^t y + 2\lambda\omega^t\omega. \quad ㉖$$

将式㉕与㉖代入式㉔得到

$$h'(\lambda) = \frac{2\omega^t Ay + 2\lambda\omega^t A\omega}{(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega)}$$
$$- h(\lambda)\frac{2\omega^t y + 2\lambda\omega^t\omega}{(y+\lambda\omega)^t(y+\lambda\omega)}.$$

因为 $h(0) = \lambda_1$,所以

$$h'(0) = \frac{1}{y^t y}(2\omega^t Ay - 2\lambda_1\omega^t y)$$
$$= \frac{2}{y^t y}\omega^t(A - \lambda_1 I_n)y = 0.$$

从而

$$\omega^t(A - \lambda_1 I_n)y = 0.$$

由于 $\omega \in R^n$ 是任意的,所以 $(A - \lambda_1 I_n)y = 0$,从而 $Ay = \lambda_1 y$. 即 y 是方阵 A 的属于 λ_1 的特征向量. 于是使 $f(y) = \lambda_1$ 的单位向量 y 是方阵 A 的属于 λ_1 的单位特征向量. 同理可证,使 $f(z) = \lambda_n$ 的单位向量 z 是方阵 A 的属于 λ_n 的单位特征向量.

最后设 λ_0 是方阵 A 的特征值,y 是方阵 A 的属于 λ_0 的特征向量,则 $Ay = \lambda_0 y$. 注意 $y^t y > 0$. 记 $x = \frac{1}{\sqrt{y^t y}}y$. 则 $Ax = \frac{1}{\sqrt{y^t y}}Ay = \frac{1}{\sqrt{y^t y}}\lambda_0 y = \lambda_0 x$, 且 $x^t x = 1$. 于是

$$f(x) = x^t Ax = \lambda_0 x^t x, \quad x \in S.$$

且

$$\lambda_n \leqslant f(x) \leqslant \lambda_1.$$

因此 λ_1 与 λ_n 分别是方阵 A 的最大与最小特征值.

注 1 Rayleigh-Ritz 定理给出了实对称方阵的最大与最小特征值的分析性质. 对于其他特征值,Courant 和 Fischer 给出了相应的分析刻划.

注 2 在 Rayleigh-Ritz 定理证明中,证明了对称方阵 A 的值域 $F(A)$ 与其 Rayleigh-Ritz 商 $R(A)$ 是相等的. 所以从值域 $F(A)$ 或 Rayleigh-Ritz 商 $R(A)$ 来考虑实对称方阵的特征值是一样的.

注 3 对于 n 阶 Hermite 方阵 A, Rayleigh-Ritz 定理仍成立. 当然此时考虑的是 n 维复的列向量空间 C^n 中 n 维单位超球面 S 上的函数 $f(z) = z^* Az$.

3.10.20 设 λ 是 n 阶复方阵 $A = [a_{ij}]$ 的特征值. 证明:

$$\min_{\|x\|=1} |x^* Ax| \leqslant |\lambda| \leqslant \max_{\|x\|=1} |x^* Ax|. \quad (10)$$

证 设 y 是方阵 A 的属于特征值 λ 的特征向量. 则 $Ay = \lambda y$. 因为特征向量 y 是非零的,因此 $y^* y > 0$. 记 $z = \frac{1}{\sqrt{y^* y}}y$,则 $Az = \lambda z$,且 $\|z\| = \sqrt{z^* z} = 1$. 因此 $z^* Az = \lambda$. 所以

$$\min_{\|x\|=1} |x^* Ax| \leqslant |z^* Az| = |\lambda|$$
$$\leqslant \max_{\|x\|=1} |x^* Ax|.$$

注 不等式(10)不一定是精确的. 例如,$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,则方阵 A 的特征值为 1,其重数为 2. 设 $x = (x_1, x_2)^t$ 是 2 维实的单位列向量,则

$$x^t Ax = 1 + x_1 x_2,$$

其中 $x_1^2 + x_2^2 = 1$. 记 $x_1 = \cos\theta, x_2 = \sin\theta$,则

$$x^t Ax = 1 + \sin\theta\cos\theta = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\theta.$$

因此

$$\max_{\|x\|=1} |x^t Ax| = \max_{\|x\|=1} x^t Ax = \frac{3}{2},$$

而 $\min_{\|x\|=1} |x^t Ax| = \min_{\|x\|=1} x^t Ax = \frac{1}{2}$. 所以对实方阵 A,式(10)不一定是精确的. 对复方阵更是如此.

3.10.21 设 λ_1 是 n 阶实对称方阵 $A = [a_{kl}]$ 的最大特征值. 证明:

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}.$$

证 由 Rayleigh-Ritz 定理,

$$\lambda_1 = \max_{\|x\|=1} |x^t Ax|.$$

记 $e = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \cdots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^t \in R^n$,则 $\|e\| = \sqrt{e^t e} = 1$,而

$$e^t Ae = \frac{1}{n}(1,1,\cdots,1)$$
$$\times \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} \leqslant \max_{|x|=1} |x' A x| = \lambda_1.$$

3.10.22　设 A 是 n 阶正定对称实方阵. 证明：对任意 n 维实的列向量 x 与 y,

$$(x'Ay)^2 \leqslant (x'Ax)(y'Ay), \tag{11}$$

其中等式当且仅当列向量 x 与 y 线性相关时成立.

证　记

$$f(\lambda) = (x+\lambda y)'A(x+\lambda y),$$

其中 λ 是实变量. 则

$$f(\lambda) = x'Ax + 2\lambda x'Ay + \lambda^2 y'Ay.$$

因为对称方阵 A 是正定的, 因此当 y 非零时, $y'Ay > 0$. 所以

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= y'Ay(\lambda^2 + 2\lambda\frac{x'Ay}{y'Ay} + \frac{x'Ax}{y'Ay}) \\ &= y'Ay[(\lambda + \frac{x'Ay}{y'Ay})^2 \\ &\quad + \frac{x'Ax}{y'Ay} - (\frac{x'Ay}{y'Ay})^2] \\ &= (y'Ay)(\lambda + \frac{x'Ay}{y'Ay})^2 \\ &\quad \frac{(x'Ax)(y'Ay) - (x'Ay)^2}{y'Ay} \\ &\geqslant \frac{(x'Ax)(y'Ay) - (x'Ay)^2}{y'Ay}. \end{aligned} \tag{㉗}$$

当 $\lambda = -\frac{x'Ay}{y'Ay}$ 时 $f(\lambda) = \frac{(x'Ax)(y'Ay) - (x'Ay)^2}{y'Ay}$. 因为对称方阵 A 是正定的, 所以 $f(\lambda) = (x+\lambda y)'A(x+\lambda y) \geqslant 0$, 从而 $(x'Ax)(y'Ay) - (x'Ay)^2 \geqslant 0$. 这就证明, 当 y 非零时, 式(11) 成立. 而当 $y = 0$ 时, 式(11) 中等式成立.

设式(11) 中等式成立, 则由式 ㉗

$$f(\lambda) = (y'Ay)(\lambda + \frac{x'Ay}{y'Ay})^2,$$

而且当 $\lambda_0 = -\frac{x'Ay}{y'Ay}$ 时 $f(\lambda_0) = 0$, 即

$$f(\lambda_0) = (x+\lambda_0 y)'A(x+\lambda_0 y) = 0.$$

因为对称方阵 A 是正定的, 所以 $x + \lambda_0 y = 0$. 因此 x 与 y 线性相关. 反之设 x 与 y 线性相关, 则存在不全为零的实数 a 与 b, 使得 $ax + by = 0$. 如果 $a = 0$, 则 $b \neq 0$ 且 $by = 0$. 因此 $y = 0$. 显然式(11) 中等式成立. 因此设 $a \neq 0$, 则由 $a(x + \frac{b}{a}y) = 0$ 得到, $x + \frac{b}{a}y = 0$. 因为对称方阵 A 是正定的, 因此 $f(\frac{b}{a}) = 0$. 由式 ㉗ 得到, $(x'Ax)(y'Ay) - (x'Ay)^2 = 0$. 所以式(11) 中等式成立.

3.10.23　设 A 与 B 是 n 阶正定 Hermite 方阵. 证明: 方阵 AB 的特征值是正的.

证　设 λ 是方阵 AB 的特征值, z 是方阵 AB 的相应于特征值 λ 的特征向量, 则 $ABz = \lambda z$. 因为 A 是正定的, 所以 A 可逆, 而且 A^{-1} 也是正定的. 因此, $Bz = \lambda A^{-1}z$. 于是 $z^*Bz = \lambda z^*A^{-1}z$. 由于特征向量 z 是非零的, 而 A^{-1} 是正定的, 所以 $z^*A^{-1}z > 0$. 于是,

$$\lambda = \frac{z^*Bz}{z^*A^{-1}z}.$$

由于 B 是正定的, 所以 $z^*Bz > 0$. 从而 $\lambda > 0$.

3.10.24　设 λ_1 与 λ_n 分别是 n 阶正定 Hermite 方阵 H 的最大与最小特征值. 证明: 对任意 n 维复的非零列向量 z, 有

$$\frac{\lambda_n}{\lambda_1} \leqslant \frac{(z^*z)^2}{(z^*H^{-1}z)(z^*Hz)} \leqslant 1. \tag{12}$$

证　记

$$f(z) = \frac{(z^*H^{-1}z)(z^*Hz)}{(z^*z)^2}.$$

设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是正定 Hermite 方阵 H 的特征值, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$. 则存在 n 阶酉方阵 U, 使得

$$H = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)U.$$

所以

$$H^{-1} = U^* \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})U.$$

因此

$$\begin{aligned} f(z) = &\frac{1}{(z^*U^* \cdot Uz)^2} \times \\ &(z^*U^* \operatorname{diag}(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1})Uz) \times \\ &(z^*U^* \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)Uz). \end{aligned}$$

记 $x = Uz = (x_1, x_2, \cdots, x_n)'$, 则

$$\begin{aligned} f(z) = &\frac{1}{(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^2} \times \\ &(\lambda_1^{-1}|x_1|^2 + \lambda_2^{-1}|x_2|^2 + \cdots + \lambda_n^{-1}|x_n|^2) \times \\ &(\lambda_1|x_1|^2 + \lambda_2|x_2|^2 + \cdots + \lambda_n|x_n|^2). \end{aligned}$$

因为 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n > 0$, 所以 $\lambda_n^{-1} \geqslant \lambda_{n-1}^{-1} \geqslant \cdots \geqslant \lambda_1^{-1} > 0$. 因此

$$f(z) \leqslant \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_n}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^2}{(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}.$$

从而

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z^*z)^2}{(z^*H^{-1}z)(z^*Hz)} \geqslant \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

另一方面, 由 Cauchy 不等式得到

$$f(z) \geqslant \frac{|x_1|^4 + |x_2|^4 + \cdots + |x_n|^4}{(|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^2} \geqslant 1.$$

因此

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{(z^*z)^2}{(z^*H^{-1}z)(z^*Hz)} \leqslant 1.$$

所以式(12) 成立.

3.10.25　设 n 阶实对称方阵 A 是正定的. 证明: 对任意 n 维实的列向量 x 和 y, 恒有

$$x'Ax + y'A^{-1}y \geqslant 2x'y, \tag{13}$$

其中等式成立的充要条件是什么?

证　考虑 $2n$ 阶方阵

$$B = \begin{bmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{bmatrix}.$$

由于

$$\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ A^{-1} & I_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & A^{-1} \\ 0 & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A^{-1} \end{bmatrix},$$

其中 A 与 A^{-1} 是正定的, 所以 $B = \begin{bmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{bmatrix}$ 是正定的. 因此对任意 n 维实的列向量 x 与 y,

$$(x', y')\begin{bmatrix} A & -I_n \\ -I_n & A^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= x'Ax + y'A^{-1}y - 2x'y \geqslant 0,$$

其中当且仅当 $x = y = 0$ 时等式成立. 这就证明式 (13) 成立, 而且等式成立的充要条件是 $x = y = 0$.

第 4 篇　抽象代数

§ 4.1　基本概念

抽象代数是讲述群、环、域等代数结构的性质的一门数学课.它的主要研究对象不是个别元素的特性,而是各种代数结构的性质,并且是通过不同代数结构之间的联系(即同态)和比较来把握它们的特性.本课程也比较抽象,注重培养学生从公理出发抽象和严格地逻辑推理能力.另一方面,读者一定要掌握和熟悉大量的例子,切忌只背诵一些定义的空泛化倾向.

本节介绍集合论、群、环、域的基本概念和例子.本课程所用的集合论概念主要有三个:集合的映射,等价关系,运算.本节主要利用定义和已证得的结论来解题.

4.1.1　设 $f:A\to B$ 是从集合 A 到集合 B 的映射,则

(1) f 为单射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $g:B\to A$,使得 $gf=1_A$,其中 1_A 表示集合 A 上的恒等映射.

(2) f 为满射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $g:B\to A$,使得 $fg=1_B$.

(3) f 为双射 $\Leftrightarrow$ 存在映射 $g:B\to A$,使得 $gf=1_A$,并且 $fg=1_B$.

又若 f 为双射,则满足 $gf=1_A$ 和 $fg=1_B$ 的映射 $g:B\to A$ 只有一个.

解　(1) $f:A\to B$ 为单射,是指对每个 $b\in B$,至多有一个 $a\in A$,使得 $f(a)=b$.如下定义映射 $g:B\to A$.对于 $b\in B$,如果有 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$,由上述这样的 a 只有一个,于是令 $g(b)=a$.如果不存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$,则令 $g(b)=c$,其中 c 是 A 中任意固定的元素.对于这样定义的 g,我们有 $gf=1_A$.因为对每个 $a\in A$,使 $b=f(a)$,则由定义知 $g(a)=b$.于是 $(gf)(a)=g(f(a))=g(b)=a$.所以 $gf=1_A$.

另一方面,如果 f 不是单射,即 A 中存在两个不同的元素 a 和 a',使得 $f(a)=f(a')$.那末对于每个映射 $g:B\to A$,都有 $(gf)(a)=g(f(a))=g(f(a'))=(gf)(a')$.所以 $gf\neq 1_A$.

(2) 若 f 是满射,即对每个 $b\in B$,都有 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$.我们取满足此性质的任意一个 a,令 $g(b)=a$.则对每个 $b\in B$,$(fg)(b)=f(g(b))=f(a)=b$.于是 $fg=1_B$.另一方面,如果 $fg=1_B$,则对每个 $b\in B$,$f(g(b))=(fg)(b)=1_B(b)=b$.所以 A 中有元素 $a=g(b)$,使 $f(a)=b$.从而 f 为满射.

(3) 若 $f:A\to B$ 为双射,即同时是单射和满射.则由(1)和(2)可知存在两个映射 $g:B\to A$ 和 $g':B\to A$,使得 $gf=1_A$,$fg'=1_B$.于是 $g'=1_Ag'=(gf)g'=g(fg')=g1_B=g$.因此 $fg=1_B$.这就证明了命题(3)的"$\Rightarrow$".而命题(3)的"$\Leftarrow$"部分由(1)和(2)立刻推出.

最后,若 $f:A\to B$ 是双射,g 和 g' 是从 B 到 A 的两个映射,使得 $fg=fg'=1_B$,$gf=g'f=1_A$.则 $g=1_Ag=(g'f)g=g'(fg)=g'1_B=g'$.这就完成了证明.

注　为了证明 $f:A\to B$ 是双射,我们常常不用定义,而采用 4.1.1(3) 的等价条件,即直接构造一个映射 $g:B\to A$,使得 $fg=1_B$ 并且 $gf=1_A$.注意由 4.1.1(3) 可知这样的 g 是唯一的,叫作 f 的逆,表示成 f^{-1}.

4.1.2　如果 $f:A\to B$ 和 $g:B\to C$ 都是双射,则 $gf:A\to C$ 也是双射,并且 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

解　(证法一) 先证 gf 为单射.如果 $(gf)(a)=(gf)(a')=c\in C$,则 $g(f(a))=g(f(a'))$.由 g 为单射可知 $f(a)=f(a')$.再由 f 是单射可知 $a=a'$.这就表明 gf 为单射.

再证 gf 为满射.对每个 $c\in C$,由 g 是满射可知存在 $b\in B$ 使得 $g(b)=c$.又由 f 为满射可知存在 $a\in A$ 使得 $f(a)=b$.于是 $(gf)(a)=g(f(a))=g(b)=c$.这就表明 gf 是满射.

为证 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$,我们只需对每个 $c\in C$,证明 $(gf)^{-1}(c)=(f^{-1}g^{-1})(c)$.令 $g^{-1}(c)=b\in B$,$f^{-1}(b)=a\in A$,则 $g(b)=c$,$f(a)=b$.于是 $(f^{-1}g^{-1})(c)=f^{-1}(g^{-1}(c))=f^{-1}(b)=a$.另一方面,由于 $(gf)(a)=g(f(a))=g(b)=c$,所以 $(gf)^{-1}(c)=a$.于是 $(f^{-1}g^{-1})(c)=a=(gf)^{-1}(c)$.这就表明 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

(证法二) 由于 f 和 g 都是双射,所以存在逆映射 $f^{-1}:B\to A$ 和 $g^{-1}:C\to B$.由结合律知

$$(f^{-1}g^{-1})(gf) = f^{-1}(g^{-1}g)f = f^{-1}1_B f = f^{-1}f = 1_A,$$

$$(gf)(f^{-1}g^{-1}) = g(ff^{-1})g^{-1} = g1_B g^{-1} = gg^{-1} = 1_C.$$

根据4.1.1(3)可知 $gf:A\to C$ 是双射，并且 $(gf)^{-1}=f^{-1}g^{-1}$.

注 第一种证法是所有事情都放到元素上去验证，第二种证法则是利用4.1.1以及映射的运算，在证明中集合 A,B,C 中的元素不出现. 我们强烈希望大家学会第二种证法. 这是本课程经常使用的基本方法.

4.1.3 设 A 是任意非空集合，则 A 上的所有等价关系和集合 A 的所有分析是一一对应的.

证 集合 A 上的一个关系 $\sim$ 叫做等价关系，是指它满足以下三个条件：

(1)(自反性) 对每个 $a\in A, a\sim a$；

(2)(对称性) 若 $a\sim b$，则 $b\sim a$；

(3)(传递性) 若 $a\sim b$ 并且 $b\sim c$，则 $a\sim c$.

集合 A 的一些子集合 $A_i(i\in I)$ 叫做 A 的一个分析，是指：(1) 每个 A_i 都是非空集合，(2) 任意两个不同的 $i,j\in I, A_i\cap A_j=\varnothing$(空集)，(3) A 是所有这些子集的并集，即 $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$.

以 E 表示 A 的所有等价关系组成的集合，以 P 表示 A 的所有分析组成的集合. 设 $\pi\in E$，即 π 是 A 的一个等价关系，则集合 A 对等价关系 π 分成一些等价类. 我们在每个等价类中取出一个代表元，这些代表元组成的集合记作 I(叫 A 对等价关系 π 的一个完全代表系). 对于每个 $a\in A$，我们以 $[a]$ 表示 a 所在的等价类. 每个等价类显然是 A 的非空子集合，并且若 a 和 a' 是 I 中不同元素，则 a 和 a' 在不同的等价类. 由等价关系的定义可知 $[a]\cap[a']=\varnothing$(如果 $[a]$ 和 $[a']$ 有公共元素 b，则 $a\sim b, a'\sim b$. 于是 $a\sim a'$. 这就导出矛盾). 最后，由于 I 是 A 对于 π 的完全代表系，可知 $A=\bigcup\limits_{a\in I}[a]$. 这就表明 $\{[a]:a\in I\}$ 是集合 A 的一个分析. 我们把这个分析记成 p_π. 于是我们就定义出一个映射

$$f:E\to P,\quad f(\pi)=p_\pi.$$

我们要证 f 是双射. 为此我们定义另一个映射 $g:P\to E$. 办法是：对于 A 的每个分析 $p\in P$，设分析 p 是把 A 分成 $\{A_i:i\in I\}$，则集合 A 便有如下的关系 $\sim$：对于 a 和 $a'\in A$，

$$a\sim a'\Leftrightarrow a \text{ 和 } a' \text{ 属于同一个 } A_i.$$

容易验证 $\sim$ 是等价关系. 我们就定义 $g(p)$ 为这个等价关系. 不难看出 $gf=1_E, fg=1_P$. 这就表明 f 是双射，即集合 E 和 P 是一一对应的.

注 我们也可把上面习题写成如下的形式：求证 $f:P\to E, f(\pi)=p_\pi$ 是双射. 但这不是一个好的习题. 认识到等价关系和分析本质上是同一概念的过程，就是发现映射 f 并且认识到它是双射的过程，在这里，重要的是在于"发现"，而不在于去"验证". 这也是本课程最重要能力的培养：寻求各种代数结构之间的联系，也就是去发现它们之间的各种同态映射.

下面是群、环、域的基本概念，以及同态和同构.

4.1.4 设 S 是含幺半群. 以 $U(S)$ 表示 S 的所有可逆无素组成的集合，则 $U(S)$ 对于 S 中的运算是群.

证 集合 S 和其上满足结合律的运算，叫做半群. 具有幺元素 e(即对每个 $a\in S, ae=ea=a$)的半群叫含幺半群. 含幺半群 S 中元素 a 叫做可逆的，是指存在 $b\in S$，使得 $ab=ba=e$. 这样的 b 若存在，则必唯一. 叫做 a 的逆元素，记成 a^{-1}. 若含幺半群每个元素都可逆，则叫做群. 所以为了证明 $U(S)$ 是群，关键在于弄清楚我们要证什么. 如果说："既然 $U(S)$ 是由 S 的可逆元组成的，当然 $U(S)$ 中元素均可逆，所以 $U(S)$ 当然是群. 这是完全不对的. 根据严格的群定义，我们应当证明：

① $U(S)$ 对于 S 中的运算是含幺半群. 首先证明 $U(S)$ 是半群，即 S 中的运算可以在 $U(S)$ 中进行. 这相当于要证明：若 $a,b\in U(S)$，则 $ab\in U(S)$(至于结合律是不用验证的，因为它在 S 中有结合律，所以在 $U(S)$ 中亦然). 证明则很容易：由 $a,b\in U(S)$，可知 a 和 b 在 S 中可逆，由 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ 也知 ab 也在 S 中可逆. 因此 $ab\in U(S)$. 其次要证明 $U(S)$ 中有幺元素. 这是由于 S 中有幺元素 e，而 e 可逆($e^{-1}=e$)，从而 $e\in U(S)$，并且是 $U(S)$ 中的幺元素. 因此 $U(S)$ 是含幺半群.

② $U(S)$ 中每个元素在 $U(S)$ 中都可逆. 这是由于 $U(S)$ 中每个元素 a 都在 S 中可逆，于是有 $b\in S$，使得 $ab=ba=e$. 由此知 b 也是 S 中可逆元，即 $b\in U(S)$. 所以 $U(S)$ 的每个元素 a 都在 $U(S)$ 中可逆. 综合上述，可知 $U(S)$ 对 S 中的运算为群.

注 此题看起来似乎不难，但不少人不知道推理需要这样严格. 如果没有严格训练和习惯，在解复杂问题时很容易出现逻辑错误.

4.1.5 设 G 是半群，则以下三条件彼此等价.

(1) G 为群；

(2) 对于任意元素 $a,b\in G$，方程 $ax=b$ 和 $xa=b$ 在 G 中都可解；

(3) G 中存在右幺元素 e(即对每个 $a\in G$，均

有 $ae = a$)，并且 G 中每个元素 x 均有右逆元素 x'(即 $xx' = e$).

证 (1)⇒(2)：若 G 为群，则方程 $ax = b$ 和 $xa = b$ 分别有解 $x = a^{-1}b$ 和 $x = ba^{-1}$.

(2)⇒(3)：对于 $a \in G$，由(2)中条件知存在 $e \in G$，使得 $ae = a$. 现在对 G 中任意元素 b，由(2)中条件知有 $x \in G$ 使得 $xa = b$. 于是 $be = (xa)e = x(ae) = xa = b$. 这就表明 e 是 G 的一个右幺元素. 进而由(2)中条件知有 $a' \in G$ 使得 $aa' = e$，所以 G 中每个元 a 都有右逆.

(3)⇒(1)：设 $x \in G$. 由(3)中条件知存在 $x' \in G$ 使得 $xx' = e$(其中 e 是 G 的一个右幺元素). 又对于 x'，存在 $x'' \in G$，使得 $x'x'' = e$. 于是 $x'x = x'(xe) = x'x(x'x'') = x'(xx')x'' = (x'e)x'' = x'x'' = e$，并且 $x = xe = x(x'x) = (xx')x = ex$. 所以对于任意元素 x 都有 $x = ex$ 和 $x = xe$. 即 e 是 G 中的幺元素，并且上面表明每个元素 x 都有逆元素 x'，所以 G 是群.

注 在(2)中没有假定方程解的唯一性，在条件(3)中也没有假定右幺元素和右逆元素的唯一性.

4.1.6 设 G 是有限半群，则 G 为群的充分必要条件是 G 满足左消去律和右消去律，即对任意元素 $x, y, z \in G$，

左消去律：若 $zx = zy$，则 $x = y$.

右消去律：若 $xz = yz$，则 $x = y$.

证 若 G 为群，则当 $zx = zy$ 时，将等式两边左乘以 z^{-1} 可知 $x = y$. 同样可知右消去律成立(证明中并没有用到 G 有限这个事实，所以在任意群中均有左消去律和右消去律). 反之，设有限半群 G 满足两个消去律. 为证 G 是群，我们只需验证习题4.1.5中的条件(2)成立. 对每个 $a, b \in G$，定义映射

$$f: G \to G,\quad f(x) = ax\ (\text{对每个}\ x \in G).$$

由左消去律易知 f 是单射($ax = ay \Rightarrow x = y$). 现在利用 G 的有限性，以 $|G|$ 表示 G 的元素个数. 由 f 是单射可知 $|G| = |f(G)|$. 但是 $f(G) \subseteq G$，所以必然 $G = f(G)$，即 f 为满射. 这就表明存在 $x \in G$ 使得 $ax = b$. 同样可证方程 $xa = b$ 在 G 中也可解. 于是 G 为群.

4.1.7 证明下列集合对于所指定的运算是群.

(1) 行列式不为零的 n 阶实方阵全体 $GL_n(\mathbf{R})$ 对于矩阵乘法.

(2) 非空集合 M 到它自身的双射全体 $S(M)$ 对于映射的合成运算.

(3) $Z_n^* = \{[a]: a \in \mathbf{Z}, (a, n) = 1\}$ 对于模 n 同余类的乘法运算(其中 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合，(a, n) 表示整数 a 和 n 的最大公因子，$[a]$ 表示整数 a 的模 n 同余类).

证 可以用群的定义直接验证题中三个集合对于所述的运算是群，也可以利用4.1.4来做.

(1) 以 $M_n(\mathbf{R})$ 表示 n 阶实方阵全体. 它对于乘法是含幺半群，因为乘法可在 $M_n(\mathbf{R})$ 中进行并且满足结合律，而 n 阶单位方阵是幺元素. 由线性代数知道，n 阶实方阵可逆当且仅当它的行列式不为零，所以 $M_n(\mathbf{R})$ 的可逆元全体就是 $GL_n(R)$. 由4.1.4知 $GL_n(\mathbf{R})$ 是乘法群.

(2) 以 $M(A)$ 表示从集合 A 到自身的映射全体. 这也是含幺半群，因为两个从 A 到 A 的映射的合成仍是从 A 到 A 的映射，并且合成运算有结合律，恒等映射是幺元素. 进而由4.1.1可知：从 A 到 A 映射是可逆的当且仅当它是双射. 所以 $M(A)$ 的可逆元全体就是 $S(M)$，因此 $S(M)$ 是群.

(3) 以 Z_n 表示 n 个模 n 同余类组成的集合. 它对于乘法是含幺半群，幺元素为$[1]$. 现在设$[a]$为可逆元素，则存在整数 $b \in \mathbf{Z}$，使得$[a][b] = [1]$，即 $ab \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$. 于是 $ab - 1 = nm$，其中 $m \in \mathbf{Z}$. 如果正整数 d 是 a 和 n 的公因子，则 d 也是 $ab - nm = 1$ 的因子，于是 $d = 1$. 这表明 a 和 n 互素，即$(a, n) = 1$. 反过来，由$(a, n) = 1$，则 $0 \cdot a, a, 2a, \cdots, (n-1)a$ 彼此模 n 不同余(因为若 $ia \equiv ja (\mathrm{mod}\, n)$，由$(n, a) = 1$ 可知 $i \equiv j (\mathrm{mod}\, n)$). 所以$[0], [a], [2a], \cdots, [(n-1)a]$是 Z_n 的 n 个不同的元素. 但是 Z_n 只有 n 个元素. 所以一定有 $b \in \mathbf{Z}$，使得$[ba] = [1]$，即$[b][a] = 1$. 由于 Z_n 是交换半群，所以也有$[a][b] = [1]$，即当$(a, n) = 1$时，$[a]$是 Z_n 的乘法可逆元. 这就证明了 Z_n^* 是 Z_n 的乘法可逆元全体，从而 Z_n^* 是乘法群.

我们也可用4.1.6证明 Z_n^* 是乘法群，因为 Z_n^* 是有限乘法半群. 如果$[x], [y], [z] \in Z_n^*$ 并且 $[x][z] = [y][z]$，即 $xz \equiv yz (\mathrm{mod}\, n)$ 于是 $n \mid xz - yz = (x - y)z$(这里 $a \mid b$ 表示 a 整除 b). 但是 n 和 z 互素，所以 $n \mid x - y$，即 $x \equiv y (\mathrm{mod}\, n)$，$[x] = [y]$. 这表明消去律成立(对于交换半群，左消去律和右消去律是一回事). 由4.1.6可知 Z_n^* 是乘法群.

注 $GL_n(\mathbf{R})$ 叫做实数域上的 n 阶一般线性群. 同样有群 $GL_n(\mathbf{Q})$，$GL_n(\mathbf{C})$ 等等，其中 $\mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ 分别表示有理数域、实数域和复数域. 若 A 为 n 元集合，则 $S(A)$ 也记作 S_n，叫做 n 元对称群，$S(A)$ 的每个元素叫集合 A 的置换. $GL_n(\mathbf{R})$ 和 $S(A)$ 的子群分别叫矩阵群和置换群. 它们是非交换群的重要例子.

4.1.8 试决定整数加法群 $\mathbf{Z}$ 和有理数加法群 $\mathbf{Q}$ 的自同构群.

解 群 G 到自身的所有自同态构成含幺半群，其中可逆元素就是群 G 的自同构，所以群 G 的自同构全体(对于合成运算)是群，记成 $\mathrm{Aut}(G)$.

现在决定加法群 $\mathbf{Z}$ 的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$. 设 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$，则 $f(0)=0$，因为 $\mathbf{Z}$ 对加法的幺元素为 0，而每个群同态都把幺元素映成幺元素. 现在令 $n=f(1)\in\mathbf{Z}$，则对每个正整数 m，由同态定义知 $f(a+b)=f(a)+f(b)$. 于是

$$\begin{aligned}f(m)&=f(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{m\text{个}})\\&=\underbrace{f(1)+f(1)+\cdots+f(1)}_{m\text{个}}\\&=mf(1)=mn.\end{aligned}$$

而 $f(-m)=-f(m)=-mn$. 这就表明对每个整数 m 都有 $f(m)=nf(m)$. 于是 $f(\mathbf{Z})=n\mathbf{Z}$. 由于 f 是满射，所以 $n\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$，从而必然 $n=\pm1$. 即 $f(1)=\pm1$. 如果 $f(1)=1$，由前面的推导可知对每个 $m\in\mathbf{Z}$ 都有 $f(m)=m$，f 是恒等自同构. 若 $f(1)=-1$，则对每个 $m\in\mathbf{Z}$，$f(m)=-m$，这也是加法群 $\mathbf{Z}$ 的自同构，因为 $f(a+b)=-(a+b)=-a-b=f(a)+f(b)$. 所以 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z})$ 是二元群.

现在决定有理数加法群的自同构群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$. 设 $f\in\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$，并且令 $\alpha=f(1)\in\mathbf{Q}$. 则和前面一样可知对每个整数 m，均有 $f(m)=m\alpha$. 由于 f 是双射而 $f(0)=0$，$f(1)=\alpha$，可知 $\alpha\neq0$. 现在每个有理数都可写成 $a=m/n$，其中 $m,n\in\mathbf{Z}$ 并且 $n>0$. 于是

$$m\alpha=f(m)=f(n\cdot\frac{m}{n})=nf(\frac{m}{n})=nf(a).$$

于是 $f(a)=\alpha\dfrac{m}{n}=\alpha a$. 换句话说，$f$ 由它在 1 处的取值 $\alpha=f(1)$ 所完全决定. 我们把这个映射记成 f_α. 由上述，f_α 把每个有理数 a 映成 αa. 由于

$$\begin{aligned}f_\alpha(a+b)&=\alpha(a+b)\\&=\alpha a+\alpha b=f_\alpha(a)+f_\alpha(b),\end{aligned}$$

从而对每个非零有理数 α，f_α 都是加法群 $\mathbf{Q}$ 的自同构. 所以

$$\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})=\{f_\alpha:\alpha\in\mathbf{Q},\alpha\neq0\}.$$

以上决定出集合 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$. 但是这还不够，因为习题要求决定自同构群，所以必须决定 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$ 的群结构. 由上述我们有满映射

$$\varphi:\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\{0\}\to\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}),\ \varphi(\alpha)=f_\alpha.$$

易知 φ 也是单射($\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)\Rightarrow f_\alpha=f_\beta\Rightarrow\alpha=f_\alpha(1)=f_\beta(1)=\beta$)，所以 φ 是双射. 进而对每个 $a\in\mathbf{Q}$，

$$(f_\alpha f_\beta)(a)=f_\alpha(\beta a)=\alpha\beta a=f_{\alpha\beta}(a),$$

可知 $f_\alpha f_\beta=f_{\alpha\beta}$. 这就表明对任意 $\alpha,\beta\in\mathbf{Q}^*$，

$$\varphi(\alpha\beta)=f_{\alpha\beta}=f_\alpha f_\beta=\varphi(\alpha)\varphi(\beta),$$

所以 φ 是乘法群 $\mathbf{Q}^*$ 到群 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$ 的同态. 由于 φ 为双射，所以 φ 是群同构，即 $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q})$ 同构于非零有理数乘法群.

4.1.9 实数加法群 $\mathbf{R}$ 和正实数乘法群 $\mathbf{R}^+$ 是否同构？有理数加法群 $\mathbf{Q}$ 和非零有理数乘法群 $\mathbf{Q}^*$ 是否同构？

解 作映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$，$f(\alpha)=10^\alpha$. 由 $f(\alpha+\beta)=10^{\alpha+\beta}=10^\alpha\cdot10^\beta=f(\alpha)f(\beta)$，可知 f 是群同态. 再考虑对数映射 $\lg:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$($\lg(\alpha)$ 表示以 10 为底的对数)，这是 f 的逆映射. 所以 f 为双射，即 f 为群同构. 这表明实数加法群 $\mathbf{R}$ 同构于正实数乘法群 R^+.

现在设 $f:\mathbf{Q}\to\mathbf{Q}^*$ 是从加法群 $\mathbf{Q}$ 到乘法群 $\mathbf{Q}^*$ 的同构. 则有 $a\in\mathbf{Q}$，使得 $f(a)=2$. 但是 $f(a)=f(\frac{a}{2}+\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})f(\frac{a}{2})$，于是 $f(\frac{a}{2})=\pm\sqrt{f(a)}=\pm\sqrt{2}$. 可是 $\sqrt{2}$ 不是有理数. 这个矛盾表明有理数加法群和非零有理数乘法群不同构.

4.1.10 设 n 为正整数，$n\geqslant2$. 则下列三个条件彼此等价

(1) n 是素数；

(2) Z_n 是域；

(3) Z_n 是整环.

解 (1)⇒(2)：交换环 Z_n 的 n 个元素为 $[0],[1],[2],\cdots,[n-1]$. 如果 n 是素数，则 $1,2,\cdots,n-1$ 均与 n 互素. 由 4.1.7 可知 $[1],[2],\cdots,[n-1]$ 都是环 Z_n 的可逆元素，由定义知 Z_n 是域.

(2)⇒(3)：由于域必是整环.

(3)⇒(1)：含幺交换环 R 叫作整环，是指若 a 和 b 都是 R 中非零元素，则 $ab\neq0$. 现在若 n 不是素数，则 $n=ab$，其中 $a,b\in\mathbf{Z}$，并且 $1\leqslant a,b\leqslant n-1$. 于是 $[a],[b]$ 均不为 Z_n 中零元素，但是 $[a][b]=[ab]=[n]=[0]$ 是 Z_n 中零元素. 所以环 Z_n 不是整环. 因此若 Z_n 是整环，则 n 必是素数.

4.1.11 (1) 决定加法群 Z_n 和环 Z_n 的自同构群.

(2) 决定整数环 $\mathbf{Z}$，有理数域 $\mathbf{Q}$ 和实数域 $\mathbf{R}$ 的自同构群.

解 (1) 环 R 到环 R' 的映射 $f:R\to R'$ 叫做环同态，是指对任意 $a,b\in R$，$f(a+b)=f(a)+f(b)$ 并且 $f(ab)=f(a)f(b)$. 若环同态是双射，则叫做环同构. 每个环 R 的自同构全体也形成群. 我们先决定环 Z_n 的自同构：若 f 为环 Z_n 的自同构，

则必然 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 这里 $0=[0]$, $1=[1]$($f(0)=0$是因为 f 为加法群Z_n 的自同构,进而 $f(1)=f(1\cdot 1)=f(1)f(1)$,而 $f(1)\neq 0$(因为 $1\neq 0$). 所以 $f(1)=1$). 于是对每个 $i\geqslant 1$, $f([i])=f([1]+\cdots+[1])=f([1])+\cdots+f([1])=[1]+\cdots+[1]=[i]$. 这就表明环 Z_n 的自同构只有恒等自同构.

现在决定加法群Z_n的自同构群. 设 f 是加法群 Z_n 的自同构. 则 $f([a]+[b])=f([a])+f([b])$, $f([0])=[0]$. 令 $f([1])=[a]$,其中 $a\in\mathbf{Z}$. 则对每个 $b\in\mathbf{Z}$, 易知 $f([b])=f(b[1])=bf([1])=b[a]=[ab]$. 所以 f 由在[1] 的值 $f([1])=[a]$ 所唯一决定. 将这个函数记为 $f_{[a]}$. 于是 $f_{[a]}([b])=[ab]$. 由 $f_{[a]}([b]+[c])=f_{[a]}([b+c])=[a(b+c)]=[ab]+[ac]$ 可知 $f_{[a]}$ 是加法群 Z_n 的自同态,并且 $f_{[a]}$ 是双射当且仅当 a 和n 互素. 于是加法群 Z_n 的自同构群作为集合是

$$S=\{f_{[a]}:[a]\in Z_n(a,n)=1\}$$
$$=\{f_{[a]}:[a]\in Z_n^*\}.$$

进而由于 $f_{[ab]}([c])=[a][bc]=f_{[a]}([bc])=f_{[a]}f_{[b]}([c])$, 从而 $f_{[ab]}=f_{[a]}f_{[b]}$. 这就表明加法群 Z_n 的自同构群同构于乘法群Z_n^*.

(2) 设 f 为整数环 $\mathbf{Z}$ 的自同构,则 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 于是对每个整数 $n\in\mathbf{Z}$, $f(n)=f(n\cdot 1)=nf(1)=n$. 这就表明整数环只有恒等自同构. 设 g 是有理数域$\mathbf{Q}$的自同构. 与上面类似,可知对每个整数 n, $g(n)=n$. 于是对每个有理数 $\alpha=\frac{m}{n}(m, n\in\mathbf{Z})$, $m=g(m)=g(n\cdot\frac{m}{n})=ng(\alpha)$. 由于 $n\neq 0$, 可知 $g(\alpha)=\frac{m}{n}=\alpha$. 这就表明有理数域$\mathbf{Q}$也只有恒等自同构.

最后决定实数域 $\mathbf{R}$ 的自同构群. 设 f 为域 $\mathbf{R}$ 的自同构. 与上面一样可知对每个有理数 a, $f(a)=a$. 问题在于对于无理数 α, $f(\alpha)$ 应当取何值?如果 α 是正实数,则 $\alpha=\beta^2$,其中 β 为实数. 于是 $f(\alpha)=f(\beta)^2>0$(由 $\alpha\neq 0$ 知 $\beta\neq 0$,从而 $f(\beta)\neq 0$, $f(\beta)^2>0$). 这表明 f 把正实数映成正实数. 于是若 α 和β 是两个实数, 并且 $\alpha>\beta$, 则 $\alpha-\beta>0$, 于是 $f(\alpha)-f(\beta)=f(\alpha-\beta)>0$, 即 $f(\alpha)>f(\beta)$. 现在设 α 为无理数,则存在两列有理数 a_n, b_n,使 $a_n<\alpha<b_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$. 由以上所证可知 $a_n=f(a_n)<f(\alpha)<f(b_n)=b_n$. 取极限即知 $\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}a_n\leqslant f(\alpha)\leqslant\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=\alpha$. 于是 $f(\alpha)=\alpha$. 这就表明实数域也只有恒等自同构.

4.1.12 设 R 是含幺交换环, $R[x]$ 表示 R 上的多项式环, $R[[x]]$ 表示 R 上的(形式)幂级数环. 对每个环 S,我们以 $U(S)$ 表示 S 的(乘法)可逆元素群. 则

(1) R 为整环$\Leftrightarrow R[x]$ 为整环$\Leftrightarrow R[[x]]$ 为整环.

(2) 若 R 为整环,则

$U(R[x])=U(R)$,

$U(R[[x]])=\{\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n: a_0\in U(R)\}$.

解 (1) 多项式环 $R[x]$ 是由系数属于 R 的所有关于 x 的多项式组成的. 它对于通常的加法和乘法是环. 环 $R[[x]]$ 是由所有幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots(a_i\in R)$ 组成的集合. 定义加法和乘法为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n,$$
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

其中 $c_0=a_0b_0$, $c_1=a_0b_1+a_1b_0$, $\cdots$, $c_n=\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}(n\geqslant 1)$. 则 $R[[x]]$ 也是环. 并且若 R 为含幺交换环,则 $R[x]$ 和 $R[[x]]$ 也是含幺交换环. 由 $R\subset R[x]\subset R[[x]]$ 和整环的定义可知 $R[[x]]$ 为整环$\Rightarrow R[x]$ 是整环$\Rightarrow R$ 是整环. 反过来,设 R 是整环. $R[[x]]$ 中元素 $\alpha=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 和$\beta=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 如果都不是 0,则必然有 $k, l\geqslant 0$,使得 $a_0=a_1=\cdots=a_{k-1}=0$, $a_k\neq 0$, $b_0=b_1=\cdots=b_{l-1}=0$, $b_l\neq 0$. 于是

$$\begin{aligned}&\alpha\beta\\&=(a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots)(b_lx^l+b_{l+1}x^{l+1}+\cdots)\\&=a_kb_lx^{k+l}+\sum_{n=k+l+1}^{\infty}c_nx^n.\end{aligned}$$

其中 $c_n\in R$. 由于 R 是整环,可知 $a_kb_l\neq 0$. 这表明 $\alpha\beta\neq 0$. 这就得到 $R[[x]]$ 是整环. 所以 R 是整环$\Rightarrow R[[x]]$是整环.

(2) R 中可逆元显然是 $R[x]$ 中可逆元. 反过来,若 $f=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n\in U(R[x])$,其中 $n\geqslant 0$, $a_i\in R$, $a_n\neq 0$,则有 $g=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m\in R[x](b_m\neq 0, m\geqslant 0)$ 使得 $fg=1$. 由于 fg 的最高次项为 $a_nb_mx^{n+m}$,而 $n, m\geqslant 0$, $a_nb_m\neq 0$(因为 R 是整环). 所以由 $fg=1$ 可知必然 $n=m$

$=0$,并且 $a_0b_0=1$. 于是 $a_0\in U(R)$ 并且 $f=a_0$. 这就表明 $U(R[x])=U(R)$.

现在设 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in U(R[[x]])$,则有 $g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\in R[[x]]$,使得 $fg=1$,即 $a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+\cdots=1$. 于是 $a_0b_0=1$,即 $a_0\in U(R)$. 反过来,若 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\in R[[x]]$,并且 $a_0\in U(R)$,我们可以求得 $g=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n\in R[[x]]$,使得 $fg=1$. 因为这相当于要求

$$a_0b_0=1,a_0b_1+a_1b_0=0,a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0=0,\cdots,\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}=0(n\geqslant 1),$$

所以我们只需依次取

$$b_0=a_0^{-1},b_1=-a_0^{-1}a_1b_0,$$
$$b_2=-a_0^{-1}(a_1b_1+a_2b_0),\cdots$$
$$b_n=-a_0^{-1}\sum_{i=1}^{n}a_ib_{n-i}\quad(n\geqslant 1)$$

即可.这就表明

$$U(R[[x]])=\{\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n:a_0\in U(R)\}.$$

4.1.13 求证

(1) 若 G 是有限群,令 $n(G)$ 是方程 $x^2=1$ 在 G 中的解数;则 $n(G)\equiv|G|(\mathrm{mod}2)$.

(2) 对每个群 G,映射 $\alpha\to\alpha^{-1}$ 是群 G 的自同构当且仅当 G 是交换群.

(3) 若 G 中每个元素 g 都满足 $g^2=1$,则 G 是交换群.

解 (1) 考虑映射:$f:G\to G,f(\alpha)=\alpha^{-1}$. 我们有:$\alpha$ 是映射 f 的不动点(即 $f(\alpha)=\alpha$)$\Leftrightarrow\alpha^{-1}=\alpha\Leftrightarrow\alpha^2=1\Leftrightarrow\alpha$ 是方程 $x^2=1$ 的解,如果 $\alpha\in G$ 不是 $x^2=1$ 的解,则 $\alpha\neq\alpha^{-1}$. 由 $(\alpha^{-1})^{-1}=\alpha$ 可知 α^{-1} 也不是 $x^2=1$ 的解. 这表明 G 中不是 $x^2=1$ 的解的元素必成对出现. 所以 $|G|-n(G)$ 是偶数,即 $|G|\equiv n(G)(\mathrm{mod}2)$.

(2) 若 $f(\alpha)=\alpha^{-1}$ 是群 G 的自同构,则对任意元素 $a,b\in G,a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)=f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$. 于是 $ab=ba$,即 G 是交换群. 反之若 G 是交换群,则对任意 $a,b\in G,f(ab)=(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}=a^{-1}b^{-1}=f(a)f(b)$. 从而 f 为群 G 的自同态. 又 f 显然是双射,于是 f 为自同构.

(3) 若 G 中每个元素 g 都满足 $g^2=1$,则 $g=g^{-1}$. 于是 G 到 G 的映射 $f(\alpha)=\alpha^{-1}$ 是恒等映射,所以是自同构. 由(2) 即知 G 是交换群.

4.1.14 (1) 环 R 叫作布尔环,是指对每个 $a\in R$ 均有 $a^2=a$. 求证布尔环必是特征为2的交换环.

(2) 对每个集合 S,以 $F(S)$ 表示从 S 到 Z_2 的所有映射组成的集合. 对于 $f,g\in F(S)$,定义

$$(f+g)(s)=f(s)+g(s),$$
$$(fg)(s)=f(s)g(s)\quad(s\in S).$$

求证 $F(S)$ 对于如此定义的加法和乘法是布尔环.

(3) 设 S 是一个集合,$P(S)$ 是 S 的全部子集构成的集合,即 $P(S)=\{A:A\subseteq S\}$. 对于 S 的子集 A 和 B,记 $A\setminus B=\{s\in S:s\in A,s\notin B\}$. 现在定义

$$A+B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A),$$
$$A\cdot B=A\cap B.$$

求证 $P(S)$ 对于上述定义的运算是布尔环.

(4) 求证环 $F(S)$ 和 $P(S)$ 是同构的.

解 (1) 设 R 是布尔环. 则对每个 $a\in R,4a=4a^2=(a+a)^2=a+a=2a$. 于是 $2a=0$. 这表明环 R 的特征是2(如果存在正整数 m 使得对每个 $a\in R$ 均有 $ma=0$,则满足此条件的最小正整数叫作环 R 的特征. 如果不存在这样的正整数,则环 R 的特征规定为零). 并且对每个 $a\in R,a=-a$. 进而对 R 中任意元素 $a,b,a+b=(a+b)^2=a^2+ab+ba+b^2=a+ab+ba+b$. 于是 $ab+ba=0$,即 $ab=-ba=ba$. 这就表明 R 是交换环.

(2) 不难由定义来验证 $F(S)$ 是环,并且由于 $Z_2=\{[0],[1]\},[0]^2=[0],[1]^2=[1]$. 所以对 $F(S)$ 中每个 f 均有 $f^2=f$. 即 $F(S)$ 是布尔环.

(3) 和(4) 由定义直接验证 $P(S)$ 是环比较复杂. 我们现在把 $P(S)$ 和已经知道是环的 $F(S)$ 加以比较. 考虑映射 $\varphi:P(S)\to F(S),\varphi(A)=f_A$. 即 φ 把 $P(S)$ 中元素 A(即 A 是 S 的子集)映成如下定义的函数 $f_A\in F(S)$,其中对每个 $s\in S$,

$$f_A(s)=\begin{cases}[1], & 若\ s\in A\\ [0], & 若\ s\notin A\end{cases}$$

不难验证:$f_A=f_B\Leftrightarrow A=B$. 于是 φ 是从 $P(S)$ 到 $F(S)$ 为双射. 再验证 $f_Af_B=f_{A\cap B},f_A+f_B=f_{A+B}$,其中 $A+B$ 是(3) 中定义的运算. 这就表明通过双射 φ^{-1},由 $F(S)$ 的环结构可以赋以 $P(S)$ 的一个环结构,其中 $P(S)$ 中加法和乘法为(3) 中所定义的. 最后由 $F(S)$ 是布尔环,可见与它同构的 $P(S)$ 也是布尔环.

注 设 R 为环,S 是一个集合,并且 $\varphi:R\to S$ 是一个双射. 我们可以通过 φ 把 R 的环结构转移到 S 上来,而使 S 成为与 R 同构的环,并且 φ 就是同构. 办法是:对于 S 中元素 a 和 b 定义 $a+b=\varphi(\varphi^{-1}(a)+\varphi^{-1}(b)),ab=\varphi(\varphi^{-1}(a)\varphi^{-1}(b))$. 对

于群、域等其他代数结构也可以作类似的事情.

§4.2 结构理论

现在给出与群、环、域的结构有关的一些题目. 关于群的结构主要是子群和陪集分解,群的交换性以及群的直积. 关于环的结构主要是理想、唯一分解环和多项式环. 关于域的结构主要是代数扩张和超越扩张以及有限域的结构.

解题时用到的方法主要有:利用定义、定理、性质解题,验证法、反证法、构造法、爱森斯坦判别法,通过证等价命题来达到证题目的,将一个复杂命题分解为几个简单命题,采用各个击破法,等等. 这些方法有时单独使用,有时联合运用,请读者通过具体例子来深刻体会.

4.2.1 设 G 是有限群, $A,B\leqslant G$($A\leqslant G$ 表示 A 是 G 的子群). 则

(1) $|AB|=|A|\cdot|B|/|A\cap B|$;

(2) 若 $A\leqslant B\leqslant G$,则 $[G:A]=[G:B][B:A]$;

(3) $[G:A\cap B]\leqslant[G:A][G:B]$. 又若 $[G:A]$ 和 $[G:B]$ 互素,则 $[G:A\cap B]=[G:A][G:B]$,并且 $AB=G$.

解 (1) 若 A 和 B 是 G 的子群,则 $A\cap B$ 也是 G 的子群. 集合 $AB=\{ab;a\in A,b\in B\}=\bigcup\limits_{b\in B}Ab$ 虽然不一定是子群,但是为一些陪集 Ab 的并集. 另一方面, B 又是它对子群 $A\cap B$ 的一些陪集 $(A\cap B)b$ 的并. 但是对于 $b,b'\in B$,我们有

$$Ab=Ab'\Leftrightarrow b'b^{-1}\in A\Leftrightarrow b'b^{-1}\in A\cap B$$
$$\Leftrightarrow(A\cap B)b=(A\cap B)b'.$$

这表明上述两种陪集分解中有同样多的陪集,即 $|AB|/|A|=|B|/|A\cap B|$. 这就是(1).

(2) 设 G 对子群 B 的陪集分解为

$$G=\bigcup_{j=1}^{n}Bg_j,\quad n=[G:B].$$

而 B 对子群 A 的陪集分解为

$$B=\bigcup_{i=1}^{m}Ab_i,\quad m=[B:A].$$

则 $G=\bigcup\limits_{j=1}^{n}\bigcup\limits_{i=1}^{m}Ab_ig_j$. 如果 $Ab_ig_j=Ab_{i'}g_{j'}$($1\leqslant i,i'\leqslant m$, $1\leqslant j,j'\leqslant n$),则 $b_ig_jg_{j'}^{-1}b_{i'}^{-1}\in A$,从而 $g_jg_{j'}^{-1}\in b_i^{-1}Ab_{i'}\subseteq B$. 于是 $Bg_j=Bg_{j'}$. 这表明 $j=j'$. 从而 $b_ib_{i'}^{-1}\in A$,即 $Ab_i=Ab_{i'}$,这也得出 $i=i'$. 这就表明当 $(i,j)\neq(i',j')$ 时, Ab_ig_j 和 $Ab_{i'}g_{j'}$ 是 G 对 A 的不同陪集. 于是 $[G:A]=mn=[G:B][B:A]$.

(3) 由 $AB\subseteq G$ 和(1)可知 $[B:A\cap B]=\dfrac{|B|}{|A\cap B|}=\dfrac{|AB|}{|A|}\leqslant\dfrac{|G|}{|A|}=[G:A]$. 再由(2)可知

$$[G:A\cap B]=[G:B][B:A\cap B]$$
$$\leqslant[G:B][G:A]\qquad(*)$$

另一方面,由上式知 $[G:B]\mid[G:A\cap B]$. 同样地也应当有 $[G:A]\mid[G:A\cap B]$. 如果 $[G:A]$ 和 $[G:B]$ 互素,则 $[G:A][G:B]\mid[G:A\cap B]$. 再由(*)式可知 $[G:A\cap B]=[G:A][G:B]$,即 $\dfrac{|G|}{|A\cap B|}=\dfrac{|G|}{|A|}\cdot\dfrac{|G|}{|B|}$,所以 $|G|=\dfrac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$. 但是由(1)知 $|AB|=\dfrac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$,于是 $|AB|=|G|$. 由 $AB\subseteq G$ 即知 $AB=G$.

4.2.2 设 G 为群, $A\leqslant G,B\leqslant G$. 求证

(1) $(A\cup B)\leqslant G\Leftrightarrow A\leqslant B$ 或者 $B\leqslant A$.

(2) 若 A 和 B 均不为 G,则 $A\cup B\neq G$. 换句话说,每个群不能表示成它的两个真子群之并.

(3) 若有 $a,b\in G$,使得 $Aa=Bb$,则 $A=B$.

解 (1) 若 $A\leqslant B$ 或者 $B\leqslant A$,则 $(A\cup B)$ 为 B 或 A,从而 $(A\cup B)\leqslant G$. 反之若(1)的右边不成立,则存在 $a\in A\setminus B$ 和 $b\in B\setminus A$. 于是 $a,b\in A\cup B$. 如果 $A\cup B$ 是子群,则 $ab\in A\cup B$,所以 $ab\in A$ 或者 $ab\in B$. 如果 $ab\in A$,由于 $a\in A$ 并且 A 为群,从而 $b\in A$. 这与 $b\in B\setminus A=\{b\in B;b\notin A\}$ 相矛盾. 同样地,若 $ab\in B$ 也可导出矛盾. 因此 AB 不能为 G 的子群.

(2) 若 $A\cup B=G$,则由(1)知 $A\leqslant B$ 或者 $B\leqslant A$. 从而 $G=A\cup B=B$,或者 $G=A\cup B=A$. 这与假定 A 和 B 是 G 的真子群相矛盾. 因此 $A\cup B\neq G$.

(3) 若 $Aa=Bb$,则 $A=Bba^{-1}$. 由于子群 A 包含1,而 G 对 B 的右陪集中只有 B 才包含1,从而必然 $Bba^{-1}=B$. 于是 $A=B$.

4.2.3 试给出阶数最小的非交换群.

解 如果群 G 的阶为素数 p,则熟知 G 是循环群,所以必是交换群. 如果 $|G|=4$,由拉格朗日定理, G 中每个元素的阶都是4的因子. 假如 G 中有4阶元素 a,则 $G=\{1,a,a^2,a^3\}$,而 $a^4=1$,因此 G 是循环群. 如果 G 中没有4阶元素,则 G 中所有元素都满足 $x^2=1$. 根据4.1.13(3)可知 G 为交换群. 所以所有4阶群都是交换群. 再设 $|G|=6$. 我们知道集合 $\{1,2,3\}$ 上的6个置换组成对称群 S_3,它的阶为3. 由于 $(12)(13)=(132)$, $(13)(12)=(123)$ 即 $(12)(13)\neq(13)(12)$. 因此 S_3 为阶数最小的非

交换群.

注 我们今后要证明6阶群(不计同构)只有两个:S_3和6阶循环群.所以S_3也是唯一的阶数最小的非交换群.

4.2.4 设G为有限群,$a\in G$,则与a共轭的元素个数为$[G:C(a)]$,其中$C(a)=\{g\in G:ga=ag\}$叫作元素a的中心化子.

解 G中元素a和b共轭,是指存在$g\in G$,使得$b=g^{-1}ag$.G中元素的这种共轭关系是G上的等价关系.从而G分拆成一些共轭元素类的并.如果共轭元素类只包含一个元素a,这表明对每个$g\in G$都有$g^{-1}ag=a$,即$ag=ga$.所以a和G中每个元素都可交换.这样的a叫作群G的中心元素.所有中心元素形成G的一个子群,叫作群G的中心,记为$C(G)$.于是,G为交换群当且仅当$C(G)=G$(即每个元素都是中心元素).一般地,$a\in G$是中心元素当且仅当$C(a)=G$.注意$C(a)$必是G的子群.

对于a的两个共轭元素$g^{-1}ag$和$h^{-1}ah$,

$$g^{-1}ag=h^{-1}ah\Leftrightarrow(gh^{-1})^{-1}a(gh^{-1})=a$$
$$\Leftrightarrow gh^{-1}\in C(a)\Leftrightarrow C(a)g=C(a)h.$$

也就是说,a的两个共轭元素$g^{-1}ag$和$h^{-1}ah$相等当且仅当G对于子群$C(a)$的两个陪集$C(a)g$和$C(a)h$相等.所以a的共轭元素的个数等于G对于子群$C(a)$的陪集个数,即等于$[G:C(a)]$.

4.2.5 (1) 设p为素数,$n\geqslant 1$,G为p^n阶群,则$|C(G)|\geqslant p$.特别地,G有非平凡(即除了1之外的)中心元素.

(2) 对每个素数p,p^2阶群必为交换群.

解 (1) 记$r=|C(G)|$.根据上题证明中所述,$C(G)$中每个元素(即G的中心元素)自成一个共轭元素类.若$a\notin C(G)$,则a所在的共轭元素类共有$[G:C(a)]$个元素.由于$[G:C(a)]=|G|/|C(a)|=p^n/|C(a)|$是整数,所以$[G:C(a)]$为$p^n$的因子.由$a\notin C(G)$可知$C(G)\neq G$.即$[G:C(a)]>[G:G]=1$,于是$[G:C(a)]=p^m$,其中$m\geqslant 1$.于是将$G$分拆成一些共轭元素类时,恰好有$r$类是一元集,而其他类中元数均为$p$的倍数.于是$p^n=|G|\equiv r(\bmod p)$,因此$r\equiv 0(\bmod p)$.由于$1\in C(G)$,从而$r=|C(G)|\geqslant 1$,再由$r\equiv 0(\bmod p)$可知$r\geqslant p$.

(2) 由拉格朗日定理,G中每个元素$a\neq 1$的阶为p或p^2.如果G有p^2阶元素,则G是p^2阶循环群.如果不然,则每个$a\neq 1$的阶均为p.由(1)知G有中心元素$a\neq 1$,而a的阶为p.于是G有子群$A=\{1,a,a^2,\cdots,a^{p-1}\}$,并且$A$也是$C(G)$的子群.由于$|G|=p^2$和$|A|=p$可知$G$中有元素$b\notin A$,而$b$仍是$p$阶元素.我们现在证明$A,Ab,Ab^2,\cdots,Ab^{p-1}$是$G$对于子群$A$的$p$个不同的陪集.如果$Ab^n=Ab^m$,其中$0\leqslant n<m\leqslant p-1$,则$b^{m-n}\in A$,而$1\leqslant m-n\leqslant p-1$.以$[m-n]$表示模$p$同余类,则在有限域$F_p$中$[m-n]\neq[0]$,所以$[m-n]$可逆,即存在$x\in\mathbf{Z}$,使得$[x][m-n]=[1]$.于是$x(m-n)\equiv 1(\bmod p)$即$x(m-n)-1=yp$,其中$y\in\mathbf{Z}$.由$b^{m-n}\in A$和$b^p=1\in A$可知$b=b^{x(m-n)-yp}=(b^{m-n})^x\in A$,这就与前面的$b\notin A$矛盾.因此$A,Ab,\cdots,Ab^{p-1}$是$p$个不同的陪集.但是$[G:A]=|G|/|A|=p^2/p=p$,所以$A,Ab,\cdots,Ab^{p-1}$就是$G$对$A$的全部陪集.于是

$$G=\bigcup_{m=0}^{p-1}Ab^m=\{a^nb^m:0\leqslant n,m\leqslant p-1\}.$$

对于G中任意两个元素g和h,则$g=a^nb^m$,$h=a^{n'}b^{m'}$.由于a^n和$a^{n'}$都是中心元素,所以

$$gh=a^nb^ma^{n'}b^{m'}=a^na^{n'}b^mb^{m'}$$
$$=a^{n+n'}b^{m+m'},$$
$$hg=a^{n'}b^{m'}a^nb^m=a^{n'}a^nb^{m'}b^m$$
$$=a^{n'+n}b^{m'+m},$$

即$gh=hg$.这就表明G是交换群.

4.2.6 设G为群,M为G的子集.则与M共轭的子集个数等于$[G:N_G(M)]$,其中$N_G(M)=\{g\in G:g^{-1}Mg=M\}$是$M$在$G$中的正规化子.

解 G的两个集合M和S叫作共轭的,是指存在$g\in G$,使得$S=g^{-1}Mg$.如果M是G的子群,则与M共轭的集合$g^{-1}Mg$也是G的子群.若N为G的子群并且N的共轭子群只有N自身,则N叫G的正规子群.对每个子集M,M的正规化子$N_G(M)$必是G的子群.对于M的两个共轭子集$g^{-1}Mg$和$h^{-1}Mh$,我们有

$$g^{-1}Mg=h^{-1}Mh\Leftrightarrow hg^{-1}Mgh^{-1}=M$$
$$\Leftrightarrow gh^{-1}\in N_G(M)$$
$$\Leftrightarrow N_G(M)g=N_G(M)h.$$

这就表明M的共轭子集的个数等于G对子群$N_G(M)$的陪集个数,即等于$[G:N_G(M)]$.

4.2.7 设N是群G的子群.则以下四个条件彼此等价

(1) $N\lhd G$(这表示N是G的正规子群);

(2) 对每个$g\in G$,$gN=Ng$;

(3) $N_G(N)=G$;

(4) G对N的每个左陪集都是右陪集.

解 由于$N\lhd G\Leftrightarrow$对每个$g\in G$,$g^{-1}Ng=N\Leftrightarrow$对每个$g\in G$,$Ng=gN$.可知(1)和(2)等价.另一方面,再由$N_G(N)$的定义可知(2)和(3)等价.

(2)⇒(4) 是显然的. 反过来, 若(4) 成立, 则对每个 $g \in G$, 有 g' 使 $gN = Ng'$. 由于 $1 \in N$ 可知 $g = g \cdot 1 \in Ng'$, 于是 $Ng = Ng'$, 即 $gN = Ng$, 这就证明了(2), 从而(2) 和(4) 也等价.

4.2.8 设 G 是 n 阶群. 如果对 n 的每个因子 m, G 至多有一个 m 阶子群, 则 G 必是循环群.

解 对每个正整数 n, 我们以 $\varphi(n)$ 表示 $0,1,2,\cdots,n-1$ 当中与 n 互素的有多少个(函数 $\varphi(n)$ 在数论中叫作欧拉函数). 我们首先证明一个公式: $\sum\limits_{d \mid n}\varphi(d) = n$, 其中求和表示 d 通过 n 的所有正整数因子. 为证明这个公式, 我们考虑一个 n 阶循环群 C_n. 以 g 表示 C_n 的一个生成元, 则 g 是 n 阶元素, 并且 $C_n = \{1, g, g^2, \cdots, g^{n-1}\}$. C_n 中每个元素的阶都是 n 的因子. 设 d 是 n 的一个正整数因子, 我们看一下 C_n 的 n 个元素 $g^t(0 \leqslant t \leqslant n-1)$ 当中有多少是 d 阶元素. 由元素阶的定义知:

g^t 为 d 阶元素

$\Leftrightarrow d$ 是满足 $g^{td} = 1$ 的最小正整数

$\Leftrightarrow d$ 是满足 $n \mid td$ 的最小正整数

(因为 g 的阶为 n)

$\Leftrightarrow d$ 是满足 $\frac{n}{(n,t)} \mid \frac{t}{(n,t)}d$ 的最小正整数

$\Leftrightarrow d$ 是满足 $\frac{n}{(n,t)} \mid d$ 的最小正整数

(因为 $\frac{n}{(n,t)}$ 和 $\frac{t}{(n,t)}$ 互素)

$\Leftrightarrow d = \frac{n}{(n,t)}$.

于是 g^t 的阶为 $\frac{n}{(n,t)}$. 若 g^t 的阶为 d, 则 $(n,t) = \frac{n}{d}$. 于是 $t = \frac{n}{d} \cdot t'$, 其中 t' 为整数. 由 $0 \leqslant t < n$ 可知 $0 \leqslant t' < d$. 而 $(n,t) = \frac{n}{d}$ 相当于 $(d,t') = 1$. 这就表明 C_n 中 d 阶元素的个数等于满足 $0 \leqslant t' < d$, $(d,t') = 1$ 的整数 t' 的个数, 即等于 $\varphi(d)$. 这就表明 $\sum\limits_{d \mid n}\varphi(d) = |C_n| = n$.

现在来证 4.2.8. 由于 G 是 n 阶群, G 中每个元素的阶都是 n 的因子. 由题设知对于 n 的每个正整数因子 d, G 至多有一个 d 阶子群 G_d. 我们以 N_d 表示 G 中 d 阶元素的个数, 则 $\sum\limits_{d \mid n}N_d = |G| = n$. 如果 G 中没有 d 阶元素, 则 $N_d = 0$. 如果 G 有 d 阶元素 g, 则 g 生成 G 的一个 d 阶循环子群 C_d. 由上述可知 $G_d = C_d$. 特别地, G 是 d 阶循环子群, 并且 G 的每个 d 阶元素 g 均属于 G_d. 由上述知循环群 G_d 共有 $\varphi(d)$ 个 d 阶元素, 所以 $N_d = \varphi(d)$. 换句话说, 我们证明了, 对每个 $d \mid n$, $N_d = 0$ 或者 $\varphi(d)$. 于是 $n = \sum\limits_{d \mid n}N_d \leqslant \sum\limits_{d \mid n}\varphi(d) = n$. 由此推出 $\sum\limits_{d \mid n}N_d = \sum\limits_{d \mid n}\varphi(d)$. 但是 $N_d \leqslant \varphi(d)$, 从而必然对每个 $d \mid n$ 都有 $N_d = \varphi(d)$. 特别地取 $d = n$, 则 $N_n = \varphi(n) \geqslant 1$. 这表明 G 中有 n 阶元素, 于是 G 必是 n 阶循环群.

4.2.9 设 G 是有限群, A 是 G 的一个真子群(即 $A \leqslant G$, $|A| < |G|$), 则 G 不是 A 的所有共轭子群的并. 如果不假定 G 是有限的, 命题是否成立?

解 A 的每个共轭子群有形式 $g^{-1}Ag = \{g^{-1}ag : a \in A\}$. 对于 $a, b \in A$, $g^{-1}ag = g^{-1}bg \Leftrightarrow a = b$. 这表明 $|A| = |g^{-1}Ag|$, 即 A 的每个共轭子群都和 A 有同样多的元素. 由 4.2.6 我们知道 A 共有 t 个共轭子群 $A_1, A_2, \cdots, A_t$, 其中 $t = [G : N_G(A)]$. 由定义 $N_G(A) = \{g \in G : gA = Ag\}$ 可知 $A \leqslant N_G(A)$. 因此 $t = \frac{|G|}{|N_G(A)|} \leqslant \frac{|G|}{|A|}$, 即 $t|A| \leqslant |G|$. 如果 $t = 1$, 则 A 的共轭子群只有一个, 就是 A. 由 $|A| < |G|$ 的假设可知命题正确. 如果 $t \geqslant 2$, 则因 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 有公共元素 1, 令 $B_i = A_i - \{1\}$, 则

$$
\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{t}A_i\right| &= 1 + \left|\bigcup_{i=1}^{t}B_i\right| \leqslant 1 + \sum_{i=1}^{t}|B_i| \\
&= 1 + \sum_{i=1}^{t}(|A_i| - 1) = 1 + \sum_{i=1}^{t}(|A| - 1) \\
&= t|A| - (t-1) < t|A| = |G|,
\end{aligned}
$$

即 $\left|\bigcup\limits_{i=1}^{t}A_i\right| < |G|$, 从而 G 不是 $A_1, \cdots, A_t$ 的并集.

若 G 是无限群, 则命题不再成立. 例如取 $G = GL_2(C)$(二阶可逆复方阵乘法群), $A = \left\{\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G : c = 0\right\}$, 不难验证 A 是 G 的真子群. 另一方面, 由线性代数可知 $GL_2(C)$ 中每个方阵都相似于一个若当标准型, 即对每个 $\alpha \in GL_2(C)$, 都有 $g \in GL_2(C)$, 使得 $\alpha = g\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}g^{-1} \in gAg^{-1}$. 这就表明 $GL_2(C)$ 是 A 的所有共轭子群的并.

4.2.10 设 H 和 K 是群 G 的两个子群, $H \cap K = \{1\}$, $G = HK$. 如果 H 中元素和 K 中元素均可交换(即对每个 $h \in H$, $k \in K$, 均有 $hk = kh$), 则 $G \cong H \times K$(其中 $H \times K$ 表示群 H 和 K 的直积, 而 $G \cong G'$ 表示群 G 和 G' 同构).

解 设 G_1 和 G_2 为群. 我们在集合 $G_1 \times G_2 = \{(g_1, g_2) : g_1 \in G_1, g_2 \in G_2\}$ 上定义运算 $(g_1, g_2)(g_1', g_2') = (g_1g_1', g_2g_2')$. 则 $G_1 \times G_2$ 对这个运算是群, 幺元素为 $1 = (1,1)$, $(g_1, g_2)^{-1} = (g_1^{-1},$

g_2^{-1}). 群 $G_1 \times G_2$ 叫作 G_1 和 G_2 的直积.

现在证明4.2.10. 由 $G = HK$ 可知G的每个元素 g 均可表示成$g = hk$, 其中 $h \in H, k \in K$. 再由 $H \cap K = \{1\}$ 可知这种表达式是唯一的, 因为若又有 $g = h'k'$, 其中 $h' \in H, k' \in K$, 则 $hk = h'k'$. 于是$(h')^{-1}h = k'k^{-1}$. 但是它属于 $H \cap K = \{1\}$. 因此$(h')^{-1}h = k'k^{-1} = 1$, 即 $h = h'$ 并且$k = k'$. 于是我们可以定义映射

$$f: G \to H \times K, \quad f(hk) = (h, k).$$

由上式可知 f 为双射, 并且

$$f((hk)(h'k')) = f(hkh'k') = f(hh'kk')$$
$$= f((hh')(kk')) = (hh', kk')$$
$$= (h, k)(h', k') = f(hk)f(h'k').$$

这就表明 f 是群的同态. 于是为群的同构.

4.2.11　以 C_n 表示 n 阶循环群. 则

(1) 每个 4 阶群均同构于 C_4 或者 $C_2 \times C_2$.

(2) 设 n 和 m 是正整数, 则 $C_n \times C_m$ 是循环群的充分必要条件是$(n, m) = 1$, 并且当$(n, m) = 1$ 时, $C_n \times C_m \cong C_{nm}$.

解　(1) 根据 4.1.13 或 4.2.5 可知 4 阶群 G 必是交换群. 若 G 有 4 阶元素, 则 $G \cong C_4$. 以下设 G 的每个元素($\neq 1$)的阶均为2. 取$a \neq 1$, 则 a 生成G 的一个 2 阶子群 $G_1 = \{1, a\}$. 由 $|G| = 4 > 2 = |G_1|$, 可知 G 中有元素 $b \notin G_1$. 由于 b 的阶也为 2, 从而 G 又有2阶子群 $G_2 = \{1, b\}$. 注意 ab 和 1, a, b 均不相等 (若 $ab = 1$, 则 $b = a^{-1} = a$ 矛盾. 若 $ab = b$, 则 $a = 1$ 矛盾. 若 $ab = a$, 则 $b = 1$ 矛盾). 于是 $G_1G_2 = \{1, a, b, ab\}$, 从而 $G_1G_2 = G$, 而 $G_1 \cap G_2 = \{1\}$. 由于 G 是交换群, 所以 G_1 中元素和 G_2 中元素可交换. 根据 4.2.10 可知 $G \cong G_1 \times G_2 \cong C_2 \times C_2$.

(2) 设 $C_n = (a)$, $C_m = (b)$(表示 C_n 和C_m 分别由 n 阶元素a 和m 阶元素b 生成的循环群). 我们把 C_n 中元素 g 等同于 $C_n \times C_m$ 中元素$(g, 1)$, 而把 C_m 中元素h 等同于$C_n \times C_m$ 中元素$(1, h)$, 则 C_n 和 C_m 均看成是$C_n \times C_m$ 的子群. 于是 $ab = (a, 1)(1, b) = (a, b) = (1, b)(a, 1) = ba$. 现在我们求 $C_n \times C_m$ 中元素 ab 的阶. 对每个整数 k,

$(ab)^k = 1 \Leftrightarrow a^kb^k = 1$ (因为 $ab = ba$)

$\Leftrightarrow a^k = 1$ 并且 $b^k = 1$

(由于 $a^kb^k = (a^k, b^k)$, $1 = (1, 1)$)

$\Leftrightarrow n \mid k$ 并且 $m \mid k$

(由于 a 和b 的阶分别为 n, m)

$\Leftrightarrow [n, m] \mid k$

($[n, m]$ 表示 n 和 m 的最小公倍数).

于是元素 ab 的阶为$[n, m] = \frac{nm}{(n, m)}$. 如果$(n, m) = 1$, 则 ab 的阶为 $nm = |C_n \times C_m|$, 这表明 $C_n \times C_m \cong C_{nm}$. 如果 $d = (n, m) > 1$, 则$[n, m] = \frac{nm}{d} < nm$. $C_n \times C_m$ 中每个元素都可表为(a^l, b^k), 其中 $l, k \in \mathbf{Z}$. 由于 a 和b 的阶 n 和 m 都是$[n, m]$ 的因子, 从而$(a^l, b^k)^{[m,n]} = (a^{[m,n]l}, b^{[m,n]k}) = (1, 1) = 1$. 这表明 $C_n \times C_m$ 中没有 nm 阶元素. 因此 $C_n \times C_m$ 不是循环群.

注　在群论中, 彼此同构的群看成是同一个抽象的群, 所以 4.2.11(1) 也可说成: 4 阶群只有两个, 即 C_4 和 $C_2 \times C_2$(由于 C_4 有 4 阶元素而 $C_2 \times C_2$ 中没有 4 阶元素, 所以 C_4 和 $C_2 \times C_2$ 不同构). 同样地, 对于素数 p, p 阶群只有 1 个: C_p.

4.2.12　设 S_n 是集合$\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的全部置换组成的对称群. 如果 $\sigma, \tau \in S_n$, $\sigma = (a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_l)\cdots$, 则

$$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\tau(a_2)\cdots\tau(a_k))(\tau(b_1)\tau(b_2)\cdots\tau(b_l))\cdots.$$

解　首先需要解释一些名词和符号. 对每个 $\sigma \in S_n$, σ 是$\{1, \cdots, n\}$ 的一个置换, 即 σ 是从$\{1, \cdots, n\}$ 到自身的一个双射. 如果 $\sigma(i) = a_i (1 \leqslant i \leqslant n)$, 则 σ 可以表示成$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$. 如果 $\tau \in S_n$, τ 把 $a_1, \cdots, a_n$ 分别映成 $b_1, \cdots, b_n$, 则 $\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}$, 即 $\tau\sigma$ 看成映射的合成, $(\tau\sigma)(a) = \tau(\sigma(a))$ $(1 \leqslant a \leqslant n)$. 若 $\sigma(a_1) = a_2$, $\sigma(a_2) = a_3, \cdots, \sigma(a_k) = a_1$, 其中 $a_1, \cdots, a_k$ 彼此不同, 则$(a_1\ a_2\cdots a_k)$ 叫作一个长为 k 的轮换, 于是每个 $\sigma \in S_n$ 都可表示成一些轮换的乘积: $\sigma = (a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_l)\cdots$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_k, b_1, b_2, \cdots, b_l, \cdots$ 彼此不同. 例如 $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 2\,4\,5\,1\,3\,6 \end{pmatrix}$ 可写成 $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5)(6)$, 有时长为 1 的轮换略去不写, 即 $\sigma = (1\ 2\ 4)(3\ 5)$.

现在设 $\sigma = (a_1a_2\cdots a_k)(b_1b_2\cdots b_l)\cdots$, 则对每个 $\tau \in S_n$, $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(a_1)) = \tau\sigma(a_1) = \tau(a_2)$, $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(a_2)) = \tau\sigma(a_2) = \tau(a_3), \cdots$, $\tau\sigma\tau^{-1}(\tau(a_k)) = \tau\sigma(a_k) = \tau(a_1)$. 于是 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 中有轮换$(\tau(a_1)\tau(a_2)\cdots\tau(a_k))$(注意 $a_1, \cdots, a_k$ 彼此不同, 可知 $\tau(a_1), \tau(a_2), \cdots, \tau(a_k)$ 也彼此不同). 同样地, 由于 σ 中也包含轮换$(b_1b_2\cdots b_l)$, 则 $\tau\sigma\tau^{-1}$ 中也包含轮换 $(\tau(b_1)\tau(b_2)\cdots\tau(b_l))$. 如此即得 $\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(a_1)\tau(a_2)\cdots\tau(a_k))(\tau(b_1)\tau(b_2)\cdots$

$\tau(b_l))\cdots$.

4.2.13　决定 S_4 的所有正规子群.

解　设 N 是 S_4 的正规子群,则对每个元素 $g \in S_4$, $gNg^{-1} = N$. 所以,若 $a \in N$,则 a 的所有共轭元素 gag^{-1} 也属于 N. 这表明正规子群一定是 S_4 中一些共轭元素类的并集. 根据 4.2.12,我们可以刻划 S_n 中的共轭元素类. 我们把置换 $\sigma \in S_n$ 叫做型式为 $1^{\lambda_1}2^{\lambda_2}\cdots n^{\lambda_n}$,是指 σ 表成轮换之积时,长为 $1, 2, \cdots, n$ 的轮换个数分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. 例如 S_7 中的置换 $(1\ 2\ 3)(4\ 5)$ 的型式为 $1^0 2^1 3^1 4^0 5^0 6^0 7^0$. 当 $\lambda_i = 0$ 时 i^{λ_i} 也可略去,比如前面的置换型式为 $2^1 3^1$. 由 4.2.12 可知: S_n 中两个置换共轭当且仅当它们有相同的型式. 于是 S_4 可分成如下 5 个共轭元素类:

(a) 幺元素自身形成一类;

(b) 型式 2^1,与 (12) 共轭的元素,共 6 个;

(c) 型式 3^1,与 (123) 共轭的元素,共 8 个;

(d) 型式 2^2,与 $(12)(34)$ 共轭的元素,共 3 个;

(e) 型式 4^1,与 (1234) 共轭的元素,共 6 个.

S_4 的正规子群 N 是上述五个共轭元素类当中一些类之并,而且一定包含幺元素. 此外还要 $|N|$ 是 $|S_4| = 24$ 的因子. 由这些条件不难看出除了 $N = S_4$ 和 $\{1\}$ 之外,只有以下两种可能:

(1) N 是类 $(a), (c), (d)$ 之并,这是 S_4 中偶置换全体;易知它是 S_4 的子群,表示成 A_4(叫交错群).

(2) N 是 (a) 和 (d) 之并,共4个元素: $K = \{1, A = (12)(34), B = (13)(24), C = (14)(23)\}$, $A^2 = B^2 = C^2 = 1, AB = C$,由此可知 K 是群,并且是交换群.

于是 S_4 只有 4 个正规子群: $\{1\}, K, A_4$ 和 S_4.

4.2.14*　当 $n \geqslant 5$ 时,交错群 A_n 只有平凡的正规子群 $\{1\}$ 和 A_n(A_n 是 S_n 中全部偶置换).

解　设 $N \lhd A_n, N \neq \{1\}$,我们分几步来证明 $N = A_n$.

(a) 先证 N 必然包含一个元素是长为 3 的轮换. 事实上,由 $N \neq \{1\}$ 可知存在 $\sigma \in N, \sigma \neq 1$,并且 σ 取成将 $\{1, \cdots, n\}$ 中元素尽可能多地保持不动的置换. 我们来证 σ 恰好将 $n-3$ 个数保持不动(于是 σ 为长为3的轮换). 首先 σ 至少要变动3个数(因为 $\sigma \neq 1$,并且只变动两个数的为 (a_1a_2),这叫对换,它是奇置换,不属于 A_n). 现在把 σ 写成一些轮换之积,把长度最大的写在左边. 如果 σ 恰好变动 4 个数,则 $\sigma = (a_1a_2)(a_3a_4)$. 由于 $n \geqslant 5$,所以 $\beta = (a_3a_4a_5) \in A_n$,而 $\sigma_1 = \beta\sigma\beta^{-1} = (a_1a_2)(a_4a_5) \in N$,于是 $\sigma\sigma_1 = (a_1a_2)(a_3a_4)(a_1a_2)(a_4a_5) = (a_3a_4a_5) \in N$,这是长为 3 的轮换. 以下设 σ 至少变动 5 个数. 这又分三种情形考虑.

(a.1) σ 包含长度 $\geqslant 4$ 的轮换. 即 $\sigma = (a_1a_2a_3a_4\cdots)\cdots$. 取 $\beta = (a_2a_3a_4) \in A_n$,则 $\sigma_1 = \beta\sigma\beta^{-1} = (a_1a_3a_4a_2\cdots)\cdots$. 当 $i \geqslant 5$ 时 $\sigma(a_i) = \sigma_1(a_i)$. 于是 N 中元素 $\sigma_1\sigma^{-1}$ 至多变动 4 个数. 这与 σ 变动数个数($\geqslant 5$)的极小性矛盾.

(a.2) σ 中轮换长度最大者为 3. 则 $\sigma = (a_1a_2a_3)(a_4a_5\cdots)\cdots$,由于 σ 至少变动 5 个数,从而 σ 不是 $(a_1a_2a_3)$. 于是 σ 至少变动 6 个数(因为 $(a_1a_2a_3)(a_4a_5)$ 是奇置换). 取 $\beta = (a_2a_3a_4) \in A_4$,则 $\sigma_1 = \beta\sigma\beta^{-1} = (a_1a_3a_4)(a_2a_5\cdots)\cdots$ 属于 N. 而 N 中的置换 $\sigma_1\sigma^{-1}$ 至多变动 5 个数,这又与 σ 的极小性矛盾.

(a.3) σ 是一些对换之积. $\sigma = (a_1a_2)(a_3a_4)\cdots$,它至少变动 6 个数. 取 $\beta = (a_2a_3a_4) \in A_n$,则 $\sigma_1 = \beta\sigma\beta^{-1} = (a_1a_3)(a_4a_2)\cdots$,而 $\sigma\sigma^{-1}$ 只变动 4 个数,矛盾.

综合上述可知 N 中有元素是长为 3 的轮换.

(b) 再证所有长为 3 的轮换均是 N 中元素. 我们在(a)中已经证明了 N 中有元素 σ 是长为 3 的轮换. 现在设 σ' 是任意一个长为 3 的轮换. 由 4.2.11 知 σ 和 σ' 在 S_n 中共轭,即有 $\tau \in S_n$ 使得 $\sigma' = \tau^{-1}\sigma\tau$. 如果 $\tau \in A_n$,则 $\sigma' \in N$. 若 $\tau \notin A_n$,则 τ 是奇置换. 由于 $n \geqslant 5$,可知 σ 至少固定两个数 a_1a_2. 令 $\beta = (a_1a_2)$,则 β 是奇置换并且 $\beta\sigma = \sigma\beta$. 而 $\beta\tau$ 为偶置换,即 $\beta\tau \in A_n$. 并且 $(\beta\tau)^{-1}\sigma(\beta\tau) = \tau^{-1}\beta^{-1}\sigma\beta\tau = \tau^{-1}\sigma\tau = \sigma'$. 由 $N \lhd A_n$ 和 $\beta\tau \in A_n$ 可知 $\sigma' = (\beta\tau)^{-1}\sigma(\beta\tau) \in N$. 这就证明了每个长为 3 的轮换都属于 N.

(c) 最后证明所有偶置换均属于 N,即 $N = A_n$. 设 σ 是偶置换,它可写成一些轮换之积. 但是 $(a_1a_2\cdots a_n) = (a_1a_n)(a_1a_{n-1})\cdots(a_1a_3)(a_1a_2)$,可知 σ 可表成一些对合之积. 又由于 $(a_1a_2) = (1a_1)(1a_2)(1a_1)$,所以 σ 可以表成一些形如 $(1a)(2 \leqslant a \leqslant n)$ 的对合之积(以上我们相当于证明 S_n 是由 $n-1$ 个元素 $(12), (13), (14), \cdots, (1n)$ 生成的). 但是偶置换写成对合之积时,对合的个数一定是偶数个. 每两个对合并成一个长为3的轮换: $(1a_1)(1a_2) = (1a_2a_1)$. 于是 σ 可表成一些长为 3 的轮换之积(以上相当于证明了 A_n 是由所有形如 $(1a_1a_2)$ 的轮换生成的). 我们在(b)中已证明了所有长为 3 的轮换均属于 N,于是每个偶置换均属于

N,即 $N = A_r$.

注 当 $n = 4$ 时,4.2.14 中的结论是不对的.因为由 4.2.13 知那里的四元群 K 是 S_4 的正规子群,所以也是 A_4 的正规子群.

4.2.15 每个有限群都同构于一个置换群.

解 设 G 是 n 元有限群,$G = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$.我们有集合 $G = \{a_1, \cdots, a_n\}$ 上所有置换组成的对称群 S_n.现在我们考虑映射

$$f: G \to S_n, f(a) = \sigma_a \quad (a \in G).$$

其中 σ_a 是 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 中的一个置换,$\sigma_a(a_i) = aa_i (1 \leqslant i \leqslant n)$.由于 $a, a_i \in G$ 而 G 是群.所以 $\sigma_a(b) = \sigma_a(c) \Leftrightarrow ab = ac \Leftrightarrow b = c$.因此这样定义的 σ_a 是 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 的置换,即 $\sigma_a \in S_n$.进而,对 $a, b \in G$, $\sigma_a\sigma_b(c) = \sigma_a(bc) = abc = \sigma_{ab}(c)$.因此,$\sigma_a\sigma_b = \sigma_{ab}$,即 $f(ab) = \sigma_{ab} = \sigma_a\sigma_b = f(a)f(b)$.这表明 f 是群同态.又若 $f(a) = f(b)$,即 $\sigma_a = \sigma_b$,则 $a = \sigma_a(1) = \sigma_b(1) = b$ (此处 1 是群 G 的幺元素),这表明 f 是单同态.于是 G 同构于 $f(G)$,而 $f(G)$ 是 S_n 的一个子群,从而是置换群.

注 4.2.15 表明每个有限群都可看成是置换群,所以置换群是有普遍的意义.在 4.2.15 中我们是把 n 阶有限群同构于 S_n 的一个子群.通常 n 很大时,我们总希望寻找一个较小的 m,使 n 阶群 G 和 S_m 的某个子群同构.例如 A_n 是 $\frac{n!}{2}$ 阶群,但是它是 S_n 的子群.或者更自由一些,我们希望对某个有限群 G,希望找到一些群同态 $G \to S_n$,然后通过这些同态来研究群 G 的性质.每个这样的同态都叫做群 G 的一个**置换表示**,而通过各种置换表示来研究有限群性质是**群论**的专门分支,叫置换表示理论.

4.2.16 平面上以原点为中心的所有旋转形成群 G,并且它同构于矩阵乘法群 $S = \left\{\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}: 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\right\}$ 和加法商群 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

解 以 f_θ 表示以原点为中心反时针旋转角度 θ 的平面运动,则 $f_\theta f_{\theta'} = f_{\theta+\theta'}$.另一方面,记 $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$,则 $A_\theta A_{\theta}' = A_{\theta+\theta'}$.所以将 f_θ 映成 A_θ 就是群 G 到群 S 的同构.另一方面,考虑映射

$$\varphi: R \to S, \varphi(\theta) = A_{2\pi\theta}.$$

这是实数加法群 $\mathbf{R}$ 到群 S 的同态,并且是满同态.由于 $\theta \in \ker\varphi \Leftrightarrow A_{2\pi\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_0 \Leftrightarrow \theta \in \mathbf{Z}$.于是 $\ker f = \mathbf{Z}$.由群的同态定理可知 $S \cong \mathbf{R}/\mathbf{Z}$.

注 这个题表明几何上的旋转群 G 同构于实数域上一般线性群 $GL_2(R)$ 的一个子群.和置换群一样,一般线性群 $GL_n(K)$ 和它的子群也可作为各种群的"样版".其中 n 可取任意正整数,K 可取任意域,所以有很大灵活余地.特别当 K 是无限域时,$GL_n(K)$ 是无限群.我们可以用来研究各种无限群 G 到 $GL_n(K)$ 上的同态,这样的同态叫作 G 的一个**矩阵表示或线性表示**.通过线性表示来研究群的性质,叫作群的线性表示理论,为群论的重要分支,在物理等方面有重要应用.

4.2.17 (1) 决定整数环 $\mathbf{Z}$ 的所有理想.

(2) 设 n 和 m 是非零整数,(n, m) 和 $[n, m]$ 分别表示它们的最大公因子和最小公倍数.则

$$n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = (n, m)\mathbf{Z}, n\mathbf{Z} \cap m\mathbf{Z} = [n, m]\mathbf{Z},$$
$$(n\mathbf{Z})(m\mathbf{Z}) = nm\mathbf{Z}.$$

解 (1) 环 R 中的子集 I 叫作是一个理想,是指满足以下两个条件:(a) 若 $a, b \in I$,则 $a \pm b \in I$;(b) 若 $a \in I, r \in R$,则 ra 和 ar 属于 I.当 R 是交换环时,对于每个 $a \in R$,R 中子集合 $aR = \{ar: r \in R\}$ 是 R 的理想,这种理想叫作主理想.每个理想都是主理想的环叫主理想环.如果 I 和 J 都是环 R 的理想,则 $I + J = \{a + b: a \in I, b \in J\}$, $I \cap J$, $IJ = \{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i: a_i \in I, b_i \in J, n \geqslant 1\}$ 都是 R 中的理想,分别叫作理想 I 和 J 的和、交和乘积.对每个环 R 都有两个平凡的理想:零理想(0) 和 R.

现在设 I 是整数环 $\mathbf{Z}$ 的非零理想,则 I 中有非零整数.由于 $a \in I$ 时 $-a \in I$,所以 I 中有正整数.令 n 是 I 中的最小正整数,我们现在证明 I 是主理想 $(n) = n\mathbf{Z}$.设 a 是 I 中任意整数.由于 a 的模 n 同余类 $[a]$ 必然是 $[0], [1], \cdots, [n-1]$ 当中的一个,于是 $a \equiv r(\mathrm{mod}\, n)$,其中 $0 \leqslant r \leqslant n-1$.即 $a = qn + r$,其中 $q \in \mathbf{Z}$.由于 $a, n \in I$,从而 $r = a - qn \in I$(用理想的定义).如果 $1 \leqslant r \leqslant n-1$,则与 a 是 I 中最小正整数矛盾.所以 $r = 0$,即 $a = qn \in n\mathbf{Z}$.这就表明 $I \subseteq n\mathbf{Z}$.反过来,由 $n \in I$,可知 $n\mathbf{Z} \subseteq I$,因此,$I = n\mathbf{Z}$.若 n 和 m 是不同的正整数,则 $n\mathbf{Z}$ 和 $m\mathbf{Z}$ 显然是不同的理想.所以整数环 $\mathbf{Z}$ 的全部理想为 $n\mathbf{Z}(n = 0, 1, 2, \cdots)$.这表明 $\mathbf{Z}$ 是主理想环.

(2) $(n\mathbf{Z})(m\mathbf{Z}) = nm\mathbf{Z}$ 是显然的.另一方面,$n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z}$ 是同时包含 $n\mathbf{Z}$ 和 $m\mathbf{Z}$ 的最小理想.但是 $\mathbf{Z}$ 为主理想环,所以 $n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = r\mathbf{Z}$.而 $a\mathbf{Z}$ 包含 $b\mathbf{Z}$ 当且仅当 $a \mid b$.于是 r 就是满足 $r \mid n$ 和 $r \mid m$ 的最大整数,即 $r = (a, b)$.同样可证 $n\mathbf{Z} \cap m\mathbf{Z} = [n, m]\mathbf{Z}$,因为 $n\mathbf{Z} \cap m\mathbf{Z}$ 是同时包含在 $n\mathbf{Z}$ 和 $m\mathbf{Z}$ 之中的最大理想.

注 $n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z}$ 中元素恰好是形如 $nx + my(x, y$

$\in \mathbf{Z}$) 的那些整数. 所以 $n\mathbf{Z} + m\mathbf{Z} = (n, m)\mathbf{Z}$ 相当于数论中下面的结果: 方程 $nx + my = h$ ($n, m, h \in \mathbf{Z}$) 有整数解当且仅当 $(n, m) \mid h$.

4.2.18 设 A 是交换环 R 的理想. 求证

(1) 集合 $\sqrt{A} = \{x \in R$: 存在正整数 n, 使得 $x^n \in A\}$ 也是环 R 的理想.

(2) $\sqrt{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$.

解 (1) 设 $x, y \in \sqrt{A}$, 则有正整数 n 和 m, 使得 $x^n, y^m \in A$. 于是 $(-x)^n = (-1)^n x^n \in A$, 即 $-x \in \sqrt{A}$, 并且由于 R 是交换环, $(x+y)^{n+m} = \sum\limits_{i+j=n+m} C_{n+m}^{i} x^i y^j$. 由于 $i + j = n + m$, 所以或者 $i \geqslant n$ 或者 $j \geqslant m$. 因此 $x^i y^j \in A$. 于是 $(x+y)^{n+m} \in A$, 即 $x + y \in \sqrt{A}$. 这就表明 $\sqrt{A}$ 是 R 的加法子群. 再设 $r \in R$, $x \in \sqrt{A}$, 则 $x^n \in A$. 从而 $(rx)^n = r^n x^n \in A$. 于是 $rx \in \sqrt{A}$. 因此 $\sqrt{A}$ 是 R 的理想.

(2) 若 $x \in \sqrt{\sqrt{A}}$, 则有正整数 n 使得 $x^n \in \sqrt{A}$. 于是又有正整数 m, 使得 $(x^n)^m \in A$, 即 $x^{nm} \in A$. 因此 $x \in \sqrt{A}$. 这表明 $\sqrt{\sqrt{A}} \subseteq \sqrt{A}$. 另一方面, 易知 $A \subseteq \sqrt{A}$, 于是 $\sqrt{A} \subseteq \sqrt{\sqrt{A}}$. 因此 $\sqrt{A} = \sqrt{\sqrt{A}}$.

4.2.19 (1) 设 P 是环 R 的素理想, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是环 R 的理想, $P = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, 则必存在 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 使得 $P = A_i$.

(2) 设 A 是环 R 的理想, $P_1, \cdots, P_n$ 是 R 的素理想. $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$, 则必存在 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 使得 $A \subseteq P_i$.

(3) 设 R 是含幺交换环, P 为环 R 的理想, $P \neq R$. 则 P 是 R 的素理想 $\Leftrightarrow$ 对 R 的任意理想 A 和 B, 由 $AB \subseteq P$ 可推出 $A \subseteq P$ 或者 $B \subseteq P$.

解 (1) 环 R 的理想 P 叫做素理想, 是指 $P \neq R$, 并且对 $a, b \in R$, 由 $ab \in P$ 可推出 $a \in P$ 或者 $b \in P$. 现在设(1)中条件成立, 则 $P \subseteq A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 如果不存在 i 使得 $P = A_i$, 则对每个 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 均有 $a_i \in A_i$ 使得 $a_i \notin P$. 记 $a = a_1 a_2 \cdots a_n$, 则 a 属于每个 A_i (因为 A_i 是理想而 $a_i \in A_i$). 于是 $a \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i = P$. 另一方面, 由 $a_i \notin P$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ 和素理想的定义知 $a \notin P$. 这就导致矛盾. 因此存在 i 使 $P = A_i$.

(2) 我们对 n 归纳证明命题的正确性. 当 $n = 1$ 时命题显然成立. 现在设 $n \geqslant 2$, 并且命题对 $n - 1$ 成立. 如果存在 $1 \leqslant l, k \leqslant n$ 使得 $P_l \subseteq P_k$, 则 $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ $(i \neq l)$. 由归纳假设可知命题成立. 于是以下设 $P_1, \cdots, P_n$ 彼此不相互包含. 于是对每个 i $(2 \leqslant i \leqslant n)$ 均存在 $a_i \in P_i$ 使得 $a_i \notin P_1$. 令 $x_1 = a_2 a_3 \cdots a_n$, 则 $x_1 \in P_i$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$. 但是 $x_1 \notin P_1$ (根据素理想定义). 用类似方法对每个 i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, 都有 $x_i \in R$ 使得 $x_i \notin P_i$, 并且 $x_i \in P_j$ (当 $j \neq i$ 时).

如果(2)的结论不成立, 则对每个 i, P_i 均不包含 A. 于是 A 中有元素 $g_1, \cdots, g_n$, 使得 $g_i \notin P_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. 令 $x = g_1 x_1 + \cdots + g_n x_n$, 则 $x \in A$. 但是对每个 j 均有 $x \notin P_j$ (因为若 $x \in P_j$, 则 $g_j x_j = x - \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} g_i x_i \in P_j$. 可是 g_j 和 x_j 均不属于 P_j, 这和 P_j 是素理想矛盾). 于是 $x \notin \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$. 这与 $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} P_i$ 矛盾. 所以(2)的结论成立.

(3) ($\Rightarrow$) 设 P 为素理想并且 $AB \subseteq P$. 如果 A 和 B 都不包含在 P 中, 则有 $a \in A$, $b \in B$, 使得 $a \notin P$ 并且 $b \notin P$. 于是 $ab \notin P$. 但是 $ab \in AB$, 这就与 $AB \subseteq P$ 相矛盾.

($\Leftarrow$) 设命题(3)的右边成立, 我们来证 P 是素理想. 也就是对于 $a, b \in R$, $ab \in P$, 要证 $a \in P$ 或者 $b \in P$. 为此考虑主理想 $A = aR$ 和 $B = bR$. 由 R 是交换环可知 $AB = abR$. 如果 $ab \in P$, 则 $AB \subseteq P$. 由命题(3)右边的条件可知 $A \subseteq P$ 或者 $B \subseteq P$. 由于 R 有幺元素可知 $a = a \cdot 1 \in aR = A$ 和 $b = b \cdot 1 \in B$. 于是可推出 $a \in P$ 或者 $b \in P$. 这就表明 P 是素理想.

4.2.20 设 R 是含幺交换环, 对于 $a \in R$, 记 $(a) = aR$. 又以 $U(R)$ 表示 R 的(乘法)可逆元全体(由 4.1.1 知这是乘法群). 元素 a 和 b 叫作相伴的是指 $a \mid b$ 同时 $b \mid a$. 这是集合 $R - \{0\}$ 上的等价关系, 表示成 $a \sim b$. 求证: 对于 $a, b, u \in R - \{0\}$,

(1) $a \mid b \Leftrightarrow (b) \subseteq (a)$, $a \sim b \Leftrightarrow (a) = (b)$.

(2) $u \in U(R) \Leftrightarrow u \sim 1 \Leftrightarrow (u) = R$
$\Leftrightarrow u \mid r$ (对每个 $r \in R$).

(3) 设 $a = bu$, 则 $u \in U(R) \Rightarrow a \sim b$. 又若 R 为整环, 则 $a \sim b \Rightarrow u \in U(R)$.

解 (1) $a \mid b$ 表示有 $x \in R$, 使得 $b = ax$. 于是 $b \in (a) = aR$, 从而 $(b) \subseteq (a)$, 反之若 $(b) \subseteq (a)$, 由于 $1 \in R$, 则 $b = b \cdot 1 \in bR = (b) \subseteq (a)$, 即 $b = ax$ $(x \in R)$. 所以 $a \mid b$.

(2) $u \in U(R) \Rightarrow u \sim 1$ (因为有 $v \in U(R)$ 使得 $uv = 1$, 从而 $u \mid 1$)
$\Rightarrow (u) = R$ (因为 $u \sim 1 \Rightarrow (u) = (1) = R$)

$\Rightarrow u \mid r$ (对每个 $r \in R$) (因为 $u \mid 1, 1 \mid r$)

$\Rightarrow u \in U(R)$ (因为 $u \mid 1$).

(3) 若 $a = bu, u \in U(R)$,则$(a) = (b)(u) = bRR = bR = (b)$,从而 $a \sim b$.反之若 R 为整环,而$(a) = (b)$,则 $a \sim b$,即有 $u, v \in R$ 使得 $a = bu, b = av$. 于是 $a = auv$. 由于 $a \neq 0$ 和 R 为整环,可知 $1 = uv$,于是 $u \in U(R)$.

注 设 R 为(含幺交换)整环,则集合 $R - \{0\}$ 上的元素相伴关系是等价关系. 于是 $R - \{0\}$ 分拆成一些相伴元素等价类. 由 4.2.20(3) 可知,每个元素 a 所在的相伴元素类即为 $aU(R)$. 特别地,1 所在的相伴元素类为可逆元素群 $U(R)$.

4.2.21 (1) 整环中的素元必是不可约元.

(2) 主理想整环中的不可约元必是素元.

解 (1) 我们再次声明,整环定义成含幺交换环,并且对其中任意元素 a, b,由 $ab = 0$ 可推出 $a = 0$ 或者 $b = 0$(这也说成:零理想(0) 是素理想). "素数" 概念在一般的含幺交换环 R 中有两种不同的推广:对于 $a \in R - \{0\}$,a 叫不可约元,是指 $a \notin U(R)$ 并且若 $a = bc(b, c \in R)$,则 $b \sim a$ 或者 $c \sim a$(也就是 $c \in U(R)$ 或者 $b \in U(R)$). 而 a 叫作素元,是指 $a \notin U(R)$ 并且若 $a \mid xy(x, y \in R)$,则 $a \mid x$ 或者 $a \mid y$. 在整数环 $\mathbf{Z}$ 中这两个定义是一致的,都相当于素数概念. 但是对一般的含幺交换环这是不同的概念(见解后面的注). 我们现在证明若 R 是整环,则素元必是不可约元. 设 p 是 R 中的素元. 如果 $p = ab(a, b \in R)$,由素元定义可知 $p \mid a$ 或者 $p \mid b$. 若 $p \mid a$,则 $a = px(x \in R)$. 于是 $p = pxb$. 由 $p \neq 0$ 和 R 为整环,可知 $1 = xb$,即 $b \in U(R)$. 同样由 $p \mid b$ 可推出 $a \in U(R)$. 这就表明 p 是不可约元.

(2) 现在设 R 是主理想整环. 我们要证不可约元必为素元(所以这两个概念在主理想整环中是等价的概念). 设 p 为 R 中的不可约元. 如果 $p \mid ab(a, b \in R)$,为证 p 是素元,我们要证 $p \mid a$ 或者 $p \mid b$. 如果 $p \nmid a$,则 $a \notin (p)$,所以理想$(a) + (p)$ 比(p) 大. 由于 R 是主理想整环,$(a) + (p) = (t)$ $(t \in R)$. 于是 (t) 比 (p) 大,即 $p = ts, s \in R - U(R)$(见习题 4.2.20). 但是 p 不可约,可知 $t \in U(R)$. 于是$(a) + (p) = (t) = R = (1)$. 从而有 $x, y \in R$,使得 $ax + py = 1$. 由 $p \mid ab$ 可知 $p \mid abx + pby = b$. 同样地,由 $p \nmid b$ 可推出 $p \mid a$. 于是 p 为素元.

注 现在给出含幺交换环中素元不必是不可约元的例子. 取 $R = Z_6 = \{[0], [1], \cdots, [5]\}$,其中 $[a]$ 为 a 的模 6 同余类. R 是含幺交换环. $[2]$ 为素元:因为 $U(Z_6) = \{[1], [5]\}$,若$[2] \mid [x][y]$,则有 $a \in \mathbf{Z}$,使得 $[x][y] = [2][a]$,即 $xy = 2a(\mathrm{mod}6)$. 所以 $2 \mid xy$. 于是 $2 \mid x$ 或者 $2 \mid y$,即$[2] \mid [x]$ 或者$[2] \mid [y]$. 这就表明$[2]$ 为素元. 但是$[2] = [2][4]$,而$[2]$ 和$[4]$ 都不是可逆元,所以$[2]$ 不是不可约元.

4.2.22 证明整环 $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ 是唯一分解整环.

解 整环 R 叫作唯一分解整环,是指:(a) R 的每个非零非可逆元素均可表成有限个不可约元素之积;(b) 若 $a = p_1 \cdots p_s = p_1' p_2' \cdots p_t'$,其中 p_i, p_j' 都是 R 中的不可约元素,则 $s = t$,并且适当调换一下 p_i 的次序,可使 $p_i \sim p_i'(1 \leqslant i \leqslant s)$. 熟知主理想整环一定是唯一分解整环(并且,$p$ 为不可约元 $\Leftrightarrow (p)$ 是素理想). 所以为证此题,我们只需证明 $R = \mathbf{Z}[\sqrt{-2}]$ 是主理想整环即可.

R 中每个元素可唯一写成 $\alpha = a + b\sqrt{-2}$,其中 $a, b \in \mathbf{Z}$. 我们定义 $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = (a + b\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2}) = a^2 + 2b^2$. 则 $N(\alpha) \geqslant 0$,并且 $N(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. 还有性质 $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$. 我们首先证明 R 中有如下的"带余除法":若 $\alpha, \beta \in R, \alpha \neq 0$,则存在 $q, r \in R$,使得 $\beta = q\alpha + r$,其中 $0 \leqslant N(r) < N(\alpha)$. 为证此,设 $\alpha = a + b\sqrt{-2}, \beta = c + d\sqrt{-2}$,其中 $a, b, c, d \in \mathbf{Z}$,由 $\alpha \neq 0$ 知 $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = a^2 + 2b^2 \neq 0$. 而

$$\beta / \alpha = \frac{(c + d\sqrt{-2})(a - b\sqrt{-2})}{a^2 + 2b^2} = A + B\sqrt{-2},$$

其中 A 和 B 是有理数. 令 e 和 f 分别是与 A 和 B 距离最近的整数,则 $|A - e| \leqslant \frac{1}{2}$, $|B - f| \leqslant \frac{1}{2}$. 令 $q = e + f\sqrt{-2} \in R$,则 $\beta = (A + B\sqrt{-2})\alpha = q\alpha + r$,其中 $r = \alpha((A - e) + (B - f)\sqrt{2})$. 由于 $\beta, \alpha, q \in R$,可知 $r = \beta - q\alpha \in R$,并且 $N(r) = N(\alpha)((A - e)^2 + 2(B - f)^2) \leqslant N(\alpha)(\frac{1}{4} + \frac{2}{4}) < N(\alpha)$.

现在证 R 是主理想整环. 设 I 是 R 的理想. 由于零理想(0) 为主理想,以下设 I 中存在非零元素 α,则 $N(\alpha)$ 为正整数. 现在令 α 是 I 中使 $N(\alpha)$ 最小的非零元素. 我们来证 $I = (\alpha)$. 对每个 $\beta \in I$,由上述有 $q, r \in R$,使得 $\beta = q\alpha + r, 0 \leqslant N(r) < N(\alpha)$. 由 $\beta, \alpha \in I$ 和 I 是理想可知 $r = \beta - q\alpha \in I$. 但是 $0 \leqslant N(r) < N(\alpha)$. 由 α 的选取方式可知必然 $r = 0$,即 $\beta = q\alpha$. 从而 $\beta \in (\alpha)$,即 $I \subseteq (\alpha)$. 反之,由 $\alpha \in I$ 可知 $(\alpha) \subseteq I$. 这就表明 $I = (\alpha)$,即 R 是

主理想整环.

4.2.23 是否有唯一分解整环不是主理想整环?

解 高斯一个定理是说:若 R 是唯一分解整环,则多项式环 $R[x]$ 也是唯一分解整环.由于整数环 $\mathbf{Z}$ 是唯一分解整环,所以 $\mathbf{Z}[x]$ 也是唯一分解整环.我们现在来证 $\mathbf{Z}[x]$ 不是主理想整环.这只需证理想 $(2)+(x)$ 不是主理想.若它是主理想,记 $(2)+(x)=(f)$,其中 $f\in \mathbf{Z}[x]$,即 f 为整系数多项式.如果多项式 f 的次数 $\geqslant 1$,则 $2\notin (f)$.这与 $(2)\subseteq (2)+(x)=(f)$ 矛盾.如果 f 是零次多项式,即 $f\in \mathbf{Z}$,则 $f\neq 0$,并且由 $2\in (f)$ 可知 $f\mid 2$.若 $f=\pm 2$,则 $x\nmid f$,这又与 $(x)\subseteq (f)$ 相矛盾.若 $f=\pm 1$,则 $(2)+(x)=(\pm 1)=\mathbf{Z}[x]$.于是 $1\in (2)+(x)$.即存在 $a(x),b(x)\in \mathbf{Z}[x]$,使得 $1=2a(x)+xb(x)$.考虑此式右边的常数项系数,知道这是不可能的.综合上述可知 $(2)+(x)$ 不是主理想,即 $\mathbf{Z}[x]$ 不是主理想整环.

注 另一个例子是:对于每个域 F,熟知多项式环 $F[x]$ 是主理想整环,从而它也是唯一分解整环.再由高斯定理知 $F[x][y]=F[x,y]$ 也是唯一分解整环.但是 $F[x,y]$ 不是主理想整环,因为可以用与 4.2.23 相仿的方式证明 $(x)+(y)$ 不是主理想.

4.2.24 试给出整环 R,它不是唯一分解整环.

解 考虑 $R=\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]=\{a+b\sqrt{-3}:a,b\in \mathbf{Z}\}$,这是整环.像习题 4.2.22 那样对 R 中元素 $\alpha=a+b\sqrt{-3}$ 定义 $N(\alpha)=\alpha\bar{\alpha}=a^2+3b^2$,这是非负整数.$N(\alpha\beta)=N(\alpha)N(\beta)$,并且 $N(\alpha)=0\Leftrightarrow \alpha=0$.我们先决定可逆元群 $U(R)$.设 $u\in U(R)$,则有 $v\in U(R)$,使得 $uv=1$,于是 $N(u)N(v)=N(1)=1$.由于 $N(u)$ 和 $N(v)$ 都是非负整数,因此 $N(u)=1$.令 $u=a+b\sqrt{-3}$,则 $a^2+3b^2=1(a,b\in \mathbf{Z})$.这只能 $b=0,a=\pm 1$.于是 $u=\pm 1$,即 R 中可逆元只有 ± 1.现在证 R 中没有元素 α 使得 $N(\alpha)=2$,这是由于 $a^2+3b^2=2$ 没有整数解.再证 $2,1\pm\sqrt{-3}$ 都是 R 中的不可约元.这是由于它们均满足 $N(\alpha)=4$.如果这样的 α 可写成 $\alpha=\beta\gamma$,其中 $\beta,\gamma\in R$,则 $4=N(\alpha)=N(\beta)N(\gamma)$.由于上面已证 $N(\beta)$ 和 $N(\gamma)$ 不能为 2,可知 $N(\beta)=1$ 或者 $N(\gamma)=1$,即 $\beta=\pm 1$ 或者 $\gamma=\pm 1$.这就表明 R 中满足 $N(\alpha)=4$ 的元素 α 必为不可约元,从而 $2,1\pm\sqrt{-3}$ 都是不可约元.现在考虑分解式 $4=2\cdot 2=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$.这是把 4 分解成不可约元之积的两个分解式,并且 2 不和 $1\pm\sqrt{-3}$ 当中任何一个相伴(因为 $U(R)=\{\pm 1\}$,而 $1\pm\sqrt{-3}\neq\pm 2$).这就表明 4 在 R 中分解成不可约元素乘积不具有唯一性.因此 $R=\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ 不是唯一分解整环.

注 我们在 4.2.21 中证明了整环中素元一定是不可约元,并且在主理想整环中不可约元一定是素元.事实上,可以证明在唯一分解整环中也是如此(见 4.2.26 的证明),即不可约元和素元概念是一致的.由习题 4.2.24 可以知道若 R 不是唯一分解整环,则 R 中不可约元可以不必是素元.因为在 $R=\mathbf{Z}[\sqrt{-3}]$ 中 $2\mid 4=(1+\sqrt{-3})(1-\sqrt{-3})$,但是 2 不能整除 $1\pm\sqrt{-3}$,所以不可约元 2 不是 R 中的素元.

4.2.25 (1) 域的特征只能是 0 或素数,而环的特征可以是任何非负整数.

(2) 若交换环 R 的特征为素数 p,则对每个正整数 n,映射 $f:R\to R$,$f(a)=a^{p^n}$ 是环的自同态.

解 (1) 设 R 是环.如果存在正整数 n,使得对每个 $a\in R$,$na=0$(na 表示 n 个 a 相加),则满足此条件的最小正整数叫环 R 的特征.如果上述正整数不存在,则规定 R 的特征为 0.如果环 R 有幺元素 1,则 R 的特征 $\geqslant 1$ 时,特征也就是满足 $n\cdot 1=0$ 的最小正整数 n.例如环 Z_n 的特征是 n,因为 $n[1]=[n]=[0]$,并且 n 是使 $m[1]=[0]$ 的最小正整数 m.整数环 $\mathbf{Z}$ 的特征为 0,所以环的特征可以是任何非负整数(但若在环中规定 $0\neq 1$,则特征不能为 1).另一方面,如果 R 是域,则当 $n=mt$ 时 $(n\cdot 1)=(m\cdot 1)(t\cdot 1)$,若 $n\cdot 1=0$,在域中必然 $m\cdot 1=0$ 或 $t\cdot 1=0$.从而满足 $n\cdot 1=0$ 的最小正整数必然是素数.有理数域的特征为 0,对每个素数 p,有限域 Z_p 的特征为 p.所以域的特征可以是 0 或任何素数.

(2) 设交换环 R 的特征是素数 p,$f(a)=a^{p^n}$,则 $f(ab)=(ab)^{p^n}=a^{p^n}b^{p^n}$(由于 R 是交换环)$=f(a)f(b)$.为证 f 是环的自同态,只需再证 $f(a+b)=f(a)+f(b)$,即只需证明 $(a+b)^{p^n}=a^{p^n}+b^{p^n}$.我们只需对 $n=1$ 的情形证明即可,因若 $(a+b)^p=a^p+b^p$ 成立,则

$$\begin{aligned}(a+b)^{p^n}&=(a+b)^{p\cdot p^{n-1}}=(a^p+b^p)^{p^{n-1}}\\&=(a^{p^2}+a^{p^2})^{p^{n-2}}=\cdots\\&=(a^{p^{n-1}}+b^{p^{n-1}})^p\\&=a^{p^n}+b^{p^n}.\end{aligned}$$

由于 R 是交换环,所以 $(a+b)^p=\sum_{i=0}^{p}C_p^i a^i b^{p-i}$,其中 $C_p^i=\frac{p(p-1)\cdots(p-i+1)}{i(i-1)\cdots 1}$.当 $1\leqslant i\leqslant p-1$

时 C_p^i 可被 p 除尽. 由于 R 的特征是 p, 所以在 R 中 $C_p^i = 0(1 \leqslant i \leqslant p-1)$, 而 $C_p^0 = C_p^p = 1$, 于是 $(a+b)^p = a^p + b^p$. 这就证明了题 4.2.25.

4.2.26(爱森斯坦判别法) 设 R 是唯一分解整环, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ 是 $R[x]$ 中的多项式, 并且存在 R 中一个不可约元素 p, 使得在 R 中 $p \nmid a_0$, $p \mid a_i(1 \leqslant i \leqslant n)$, $p^2 \nmid a_n$. 则 $f(x)$ 是 $R[x]$ 中的不可约多项式(即指 $f(x)$ 不是 $R[x]$ 中次数 $\geqslant 1$ 的两个多项式之积).

解 如果 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中可约, 则 $f(x) = g(x)h(x)$, 其中 $g(x) = b_0x^k + b_1x^{k-1} + \cdots + b_k$, $h(x) = c_0x^l + c_1x^{l-1} + \cdots + c_l$ 为 $R[x]$ 中的多项式, 次数分别为 k 和 l, 并且 $1 \leqslant k, l \leqslant n-1$, $k+l = n$. 由于 R 为唯一分解整环, 所以不可约元 p 也是素元(证明: 设 $p \mid ab$, 则 $ab = pc$, $c \in R$. 令 $a = p_1\cdots p_n$, $b = q_1\cdots q_s$, $c = r_1\cdots r_l$. 其中 p_i, q_j, r_k 都是 R 中不可约元, 则 $q_1\cdots q_s p_1\cdots p_n = pr_1\cdots r_l$. 由分解唯一性知 p 必与左边某个不可约元相伴. 若 $p \sim p_i$, 则 $p \mid a$; 若 $p \sim q_j$, 则 $p \mid b$. 所以 p 是素元). 由 $p \nmid a_0 = b_0c_0$ 可知 $p \nmid b_0$, 并且 $p \nmid c_0$. 由 $p \mid a_n = b_kc_l$ 而 p 是素元可知 $p \mid b_k$ 或者 $p \mid c_l$. 不妨设 $p \mid b_k$, 则必然 $p \nmid c_l$(否则若又 $p \mid c_l$, 则 $p^2 \mid b_kc_l = a_n$, 这与假设矛盾). 由 $p \nmid b_0$ 和 $p \mid b_k$ 可知存在 $i(1 \leqslant i \leqslant k)$, 使得 $p \mid b_k, p \mid b_{k-1}, \cdots, p \mid b_i$, 但是 $p \nmid b_{i-1}$. 考虑系数

$$a_{l+i-1} = c_lb_{i-1} + c_{l-1}b_i + c_{l-2}b_{i+1} + \cdots$$

由于右边只有 c_lb_{i-1} 不被 p 除尽(因为 $p \nmid c_l$, $p \nmid b_{i-1}$, 而 p 为素元), 所以 $p \nmid a_{l+i-1}$. 但是 $l+i-1 \geqslant l+1-1 = l \geqslant 1$, 这又与假设矛盾. 因此 $f(x)$ 在 $R[x]$ 中不可约.

4.2.27 (1) 设 p 为素数. 求证: $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 是 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约多项式.

(2) 设 R 是唯一分解整环, 则 $f(x,y) = y^3 + x^2y^2 + xy + x$ 是环 $R[x,y]$ 中的不可约多项式.

解 (1) 令 $g(x) = f(x+1)$. 易知 $g(x)$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约当且仅当 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约(因为 $f(x) = f_1(x)f_2(x) \Leftrightarrow g(x) = f_1(x+1)f_2(x+1)$, 并且 $f_i(x)$ 和 $f_i(x+1)$ 有相同次数). 我们只需证明 $g(x)$ 在 $Z[x]$ 中不可约. 设 $g(x) = a_0x^{p-1} + a_1x^{p-2} + \cdots + a_{p-1}$, 则 $a_i \in \mathbf{Z}(0 \leqslant i \leqslant p-1)$, $a_0 = 1$, $a_{p-1} = g(0) = f(1) = p$. 现在把 $g(x)$ 看成是 p 元域 $F_p(=Z_p)$ 上的多项式. 由于 F_p 的特征为 p, 根据 4.2.25 可知

$$g(x) = f(x+1) = \frac{(x+1)^p - 1}{(x+1)-1}$$

$$= \frac{(x+1)^p - 1}{x}$$

$$\equiv \frac{x^p + 1 - 1}{x} \equiv x^{p-1} \pmod{p}.$$

回到 $\mathbf{Z}[x]$ 中, 这就意味着 $p \mid a_i(1 \leqslant i \leqslant p-1)$. 由于 $a_0 = 1$ 和 $p^2 \nmid a_{p-1} = p$, 由爱森斯坦判别法即知 $g(x)$(从而 $f(x)$) 在 $\mathbf{Z}[x]$ 中不可约.

(2) 由 R 为唯一分解整环可知 $R' = R[x]$ 也是唯一分解整环, 并且 x 是 $R[x] = R'$ 中的不可约元素. 将 $f(x,y) = y^3 + x^2y^2 + xy + x$ 看成是 $R'[y]$ 中的多项式. 由于 y^3 的系数为 1, y^2 和 y 的系数 x^2 和 x 均可被 x 整除, 而 x^2 不能整除常数项 x. 由爱森斯坦判别法可知 $y^3 + x^2y^2 + xy + x$ 在 $R[x,y]$ 中不可约.

4.2.28 (1) 若 F 是特征为 0 的域, 则 $F[x]$ 中不可约多项式在 F 的任何扩域中均没有重根.

(2) 若 F 是特征为素数 p 的域, f 为 $F[x]$ 中不可约多项式, 则 $f(x)$ 在 F 的某个扩域中有重根的充分必要条件是 f 是 x^p 的多项式.

解 (1) 我们先介绍域 F 上多项式环 $F[x]$ 的一些基本性质. 首先, $F[x]$ 是主理想整环, 从而也是唯一分解整环. $F[x]$ 中的不可约元(= 素元) 即是 $F[x]$ 中的不可约多项式. 其次, $U(F[x]) = U(F) = F - \{0\}$(记成 $F^* = F - \{0\}$). 于是每个非零多项式都相伴于唯一的一个首 1 多项式(即最高次项系数为 1 的多项式). 所以 $F[x]$ 中的唯一分解性质可以叙述成: $F[x]$ 中每个次数 $\geqslant 1$ 的多项式 $f(x)$ 可以(不计因子次序)唯一地表成 $f(x) = \alpha p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$, 其中 $\alpha \in F^*$, $p_1(x), \cdots, p_s(x)$ 是 $F[x]$ 中次数 $\geqslant 1$ 的首 1 不可约多项式. 其次, $F(x)$ 中一个 n 次多项式 $f(x)$ 在 F 的代数闭包中恰好有 n 个根(可能有重根). 若 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, 定义 $f'(x) = a_1 + 2a_2x + \cdots + na_nx^{n-1}$, 则 F 中元素 c 为 $f(x)$ 的重根当且仅当 $f(c) = f'(c) = 0$. 另一方面, 如果 $(f(x), f'(x)) = 1$(即 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 互素), 则 $f(x)$ 在 F 中没有重根.

现在设 $f(x)$ 是 $F[x]$ 中 n 次不可约多项式. 若 $n = 1$, 则 $f(x)$ 显然没有重根. 以下设 $n \geqslant 2$. 由于域 F 的特征为 0, 可知 f' 的次数为 $n-1 \geqslant 1$. 由于 $f(x)$ 不可约, 从而 $f(x)$ 的因子多项式的次数只能是 n 和 0, 从而 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 互素. 由上述可知 $f(x)$ 没有重根.

(2) 若 $f(x)$ 为 x^p 的多项式, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x^p)^i = \sum_{i=0}^{n} a_ix^{pi}$, 则 $f'(x) = \sum_{i=0}^{n} pia_ix^{pi-1} =$

0(因为在特征 p 的域 F 中 $p=0$). 由于 $f(x)$ 在 F 的某个扩域(比如在 F 的代数闭包中)中必有根 c(由于不可约多项式的次数 $\geqslant 1$), 所以 $f(c)=0$. 而 $f'(c)=0$(因为 $f'(x)=0$), 由上所述可知 c 是 $f(x)$ 的重根. 反过来, 若 c 是 $f(x)$ 在 F 的某个扩域 F' 中的重根, 则 $f(x)=(x-c)^2g(x)$, 其中 $g(x)\in F'[x]$. 于是 $f'(x)=2(x-c)g(x)+(x-c)^2g'(x)$, 所以 $f'(c)=0$. 由此可知 $(f,f')\neq 1$(如果 $(f,f')=1$, 由于 $F[x]$ 是主理想整环, 可知理想 $fF[x]$ 与 $f'F[x]$ 之和为 $F[x]$, 即存在 $A(x)$, $B(x)\in F[x]$, 使得 $A(x)f(x)+B(x)f'(x)=1$. 代入 $x=c$ 得到矛盾 $0=1$). 但是 f 不可约, 从而必然 $f'(x)$ 恒等于 0. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, 则 $f'(x)=\sum_{i=0}^{n}ia_ix^{i-1}\equiv 0$. 于是在 F 中 $ia_i=0(0\leqslant i\leqslant n)$. 从而在 $a_i\neq 0$ 时, 必然在 F 中 $i=0$, 即对于 $f(x)$ 的每项 a_ix^i, 当 $a_i\neq 0$ 时 i 在 $\mathbf{Z}$ 中是 p 的倍数. 这就表明 $f(x)$ 是 x^p 的多项式.

4.2.29 设 $\mathbf{Q}$ 为有理数域, $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的奇次不可约多项式. 如果 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 的某个扩域(比如说在实数域或复数域)中有两个不同的根 α 和 β, 则 $\alpha+\beta$ 不是有理数.

解 设 $f(x)$ 的次数为奇数 n. 由于 $f(x)$ 有 2 个根, 所以 $n\geqslant 3$. 现在设 $a=\alpha+\beta\in\mathbf{Q}$, 则 $g(x)=f(a-x)$ 也是 $\mathbf{Q}[x]$ 中的不可约多项式, $g(\frac{a}{2})=f(\frac{a}{2})$, 并且 $g(\alpha)=g(\beta)=0$. 由于 α 是 f 和 g 的公共根, 可知 $(f,g)\neq 1$(证明与上题一样, 如果 $(f,g)=1$, 则有 $A(x),B(x)\in\mathbf{Q}[x]$, 使得 $f(x)A(x)+g(x)B(x)=1$, 代入 $x=\alpha$ 得到矛盾 $0=1$). 由于 f 和 g 都是 $n(\geqslant 3)$ 次不可约多项式, 从 $(f,g)\neq 1$ 可知 f 和 g 必然相伴, 即 $f(x)=cg(x)$, 其中 c 是非零有理数. 设 $f(x)=bx^n+\cdots$, 其中 $b\in\mathbf{Q}^*=\mathbf{Q}-\{0\}$, 则 $g(x)=f(a-x)=b(a-x)^n+\cdots=(-1)^nbx^n+\cdots=-bx^n+\cdots$(因为 n 是奇数). 比较 $f(x)=cg(x)$ 的最高项系数, 可知 $b=-cb$. 由 $b\neq 0$ 可知 $c=-1$, 即 $f(x)=-g(x)$. 于是 $f(\frac{a}{2})=-g(\frac{a}{2})$. 但是前面已有 $f(\frac{a}{2})=g(\frac{a}{2})$, 从而 $f(\frac{a}{2})=0$, 即 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中有因子 $x-\frac{a}{2}$(由 $a\in\mathbf{Q}$ 可知 $\frac{a}{2}\in\mathbf{Q}$). 由于 $n\geqslant 3$, 这与 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约相矛盾. 因此 $\alpha+\beta\notin\mathbf{Q}$.

4.2.30 设 u 是 $f(x)=x^3-3x-1$ 的一个复根. 试将复数 $(3u^2+7u+5)^{-1}$ 表示成系数为有理数的关于 u 的多项式.

解 域的扩张共分两类: 代数扩张和超越扩张. 设 F/K 是域的扩张(即指 F 为 K 的扩域), 如果 F 中每个元素均是 K 上的代数元素, 即均是 $K[x]$ 中某个非零多项式的根, 则 F 叫做 K 的代数扩张. 否则 F 叫做 K 的超越扩张. 若 $F=K(\alpha)/K$ 是超越扩张(即 α 在 K 上超越), 则它同构于 K 上的有理函数域 $K(x)$. 若 $K(\alpha)/K$ 是代数扩张, 则 α 是 $K[x]$ 中某个非零多项式的根, 于是 $I=\{f(x)\in K[x]: f(\alpha)=0\}$ 是非零素理想. 由于 $K[x]$ 是主理想环, 所以存在唯一的首 1 不可约多项式 $f(x)\in K[x]$, 使得 $I=(f(x))$. 也就是说, 对于 $g(x)\in K[x]$, $g(\alpha)=0$ 当且仅当 $f\mid g$. $f(x)$ 叫作 α 在 K 上的极小多项式. $K(\alpha)$ 中每个元素都可唯一地表示成 $a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$, 其中 n 是 $f(x)$ 的次数, $a_i\in K(0\leqslant i\leqslant n-1)$. 因此 $K(\alpha)$ 是 K 上 n 维向量空间, 称 $K(\alpha)/K$ 为 n 次扩张, 记成 $n=[K(\alpha):K]$. 于是若 F/K 和 K/M 分别是域的扩张, 则 $[F:M]=[F:K][K:M]$.

题中 u 是 $f(x)=x^3-3x-1$ 的复根. 由于 x^3-3x-1 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约(三次多项式若在 $\mathbf{Q}[x]$ 中可约, 则一定有有理根 $\frac{a}{b}$ $(a,b\in\mathbf{Z})$. 熟知 a 除尽常数项, b 除尽最高次项系数. 所以 $b\mid 1$, 即 $b=\pm 1$, $a\mid\pm 1$. 因此有理根只能是 ± 1. 但是 $f(1)=-3$, $f(-1)=-5$, 所以 f 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中不可约). 于是 $f(x)$ 就是 u 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式, $[\mathbf{Q}(u):\mathbf{Q}]=3$. 所以 $\mathbf{Q}(u)$ 中每个元素都唯一写成 $a_0+a_1u+a_2u^2$, 其中 $a_i\in\mathbf{Q}$. 于是 $3u^2+7u+5\neq 0$. 而 $\mathbf{Q}(u)$ 中元素 $(3u^2+7u+5)^{-1}=a_0+a_1u+a_2u^2$, $a_i\in\mathbf{Q}$. 现在求 a_0,a_1,a_2. 由上式知

$$\begin{aligned}1&=(a_2u^2+a_1u+a_0)(3u^2+7u+5)\\&=3a_2u^4+(3a_1+7a_2)u^3+(3a_0+7a_1\\&\quad+5a_2)u^2+(7a_0+5a_1)u+5a_0.\end{aligned}$$

由于 $f(u)=u^3-3u-1=0$, 可知 $u^3=3u+1$. 于是

$$\begin{aligned}1&=3a_2(3u^2+u)+(3a_1+7a_2)(3u+1)\\&\quad+(3a_0+7a_1+5a_2)u^2+(7a_0+5a_1)u\\&\quad+5a_0\\&=(3a_0+7a_1+14a_2)u^2+(7a_0+14a_1\\&\quad+24a_2)u+(5a_0+3a_1+7a_2).\end{aligned}$$

由于 $1,u,u^2$ 是 $\mathbf{Q}$ 上向量空间 $\mathbf{Q}(u)$ 的一组基, 从而

$$\begin{cases}5a_0+3a_1+7a_2=1,\\7a_0+14a_1+24a_2=0,\\3a_0+7a_1+14a_2=0.\end{cases}$$

解这个线性方程组得出

$$(a_0,a_1,a_2)=(\frac{28}{111},-\frac{26}{111},\frac{7}{111}),$$

于是

$$(3u^2+7u+5)^{-1}=\frac{7}{111}u^2-\frac{26}{111}u+\frac{28}{111}.$$

现在给出另一种解法. 由于 x^3-3x-1 在 $\mathbf{Q}[x]$ 上不可约,所以它和 $3x^2+7x+5$ 互素. 于是有 $A(x),B(x)\in\mathbf{Q}[x]$ 使得 $(x^3-3x-1)A(x)+(3x^2+7x+5)B(x)=1$. 代入 $x=u$,则由 $u^3-3u-1=0$ 可知 $(3u^2+7u+5)B(u)=1$,于是 $(3u^2+7u+5)^{-1}=B(u)$. 问题在于求 $B(u)$. 这可用辗转相除法来作:用 $3x^2+7x+5$ 去除 x^3-3x-1,得到

$$x^3-3x-1=(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})(3x^2+7x+5)+(\frac{7}{9}x+\frac{26}{9}).$$

再用余式 $\frac{7}{9}x+\frac{26}{9}$ 去除 $3x^2+7x+5$,得到

$$3x^2+7x+5=(\frac{27}{7}x-\frac{261}{49})(\frac{7}{9}x+\frac{26}{9})+\frac{999}{49}.$$

于是将第一式的 $\frac{7}{9}x+\frac{26}{9}$ 代入第二式便得到

$$\begin{aligned}&3x^2+7x+5\\&=(\frac{27}{7}x-\frac{261}{49})[(x^3-3x-1)\\&\quad-(\frac{1}{3}x-\frac{7}{9})(3x^2+7x+5)]+\frac{999}{49}\\&=(\frac{27}{7}x-\frac{261}{49})(x^3-3x-1)-(\frac{9}{7}x^2-\frac{234}{49}x\\&\quad+\frac{29}{7})(3x^2+7x+5)+\frac{999}{49}.\end{aligned}$$

由此可知

$$\begin{aligned}B(x)&=-\frac{49}{999}(\frac{9}{7}x^2-\frac{234}{49}x+\frac{36}{7})\\&=\frac{1}{111}(7x^2-26x+28).\end{aligned}$$

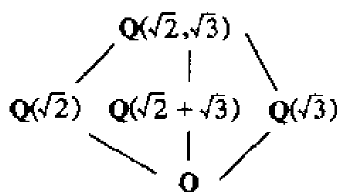
于是

$$\begin{aligned}(3u^2+7u+5)^{-1}&=B(u)\\&=\frac{1}{111}(7u^2-26u+28).\end{aligned}$$

4.2.31 (1) 求 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式.

(2) 求 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在域 $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$ 上的极小多项式.

解 (1) 我们首先需要求 $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]$,因为它等于 α 的极小多项式的次数. 我们有如下的域扩张图:



由于 x^2-2 是 $\sqrt{2}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式,所以 $1,\sqrt{2}$ 是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 对 $\mathbf{Q}$ 的一组基,$[\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}]=2$. 同样地,$[\mathbf{Q}(\sqrt{3}):\mathbf{Q}]=2$,并且 $1,\sqrt{3}$ 是 $\mathbf{Q}(\sqrt{3})$ 对 $\mathbf{Q}$ 的一组基. 因此

$$\begin{aligned}&[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}]\\&=[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})][\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}]\\&=2[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})].\qquad(*)\end{aligned}$$

再证 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 显然 $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 于是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. 另一方面,由 $11\sqrt{2}+9\sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3$,知 $2\sqrt{2}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3-9(\sqrt{2}+\sqrt{3})\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$,于是 $\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 同样有 $\sqrt{3}=(\sqrt{2}+\sqrt{3})-\sqrt{2}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$,因此 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 这表明 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 由(*)式可知

$$[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbf{Q}]=2[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})].$$

由于 $\sqrt{3}$ 是 x^2-3 的根,从而 $\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 上的极小多项式 $f(x)$ 必除尽 x^2-3. 因此 $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]=[\mathbf{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]\leqslant 2$. 如果 $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]=1$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. 于是 $\sqrt{3}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. 因此 $\sqrt{3}=a+b\sqrt{2}$,其中 $a,b\in\mathbf{Q}$. 将此等式两边平方得到 $3=(a^2+2b^2)+2ab\sqrt{2}$. 于是 $ab=0$ 并且 $3=a^2+2b^2$. 但这是不可能的. 因此必然 $[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]=2$,于是得到 $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbf{Q}]=2[\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{2})]=4$,即元素 $\alpha=\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式应当是4次多项式. 由于 α 是

$$\begin{aligned}f(x)&=(x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(x+(\sqrt{2}+\sqrt{3}))\\&\quad\times(x-(\sqrt{2}-\sqrt{3}))(x+(\sqrt{2}-\sqrt{3}))\\&=(x^2-(5+2\sqrt{6}))(x^2-(5-2\sqrt{6}))\\&=(x^2-5)^2-24=x^4-10x^2+1\end{aligned}$$

的根,而 $f(x)\in\mathbf{Q}[x]$,从而 $f(x)=x^4-10x^2+1$ 就是 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式.

(2) 由 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$ 可知 $\sqrt{6}\in\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. 即 $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$ 是 $\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ 的子域,并且

$$\begin{aligned}[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbf{Q}(\sqrt{6})]&=\frac{[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbf{Q}]}{[\mathbf{Q}(\sqrt{6}):\mathbf{Q}]}\\&=\frac{4}{2}=2.\end{aligned}$$

所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在域 $\mathbf{Q}(\sqrt{6})$ 上的极小多项式的次数是

2. 由于$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是$f(x)=(x-(\sqrt{2}+\sqrt{3}))(x+(\sqrt{2}+\sqrt{3}))=x^2-(5+2\sqrt{6})$的根，而$f(x)\in \mathbf{Q}(\sqrt{6})[x]$，所以$x^2-(5+2\sqrt{6})$是$\sqrt{2}+\sqrt{3}$在$\mathbf{Q}(\sqrt{6})$上的极小多项式.

4.2.32　试构作一个9元域.

解　设F是9元域，则加法群F的阶为9，每个元素的加法阶都是9的因子. 特别对于F中幺元素1_F，9个1_F相加为0，即$9\cdot 1_F=0$，所以F的特征是素数p，并且$p\mid 9$，于是$p=3$. 于是$0,1,2(3=0)$形成F的子域F_3. 记$n=[F:F_3]$，则F中每个元素唯一表成$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$，其中$u_1,\cdots,u_n$是$F$对于$F_3$的一组基，而$a_i\in F_3$. 由于每个$a_i$有3种选取方式，所以$9=|F|=3^n$. 因此$[F:F_3]=n=2$. 如果$f(x)$是$F_3[x]$中2次首1不可约多项式，令$\alpha$是$f(x)$在$F_3$的某个扩域中的一个根，则$[F_3(\alpha):F_3]=2$，$|F_3(\alpha)|=3^2=9$. 所以$F_3(\alpha)$就是9元域. 于是问题归结为求3元域$F_3=\{0,1,2\}(3=0)$上的一个2次首1不可约多项式. 考虑$f(x)=x^2+1$，如果它在$F_3[x]$中可约，则$f(x)$必然有1次多项式因子，即$f(x)$在$F_3$中有根. 但是$f(0)=1\neq 0$，$f(1)=f(2)=2\neq 0$. 因此$x^2+1$在$F_3[x]$中不可约. 所以令$\alpha$是$x^2+1$的一个根，即$\alpha^2=-1=2$，则$F_3(\alpha)$就是9元域. $F_3(\alpha)$中每个元素唯一表示成$a_0+a_1\alpha$，其中a_0,a_1分别取0，1，2.

现在给出构作9元域的第二种办法. 考虑$F_3[x]$中多项式$f(x)=x^9-x$. 由于$f'(x)=9x^8-1=-1$（在F_3中$9=0$），于是$(f(x),f'(x))=1$. 所以$f(x)$在F_3的代数闭包K中没有重根. 以F表示$f(x)$在F_3的代数闭包中的9个不同的根构成的集合，这是K的子集，我们要证明F是K的子域. 若$\alpha,\beta\in F$，则$\alpha^9=\alpha$，$\beta^9=\beta$，由于K为F_3的扩域，所以K的特征等于F_3的特征，即特征为3. 于是$(\alpha\pm\beta)^9=\alpha^9+(\pm\beta)^9=\alpha^9\pm\beta^9=\alpha\pm\beta$. 这就表明$\alpha\pm\beta\in F$. 又有$(\alpha\beta)^9=\alpha^9\beta^9=\alpha\beta$. 从而$\alpha\beta\in F$. 于是$F$为环. 又若$\alpha\in F$，$\alpha\neq 0$，由于$K$为域，所以$\alpha$在$K$中有逆元素$\alpha^{-1}$. 再由$\alpha^9=\alpha$可知$(\alpha^{-1})^9=(\alpha^9)^{-1}=\alpha^{-1}$　因此$\alpha^{-1}\in F$. 这就表明F是(9元)域.

注　由上面第二种证法可知：在F_3的每个固定的代数闭包K中都恰好存在唯一的9元子域，因为它是由方程$x^9-x=0$在K中9个不同的根组成的.

4.2.33　设F为域，$c\in F$，p为素数. 求证

(1) x^p-c在$F[x]$中可约$\Leftrightarrow x^p-c$在F中有根.

(2) 若F的特征为p，则x^p-x-c在$F[x]$中可约$\Leftrightarrow x^p-x-c$在F中有p个不同的根$\Leftrightarrow x^p-x-c$在F中有根.

解　(1) 若x^p-c在F中有根a，则x^p-c可被$F[x]$中一次多项式$x-a$除尽，所以是可约的. 反之设x^p-c在$F[x]$中可约，则$x^p-c=f(x)g(x)$，其中f和g分别是$[x]$中d和$p-d$次首1多项式，$1\leqslant d\leqslant p-1$. 记$\Omega$为$F$的代数闭包，令$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$是$x^p-c$在$\Omega$中的$n$个根，并记$\alpha=\alpha_1$，则$\alpha^p=c=\alpha_i^p(1\leqslant i\leqslant p)$. 不妨设$c\neq 0$（$c=0$时命题(1)显然成立）. 于是$\alpha_i$均不是0. 从而$(\alpha_i\alpha^{-1})^p=1$. 因此$\alpha_i=\alpha\zeta_i$，其中$\zeta_i^p=1(1\leqslant i\leqslant p)$. 由于$f(x)$的常数项是$(-1)^d$乘以$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$当中的$d$个，而这个常数项属于$F$，所以$\alpha^d\zeta\in F$，其中$\zeta^p=1$. 类似地考虑$g(x)$的常数项，可知$\alpha^{p-d}\zeta'\in F$，其中$(\zeta')^p=1$. 由于$1\leqslant d\leqslant p-1$，可知$(d,p-d)=(d,p)=1$. 于是有$x,y\in\mathbf{Z}$，使得$dx+(p-d)y=1$. 所以$(\alpha^d\zeta)^x(\alpha^{p-d}\zeta')^y=\alpha\xi\in F$，其中$\xi^p=1$. 但是$(\alpha\xi)^p=\alpha^p\xi^p=\alpha^p=c$，这表明$F$中元素$\alpha\xi$是多项式$x^p-c$的根.

(2) 由于F的特征为p，从而F包含p元域$F_p=\{0,1,2,\cdots,p-1\}(p=0)$. 由于乘法群$F_p^*=F_p\setminus\{0\}$的每个元素的阶都是$|F_p^*|=p-1$的因子，于是$F_p^*$中元素都是$x^{p-1}=1$的根. 从而$F_p$中$p$个元素恰好是方程$x^p=x$的$p$个根. 若$F$中元素$\alpha$是$x^p-x-c$的根，则$\alpha^p-\alpha-c=0$. 而对每个$n\in F_p$，$(\alpha+n)^p-(\alpha+n)-c=\alpha^p+n^p-\alpha-n-c=(\alpha^p-\alpha-c)+(n^p-n)=0$. 即$p$个元素$\alpha+n(n\in F_p)$都是$x^p-x-c$的根. 这表明(2)中第二个$\Leftrightarrow$是成立的.

现在证(2)中第一个$\Leftrightarrow$. 若x^p-x-c在F中有根，显然x^p-x-c在$F[x]$中可约. 反过来设x^p-x-c在$F[x]$中可约，则$x^p-x-c=f(x)g(x)$，其中$f(x)$和$g(x)$分别是$F[x]$中次数为d和$p-d$的首1多项式，$1\leqslant d\leqslant p-1$. 设$\alpha$是$x^p-x-c$在$F$的代数闭包$\Omega$中的一个根，则由上述，$x^p-x-c$的全部$p$个根为$\alpha+n(n\in F_p)$. 而$f(x)$中$x^{d-1}$的系数等于$(-1)$乘以这$p$个根当中的$d$个之和，这个系数属于$F$，所以$d\alpha+m\in F$，其中$m\in F_p\subseteq F$. 于是$d\alpha\in F$. 由于$1\leqslant d\leqslant p-1$，$d$为$F_p$中可逆元，因此也是$F$中可逆元，这就表明$\alpha=(d\alpha)d^{-1}\in F$. 于是$x^p-x-c$的$p$个根均属于$F$.

4.2.34　设F是有限域，则F中元素个数必为

素数幂.反之,对每个素数 p 和正整数 n,必存在 p^n 元域.

解 有限域 F 的特征必是素数 p(如果 F 的特征为 0,则 $1,2,3,4,\cdots$ 是 F 中无限个不同的元素).于是 F 有 p 元子域 $F_p = \{0,1,2,\cdots,p-1\}(p = 0)$.由于 $|F|$ 有限,所以 F 是 F_p 上有限维向量空间.设 n 是它的维数,即 $[F : F_p] = n$,则 F 在 F_p 上有一组基 $u_1,u_2,\cdots,u_n$,而 F 中每个元素唯一表示成 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$,其中 $a_i \in F_p$.由于每个 a_i 都可取 p 个元素,可知 $|F| = p^n$,这就表明有限域中元素个数必为素数幂.

反之,设 p 为素数,n 为正整数.取 p 元域 $F_p = \{0,1,2,\cdots,p-1\}(p = 0)$ 和 F_p 的一个代数闭包 Ω.则多项式 $f(x) = x^q - x$(这里 $q = p^n$)在 Ω 中有 q 个不同的根(由于 $f'(x) = qx^{q-1} - 1 = -1$,从而 $(f, f') = 1$)和4.2.31中构作9元域第二个办法那样,可以证明这 q 个不同的根形成 Ω 的子域.于是 $q(= p^n)$ 元域是存在的.

注 由证明可知,对每个 $q = p^n$,在 F_p 的固定代数闭包 Ω 中存在唯一的 q 元域(由 $x^q - x$ 在 Ω 中的 q 个根组成),以后这个 q 元域记作 F_q.

4.2.35 有限域 $F_q(q = p^n)$ 的加法群是 n 个 p 元循环群的直积.而乘法群 $F_q^* = F_q - \{0\}$ 是 $q-1$ 阶循环群.

解 我们已经证明了 F_q 中每个元素唯一表示成 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n$,其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 是 F_q 在 F_p 上的一组基,而 $a_i \in F_p$.这就表示加法群 F_q 是分别由 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 生成的 n 个 p 阶加法循环群的直积.

现在考虑乘法群 F_q^*,$|F_q^*| = q-1$,所以 F_q^* 中每个元素的(乘法)阶都是 $q-1$ 的因子.对 $q-1$ 的每个正因子 d,方程 $x^d - 1 = 0$ 在域 F_q 中至多有 d 个元素.若 F_q^* 有 d 阶子群,则此子群的 d 个元素都是 $x^d - 1 = 0$ 的根.所以对每个 d,F_q^* 中 d 阶子群至多有一个.根据 4.2.8 可知 F_q^* 必是 $q-1$ 阶循环群.

4.2.36 设有限域 F_q 和 $F_{q'}$ 是同一个域的子域,$q = p^m$,$q = (p')^n$,其中 p 和 p' 是素数,则 $p = p'$.并且 $F_q \subseteq F_{q'}$ 当且仅当 $m \mid n$.

解 域 F_q 和 $F_{q'}$ 的特征分别为素数 p 和 p',但是它们都应当是域 F 的特征,因此 $p = p'$.现在设 $F_q \subseteq F_{q'}$,则 $F_{q'}$ 是 F_q 上的有限维向量空间.设维数是 t,则 $F_{q'}$ 在 F_q 上有一组基 $u_1,\cdots,u_t$.而 $F_{q'}$ 的每个元素唯一表成 $a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_tu_t$,其中 $a_i \in F_q$.于是 $p^n = |F_{q'}| = |F_q|^t = q^t = p^{mt}$,即 $n = mt$,从而 $m \mid n$.反之若 $m \mid n$,则 $n = mt$,t 是正整数.而 $q = p^m$,$q' = p^{mt}$.由于 $F_{q'}$ 的元素即是 $x^{p^{mt}} - x$ 在 F 中的全部根,而 F_q 的元素是 $x^{p^m} - x$ 在 F 中的全部根.若 $\alpha \in F_q$,则 $\alpha^{p^m} = \alpha$.于是 $\alpha^{p^{2m}} = (\alpha^{p^m})^{p^m} = \alpha^{p^m} = 1,\cdots,\alpha^{p^{tm}} = \alpha$,即 $\alpha \in F_{q'}$.这就表明 $F_q \subseteq F_{q'}$.

4.2.37 设 F_q 是有限域,则对每个正整数 m,在 $F_q[x]$ 中必存在 m 次不可约多项式.

解 我们知道在 F_q 的代数闭包 Ω 中必存在有限域 F_{q^m},并且 F_q 是 F_{q^m} 的子域,$[F_{q^m} : F_q] = m$.由于 $F_{q^m}^*$ 是 $q^m - 1$ 阶乘法循环群,所以其中存在元素 u,使得 $F_{q^m}^* = \{1,u,u^2,\cdots,u^{q^m} 2\}$ $(u^{q^m-1} = 1)$.于是 $F_{q^m} = \{0,1,u,u^2,\cdots,u^{q^m} 2\}$.于是在 F_q 中添加上 u,$F_q(u) = F_{q^m}$.由于 $[F_q(u) : F_q] = [F_{q^m} : F_q] = m$,可知 u 在 F_q 上的极小多项式就是 $F_q[x]$ 中 m 次不可约多项式.

4.2.38 设 F_q 是有限域,则

(1) 对每个正整数 n,$F_q[x]$ 中所有次数除尽 n 的首 1 不可约多项式之积为 $x^{q^n} - x$.

(2) 若 $f(x)$ 为 $F_q[x]$ 中 n 次不可约多项式,而 α 是 $f(x)$ 在 F_q 的代数闭包 Ω 中的一个根,则 $f(x)$ 在 Ω 中的全部根为 $\alpha,\alpha^q,\alpha^{q^2},\cdots,\alpha^{q^{n-1}}$,并且这 n 个根两两不同.

(3) 以 N_n 表示 $F_q[x]$ 中 n 次首 1 不可约多项式的个数,则 $\sum\limits_{d \mid n} dN_d = q^n$,其中 d 过 n 的所有正整数因子.由此计算 N_1,N_2,N_3,N_4,N_5 和 N_6 的值.

(4) 求出 $F_2[x]$ 中所有 3 次首 1 不可约多项式和 $F_3[x]$ 中所有 2 次首 1 不可约多项式.

解 (1) 由于 $x^{q^n} - x$ 的全部根是 Ω 的子域 F_{q^n} 的 q^n 个元素,即 $x^{q^n} - x$ 没有重根,所以 $x^{q^n} - x$ 在 $F_q[x]$ 中分解成一些彼此不同的首 1 不可约多项式之积.设 $f(x)$ 是其中的一个首 1 不可约多项式因子,则 $f(x)$ 的根 α 属于 F_{q^n}.令 $f(x)$ 的次数为 d,则 $F_q(\alpha) = F_{q^d}$ 是 F_{q^n} 的子域.因此 $d \mid n$.反之,对于 $F_q[x]$ 中每个 d 次首 1 不可约多项式 $f(x)$,令 α 是 $f(x)$ 在 Ω 中的一个根,则 $F_q(\alpha) = F_{q^d}$.如果 $d \mid n$,则 $F_{q^d} \subseteq F_{q^n}$,于是 $\alpha \in F_{q^n}$,从而 α 是 $x^{q^n} - x$ 的根.换句话说,$f(x)$ 的所有根都是 $x^{q^n} - x$ 的根.由于 $x^{q^n} - x$ 没有重根,这就表明 $f(x)$ 是 $x^{q^n} - x$ 的因子.综合上述即知 $x^{q^n} - x$ 是 $F_q[x]$ 中所有次数为 n 的因子的首 1 不可约多项式之积.

(2) 设 $f(x)$ 为 $F_q[x]$ 中 n 次不可约多项式，$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n, a_i\in F_q$，则 $a_i^q=a_i(0\leqslant i\leqslant n)$. 令 α 是 $f(x)$ 在 Ω 中一个根，则 $f(\alpha)=a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 于是

$$\begin{aligned}f(\alpha^q)&=a_0^q\alpha^{nq}+a_1^q\alpha^{(n-1)q}+\cdots+a_n^q\\&=(a_0\alpha^n)^q+(a_1\alpha^{n-1})^q+\cdots+a_n^q\\&=(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n)^q=0.\end{aligned}$$

这就表明 α^q 也是 $f(x)$ 的根. 于是 $(\alpha^q)^q=\alpha^{q^2}$, $(\alpha^{q^2})^q=\alpha^{q^3},\cdots,\alpha^{q^{n-1}}$ 都是 $f(x)$ 的根(注意 $F_q(\alpha)=F_{q^n}$，所以 $\alpha^{q^n}=\alpha$). 现在证明以上 n 个根彼此不同. 当 $n=1$ 时显然. 下设 $n\geqslant 2$，于是 $\alpha\neq 0$(因为以 0 为根的不可约多项式是 1 次多项式 x). 如果 $\alpha^{q^i}=\alpha^{q^j}$，其中 $0\leqslant i<j\leqslant n-1$，则 $\alpha^{q^i}(1-\alpha^{q^j-q^i})=0$. 由于 $\alpha\neq 0$，可知 α 是 $x^{q^{j-i}}-x$ 的根. 但是 $1\leqslant j-i\leqslant n-1$，而 $x^{q^{j-i}}-x$ 的不可约多项式的次数都为 $j-i$ 的因子，特别地，α 所满足的不可约多项式 $f(x)$ 是 $x^{q^{j-i}}-x$ 的因子，所以 $f(x)$ 的次数 $\leqslant n-1$. 这就得到矛盾. 所以 $\alpha,\alpha^q,\alpha^{q^2},\cdots,\alpha^{q^{n-1}}$ 是 $f(x)$ 的两两相异的 n 个根.

(3) 由(1)知 $x^{q^n}-x=\prod_f f$，其中 f 过 $F_q[x]$ 中所有次数除尽 n 的首 1 不可约多项式. 对每个 $d\mid n$，$F_q[x]$ 中有 N_d 个 d 次首 1 不可约多项式，它们乘起来的次数为 dN_d，而 $x^{q^n}-x$ 的次数是 q^n，所以 $q^n=\sum_{d\mid n}dN_d$.

$F_q[x]$ 中 1 次首 1 不可约多项式共 q 个，它们是 $x-a(a\in F_q)$，所以 $N_1=q$. 由上式知 $q^2=N_1+2N_2$，于是 $N_2=\frac{q^2-q}{2}$. 又由 $q^3=N_1+3N_3$ 可知 $N_3=\frac{q^3-q}{3}$. 同样地 $N_5=\frac{q^5-q}{5}$ (对每个素数 p, $q^p=N_1+pN_p$，于是 $N_p=\frac{q^p-q}{p}$). 再由 $q^4=N_1+2N_2+4N_4$，可知 $N_4=\frac{1}{4}(q^4-q-q^2+q)=\frac{1}{4}(q^4-q^2)$. 最后由 $q^6=N_1+2N_2+3N_3+6N_6$ 可知

$$\begin{aligned}N_6&=\frac{1}{6}(q^6-q-(q^2-q)-(q^3-q))\\&=\frac{1}{6}(q^6-q^3-q^2+q).\end{aligned}$$

(4) x^8-x 是 $F_2[x]$ 中所有 1 次和 3 次首 1 不可约多项式之积. x^2-x 是 $F_2[x]$ 中所有 1 次首 1 不可约多项式之积. 于是 $\frac{x^8-x}{x^2-x}=\frac{x^7-1}{x-1}=x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$ 就是 $F_2[x]$ 中所有 3 次首 1 不可约多项式之积. 于是 $F_2[x]$ 中 3 次首 1 不可约多项式必有 2 个，并且它们都有形式 x^3+ax^2+bx+1，其中 $a,b\in F_2$. 由于它不可约，所以它在 F_2 中无根. 于是将 $x=1$ 代入为 $1+a+b+1=1$，即 $a+b=1$. 于是只有两个可能 $(a,b)=(0,1)$ 和 $(1,0)$. 所以对这两个可能，x^3+x^2+1 和 x^3+x+1 都是 $F_2[x]$ 中不可约多项式(我们顺便证明了它们的乘积为 $x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$).

x^9-x 是 $F_3[x]$ 中所有 1 次和 2 次首 1 不可约多项式之积，因此 $\frac{x^9-x}{x^3-x}=\frac{x^8-1}{x^2-1}=x^6+x^4+x^2+1$ 是 $F_3[x]$ 中所有 2 次首 1 不可约多项式之积. 由于 $x^6+x^4+x^2+1=(x^2+1)(x^4+1)$，而在 $F_3[x]$ 中，

$$\begin{aligned}x^4+1&=x^4+4=x^4+4x^2+4-x^2\\&=(x^2+2)^2-x^2\\&=(x^2+x+2)(x^2-x+2).\end{aligned}$$

于是 x^2+1, x^2+x+2 和 x^2+2x+2 就是 $F_3[x]$ 中全部 2 次首 1 不可约多项式.

§ 4.3 同态定理

群和环的同态定理是研究群和环的结构以及不同群和环之间联系的最重要工具. 是否善于发现群之间和环之间的同态，并利用同态定理来解决问题，是衡量学好抽象代数的最重要标志.

4.3.1 设 K 为域，$GL_n(K)$ 是元素属于 K 的 n 阶可逆方阵全体形成的乘法群，$SL_n(K)$ 是其中行列式为 1(1 指 K 中幺元素)的方阵组成的子集. 则 $SL_n(K)$ 是 $GL_n(K)$ 的正规子群，并且商群 $GL_n(K)/SL_n(K)$ 同构于 K^*(K 中非零元素乘法群).

解 设 $f:G\to G'$ 是群的同态，则 $\mathrm{Im}f=f(G)$ 是 G' 的子群，叫 f 的象. $\mathrm{Ker}f=f^{-1}(1)$ 是 G 的正规子群，叫 f 的核. 并且

$$\bar{f}:G/\mathrm{Ker}f\to\mathrm{Im}f,\ \bar{f}(\bar{g})=f(g)\quad(g\in G)$$

为群同构. 这就是群的基本同态定理. 特别地，f 是单同态当且仅当 $\mathrm{Ker}f=\{1\}$. 现在考虑行列式映射

$$\det:GL_2(K)\to K^*,\quad M\to\det M.$$

由于行列式有性质 $\det(MN)=(\det M)(\det N)$. 所以 det 是群同态，且核为 $SL_2(K)$，于是 $SL_2(K)$ 为 $GL_2(K)$ 的正规子群. 另一方面，对每个 $\alpha\in K^*$，

令 M 为对角方阵，对角元素有一个是 a，其余为 1，则 $\det(M)=a$. 这表明 det 是满同态. 于是由同态定理知 $\frac{GL_n(K)}{SL_n(K)}\cong K^*$.

注 请大家学会证明群 G 的某个子群 H 是 G 的正规子群，最好是找到一个同态 $f:G\to G'$，使得 H 恰好为 f 的核，于是自然有 $H\lhd G$. 另一点要提到的是：要证明映射 $f:G\to G'$ 是单射，我们需要证明 G' 中每个点的原象至多有一个. 但若 f 是群同态，为证 f 是单射，则只需要证 $\mathrm{Ker}f=(1)$，即只需证明 G' 中一个元素（幺元素）的原象 $\mathrm{Ker}f=f^{-1}(1)$ 只有一个原象（G 中幺元素）即可.

4.3.2 (1) 若 G 是群，$N\lhd G$，$H\lhd G$，则 $(H\cap N)\lhd H$，$N\lhd NH\leqslant G$，并且有群同构 $NH/N\cong H/H\cap N$.

(2) 若 G 为群，$N\lhd G$，$M\lhd G$，$N\leqslant M$，则 $N\lhd M$，$M/N\lhd G/N$，并且 $G/M\cong\frac{G/N}{M/N}$.

解 (1) 由 $N\lhd G$ 可知对每个 $g\in G$，$Ng=gN$. 于是

$$(NH)(NH)^{-1}=(NH)(H^{-1}N^{-1})=NHHN=NHN=NNH=NH.$$

所以 NH 是 G 的子群(这里利用了：群 G 的子集 H 为 G 的子群当且仅当 $HH^{-1}=H$，其中 $HH^{-1}=\{ab^{-1}:a,b\in H\}$). 由 $N\lhd G$ 和 $N\leqslant NH\leqslant G$ 可知 $N\lhd NH$. 现在考虑映射

$$f:H\to NH/N,f(h)=hN=\bar{h}.$$

f 显然是群同态，由于 NH/N 的元素均有形式 $\bar{h}=hN\ (h\in H)$，可知 f 为满同态. 而对 $h\in H$，

$$h\in\mathrm{Ker}f\Leftrightarrow\bar{h}=\bar{1}\Leftrightarrow hN=N$$
$$\Leftrightarrow h\in N\Leftrightarrow h\in H\cap N.$$

这表明 $\mathrm{Ker}f=H\cap N$（于是自然有 $H\cap N\lhd NH$）. 由同态定理即知 $H/(H\cap N)\cong NH/N$.

(2) 由 $N\lhd G$ 和 $N\leqslant M$ 可知 $N\lhd M$. 考虑映射

$$f:G/N\to G/M,f(gN)=gM.$$

这个映射是可以定义的，因若 $gN=g'N$，则 $g^{-1}g'\in N\subseteq M$，从而 $gM=g'M$. 即 gN 的象和 gN 中元素 g 的取法无关. 易知 f 是满同态. 最后决定 $\mathrm{Ker}f$：对于 $g\in G$，

$$gN\in\mathrm{Ker}f\Leftrightarrow gM=M$$
$$\Leftrightarrow g\in M\Leftrightarrow gN\in M/N.$$

这就表明 $\mathrm{Ker}f=M/N$. 并且 $M/N\lhd G/N$. 由同态定理知 $\frac{G/N}{M/N}\cong G/M$.

注 本题的两个命题也叫同态定理，在群论中也是很重要的工具.

4.3.3 设 S_n 是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上全部置换组成的对称群，A_n 是其中的偶置换构成的集合. 则当 $n\geqslant 2$ 时，A_n 是 S_n 的正规子群，并且 $[S_n:A_n]=2$. 而当 $n\geqslant 5$ 时 S_n 的非平凡正规子群只有 A_n.

解 熟知若 σ 和 τ 同时为偶置换或同时为奇置换，则 $\sigma\tau$ 为偶置换，否则 $\sigma\tau$ 是奇置换. 于是对映射 $f:S_n\to\{\pm1\}$，其中 $\{\pm1\}$ 为乘法群，而

$$f(\sigma)=\begin{cases}1,\text{若 }\sigma\text{ 是偶置换,}\\-1,\text{若 }\sigma\text{ 是奇置换,}\end{cases}$$

则由上述可知 f 是群同态. 当 $n\geqslant 2$ 时，S_n 中有偶置换（如恒等置换）也有奇置换（如(12)），从而 f 是满同态，而 $\mathrm{Ker}f=A_n$. 于是 $A_n\lhd S_n$，并且 S_n/A_n 是二元群. 因此 $[S_n:A_n]=2$. 由 $|S_n|=n!$ 可知 $|A_n|=\frac{n!}{2}$.

当 $n\geqslant 5$ 时，我们在习题 4.2.14 已经证明了 A_n 没有非平凡的正规子群. 设 $N\lhd S_n$，$N\neq\{1\}$. 如果 $N\leqslant A_n$，则 $N\lhd A_n$，由上述知必然 $N=A_n$. 如果 N 不是 A_n 的子群，则 N 必包含奇置换 σ. 于是 NA_n 包含 S_n 对 A_n 的两个不同的陪集 A_n 和 σA_n. 但是 $[S_n:A_n]=2$，所以 $NA_n=G$. 由 4.3.2 有 $A_n/N\cap A_n\cong\frac{NA_n}{N}=\frac{S_n}{N}$，并且 $|N\cap A_n|=\frac{|A_n||N|}{|S_n|}=\frac{|N|}{2}$. 由于 $N\cap A_n\lhd A_n$，可知 $N\cap A_n=\{1\}$ 或 $N\cap A_n=A_n$. 若 $N\cap A_n=A_n$，即 $|N|=2|N\cap A_n|=2|A_n|=n!$，从而 $N=S_n$. 若 $N\cap A_n=\{1\}$，则 $|N|=2$. 但是，当 $n\geqslant 5$ 时，S_n 中一元共轭元素类只有幺元素，而 N 是一些共轭元素类的并（参见 4.2.12 和 4.2.13），所以 S_n 没有 2 元正规子群 N. 因此 $N\cap A_n=\{1\}$ 不可能. 于是上面找出的 S_n 的正规子群只有 $\{1\}$，A_n 和 S_n.

4.3.4 设 G 为群.

(1) 对每个 $a\in G$，映射 $f_a:G\to G$，$f_a(g)=aga^{-1}$ 是群 G 的自同构（叫 G 的内自同构），并且 G 的全体内自同构 $I(G)=\{f_a:a\in G\}$ 对于映射合成运算形成群（叫 G 的内自同构群）.

(2) 设 $C(G)$ 为群 G 的中心，即 $C(G)=\{a:ag=ga$，对每个 $g\in G\}$，则有群同构 $I(G)\cong G/C(G)$.

解 (1) 由 $f_a(gh)=a(gh)a^{-1}=aga^{-1}aha^{-1}=f_a(g)f_a(h)$，可知 f_a 是 G 的自同态. 对每个 $g\in G$，$f_a(a^{-1}ga)=g$，从而 f_a 是满同态. 又 $g\in\mathrm{Ker}f_a\Leftrightarrow aga^{-1}=1\Leftrightarrow g=a^{-1}a=1$. 可知 f_a 是单同态. 于是 f_a 为 G 的自同构.

对于 $I(G)$ 中任意两个元素 f_a 和 f_b，则 $f_af_b(g)$

$= f_a(bgb^{-1}) = abgb^{-1}a^{-1} = abg(ab)^{-1} = f_{ab}(g)$（对每个 $g \in G$）. 于是 f_af_b 也是 $I(G)$ 中元素 f_{ab}. 又 $f_af_{a^{-1}} = f_{aa^{-1}} = f_e$ 是 G 的恒等自同构（其中 e 表示 G 的幺元素，而 $f_e(g) = ege^{-1} = g$）. 于是 f_a 的逆元素 $f_{a^{-1}}$ 也是 $I(G)$ 中元素. 这表明 $I(G)$ 是群.

(2) 作映射：$\varphi: G \to I(G), \varphi(a) = f_a$. 由于 $\varphi(ab) = f_{ab} = f_af_b = \varphi(a)\varphi(b)$，可知 φ 是群同态，易知这是满同态. 再决定 $\mathrm{Ker}\varphi$：对于 $a \in G$，

$$
\begin{aligned}
a \in \mathrm{Ker}\varphi &\Leftrightarrow f_a \text{ 为恒等自同构} \\
&\Leftrightarrow f_a(g) = g \ (\text{对每个 } g \in G) \\
&\Leftrightarrow aga^{-1} = g \ (\text{对每个 } g \in G) \\
&\Leftrightarrow a \in C(G).
\end{aligned}
$$

于是 $\mathrm{Ker}\varphi = C(G)$. 所以 $G/C(G) \overset{\sim}{=} I(G)$.

注 对每个群 G，我们都有一批自同构 f_a（$a \in G$）. 但当 $a \neq b$ 时，f_a 和 f_b 可能相同. 整个内自同构群的大小和结构由 $I(G) \simeq G/C(G)$ 给出. 当中心 $C(G)$ 很小时，内自同构比较多. 另一个极端情形是 $C(G) = G$（这相当于 G 是交换群），则 $I(G) \cong G/G = \{1\}$，即内自同构只有一个：恒等自同构.

4.3.5 设 G 为群，$[G,G]$ 表示由所有元素 $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$（$a,b \in G$）生成的子群，即 $[G,G]$ 是 G 中包含所有换位元素 $[a,b]$ 的最小的子群（$[G,G]$ 叫 G 的换位子群）.

(1) $[G,G] \lhd G$，并且 G 是交换群当且仅当 $[G,G] = \{1\}$.

(2) $[G,G]$ 是 G 中使 G/N 为交换群的最小正规子群 N. 换句话说，对每个 $N \lhd G$，G/N 为交换群当且仅当 $[G,G] \leqslant N$.

解 (1) 对每个换位元素 $\alpha = [a,b] = aba^{-1}b^{-1}$，我们有 $ab = [a,b]ba$（通过 $[a,b]$ 把 a 和 b 交换了位置，所以 $[a,b]$ 叫换位元素）. 于是对每个 $g \in G$，

$$
\begin{aligned}
g^{-1}[a,b]g &= (g^{-1}\alpha)g = [g^{-1},\alpha]\alpha g^{-1}g \\
&= [g^{-1},\alpha]\alpha \in [G,G]
\end{aligned}
$$

（因为 $[g^{-1},\alpha]$ 和 α 均是换位元素，而 $[G,G]$ 是由所有换位元素生成的子群），所以 $g^{-1}[G,G]g \subseteq [G,G]$. 由于 g 可取 G 中任意元素，所以也有 $g[G,G]g^{-1} \subseteq [G,G]$，此式为 $[G,G] \subseteq g^{-1}[G,G]g$. 于是 $g^{-1}[G,G]g = [G,G]$（对每个 $g \in G$）. 这表明 $[G,G] \lhd G$.

若 G 是交换群，则对每个 $a,b \in G$，$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = aa^{-1}bb^{-1} = 1$. 于是 $[G,G] = \{1\}$. 若 G 不是交换群，则有 $a,b \in G$，使得 $ab \neq ba$，于是 $[a,b] = abb^{-1}a^{-1} \neq 1$，从而 $[G,G] \neq \{1\}$.

(2) 若 $H \lhd G$，我们对 $g \in G$，以 $\bar{g} = gH$ 表示 G/H 中元素. 如果 G/H 是交换群，则对每个 $a,b \in G, \bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$，于是 $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{1}$，即 $[a,b] = aba^{-1}b^{-1} \in H$. 所以 $[G,G] \subseteq H$. 反之若 $[G,G] \subseteq H$，则对每个 $a,b \in G$，$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} \in [G,G] \subseteq H$，因此 $\overline{aba^{-1}b^{-1}} = \bar{1}$，即 $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$. 从而 G/H 是交换群.

4.3.6 (1) 每个偶阶群中必有 2 阶元素.

(2) 若 G 是 $2n$ 阶群，其中 n 是奇数，则 G 必有正规子群 N，使得 $[G:N] = 2$.

解 (1) 设 G 是偶阶群. 我们把每个 $g \in G$ 结合它的逆元素 g^{-1}，则 $\{g, g^{-1}\}$ 和 $\{h, h^{-1}\}$ 或者是同一集合，或者彼此没有公共元素. 当 $g^2 \neq 1$ 时，$g \neq g^{-1}$. 这些 $g \neq g^{-1}$ 的两两配成一对 $\{g, g^{-1}\}$，从而这样的元素共偶数个. 由于 $|G|$ 为偶数，所以 $g^2 = 1$ 的元素 g 也有偶数个. 于是除了幺元素外，必还有 g 使得 $g^2 = 1$，这个 g 就是 G 中 2 阶元素.

(2) 以 $S(G)$ 表示集合 G 上的全部置换组成的群. 定义映射 $\rho: G \to S(G) = S_{2n}$，$\rho(a) = \sigma_a$，其中 σ_a 是集合 G 上的置换，它把 $g \in G$ 变成 ag. 我们在 4.2.15 中证明了 ρ 是群的单同态，于是由同态定理，G 同构于 $S(G)$ 的子群 $\mathrm{Im}\rho = \rho(G)$. 所以只需对群 $\rho(G)$ 证明命题即可. 由 (1) 知 G 中有 2 阶元素 a. 由于 $a \neq 1, a^2 = 1$，可知对每个 $g \in G, \sigma_a(g) = ag \neq g, \sigma_a(ag) = a^2g = g$. 因此置换是 n 个对换 (g, ag) 的乘积. 由于 n 是奇数，所以 σ_a 是奇置换. 换句话说，置换群 $\rho(G)$ 中有奇置换 σ_a，所以对于 $\rho(G)$ 中偶置换全体形成的子群 N，我们有 $[\rho(G): N] = 2$. 而这种子群 N 必是 $\rho(G)$ 的正规子群.

注 正如 4.2.15 后面的注记所述，我们通过置换表示 ρ 把群 G 同构于一个具体的置换群 $\rho(G)$，由置换群的具体性质得到与它同构的群 G 的性质. 4.3.8 和 4.3.9 也是这样的例子.

4.3.7 六阶群只有两个：循环群 C_6 和置换群 S_3.

解 由 4.3.6 可知 6 阶群 G 中有 2 阶元素 a 和正规子群 N，$[G:N] = 2$，于是 N 是 3 阶群，从而是循环群，即 $N = \{1, b, b^2\}$，其中 b 和 b^2 是 3 阶元素. 于是 $a \notin N$. 而 G 对 N 有两个陪集 N 和 aN，并且由 $N \lhd G$ 可知 $aN = Na$. 而 $G = N \cup aN = \{1, b, b^2, a, ab, ab^2\}$. 为了决定群的结构，只需看 ba 是上面 6 个元素的哪一个. 显然 ba 不能是 $1, b, b^2$ 和 a（比如若 $ba = 1$，则 $a = b^{-1} = b^2$ 矛盾. 若 $ba = b$，则 $a = 1$ 矛盾 …）. 因此只有两个可能：一个可能是 $ba = ab$，由于 G 是由 a 和 b 生成的，由 $ba = ab$ 可知 G 是交换群. 由 a 和 b 的阶分别是 2 和 3 可知 ab 的阶是 6. 即 6 阶 G 有 6 阶元素，所以 G 必是循环群 C_6. 另一个可能是 $ba = ab^2$. 我们给出一个这样群的具体

实现：取集合 $\{1,2,3\}$ 上的置换群 S_3，令 $b=(123)$，$a=(12)$，则 $b^2=(132)$，$b^3=1$，$a^2=1$，$ba=(13)=ab^2$. 所以 G 同构于 S_3. 于是6阶群只有两个：C_6 和 S_3.

注 我们在前面证明了 S_3 是阶最小的非交换群. 现在看到 S_3 也是唯一的阶最小的非交换群.

4.3.8 设 G 是有限群，p 是 $|G|$ 的最小素因子. 如果 $N\leqslant G$，$[G:N]=p$，则 $N\lhd G$.

解 G 对 N 有 p 个左陪集 $aN(a\in G)$. 这 p 个左陪集组成的集合记成 A，以 $S(A)$ 表示集合 A 上的置换全体组成的群. 定义映射

$$\rho_N:G\to S(A)=S_p,\rho_N(g)=\sigma_g,$$

其中 σ_g 把陪集 aN 变成 gaN. 易知 σ_g 是集合 A 上的置换，即 $\sigma_g\in S(A)$，并且 ρ_N 是群同态(先证 $\sigma_{gh}=\sigma_g\sigma_h$，由此得 $\rho_N(gh)=\rho_N(g)\rho_N(h)$). 现在我们决定 $\mathrm{Ker}\rho_N$. 对每个 $g\in G$，

$$g\in \mathrm{Ker}\rho_N\Leftrightarrow gaN=aN\ (\text{对每个 } a\in G)$$
$$\Leftrightarrow a^{-1}ga\in N\ (\text{对每个 } a\in G)$$
$$\Leftrightarrow g\in aNa^{-1}(\text{对每个 } a\in G)$$
$$\Leftrightarrow g\in \bigcap_{a\in G}aNa^{-1}.$$

于是 $\mathrm{Ker}\rho_N=\bigcap_{a\in G}aNa^{-1}$(即 N 的所有共轭子群之交). 特别地，$\mathrm{Ker}\rho_N$ 是 N 的子群. 于是 $p=|G|/|N|$ 除尽 $|G|/|\mathrm{Ker}\rho_N|=|G/\mathrm{Ker}\rho_N|=|\rho_N(G)|$，$\rho_N(G)\leqslant S_p$. 但是 $p^2\nmid p!=|S_p|$，于是 $p^2\nmid|\rho_N(G)|=|G/\mathrm{Ker}\rho_N|$. 由于 $|G/\mathrm{Ker}\rho_N|$ 没有比 p 大的素因子(因为 $|G/\mathrm{Ker}\rho_N|=|\rho_N(G)|$ 是 $|S_p|=p!$ 的因子)，也没有比 p 小的素因子(由于 p 是 $|G|$ 的最小素因子)，于是 $|G/\mathrm{Ker}\rho_N|=p$. 但是 $[G:N]=p$ 并且 $\mathrm{Ker}\rho_N\leqslant N$，于是 $N=\mathrm{Ker}\rho_N\lhd G$.

4.3.9 决定 S_3 的自同构群 $\mathrm{Aut}(S_3)$.

解 $S_3=\{1,(12),(13),(23),(123),(132)\}$. 设 $\sigma\in\mathrm{Aut}(S_3)$，则自同构 σ 把 S_3 的2阶元素映成2阶元素. 所以 σ 给出 S_3 的全部2阶元素组成的集合 $A=\{(12),(23),(13)\}$ 上的一个置换. 把这个置换记成 $\bar\sigma$. 于是我们有映射 $f:\mathrm{Aut}(S_3)\to S(A)$，$f(\sigma)=\bar\sigma$. 由定义知对每个 $a\in A$，$\bar\sigma(a)=\sigma(a)$. 由此可知 f 是群同态. 现在决定 $\mathrm{Ker}f$. 若 $\sigma\in\mathrm{Ker}f$，则 σ 为 A 上恒等置换，从而 σ 把 A 中元素 (12)，(13)，(23) 均保持不变. 但是 S_3 是由 (12)，(13) 和 (23) 生成的 ($(123)=(13)(12)$，$(132)=(12)(13)$)，所以 σ 把 S_3 的每个元素不变，即 σ 为恒等置换. 这表明 f 是单同态. 另一方面，我们由4.3.4已知 S_3 的内自同构群 $I(S_3)$ 是 $\mathrm{Aut}(S_3)$ 的子群，并且 $I(S_3)\cong S_3/C(S_3)$. 不难验证 S_3 的中心只有恒等置换(即只有它和 S_3 的每个元素可交换)，于是 $I(S_3)\cong S_3$，从而 $|\mathrm{Aut}(S_3)|\geqslant|I(S_3)|=|S_3|=6$. 而由 f 是单同态知 $|\mathrm{Aut}(S_3)|=|I_m f|\leqslant|S(A)|\leqslant 6$. 于是 $|I_m(f)|=|S(A)|$，即 f 也是满同态. 这就表明 f 是同构，于是 $\mathrm{Aut}(S_3)\cong S(A)\cong S_3$.

4.3.10 (1) 设 R 是含幺交换环，则 R 的理想 I 是素理想当且仅当商环 R/I 是整环. I 是 R 的极大理想当且仅当 R/I 是域. R 的每个极大理想都是素理想.

(2) 主理想整环的每个非零素理想都是极大理想.

解 (1) 环 R 中理想 I 叫做极大理想，是指 $I\neq R$，并且若 J 又是 R 的理想，$J\supset I$，$J\neq I$，则必然 $J=R$. 现在设 I 是极大理想. 对于 R/I 中非零元素 $\bar a$，则 $a\notin I$. 由于 $I+aR$ 是比 I 大的理想，因此 $I+aR=R\ni(1)$，于是有 $x\in I$，$y\in R$，使得 $x+ay=1$，即 $\bar a\bar y=\bar 1$，这表明 $\bar a$ 在 R/I 中可逆. 于是 R/I 是域. 将上述推理反回去，即可知若 R/I 是域，则 I 为 R 的极大理想. 现在设 I 为 R 的素理想. 对于 a，$b\in R$，如果 $\bar a\bar b=\bar 0$，则 $\overline{ab}=\bar 0$，即 $ab\in I$. 由于 I 是素理想，所以 $a\in I$ 或者 $b\in I$. 即 $\bar a=0$ 或者 $\bar b=0$. 于是 R/I 为整环. 反之，若 R/I 为整环，将上面推理逆回去可知 I 是素理想. 最后，由于域为整环，所以由上述可知极大理想一定是素理想.

(2) 主理想整环 R 中非零理想有形式 $I=(a)=aR$，其中 $a\neq 0$. 若 I 是素理想，则 a 必为不可约元素. 这时对于理想 $J=(b)$，若 $I\subset J$，则 $b\mid a$. 于是由 a 不可约可知或者 $b\sim a$，或者 $b\in U(R)$. 当 $b\sim a$ 时 $I=J$. 所以若 $I\neq J$，则 $b\in U(R)$，即 $J=(b)=R$. 这就表明 I 是极大理想.

注 如果 R 不是主理想整环，即使是唯一分解整环，则非零素理想不一定是极大理想. 例如 $R=\mathbf{Q}[x,y]$ 是唯一分解整环. 对于它的非零理想 $I=(x)=xR$，$R/I\cong F[y]$ 是整环但不是域，所以 I 是素理想但不是极大理想.

4.3.11 设 F 为域，α 是在 F 上代数的元素，$f(x)$ 为 α 在 F 上的极小多项式，则 $F[\alpha]=F(\alpha)\cong F[x]/(f(x))$. 其中 $(f(x))$ 表示由 f 生成的 $F(x)$ 的主理想.

解 考虑映射 $\varphi:F[x]\to F[\alpha]$，$\varphi(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i)=\sum_{i=0}^{n}a_i\alpha^i(a_i\in F)$. 易知这是环的满同态. 我们计算 $\mathrm{Ker}\varphi$：

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\in \mathrm{Ker}\varphi\Leftrightarrow g(\alpha)=0$$

$\Leftrightarrow f(x)\mid g(x)$ (因为 f 是 α 的极小多项式)

因为 $\mathrm{Ker}(\varphi)=(f(x))$. 于是有环同构 $F[x]/(f(x))\cong F[\alpha]$. 由于 $F[x]$ 是主理想整环, 而 α 的极小多项式 $f(x)$ 必是不可约多项式, 所以 (f) 是 $F[x]$ 的素理想. 由 4.3.10(2) 可知 (f) 也是 $F[x]$ 的极大理想. 这表明 $F[x]/(f)$ 是域, 因此 $F[\alpha]$ 也是域, 即 $F[\alpha]=F(\alpha)$ (参考习题 4.2.30).

4.3.12 (1) 设 F 是特征为零的域, 则域的有限扩张 E/F 必是单扩张, 即必存在 $\alpha\in E$, 使得 $E=F(\alpha)$.

(2) 若 F 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 的 n 次扩域, 则 F 的自同构至多有 n 个

(3) 若 p 和 q 是不同的素数, 则 $[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$, 并且 $\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})$.

解 (1) 若 $E\neq F$, 取 $\alpha_1\in E-F$, 则 $F(\alpha_1)$ 比 F 大, 于是 $[F(\alpha_1):F]>1$. 如果 $F(\alpha_1)\neq E$, 再取 $\alpha_2\in E-F(\alpha_1)$, 则 $[F(\alpha_1,\alpha_2):F(\alpha_1)]>1$. 如此下去, 由于 E/F 是有限扩张, 即 $[E:F]$ 有限, 可知必有有限个 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in E$, 使得 $F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=E$. 为证 E/F 是单扩张, 我们只需对 $n=2$ 的情形证明即可(然后用归纳法就可证明一般 n 的情形). 于是令 $E=F(\alpha,\beta)$. 由于 $[E:F]$ 有限, 所以 E 中元素 α 和 β 在 F 上是代数元素. 令 $f(x)$ 和 $g(x)$ 分别是 α 和 β 在 F 上的极小多项式, 则 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是 $F[x]$ 中首 1 不可约多项式. 由于 F 是特征零域, 可知 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 F 的代数闭包 Ω 中都没有重根 (因为 $f'(x)$ 的次数比 $f(x)$ 的次数小 1, 因此 $f'(x)$ 不恒为 0, 再由 $f(x)$ 不可约知 $(f,f')=1$. 因此 f 无重根). 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in\Omega$ 是 $f(x)$ r 个不同的根, $\beta_1,\cdots,\beta_s\in\Omega$ 是 $g(x)$ s 个不同的根, 则

$$f(x)=(x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_r),\alpha=\alpha_1,$$

$$g(x)=(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_s),\beta=\beta_1.$$

于是对每组 (i,k) $(1\leqslant i\leqslant r,2\leqslant k\leqslant s)$, 方程 $\alpha_i+x\beta_k=\alpha_1+x\beta_1$ 在 Ω 中恰好有一个解 $x=(\alpha_i-\alpha_1)/(\beta_1-\beta_k)$. 于是在 F 中至多有一个解(上面假设 $s\geqslant 2$, 因若 $s=1$, 则 $g(x)=x-\beta_1\in F[x]$, 即 $\beta=\beta_1\in F$, 于是 $E=F(\alpha,\beta)=F(\alpha)$ 是 F 的单扩张). 由于特征零域 F 是无限域, 从而存在 $c\in F$ 使得 $\alpha_i+c\beta_k\neq\alpha_1+c\beta_1(1\leqslant i\leqslant r,2\leqslant k\leqslant s)$. 令 $r=\alpha_1+c\beta_1=\alpha+c\beta$, 则 $r\in F(\alpha,\beta)=E$. 我们来证 $E=F(r)$. 显然 $E\supseteq F(r)$. 另一方面, 由于 $g(\beta)=0, f(r-c\beta)=f(\alpha)=0$, 可知多项式 $g(x)$ 和 $f(r-cx)$ 有公共根 $x=\beta$, 并且由上面条件可知它们只有这一个公共根. 于是 $(g(x),f(r-cx))=x-\beta$. 由于 $g(x)$ 和 $f(r-cx)$ 的系数都属于 $F(r)$, 所以它们的最大公因子的系数也属于 $F(r)$, 即 $\beta\in F(r)$. 于是 $\alpha=r-c\beta\in F(r)$. 这表明 $F(\alpha,\beta)\subseteq F(r)$. 所以 $E=F(\alpha,\beta)=F(r)$, 即 E/F 是单扩张.

(2) 设 $[E:\mathbf{Q}]=n$, 由(1)知 $E/\mathbf{Q}$ 是单扩张, 即 $E=\mathbf{Q}(\alpha)$ $(\alpha\in E)$. 于是, α 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式 $f(x)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中 n 次首 1 不可约多项式. 记它为

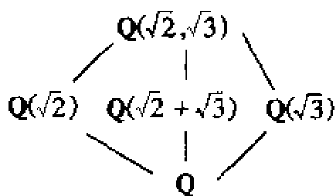
$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n(a_i\in\mathbf{Q}).$$

设 σ 是 E 的自同构. 参考 4.1.11 的证明可知 σ 在有理数域上是恒等映射. 而 E 中元素表成 $\sum_{i=0}^{n-1}c_i\alpha^i$, 于是 $\sigma(\sum_{i=0}^{n-1}c_i\alpha^i)=\sum_{i=0}^{n-1}c_i\sigma(\alpha)^i$. 所以 σ 由 $\sigma(\alpha)$ 唯一决定. 由于

$$\begin{aligned}f(\sigma(\alpha))&=\sigma(\alpha)^n+a_1\sigma(\alpha)^{n-1}+\cdots\\&\quad+a_{n-1}\sigma(\alpha)+a_n\\&=\sigma(\alpha^n)+\sigma(a_1\alpha^{n-1})+\cdots\\&\quad+\sigma(a_{n-1}\alpha)+\sigma(a_n)\\&=\sigma(\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\alpha+a_n)\\&=\sigma(f(\alpha))=\sigma(0)=0,\end{aligned}$$

这表明 $\sigma(\alpha)$ 也是 $f(x)$ 的根. 因此域 F 的自同构个数等于 $f(x)$ 在 F 中根的个数(因为 $\sigma(\alpha)\in F$). 但是 $f(x)$ 在 F 的代数闭包中有 n 个(不同的)根, 所以, 在 F 中根数不超过 n, 因此, F 的自同构个数也 $\leqslant n$.

(3) 由 $\sqrt{p}+\sqrt{q}\in\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$ 可知 $\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})\subseteq\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$. 因此有如下的域扩张图表:



由于 $\sqrt{p}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式是 $x^2-p=0$, 可知 $[\mathbf{Q}(\sqrt{p}):\mathbf{Q}]=2$. 又因为 $\sqrt{q}$ 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ 上极小多项式必除尽 x^2-q. 因此 $[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}(\sqrt{p})]\leqslant 2$. 如果 $[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}(\sqrt{p})]=1$, 则 $\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\sqrt{p})$, 即 $\sqrt{q}\in\mathbf{Q}(\sqrt{p})$. 于是 $\sqrt{q}=a+b\sqrt{p}$, 其中 $a,b\in\mathbf{Q}$. 两边平方得到 $q=a^2+pb^2+2ab\sqrt{p}$. 由于 1 和 $\sqrt{p}$ 是 $\mathbf{Q}(\sqrt{p})$ 在 $\mathbf{Q}$ 上一组基, 所以 $2ab=0$. 于是 $a=0$ 或者 $b=0$. 当 $a=0$ 时, $q=pb^2$; 当 $b=0$ 时, $q=a^2$. 这两种情况均不可能. 因为 p 和 q

是不同的素数.这表明$[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}(\sqrt{p})]=2$.于是我们得到

$$[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}(\sqrt{p})][\mathbf{Q}(\sqrt{p}):\mathbf{Q}]=4$$

并且$1,\sqrt{q}$是$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$在$\mathbf{Q}(\sqrt{p})$上一组基,即$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$中元素均可表成$\alpha+\beta\sqrt{q}$,其中$\alpha,\beta\in\mathbf{Q}(\sqrt{p})$.但是$\mathbf{Q}(\sqrt{p})$在$\mathbf{Q}$上又有基$1,\sqrt{p}$.因此$\alpha=a+b\sqrt{p},\beta=c+d\sqrt{p}$,其中$a,b,c,d\in\mathbf{Q}$.于是

$$\alpha+\beta\sqrt{q}=a+b\sqrt{p}+c\sqrt{q}+d\sqrt{pq}.$$

由于$[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$,这就表示$1,\sqrt{p},\sqrt{q}$和$\sqrt{pq}$是$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$在$\mathbf{Q}$上的一组基,即$1,\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{pq}$在$\mathbf{Q}$上是线性无关的.

由于

$$\begin{aligned}4&=[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]\\&=[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})]\\&\quad\times[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}],\end{aligned}$$

可知$[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]$是1,2或4.若$\sqrt{p}+\sqrt{q}\in\mathbf{Q}$,则$\sqrt{q}+\sqrt{p}=a\in\mathbf{Q}$,这和上面所述,$1,\sqrt{p},\sqrt{q}$在$\mathbf{Q}$上线性无关相矛盾.于是$[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]\neq 1$.若$[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=2$,则$\sqrt{p}+\sqrt{q}$在$\mathbf{Q}$上的极小多项式是2次多项式$x^2+ax+b,a,b\in\mathbf{Q}$.设它的根为$\sqrt{p}+\sqrt{q}$和$\alpha$,由韦达定理知$\sqrt{p}+\sqrt{q}+\alpha=-a,(\sqrt{p}+\sqrt{q})\alpha=b$.因此

$$\begin{aligned}b&=-(\sqrt{p}+\sqrt{q})(a+\sqrt{p}+\sqrt{q})\\&=-(a\sqrt{p}+a\sqrt{q}+p+q+2\sqrt{pq}),\end{aligned}$$

即

$$(b+p+q)+a\sqrt{p}+a\sqrt{q}+2\sqrt{pq}=0.$$

这又和$1,\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{pq}$在$\mathbf{Q}$上线性无关相矛盾.于是$[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$,即$\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$.

另一种证法为:由于$[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$,并且由4.3.12知$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})/\mathbf{Q}$是单扩张,所以有$\alpha\in\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$使得$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\alpha)$.于是$\alpha$在$\mathbf{Q}$上的极小多项式$f(x)$必是4次的.现在设$f(x)$的4个不同的根为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$(它们属于复数域$\mathbf{C}$),$\alpha=\alpha_1$.作映射

$$\sigma_\lambda:\mathbf{Q}(\alpha)=\mathbf{Q}[\alpha]\to\mathbf{C}\ (\lambda=1,2,3,4),$$

其中对$\mathbf{Q}[\alpha]$中元素$\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha^i(c_i\in\mathbf{Q})$,令$\sigma_\lambda(\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha^i)=\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha_\lambda^i$.这个映射是可定义的,因为若$\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha^i=\sum_{j=0}^{m}c_j'\alpha^j(c_j'\in\mathbf{Q})$,令

$$g(x)=\sum_{i=0}^{n}c_ix^i-\sum_{j=0}^{m}c_j'x^j\in\mathbf{Q}[x],$$

则$g(\alpha)=0$.从而$f(x)\mid g(x)$(因为$f(x)$是极小多项式).于是

$$g(x)=f(x)h(x),h(x)\in\mathbf{Q}[x].$$

由于α_λ也是$f(x)$的根,所以$g(\alpha_\lambda)=f(\alpha_\lambda)h(\alpha_\lambda)=0$,即$\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha_\lambda^i=\sum_{j=0}^{m}c_j'\alpha_\lambda^j$,所以$\sigma_\lambda(\sum_{i=0}^{n}c_i\alpha^i)=\sigma_\lambda(\sum_{j=0}^{m}c_j'\alpha^j)$.进而,易知每个$\sigma_\lambda$都是域的同态,并且对每个$a\in\mathbf{Q},\sigma_\lambda(a)=a$.于是$\sigma_\lambda(\sqrt{p})^2=\sigma_\lambda(p)=p$,即$\sigma_\lambda(\sqrt{p})=\pm\sqrt{p}$.同样地,$\sigma_\lambda(\sqrt{q})=\pm\sqrt{q}$.由于$\sigma_\lambda(\alpha)=\alpha_\lambda(\lambda=1,2,3,4)$,而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$彼此不同,所以从$\mathbf{Q}(\alpha)=\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$到$\mathbf{C}$的这4个同态$\sigma_\lambda$也彼此不同,并且分别为

$\sigma_1(\sqrt{p})=\sqrt{p},\sigma_1(\sqrt{q})=\sqrt{q}$($\sigma_1$是恒等映射),于是$\sigma_1(\sqrt{pq})=\sqrt{pq}$.

$\sigma_2(\sqrt{p})=\sqrt{p},\sigma_2(\sqrt{q})=-\sqrt{q}$,于是$\sigma_2(\sqrt{pq})=-\sqrt{pq}$.

$\sigma_3(\sqrt{p})=-\sqrt{p},\sigma_3(\sqrt{q})=\sqrt{q}$,于是$\sigma_3(\sqrt{pq})=\sqrt{pq}$.

$\sigma_4(\sqrt{p})=-\sqrt{p},\sigma_4(\sqrt{q})=-\sqrt{q}$,于是$\sigma_4(\sqrt{pq})=\sqrt{pq}$.

但是$\mathbf{Q}(\alpha)=\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$在$\mathbf{Q}$上有基$1,\sqrt{p},\sqrt{q},\sqrt{pq}$,由此可知,$\sigma_\lambda$均把$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$实际上映到$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$之中,而且是满同态.此外每个$\sigma_\lambda$也是单同态,因为$\mathrm{Ker}\sigma_\lambda$是域$\mathbf{Q}(\alpha)$的理想.如果$\mathrm{Ker}\sigma_\lambda$有非零元素$t$,则因域中$t$可逆,从而$1=tt^{-1}\in\mathrm{Ker}\sigma_\lambda$,即$\mathrm{Ker}\sigma_\lambda=\mathbf{Q}(\alpha)$.于是$\sigma_\lambda$把$\mathbf{Q}(\alpha)$的所有元素都映成0,但是$\sigma_\lambda(\sqrt{p})=\pm\sqrt{p}\neq 0$.所以必然$\mathrm{Ker}\sigma_\lambda=(0)$,即$\sigma_\lambda$是单同态.这样一来,上面的$\sigma_\lambda(\lambda=1,2,3,4)$是域$\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$的4个不同的自同构(由4.3.12(2)知此域也只能有4个自同构).

现在证明$\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$.设$f(x)$为$\sqrt{p}+\sqrt{q}$在$\mathbf{Q}$上的极小多项式,则由4.3.12(2)的证明可知$\sigma_\lambda(\sqrt{p}+\sqrt{q})(\lambda=1,2,3,4)$均是$f(x)$的根.但这4个数$\pm\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$彼此不同.所以$f(x)$的次数$\geqslant 4$,于是$4\leqslant[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]\leqslant[\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$.这表明$[\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q}):\mathbf{Q}]=4$,因此$\mathbf{Q}(\sqrt{p}+\sqrt{q})=\mathbf{Q}(\sqrt{p},\sqrt{q})$.

注 本题实际上是域扩张伽罗华理论一个具体的例子,这个理论是域扩张和域自同构群之间的联系.

4.3.13 设R是含幺环.$n\geqslant 2$,$I_1,\cdots,I_n$为R的理想,并且当$1\leqslant i\neq j\leqslant n$时均有$I_i+I_j=R$.则

有环同构

$$R/I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$$
$$\cong R/I_1\times R/I_2\times\cdots\times R/I_n.$$

解 先介绍什么是环的直积. 设 R 和 R' 是两个环, 考虑集合 $R\times R'=\{(r,r'):r\in R,r'\in R'\}$. 定义 $(r_1,r_1')\pm(r_2,r_2')=(r_1\pm r_2,r_1'\pm r_2')$, $(r_1,r_1')(r_2,r_2')=(r_1r_2,r_1'r_2')$. 易知 $R\times R'$ 由此是环, 叫作环 R 和 R' 的直积. 类似可定义多个环的直积. 现在作映射

$$f:R\to\frac{R}{I_1}\times\frac{R}{I_2}\times\cdots\times\frac{R}{I_n},$$
$$f(r)=(r(\mathrm{mod}I_1),r(\mathrm{mod}I_2),\cdots,r(\mathrm{mod}I_n)).$$

这里我们用 $a\equiv b(\mathrm{mod}I)$ 表示 $a-b\in I$, 而用 $r(\mathrm{mod}I_i)$ 表示 r 对理想 I_i 的陪集 $r+I_i$, 它是 R/I_i 中元素. 可以直接证明 f 是环的同态. 对于 $r\in R$,

$$r\in\mathrm{Ker}f\Leftrightarrow r\equiv 0(\mathrm{mod}I_i)\ (1\leqslant i\leqslant n)$$
$$\Leftrightarrow r\in I_i(1\leqslant i\leqslant n)$$
$$\Leftrightarrow r\in I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n.$$

于是 $\mathrm{Ker}f=I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n$. 再证 f 是满同态. 由条件可知 R 有幺元素 1, 并且 $I_1+I_2=I_1+I_3=R$, 于是

$$R=RR=(I_1+I_2)(I_1+I_3)\subseteq I_1+I_2I_3\subseteq R$$

(因为 $I_1I_2\subseteq I_1,I_1I_3\subseteq I_1$).

于是 $R=I_1+I_2I_3$. 归纳下去可知 $R=I_1+I_2I_3\cdots I_n$. 于是有 $r_1\in I_2I_3\cdots I_n$ 和 $a\in I_1$, 使得 $a+r_1=1$. 从而

$$f(r_1)=(1(\mathrm{mod}I_1),0(\mathrm{mod}I_2),\cdots,0(\mathrm{mod}I_n))$$

类似地, 也有 $r_i\in R(2\leqslant i\leqslant n)$ 使得

$$f(r_2)=(0(\mathrm{mod}I_1),1(\mathrm{mod}I_2),\cdots,0(\mathrm{mod}I_n)),$$
$$\cdots\cdots$$
$$f(r_n)=(0(\mathrm{mod}I_1),0(\mathrm{mod}I_2),\cdots,1(\mathrm{mod}I_n)).$$

于是对 $R/I_1\times R/I_2\times\cdots\times R/I_n$ 中任意元素 $\alpha=(a_1(\mathrm{mod}I_1),\cdots,a_n(\mathrm{mod}I_n))$, $f(a_1r_1+\cdots+a_nr_n)=\alpha$. 因此 f 是满同态. 由环的同态定理可知有环同构 $R/I_1\cap\cdots\cap I_n\cong R/I_1\times R/I_2\times\cdots\times R/I_n$.

注 这个结果是中国剩余定理的推广. 因为取 R 为整数环 $\mathbf{Z}$, $m_1,\cdots,m_n$ 是两两互素的正整数. 令 $I_i=(m_i)=m_i\mathbf{Z}\ (1\leqslant i\leqslant n)$. 则 $1\leqslant i\neq j\leqslant n$ 时, $I_i+I_j=(m_i,m_j)\mathbf{Z}=\mathbf{Z}$. 于是4.3.13中条件成立. 所以由于 $I_1\cap I_2\cap\cdots\cap I_n=[m_1,m_2,\cdots,m_n]$ (最小公倍数) $=m_1m_2\cdots m_n$. 可知有同构(记 $m=m_1m_2\cdots m_n$)

$$f:\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}\cong\mathbf{Z}/m_1\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}/m_2\mathbf{Z}\times\cdots\times\mathbf{Z}/m_n\mathbf{Z},$$
$$f(a(\mathrm{mod}m))=(a(\mathrm{mod}m_1),a(\mathrm{mod}m_2),\cdots,a(\mathrm{mod}m_n)).$$

写成数论语言便是: 设 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 是两两互素的正整数, $m=m_1m_2\cdots m_n$, 则对任意整数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$, 同余方程组

$$\begin{cases}x\equiv a_1(\mathrm{mod}m_1)\\x\equiv a_2(\mathrm{mod}m_2)\\\cdots\cdots\\x\equiv a_n(\mathrm{mod}m_n)\end{cases}$$

均有整数解. 并且全部解形成 $\mathrm{mod}m$ 的一个同余类.

4.3.14 设 p 是素数, n 和 m 为正整数, $q=p^n$, $q'=p^{nm}=q^m$. 定义两个映射

$$N:F_{q'}\to F_q,N(a)=a\cdot a^q\cdot a^{q^2}\cdots a^{q^{m-1}}=a^{\frac{q^m-1}{q-1}},$$
$$T:F_{q'}\to F_q,T(a)=a+a^q+a^{q^2}+\cdots+a^{q^{m-1}}.$$

求证 N 和 T 都是满射.

解 首先要验证 $N(F_{q'})\subseteq F_q$ 和 $T(F_{q'})\subseteq F_q$. 我们在第4.2节后面几个题中介绍了有限域上一些性质. 比如说, $F_{q'}$ 是 F_p 的代数闭包 Ω 中满足 $x^{q'}=x$ 的所有元素组成的域. 设 $a\in F_{q'}$, $N(0)=0$. 而当 $a\neq 0$ 时, $a^{q'-1}=a^{q^m-1}=1$. 于是 $N(a)^{q-1}=(a^{\frac{q^m-1}{q-1}})^{q-1}=a^{q^m-1}=1$, 即 $N(a)^q=N(a)$. 于是 $N(a)\in F_q$. 同样地,

$$T(a)^q=(a+a^q+a^{q^2}+\cdots+a^{q^{m-2}}+a^{q^{m-1}})^q$$
$$=a^q+a^{q^2}+\cdots+a^{q^{m-1}}+a$$
$$=T(a)\ (\text{因为 } a^{q^m}=a),$$

于是 $T(a)\in F_q$. 这就表明 N 和 T 都是从 $F_{q'}$ 到 F_q 的映射.

由于 $N(a)=0\Leftrightarrow a=0$, 因此 $N:F_{q'}^*\to F_q^*$, 并且 N 是乘法群同态. 而 $a\in\mathrm{Ker}N\Leftrightarrow a^{\frac{q^m-1}{q-1}}=1$. 但是在域 $F_{q'}$ 中至多有 $\frac{q^m-1}{q-1}$ 个元素满足右边的等式, 于是 $|\mathrm{Ker}N|\leqslant\frac{q^m-1}{q-1}$. 由同态定理知 N 诱导出群的同构

$$F_{q'}^*/\mathrm{Ker}N\cong\mathrm{Im}N\subseteq F_q^*.$$

从而 $q-1=|F_q^*|\geqslant|\mathrm{Im}N|=|F_{q'}^*/\mathrm{Ker}N|\geqslant\dfrac{q^m-1}{\frac{q^m-1}{q-1}}=q-1$. 因此, $|\mathrm{Im}N|=|F_q^*|=q-1$, 即 $\mathrm{Im}N=F_q^*$, 即 $N:F_{q'}^*\to F_q^*$ 是满同态, 所以 $N:F_{q'}\to F_q$ 是满射.

$T: F_{q^m} \to F_q$ 是加法群同态，因为

$$\begin{aligned} T(a+b) &= (a + a^q + \cdots + a^{q^{m-1}}) \\ &\quad + (b + b^q + \cdots + b^{q^{m-1}}) \\ &= (a+b) + (a^q + b^q) + \cdots \\ &\quad + (a^{q^{m-1}} + b^{q^{m-1}}) \\ &= (a+b) + (a+b)^q + \cdots \\ &\quad + (a+b)^{q^{m-1}} \\ &= T(a+b). \end{aligned}$$

对于 $a \in F_{q^m}$，$a \in \mathrm{Ker}T \Leftrightarrow a + a^q + \cdots + a^{q^{m-1}} = 0$. 于是 $|\mathrm{Ker}T| \leqslant q^{m-1}$. 由加法群同构 $F_{q^m}/\mathrm{Ker}T \cong \mathrm{Im}(T) \leqslant F_q$ 可知

$$\begin{aligned} q = |F_q| \geqslant |\mathrm{Im}(T)| &= |F_{q^m}/\mathrm{Ker}T| \\ &\geqslant \frac{q^m}{q^{m-1}} = q. \end{aligned}$$

于是 $|\mathrm{Im}(T)| = |F_q|$，即 $\mathrm{Im}(T) = F_q$，从而 $T: F_{q^m} \to F_q$ 是满射.

第 5 篇　线性规划

§5.1　单纯形法

在线性规划的求解方法中，单纯形法是最重要的和最常用的. 在使用单纯形法求解时，线性规划应化为标准形式:

$$\begin{aligned}\min\quad & c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n\\ \text{s.t.}\quad & a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ & a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \qquad \text{(LP)}\\ & \cdots\cdots\\ & a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\\ & x_j\geqslant 0\ (j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}\\ \text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b} \qquad \text{(LP)}\\ & \boldsymbol{x}\geqslant 0\end{aligned}$$

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是线性规划(LP) 的基本可行解，其基本变量为 $x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_m}$，对应的矩阵 A 的列向量 $\boldsymbol{a}_{t_1},\boldsymbol{a}_{t_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{t_m}$ 线性无关，组成基矩阵

$$B=(\boldsymbol{a}_{t_1},\boldsymbol{a}_{t_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{t_m}) \qquad ①$$

则对应 B 的典式为

$$\begin{cases}\alpha_{11}x_1+\alpha_{12}x_2+\cdots+\alpha_{1n}x_n=\beta_1\\ \alpha_{21}x_1+\alpha_{22}x_2+\cdots+\alpha_{2n}x_n=\beta_2\\ \cdots\cdots\\ \alpha_{m1}x_1+\alpha_{m2}x_2+\cdots+\alpha_{mn}x_n=\beta_m\end{cases} \qquad ②$$

其中

$$(\alpha_{1j},\alpha_{2j},\cdots,\alpha_{mj})^T=B^{-1}\boldsymbol{a}_j \quad (j=1,2,\cdots,n) \qquad ③$$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m)^T=B^{-1}\boldsymbol{b} \qquad ④$$

并且

$$(\alpha_{1t_i},\alpha_{2t_i},\cdots,\alpha_{mt_i})^T=\boldsymbol{e}_i \quad (i=1,2,\cdots,m) \qquad ⑤$$

检验数 λ_j 的计算公式为

$$\lambda_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_{t_i}\alpha_{ij} \quad (j\in R) \qquad ⑥$$

这里 R 是非基本变量的下标集. 主元列标号 q 是最小负检验数 λ_q 的最小下标，主元行标号 p 是使

$$\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}=\min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{iq}}\ \middle|\ \alpha_{iq}>0\right\} \qquad ⑦$$

成立的最小下标. α_{pq} 为主元，x_q 为进基变量，x_{t_p} 为离基变量. 当 $\lambda_j\geqslant 0(j\in R)$ 时，当前的基本可行解即为最优解.

单纯形表中最左面一列是当前基本可行解中的基本变量 $x_{t_1},x_{t_2},\cdots,x_{t_m}$，最右面一列是基本变量所取的值 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$，中间部分是典式的系数 α_{ij}，最下一行是检验数，最右下角是当前目标函数值的相反数.

下面分别介绍关于最优解的唯一性、进基变量的选取及初始解的确定的题目及相关方法.

5.1.1　证明非退化的基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 为(LP) 的唯一最优解的充分必要条件是，$\boldsymbol{x}$ 的所有非基本变量的检验数均为正数.

证　设非退化的基本可行解 $\boldsymbol{x}$ 的基本变量

$$x_{t_1}=\beta_1,x_{t_2}=\beta_2,\cdots,x_{t_m}=\beta_m,$$

显然 $\beta_i>0\ (i=1,2,\cdots,m)$，基矩阵

$$B=(\boldsymbol{a}_{t_1},\boldsymbol{a}_{t_2},\cdots,\boldsymbol{a}_{t_m}).$$

必要性：使用反证法. 设 $\boldsymbol{x}$ 是(LP) 的唯一最优解，但 $\boldsymbol{x}$ 的非基本变量的检验数中至少有一为零、设 $\lambda_r=0$. 考虑对应 B 的典式中的 $\alpha_{1r},\alpha_{2r},\cdots,\alpha_{mr}$.

若 $\alpha_{ir}\leqslant 0\ (i=1,2,\cdots,m)$，令

$$\begin{cases}x_{t_i}'=\beta_i-\alpha_{ir}M\ (i=1,2,\cdots,m)\\ x_r'=M\\ x_j'=0\ (j\in R,j\neq r)\end{cases} \qquad ⑧$$

其中 M 为任意正数，则 $\boldsymbol{x}'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T$ 是(LP) 的可行解，对应的目标函数值 Z' 为

$$\begin{aligned}Z'&=Z_0+\sum_{j\in R}\lambda_jx_j'\\ &=Z_0+\lambda_rx_r'=Z_0\end{aligned}$$

其中 $Z_0=\sum_{i=1}^{m}c_{t_i}\beta_i$ 是 $\boldsymbol{x}$ 对应的(LP) 的目标函数值，也即(LP) 的最优值，从而 $\boldsymbol{x}'$ 也是(LP) 的最优解. 注意到 M 的任意性，与 $\boldsymbol{x}$ 是(LP) 的唯一最优解矛盾.

若 $\alpha_{1r},\alpha_{2r},\cdots,\alpha_{mr}$ 不全小于等于零，取

$$\frac{\beta_p}{\alpha_{pr}}=\min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{ir}}\ \middle|\ \alpha_{ir}>0\right\}$$

显然 $\frac{\beta_p}{\alpha_{pr}}>0$. 以 α_{pr} 为主元，进行基本可行解的转移，得到另一个与 $\boldsymbol{x}$ 不同的基本可行解，其对应的

(LP) 的目标函数值也是 Z_0，与 x 是(LP) 的唯一最优解矛盾.

充分性：设 $\lambda_j > 0\ (j \in R)$，显然 x 是(LP) 的最优解. 由对应 B 的典式可得

$$x_{i_t} = \beta_i - \sum_{j \in R} \alpha_{ij} x_j (j = 1,2,\cdots,m) \quad ⑨$$

对(LP) 的任一异于 x 的可行解 $x' = (x_1', x_2', \cdots, x_n')^T$，其对应的目标函数值

$$Z' = Z_0 + \sum_{j \in R} \lambda_j x_j'$$

由于 x 非退化，因此对 $j \in R$，至少有一 $x_j' > 0$，从而 $Z' > Z_0$，表明 x 是(LP) 的唯一最优解.

注 首先给出一个具体的例子. 对线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & 4x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.}\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

可以求得基本可行解 $(0, \frac{2}{5}, \frac{9}{5})^T$ 是最优解，并且非退化，最终单纯形表为

x_3	$\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{9}{5}$
x_2	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{2}{5}$
λ_j	$\frac{13}{5}$			$-\frac{11}{5}$

由于 $\lambda_1 = \frac{13}{5} > 0$，因此 $(0, \frac{2}{5}, \frac{9}{5})^T$ 是唯一最优解.

需要进一步指出的是，如果 $\lambda_j \geqslant 0 (j \in R)$ 中有等于零的，根据本题的结论，(LP) 的最优可行解一定不唯一. 但是(LP) 的最优基本可行解可能不唯一，也可能唯一. 下面分别举例说明之.

5.1.2 求解线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_3 = 4 \\ & x_2 + x_4 = 4 \\ & x_1 + 2x_2 + x_5 = 10 \\ & x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4,5) \end{aligned}$$

解 可以求得基本可行解 $(2,4,2,0,0)^T$ 是最优解，并且非退化，最终单纯形表为

x_3	0	0	1	2	-1	2
x_2	0	1	0	1	0	4
x_1	1	0	0	-2	1	2
λ_j				0	1	10

由于 $\lambda_4 = 0$，因此 $(2,4,2,0,0)^T$ 不是唯一最优解. 选 $\alpha_{14} = 2$ 作主元，可得

x_4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	1
x_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_1	1	0	1	0	0	4
λ_j			0		1	10

从而得到另一基本可行解 $(4,3,0,1,0)^T$，也是最优解.

注 当最优基本可行解不唯一时，其个数总是有限的，因为基本可行解的个数总是有限的. 一般地，设 $x^{(1)}, x^{(2)}, \cdots, x^{(t)}$ 互不相同，都是(LP) 的最优基本可行解，则对满足条件

$$\sum_{k=1}^{t} \mu_k = 1, \mu_k \geqslant 0\ (k = 1,2,\cdots,t) \quad ⑩$$

的数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_t$，

$$x^* = \sum_{k=1}^{t} \mu_k x^{(k)} \quad ⑪$$

都是(LP) 的最优可行解. 这样，(LP) 的最优可行解有无限多个.

5.1.3 求解线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & 4x_1 + 3x_3 \\ \text{s.t.}\ & 3x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 12 \\ & 2x_1 + x_3 = 4 \\ & x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4) \end{aligned}$$

解 可求得基本可行解 $(2,1,0,0)^T$ 是最优解，并且非退化，最终单纯形表为

x_2	0	1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	1
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	0	2
λ_j			1	0	-8

由于 $\lambda_4 = 0$，因此 $(2,1,0,0)^T$ 不是唯一最优解，但是唯一的最优基本可行解. 因为其余三个基本可行解 $(0,0,4,0)^T$（其中基本变量分别为 $x_1, x_3; x_2, x_3; x_3, x_4$）都不是最优解. 同时，容易求得该线性规划的所有最优可行解为

$$(2, 1 + 2k, 0, 3k)^T (k \geqslant 0)$$

注 如本题所示，当(LP) 的最优基本可行解唯一，而最优可行解不唯一时，(LP) 的最优可行解也是无限多个. 事实上，设 x 是(LP) 的唯一最优基本可行解，x' 是(LP) 的异于 x 的最优可行解，则对满

足条件 $\mu+\mu'=1$ 的非负的数 μ 和 μ'，$x^*=\mu x+\mu' x'$ 都是(LP)的最优可行解.

上面三个题都是在最优解是非退化的基本可行解的条件下讨论的，进一步可以讨论退化情况下最优解的唯一性问题，这里不再讨论.

还需要指出的是，使用单纯形法求解(LP)时，在得到(LP)的最优基本可行解时的检验数均非负，但这并不是说，(LP)的任一最优基本可行解的检验数一定均非负.

5.1.4　设(LP)的某一基本可行解对应的单纯形表中，有 $\lambda_q<0$，能否断定该基本可行解一定不是最优解？试说明理由并举例.

解　不能断定该基本可行解一定不是最优解.设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$ 是(LP)的某一基本可行解，基矩阵为 B，对应的目标函数值为 Z_0，检验数 $\lambda_q<0$，x_q 为进基变量，x_{l_p} 为离基变量，进行一次基本可行解的转移.新基本可行解 $x'=(x_1',x_2',\cdots,x_n')^T$ 对应的目标函数值为

$$Z=Z_0+\sum_{j\in R}\lambda_j x_j'=Z_0+\lambda_q x_q'$$

特别当 $x_q'=0$ 时，$Z=Z_0$.而这时若 x' 的检验数均非负，x 和 x' 就全是(LP)的最优基本可行解，显然它们都是退化的.例如考虑线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & x_5\\ \text{s.t.}\quad & \frac{1}{3}x_1+\frac{2}{3}x_2+\frac{5}{6}x_3+x_4=\frac{5}{3}\\ & x_1+x_2+2x_3+x_5=4\\ & x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3,4,5)\end{aligned}$$

使用单纯形法求解，单纯形表依次为

x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{6}$	1	0	$\frac{5}{3}$
x_5	1	1	2	0	1	4
λ_j	-1	-1	-2			4

x_3	$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{6}{5}$	0	2
x_5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$-\frac{12}{5}$	1	0
λ_j	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$		$\frac{12}{5}$		0

x_3	0	2	1	5	-2	2
x_1	1	3	0	-12	5	0
λ_j		0		0	1	0

第二表对应的基本可行解 $x_{l_1}=x_3=2$，$x_{l_2}=x_5=0$，$x_1=x_2=x_4=0$，已是最优解，但 $\lambda_1=-\frac{1}{5}<0$.

注　这个结论可用于使用两阶段法求解(LP)时，当第一阶段中已迭代到目标函数值为零时，即可转入第二阶段，尽管这时还可能有负检验数存在.

5.1.5　设 x 是(LP)的基本可行解，基本变量为 $x_{l_1},x_{l_2},\cdots,x_{l_m}$，经过单纯形法的一次迭代得到基本可行解 $\bar{x}$.证明

$$\bar{x}=x+\theta d \tag{12}$$

其中 θ 按式⑦计算，$d=(d_1,d_2,\cdots,d_n)^T$，

$$d_k=\begin{cases}-\alpha_{iq}, & k=l_i(i=1,2,\cdots,m)\\ 1, & k=q\\ 0, & \text{其它}\end{cases} \tag{13}$$

q 为主元列标号.

证　设 $x_{l_1}=\beta_1,x_{l_2}=\beta_2,\cdots,x_{l_m}=\beta_m$，对应基矩阵 B 的典式如式②.在本次迭代中，非基本变量 x_q 变为基本变量，并且取值 θ：

$$x_q=\theta=\frac{\beta_p}{\alpha_{pq}}=\min\left\{\frac{\beta_i}{\alpha_{iq}}\mid \alpha_{iq}>0\right\}$$

其余非基本变量仍为非基本变量，取值为零；基本变量 x_{l_p} 变为非基本变量，取值为零，其余基本变量仍为基本变量，取值为

$$\bar{x}_{l_i}=\beta_i-\alpha_{iq}\theta\ (i=1,2,\cdots,m,i\neq p) \tag{14}$$

综合起来，正是式⑫和⑬.

注　式⑫表明，在单纯形法的一次迭代中，从基本可行解 x 转移到新的基本可行解 $\bar{x}$ 可以看成，从 x 出发沿方向 d 前进到 $\bar{x}$，前进的步长为 θd.这能保证在沿方向 d 前进时，在满足可行性的条件下，使目标函数值 c^Tx 有最多的下降.从几何观点来看，就是从(LP)的可行域的一个顶点出发，沿着可行域的一条边前进到一个相邻的顶点(这时可能出现两种特殊情况：一是沿着可行域的一条边能一直前进下去，目标函数值无限地下降，对应着(LP)无有限解的情况；二是 $\theta=0$，$\bar{x}=x$，对应着 x 是退化的基本可行解的情况).用式⑫描述单纯形法的一次迭代，能与非线性规划中的大多数算法的作法一致起来，并能与求解(LP)的另一种方法——有效集法一致起来.

5.1.6　证明由式⑬决定的 d 满足关系式 $\lambda_q=c^Td$，其中 λ_q 是最小的负检验数.

证　由式⑥，对基本可行解 x 的非基本变量的检验数

$$\lambda_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij} - c_j - c_B^T B^{-1} a_j (j \in R) \quad ⑮$$

其中 $c_B = (c_{t_1}, c_{t_2}, \cdots, c_{t_m})^T$. 令 $y_j = (y_{j1}, y_{j2}, \cdots, y_{jm})^T$,

$$y_{jk} = \begin{cases} \alpha_{ij}, & k = t_i (i = 1,2,\cdots,m) \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

则 $\lambda_j = c^T e_j - c^T y_j$

$$= c^T(e_j - y_j) = c^T d_j (j \in R) \quad ⑯$$

这里

$$d_j = e_j - y_j = (d_{j1}, d_{j2}, \cdots, d_{jn})^T$$

$$d_{jk} = \begin{cases} -\alpha_{ij}, k = t_i (i = 1,2,\cdots,m) \\ 1, \quad k = j \\ 0, \quad 其它 \end{cases} \quad ⑰$$

当 $j = q$ 时, 式⑰即为式⑬, $d_q = d$, $\lambda_q = c^T d_q = c^T d$.

注 由式⑯可得

$$\lambda_j = \| c \| \| d_j \| \cos(c, d_j)$$

这里 $\cos(c, d_j)$ 表示 c 和 d_j 夹角的余弦, 从而

$$\frac{\lambda_j}{\| d_j \|} = \| c \| \cos(c, d_j) \ (j \in R) \quad ⑱$$

$\frac{\lambda_j}{\| d_j \|}$ 是 c 与 d_j 夹角余弦的一个常数倍, 其值越大, 夹角越小. 当 $\lambda_j < 0$ 时, 夹角 $> \frac{\pi}{2}$; 当 $\lambda_j > 0$ 时, 夹角 $< \frac{\pi}{2}$; 当 $\lambda_j = 0$ 时, 夹角 $= \frac{\pi}{2}$.

对 $j \in R$, 考虑从基本可行解 x 出发, 沿方向 d_j 前进: $x' = x + \theta_j d_j (\theta_j > 0)$, 则

$$Ax' = Ax + \theta_j A(e_j - y_j)$$
$$= b + \theta_j (a_j - Ay_j)$$

而

$$Ay_j = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{m} a_{1t_i}\alpha_{ij} \\ \sum_{i=1}^{m} a_{2t_i}\alpha_{ij} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m} a_{mt_i}\alpha_{ij} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \alpha_{2j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix} = BB^{-1} a_j = a_j$$

于是 $Ax' = b$. 为保证 $x' \geq 0$, 应有 $x + \theta_j d_j \geq 0$, 从而可得

$$\theta_j = \min\left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \mid \alpha_{ij} > 0 \right\} \ (j \in R) \quad ⑲$$

考虑 x' 对应的目标函数值, $c^T x' = c^T x + \theta_j c^T d_j = c^T x + \theta_j \lambda_j$. 当 $\lambda_j < 0$ 时, $c^T x' < c^T x$; 当 $\lambda_j > 0$ 时, $c^T x' > c^T x$; 当 $\lambda_j = 0$ 时, $c^T x' = c^T x$. 这时若 x 是(LP)的最优可行解, 则沿 d_j 方向上的所有可行解都是(LP)的最优解.

当选取负检验数 λ_j 进行基本可行解的转移时, 目标函数值的下降量为 $-\theta_j\lambda_j$. 这时, 将原基本可行解 x 中的非基本变量 x_j 变为基本变量, 取值为 θ_j. 于是, 进基变量每增加1, 目标函数值下降量为 $|\lambda_j|$. 从而选取最小的负检验数 λ_q, 可以使进基变量每增加1时, 目标函数值的下降量最大. 但这并不能保证这次基本可行解的转移可以使目标函数值下降最多.

5.1.7 对线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -3x_1 - 2x_2 + x_3 \quad\quad = 1 \\ & 6x_1 + 2x_2 \quad\quad + x_4 = 6 \\ & x_j \geq 0 \ (j = 1,2,3,4) \end{aligned}$$

的基本可行解 $x = (0,0,1,6)^T$ 讨论目标函数值沿方向 d_1, d_2 的变化情况.

解 $R = \{1,2\}$, $y_1 = (0,0,-3,6)^T$, $y_2 = (0,0,-2,2)^T$, $d_1 = (1,0,3,-6)^T$, $d_2 = (0,1,2,-2)^T$, $\lambda_1 = c^T d_1 = -5$, $\lambda_2 = c^T d_2 = -2$. 这样从 x 出发, 沿方向 d_1, d_2 前进均可使目标函数值有所下降.

5.1.8 在每次基本可行解转移时, 如果按照使目标函数值下降最多的原则确定主元列标号, 导出相应的公式.

解 考虑从基本可行解 x 沿方向 d_j 转移到新基本可行解 x', 这时 $\lambda_j < 0$. 目标函数值的下降量为 $-\theta_j\lambda_j$, θ_j 按式⑲计算. 为使目标函数值下降最多, 应取主元列标号 q 满足

$$\theta_q \lambda_q = \min_{\lambda_j < 0} \{\theta_j \lambda_j\}$$

$$= \min_{\lambda_j < 0} \left\{ \lambda_j \min\left\{ \frac{\beta_i}{\alpha_{ij}} \mid \alpha_{ij} > 0 \right\} \right\} \quad ⑳$$

注 对题5.1.7, 从基本可行解 $x = (0,0,1,6)^T$ 进行转移时, 如果按照通常的作法, 取 $q = 1$, 得到新基本可行解 $x' = (1,0,4,0)^T$, 目标函数值的下降量为5, x' 不是最优解. 使用式⑳确定主元列标号, $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = 3$, $\lambda_1\theta_1 = -5$, $\lambda_2\theta_2 = -6$, 应取 $q = 2$, 得到新基本可行解 $x'' = (0,3,7,0)^T$, 目标函数值的下降量为6, x'' 已是最优解. 对前一种作法, 由于 x' 不是最优解, 还要继续迭代, 这时刚刚成为进基变量 x_1 在下次迭代中立即成为离基变量.

5.1.9 在每次基本可行解转移时, 如果选择前进方向按照使目标函数值沿该方向的下降速度最大的原则进行, 从而确定主元列标号, 导出相应的公式.

解 考虑从基本可行解 x 沿方向 $d_j (\lambda_j < 0)$ 转

移到新基本可行解 x'，则目标函数值沿方向 d_j 的下降速度为

$$\frac{c^T x - c^T x'}{\|\theta_j d_j\|} = \frac{\theta_j \lambda_j}{\theta_j \|d_j\|} = \frac{\lambda_j}{\|d_j\|} \quad ㉑$$

由式 ⑰ 知，$\|d_j\| = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2}$，从而

$$-\frac{\lambda_j}{\|d_j\|} = -\frac{\lambda_j}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2}} \quad ㉒$$

这样，主元列标号 q 的选取应满足

$$-\frac{\lambda_q}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{iq}^2}} = \min\left\{ \frac{\lambda_j}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij}^2}} \mid \lambda_j < 0 \right\} \quad ㉓$$

注 对题 5.1.7，使用式 ㉓ 确定主元列标号，

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{1 + \alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2}} = \frac{5\sqrt{46}}{46}$$

$$\frac{\lambda_2}{\sqrt{1 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2}} = \frac{2}{3}$$

$-\frac{5\sqrt{46}}{46} < -\frac{2}{3}$，因此 $q = 1$，得到新基本可行解 $x' = (1,0,4,0)^T$，目标函数值的下降量为 5.

这样，有三种确定主元列标号的方法：(1) 按最小的负检验数；(2) 按式 ⑳；(3) 按式 ㉓. 一般说来，按照第二种方法作，可以减少迭代次数，但付出的代价是每次迭代的计算量的增加. 第一种方法最简单，同时也是实际上最常用的方法.

5.1.10 设在单纯形法的某次迭代时，x_q 为进基变量，x_r 为离基变量. 令迭代前后的对应元素为 λ_j, α_{ij} 和 $\bar{\lambda}_j, \bar{\alpha}_{ij}$，证明

$$\lambda_q\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_{ir}^2} + \bar{\lambda}_r\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{iq}^2} = 0 \quad ㉔$$

并给出几何解释.

证 由单纯形法的迭代公式知

$$\bar{\alpha}_{ir} = -\frac{\alpha_{iq}}{\alpha_{pq}} \ (i = 1,2,\cdots,m, i \neq p)$$

$$\bar{\alpha}_{pr} = \frac{1}{\alpha_{pq}}, \bar{\lambda}_r = -\frac{\lambda_q}{\alpha_{pq}}$$

其中 $r = t_p$，并且由于 $\lambda_q < 0$，$\alpha_{pq} > 0$，有 $\bar{\lambda}_r > 0$. 于是

$$\lambda_q^2(1 + \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_{ir}^2)$$

$$= \lambda_q^2[1 + \frac{1}{\alpha_{pq}^2}(\alpha_{1q}^2 + \cdots + \alpha_{p-1,q}^2 + 1 + \alpha_{p+1,q}^2 + \cdots + \alpha_{mq}^2]$$

$$= (\frac{\lambda_q}{\alpha_{pq}})^2(1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{iq}^2)$$

$$= \bar{\lambda}_r^2(1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{iq}^2)$$

两边开平方，注意到 λ_q 与 $\bar{\lambda}_r$ 符号相反，可得式 ㉔.

几何解释：式 ㉔ 可以写为

$$\frac{\lambda_q}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{iq}^2}} = -\frac{\bar{\lambda}_r}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_{ir}^2}}$$

根据式 ㉒ 有

$$\frac{\lambda_q}{\|d_q\|} = -\frac{\bar{\lambda}_r}{\|\bar{d}_r\|}$$

其中 d_q 是与基本可行解 x 相关的方向，$\bar{d}_r$ 是与迭代后的基本可行解 $\bar{x}$ 相关的方向. 进一步由式 ⑱ 可得

$$\cos(c, d_q) = -\cos(c, \bar{d}_r)$$

由于 $\lambda_q < 0, \bar{\lambda}_r > 0$，从而

c, d_q 之间夹角 $= \pi - c, \bar{d}_r$ 之间夹角

即 d_q 与 $\bar{d}_r$ 是两个相反的方向.

注 (LP) 的目标函数的等值面 $c^T x =$ 常数是 n 维空间中的一族彼此平行的超平面(在二维空间中是一族彼此平行的直线)，其法线方向就是 c. 如果从 x 出发沿方向 d_q 前进使目标函数值下降，那末在迭代后的 $\bar{x}$ 处，沿方向 $\bar{d}_r$ 前进一定使目标函数值上升. 这样在下一次迭代时，刚刚成为离基变量的 x_r 一定不会立即成为进基变量. 这个结论由 $\lambda_q < 0, \bar{\lambda}_r > 0$ 即可得到证明.

5.1.11 使用两阶段法求解线性规划

$$\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\
\text{s.t.} \quad & -6x_2 + 5x_3 + x_4 = 9 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& -3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\
& x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4)
\end{aligned}$$

解 第一阶段：这时只需引进人工变量 x_5 和 x_6，求解辅助规划

$$\begin{aligned}
\min \quad & x_5 + x_6 \\
\text{s.t.} \quad & -6x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 9 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& -3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_6 = 6 \\
& x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}$$

初始基本可行解为$(0,0,0,0,9,6)^T$，基本变量 $x_{t_1} = x_5, x_{t_2} = x_1, x_{t_3} = x_6$. 迭代过程中的单纯形表依次为

x_5	0	-6	5	1	1	0	9
x_1	1	2	1	1	0	0	0
x_6	0	-3	3	-2	0	1	6
λ_j		9	-8	1			-15

x_3	0	$-\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_6	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{13}{5}$	1	$\frac{3}{5}$
λ_j		$-\frac{3}{5}$		$\frac{13}{5}$		$-\frac{3}{5}$

x_3	0	0	1	-5	3
x_1	1	0	0	$\frac{14}{3}$	1
x_2	0	1	0	$-\frac{13}{3}$	1
λ_j				0	0

第二阶段:

x_3	0	0	1	-5	3
x_1	1	0	0	$\frac{14}{3}$	1
x_2	0	1	0	$-\frac{13}{3}$	1
λ_j				$\frac{97}{3}$	-7

最优解为$(1,1,3,0)^T$,最小值为 7.

注 将线性规划化为标准形式(LP)以后,在 $b\geqslant 0$ 的条件下,如果系数矩阵 A 的列向量已有 $k(0<k<m)$ 个不同的单位坐标向量,则只要再引进 $m-k$ 个人工变量即可,辅助规划的目标函数就是这 $m-k$ 个人工变量之和,从而可以减少人工变量的数目,这种情况在引进松弛变量时是经常发生的.另外,在第一阶段的迭代过程中,某个人工变量一旦变为非基本变量,它的任务就完成了,从而可以把该人工变量以及单纯形表中相应的列删去,以减少计算量.但是松弛变量即使是非基本变量也不能删去,必须一直保留.

有时,在(LP)中,矩阵 A 的列向量中有 m 个不同的单位坐标向量.此时,若 $b\geqslant 0$,则可得到(LP)的一个基本可行解;否则,为求(LP)的基本可行解,按照通常的作法,需再引进若干个人工变量.此时,为减少人工变量的数目,只要引进一个人工变量 x_{n+1} 即可,辅助规划为

$$\begin{aligned}&\min \quad x_{n+1}\\&\text{s.t.}\quad Ax-ex_{n+1}=b\\&\qquad\quad x\geqslant 0,x_{n+1}\geqslant 0\end{aligned} \qquad ㉕$$

其中 e 是分量全是 1 的 m 维向量:$e=(1,1,\cdots,1)^T$.

设 $\min\{b_i\mid i=1,2,\cdots,m\}=b_p<0$,则类似于单纯形法的基本可行解的转移,取主元列标号 $q=n+1$,主元行标号为 p,进行一次迭代,便可得到辅助规划的一个基本可行解.事实上,若设 $Ax-ex_{n+1}=b$ 在迭代后成为$Ax'=b'$,其中 $x'=(x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1})^T$,$b'=(b_1',b_2',\cdots,b_m')^T$,$A'$ 为 $m\times(n+1)$ 阶矩阵,则在 A' 的$n+1$个列向量中仍有 m 个不同的单位坐标向量,并且

$$\begin{aligned}&b_p'=-b_p>0\\&b_i'=b_i-b_p\geqslant 0\ (i\neq p)\end{aligned} \qquad ㉖$$

由该基本可行解开始,求解辅助规划,这与两阶段法的第一阶段相当.

上述方法称为单人工变量法.

5.1.12 求满足约束条件

$$\begin{aligned}&4x_1+2x_2+8x_3\leqslant 3\\&2x_1+6x_2-6x_3\leqslant -1\\&x_1+2x_2-2x_3\leqslant -\frac{1}{4}\\&x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0,x_3\geqslant 0\end{aligned}$$

的基本可行解.

解 引进松弛变量 x_4,x_5,x_6 和人工变量 x_7,得到辅助规划

$$\begin{aligned}&\min \quad x_7\\&\text{s.t.}\ 4x_1+2x_2+8x_3+x_4-x_7=3\\&\qquad 2x_1+6x_2-6x_3+x_5+x_7=-1\\&\qquad x_1+2x_2-2x_3+x_6-x_7=-\frac{1}{4}\\&\qquad x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3,4,5,6,7)\end{aligned}$$

取 $q=7,p=2$,进行迭代并计算检验数得到

x_4	2	-4	14	1	-1	0	0	4
x_7	-2	-6	6	0	-1	0	1	1
x_6	-1	-4	4	0	-1	1	0	$\frac{3}{4}$
λ_j	2	6	-6		1			-1

用 x_3 替换 x_7

x_4	$\frac{20}{3}$	10	0	1	$\frac{4}{3}$	0	$-\frac{7}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	$\frac{1}{3}$	1	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
x_6	$\frac{1}{3}$	0	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$
λ_i	0	0			0		1	0

得原问题的基本可行解$(0,0,\frac{1}{6},\frac{5}{3},0,\frac{1}{12})^T$.

5.1.13 使用大 M 法求解题 5.1.11 中的线性规划

$$
\begin{aligned}
\min\quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \\
\text{s.t.}\quad & -6x_2 + 5x_3 - x_4 = 9 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& -3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\
& x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4)
\end{aligned}
$$

解 将求解原线性规划转化为求解

$$
\begin{aligned}
\min\quad & -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6) \\
\text{s.t.}\quad & -6x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 = 9 \\
& x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\
& -3x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_6 = 6 \\
& x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4,5,6)
\end{aligned}
$$

其中 M 是足够大的正数. 初始基本可行解是$(0,0,0,0,9,6)^T$,基本变量是 $x_{t_1} = x_5, x_{t_2} = x_1, x_{t_3} = x_6$. 迭代过程中的单纯形表依次为(检验数用 σ_j 表示):

x_5	0	-6	5	1	1	0	9
x_1	1	2	1	1	0	0	0
x_6	0	-3	3	2	0	1	6
σ_j		$7+9M$	$8M$	$2+M$			$-15M$

x_3	0	$\frac{6}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_1	1	$\frac{4}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_6	0	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{13}{5}$	$-\frac{3}{5}$	1	$\frac{3}{5}$
σ_j		$7-\frac{3}{5}M$		$2+\frac{13}{5}M$	$\frac{8}{5}M$		$\frac{3}{5}M$

x_3	0	0	1	-5	1	2	3
x_1	1	0	0	$\frac{14}{3}$	1	$-\frac{4}{3}$	1
x_2	0	1	0	$-\frac{13}{3}$	-1	$\frac{5}{3}$	1
σ_j				$\frac{97}{3}$	$7+M$	$-\frac{35}{3}+M$	-7

得到原规划的最优解$(1,1,3,0)^T$,最小值为 7.

注 在上述求解中,我们只假设 M 是足够大的正数,把 M 作为参数,而没有赋予 M 以确定的数值. 当然也可以事先对 M 赋予一个足够大的确定值,但一般说来,不容易确定 M 究竟该取多大为好,而且 M 过大容易引起计算误差.

与题 5.1.11 的求解过程相比较,可以看到,使用大 M 法和使用两阶段法分别求解时,迭代过程中的基本可行解序列是完全一样的. 这不是偶然的现象,事实上,这两种方法本质上是一样的.

5.1.14 设大 M 法中的检验数向量 $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\mu}M$,则 $\boldsymbol{\mu}$ 正是使用两阶段法时同一个基本可行解对应的单纯形表中相应于辅助规划目标函数的检验数向量,而 $\boldsymbol{\tau}$ 则是相应于原线性规划(LP)目标函数的检验数向量. 试证明之.

证 对线性规划(LP),设 $\boldsymbol{b} \geqslant 0$. 使用两阶段法,引进人工变量 $\boldsymbol{y} = (x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m})^T$,辅助规划为

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} \\
\text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{y} \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{㉗}
$$

其中 $\boldsymbol{e} = (1,1,\cdots,1)^T$. 使用大 M 法,则将求解(LP)转化为求解

$$
\begin{aligned}
\min\quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} + M\boldsymbol{e}^T\boldsymbol{y} \\
\text{s.t.}\quad & A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{b} \\
& \boldsymbol{x} \geqslant 0, \boldsymbol{y} \geqslant 0
\end{aligned}
\tag{㉘}
$$

设 ㉘ 的某个基本可行解中的基本变量为 $x_{t_1}, x_{t_2}, \cdots, x_{t_m}(1 \leqslant t_1, t_2, \cdots, t_m \leqslant n + m)$,对应的单纯形表为

x_{t_1}	α_{11}	α_{12}	$\cdots$	α_{1n}	$\alpha_{1,n+1}$	$\cdots$	$\alpha_{1,n+m}$	β_1
x_{t_2}	α_{21}	α_{22}	$\cdots$	α_{2n}	$\alpha_{2,n+1}$	$\cdots$	$\alpha_{2,n+m}$	β_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_{t_m}	α_{m1}	α_{m2}	$\cdots$	α_{mn}	$\alpha_{m,n+1}$	$\cdots$	$\alpha_{m,n+m}$	β_m
σ_j								

检验数向量 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n+m})^T$,其中

$$
\sigma_j = \begin{cases} c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij}, & j \in R \\ 0, & \text{其它} \end{cases}
\tag{㉙}
$$

$c_{n+1} = c_{n+2} = \cdots = c_{n+m} = M$.

如果 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 中至少有一个大于 n,对应了两阶段法的第一阶段. 为方便起见,不妨设 $1 \leqslant t_1$,

$t_2, \cdots, t_s \leqslant n, n+1 \leqslant t_{s+1}, t_{s+2}, \cdots, t_m \leqslant n+m(1 \leqslant s \leqslant m)$. 于是当 $j \in R \cap \{1,2,\cdots,n\}$ 时，

$$\begin{aligned} \sigma_j &= c_j - \sum_{i=1}^{s} c_{t_i}\alpha_{ij} - \sum_{i=s+1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij} \\ &= c_j - \sum_{i=1}^{s} c_{t_i}\alpha_{ij} - M\sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij} \\ &= \tau_j + M\mu_j \end{aligned}$$

其中

$$\tau_j = c_j - \sum_{i=1}^{s} c_{t_i}\alpha_{ij},$$

$$\mu_j = -\sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij} \tag{30}$$

而当 $j \in R \cap \{n+1, n+2, \cdots, n+m\}$ 时，

$$\begin{aligned} \sigma_j &= M - \sum_{i=1}^{s} c_{t_i}\alpha_{ij} - M\sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij} \\ &= \tau_j + M\mu_j \end{aligned}$$

其中

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{s} c_{t_i}\alpha_{ij}, \mu_j = 1 - \sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij} \tag{31}$$

当使用两阶段法时，由于 ㉗ 和 ㉘ 的约束条件完全相同，对同一个基本可行解所对应的单纯形表中的 α_{ij} 和 β_i 是完全一样的. 这时的检验数

$$\lambda_j = \begin{cases} -\sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij}, j \in R \cap \{1,2,\cdots,n\} \\ 1 - \sum_{i=s+1}^{m} \alpha_{ij}, j \in R \cap \{n+1, \\ \qquad n+2,\cdots,n+m\} \end{cases} \tag{32}$$

比较式 ㉚、㉛ 和 ㉜，有 $\lambda_j = \mu_j (j \in R)$，而 τ_j 则是相应于原线性规划(LP) 目标函数的检验数.

如果 $t_1, t_2, \cdots, t_m$ 均不超过 n，对应了两阶段法的第二阶段. 这时，当 $j \in R \cap \{1,2,\cdots,n\}$ 时，

$$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij} = \tau_j \tag{33}$$

而当 $j \in R \cap \{n+1, n+2, \cdots, n+m\}$ 时，

$$\sigma_j = M - \sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij} = \tau_j + M\mu_j$$

其中

$$\tau_j = -\sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij}, \mu_j = 1 \tag{34}$$

当使用两阶段法时，

$$\lambda_j = \begin{cases} c_j - \sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij}, j \in R \cap \{1,2,\cdots,n\} \\ -\sum_{i=1}^{m} c_{t_i}\alpha_{ij}, j \in R \cap \{n+1, n+2, \\ \qquad \cdots, n+m\} \end{cases} \tag{35}$$

比较式 ㉝、㉞ 和 ㉟，有 $\lambda_j = \tau_j (j \in R)$，而 μ_j 则是相应于辅助规划目标函数的检验数.

从而令 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \cdots, \tau_{n+m})^T (\tau_j = 0, j \overline{\in} R)$ 和 $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n+m})^T (\mu_j = 0, j \overline{\in} R)$，即得证明.

注 在大 M 法中计算检验数时，相当于在两阶段法中同时考虑(LP) 的目标函数和辅助规划的目标函数. 当 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 中有基本变量时，按照式 ㉚ 和 ㉛ 计算检验数 σ_j. 由于 M 是一个足够大的正数，因此，若 $\mu_i < \mu_j$，必有 $\sigma_i < \sigma_j$，从而与两阶段法中的第一阶段的迭代过程完全一样(这时对两阶段法确定主元列标号的方法要补充规定：当有几个检验数 μ_j 同时达到最小负值时，应比较相应的 τ_j 值). 当 $x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots, x_{n+m}$ 全是非基本变量时，按照式 ㉝ 和 ㉞ 计算检验数 σ_j. 在决定主元列标号时，由于式 ㉞ 中的 $\mu_j = 1$，故只需根据式 ㉝ 中的 τ_j 即可，这与两阶段法中的第二阶段的迭代过程完全一样. 从而大 M 法和两阶段法本质上是相同的.

§5.2 对偶方法

线性规划的对偶问题是线性规划的一个重要部分，包括对偶定理、互补松弛条件和对偶单纯形法等内容. 对偶定理和互补松弛条件具有重要的理论价值，对偶单纯形法有着广泛的应用，它弥补了单纯形法的不足，从而完善了线性规划的求解方法.

对线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1}$$

及其对偶规划

$$\begin{aligned} \max \quad & \boldsymbol{b}^T\boldsymbol{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^T\boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{c} \\ & \boldsymbol{y} \geqslant 0 \end{aligned} \tag{2}$$

它们的解有以下几种可能情况：

(1) ① 和 ② 都有可行解，这时，它们一定都有最优解存在，并且两者的目标函数最优值相等.

(2) ① 和 ② 都没有可行解，即均无解.

(3) ① 和 ② 只有一个有可行解，而另一个无可行解，这时，有可行解的线性规划无有限解，目标函数最优值无界.

从而对上述两个线性规划，不会出现一个有最优解，而另一个无解或无有限解，也不会出现两个都无有限解.

以上是对偶定理的内容，并且对于以下一对线性规划，对偶定理也是成立的：

$\min \quad \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}$

$$\text{s.t.}\quad Ax = b \qquad ③$$
$$x \geqslant 0$$
$$\max\quad b^T y$$
$$\text{s.t.}\quad A^T y \leqslant c \qquad ④$$

5.2.1 对线性规划

$$\min\quad c^T x$$
$$\text{s.t.}\quad Ax \geqslant c \qquad ⑤$$
$$x \geqslant 0$$

设 A 是对称矩阵，$x^* \geqslant 0$ 且 $Ax^* = c$，则 x^* 是⑤的最优解.

证 ⑤的对偶规划是

$$\max\quad c^T y$$
$$\text{s.t.}\quad Ay \leqslant c \qquad ⑥$$
$$y \geqslant 0$$

显然，x^* 是⑤的可行解，也是⑥的可行解，根据对偶定理，⑤和⑥都有最优解，且 x^* 所对应的两个规划的目标函数值相等. 因此 x^* 是⑤也是⑥的最优解.

5.2.2 构造一个①和②都无解的例子，再构造一个③和④都无解的例子.

解 $\min\quad -x_1 - x_2$

$$\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 \geqslant 1$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 1$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

和

$$\max\quad y_1 + y_2$$
$$\text{s.t.}\quad y_1 - y_2 \leqslant -1$$
$$-y_1 + y_2 \leqslant -1$$
$$y_1 \geqslant 0, y_2 \geqslant 0$$

都无解.

$$\min\quad -2x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$\text{s.t.}\quad x_1 - x_2 - x_3 = 3$$
$$x_1 - x_2 + x_4 = 2$$
$$x_j \geqslant 0\ (j = 1,2,3,4)$$

和

$$\max\quad 3y_1 + 3y_2$$
$$\text{s.t.}\quad y_1 + y_2 \leqslant -2$$
$$-y_1 - y_2 \leqslant -1$$
$$-y_1 \leqslant 2$$
$$y_2 \leqslant 0$$

都无解.

5.2.3 证明，若线性规划③有最优解存在，则对任意 b'，线性规划

$$\min\quad c^T x$$
$$\text{s.t.}\quad Ax = b' \qquad ⑦$$
$$x \geqslant 0$$

不可能无有限解.

证 根据对偶定理，③的对偶规划④也有最优解，当然有可行解. 注意到⑦的对偶规划与④有相同的可行域，因此若⑦无有限解，则由对偶定理知，⑦的对偶规划应无解，即无可行解，产生矛盾.

注 此时，⑦或者有最优解，或者无解. 因为它的对偶规划的可行域可能有界，也可能无界.

5.2.4 设在线性规划③中，

$$A = (I, A_1), b > 0, c = \begin{pmatrix} 0 \\ c' \end{pmatrix}, c' \geqslant 0$$

（I 是 $m \times m$ 阶单位矩阵，A_1 是 $m \times (n-m)$ 阶矩阵，b 是 m 维向量，c 是 n 维向量，c' 是 $n-m$ 维向量）证明它的对偶规划有唯一最优解.

证 ③的对偶规划④中，$A^T y \leqslant c$ 可以写为

$$\begin{pmatrix} I \\ A_1^T \end{pmatrix} y \leqslant \begin{pmatrix} 0 \\ c' \end{pmatrix} \qquad ⑧$$

即 $y \leqslant 0, A_1^T y \leqslant c'$.

注意到③有可行解，并且由于 $c' \geqslant 0$，所以它的目标函数值有下界零，这样③不会无有限解，即③有最优解. 根据对偶定理，④也有最优解.

设两个规划的最优解分别为 x^* 和 y^*，则有

$$(I, A_1)x^* = b, x^* \geqslant 0, \begin{pmatrix} I \\ A_1^T \end{pmatrix} y^* \leqslant c \qquad ⑨$$

并且 $c^T x^* = b^T y^*$.

由⑨的第三式知，$y^* \leqslant 0$，但由于 $c \geqslant 0, x^* \geqslant 0$，于是 $c^T x^* \geqslant 0$，从而 $b^T y^* \geqslant 0$. 注意到 $b > 0$，这样 $y^* = 0$，即对偶规划④有唯一最优解 $y^* = 0$.

注 本题的线性规划用分量形式可以写成

$$\min\quad \sum_{j=m+1}^{n} c_j x_j$$
$$\text{s.t.}\quad x_i + \sum_{j=m+1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\ (i = 1, \cdots, m) \qquad ⑩$$
$$x_j \geqslant 0\ (j = 1, \cdots, n)$$

其中 $b_i > 0 (i = 1, \cdots, m), c_j \geqslant 0 (j = m+1, \cdots, n)$.

5.2.5 证明 Farkas 定理：$Ax = b, x \geqslant 0$ 无解的充分必要条件是 $A^T y \leqslant 0, b^T y > 0$ 有解.

证 考虑线性规划③和④，特别取 $c = 0$，则 $y = 0$ 是④的可行解. 由对偶定理知，$Ax = b, x \geqslant 0$ 无解的充分必要条件是④无有限解，即 $A^T y \leqslant 0, b^T y > 0$ 有解.

注 Farkas 定理也可以叙述为：$Ax = b, x \geqslant 0$ 有解的充分必要条件是 $A^T y \leqslant 0, b^T y > 0$ 无解. 或者说，两个等式和不等式组

$$\begin{cases} Ax = b \\ x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A^T y \leqslant 0 \\ b^T y > 0 \end{cases}$$

不可能同时有解．这个结论也称之为取舍定理．

与 Farkas 定理紧密相关的是 Farkas 运输定理：$Ax = b$ 有一个解，且 $x \geqslant 0$ 的充分必要条件是当 $A^Ty \geqslant 0$ 时，有 $b^Ty \geqslant 0$．

另外，考虑不等式组 $Ax \leqslant b$，它有一个解 x 的充分必要条件是当 $A^Ty = 0$ 和 $y \geqslant 0$ 时，$b^Ty \geqslant 0$．该结论亦称之为 Gale 运输定理．

还有一些类似的结论，这些结论都可以仿照 Farkas 定理的证明予以证明．

下面讨论互补松弛条件．线性规划①的可行解 x 和②的可行解 y 是最优解的充分必要条件是

$$x^T(A^Ty - c) = 0 \quad ⑪$$

$$y^T(Ax - b) = 0 \quad ⑫$$

以上两式称之为互补松弛条件．

特别对线性规划③的可行解 x 和④的可行解 y，只需满足式⑪，则 x 和 y 即为最优解．

互补松弛条件⑪和⑫用分量写出

$$x_j(a_j^Ty - c_j) = 0 \ (j = 1,\cdots,n) \quad ⑬$$

$$y_i(p_i^Tx - b_i) = 0 \ (i = 1,\cdots,m) \quad ⑭$$

其中 $A = (a_1,\cdots,a_n)$，$A^T = (p_1,\cdots,p_m)$．

进一步，设 $x = (x_1,\cdots,x_n)^T$ 和 $y = (y_1,\cdots,y_m)^T$ 分别是线性规划①和②的可行解．则它们是各自问题的最优解的充分必要条件是对所有的 $i = 1,\cdots,m$，$j = 1,\cdots,n$，成立

$$\begin{aligned} &x_j > 0 \Rightarrow a_j^Ty = c_j \\ &a_j^Ty < c_j \Rightarrow x_j = 0 \\ &y_i > 0 \Rightarrow p_i^Tx = b_i \\ &p_i^Tx > b_i \Rightarrow y_i = 0 \end{aligned} \quad ⑮$$

5.2.6　已知线性规划

$$\begin{aligned} \min\ & 8x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 6x_4 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 + x_4 \geqslant 3 \\ & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geqslant 6 \\ & x_3 + x_4 \geqslant 2 \\ & x_1 + x_3 \geqslant 2 \\ & x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4) \end{aligned}$$

的最优解为 $x_1^* = 1, x_2^* = 1, x_3^* = 2, x_4^* = 0$，利用互补松弛条件，直接求对偶规划的最优解．

解　这是形如①的线性规划，其对偶规划形如②，其中 $x = (x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，$y = (y_1,y_2,y_3,y_4)^T$，$A = (a_1,a_2,a_3,a_4)$，$b = (b_1,b_2,b_3,b_4)^T$，$c = (c_1,c_2,c_3,c_4)^T$．

由于 $x_1^* > 0, x_2^* > 0, x_3^* > 0$，由式⑮得

$$a_j^Ty^* = c_j (j = 1,2,3) \quad ⑯$$

注意到由第四个约束条件知 $x_1^* + x_3^* > 2$，得 $y_4^* = 0$，代入方程组⑯中，得到

$$\begin{cases} y_1^* + 3y_2^* = 8 \\ 2y_1^* + y_2^* = 6 \\ y_2^* + y_3^* = 3 \end{cases}$$

解为 $y_1^* = 2, y_2^* = 2, y_3^* = 1$，与 $y_4^* = 0$，为对偶规划的可行解，也是最优解．

注　考虑集合

$$G = \{x \mid g_i(x) \geqslant 0, i = 1,\cdots,m\} \quad ⑰$$

其中 $x \in R^n$．若在某个点 $\hat{x} \in G$ 处，使得 $g_i(\hat{x}) = 0$，则称约束 $g_i(x) \geqslant 0$ 是 $\hat{x}$ 处的有效约束（或起作用约束）；若 $g_i(\hat{x}) > 0$，则称 $g_i(x) \geqslant 0$ 是 $\hat{x}$ 处的非有效约束（或不起作用约束）．这里，$g_i(x)$ 是 x 的线性函数或非线性函数．类似地，可以对 $g_i(x) \leqslant 0$ 定义有效约束和非有效约束．

特别地，考虑线性规划①和②的约束条件，对它们的可行点，均有相应的有效约束和非有效约束．由互补松弛条件可知，①和②的最优解具有下列性质：某一个规划的某个变量取正值，则另一个规划与之对应的约束必是最优解处的有效约束；某一个规划的某个约束是最优解处的非有效约束，则另一个规划与之对应的变量必等于 0．

有效约束是个重要的概念，由此可以得到求解线性规划的另外一种方法——有效集法．在非线性规划中，有效约束的概念和有效集法也是很有用的．

5.2.7　对线性规划①，若 $x^* = (x_1^*,\cdots,x_n^*)^T$，$\lambda^* = (\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*,\lambda_{m+1}^*,\cdots,\lambda_{m+n}^*)^T$ 满足条件

$$\begin{aligned} & c - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i^* p_i - \sum_{i=m+1}^{m+n}\lambda_i^* e_{i-m} = 0 \\ & p_i^Tx^* \geqslant b_i (i = 1,\cdots,m) \\ & x_j^* \geqslant 0 \ (j = 1,\cdots,n) \\ & \lambda_i^* \geqslant 0 \ (i = 1,\cdots,m+n) \\ & \lambda_i^* = 0 \ (\text{将①的 } m+n \text{ 个约束按序编号，当第 } i \text{ 个约束不是 } x^* \text{ 处的有效约束}) \end{aligned} \quad ⑱$$

其中 $A^T = (p_1,\cdots,p_m)$，e_j 是第 j 个基本单位向量 $(j = 1,\cdots,n)$，则 x^* 是①的最优解．

证　这时，①的约束条件 $Ax \geqslant b$ 可以写为 $p_i^Tx \geqslant b_i (i = 1,\cdots,m)$．设①的对偶规划②中的 $y = (\lambda_1,\cdots,\lambda_m)^T$，只须证明，$x^*$ 和 $y^* = (\lambda_1^*,\cdots,\lambda_m^*)^T$ 满足 $A^Ty^* \leqslant c$ 和互补松弛条件⑪，⑫即可．

由式⑱的第一式可得

$$c - A^Ty^* - (\lambda_{m+1}^*,\cdots,\lambda_{m+n}^*)^T = 0 \quad ⑲$$

从而

$$c = A^T y^* + (\lambda_{m+1}^*, \cdots, \lambda_{m+n}^*)^T \geqslant A^T y^*$$

对 ① 的第 $1 \sim m$ 个约束条件 $p_i^T x \geqslant b_i (i = 1, \cdots, m)$ 中的 x^* 处的有效约束：$p_i^T x^* = b_i$，有

$$\lambda_i^* (p_i^T x^* - b_i) = 0 \qquad ⑳$$

对约束条件 $p_i^T x \geqslant b_i (i = 1, \cdots, m)$ 中的 x^* 处的非有效约束：$p_i^T x^* > b_i$，而这时 $\lambda_i^* = 0$，从而也有 $\lambda_i^* (p_i^T x^* - b_i) = 0$，与式 ⑳ 合在一起，可得 $y^{*T}(Ax^* - b) = 0$.

对 ① 的第 $m+1 \sim m+n$ 个约束条件 $x_j \geqslant 0 (j = 1, \cdots, n)$ 中的 x^* 处的有效约束：$x_j^* = 0$，有

$$\lambda_{m+j}^* x_j^* = 0 \qquad ㉑$$

对其中的 x^* 处的非有效约束：$x_j^* > 0$，而这时 $\lambda_{m+j}^* = 0$，从而也有 $\lambda_{m+j}^* x_j^* = 0$，与式 ㉑ 合在一起，可得

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j}^* x_j^* = 0 \qquad ㉒$$

于是

$$x^{*T}(A^T y^* - c) = x^{*T} \begin{pmatrix} \lambda_{m+1}^* \\ \vdots \\ \lambda_{m+n}^* \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \lambda_{m+j}^* x_j^* = 0$$

注 本题证明了 x^* 是 ① 的最优解的充分条件是式 ⑱ 成立. 还可以证明式 ⑱ 也是 x^* 为 ① 的最优解的必要条件(由于证明用到较多的数学知识，这里从略). 条件 ⑱ 就是数学规划中著名的 Kuhn-Tucker 条件在线性规划中的表达式. Kuhn-Tucker 条件简称为 K-T 条件，也称为最优解的一阶必要条件. K-T 条件是数学规划中的基本结论之一，这一结论对带有约束的非线性规划问题意义更大.

对线性规划 ①，K-T 条件是最优解的充分必要条件. λ^* 称为乘子向量.

对线性规划 ③ 也有相应的结论.

5.2.8 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)^T$ 是线性规划 ③ 的最优解的充分必要条件是，存在乘子向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_{m+n}^*)^T$，满足

$$\begin{aligned} & c - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* p_i - \sum_{i=m+1}^{m+n} \lambda_i^* e_{i-m} = 0 \\ & p_i^T x^* = b_i (i = 1, \cdots, m) \\ & x_j^* \geqslant 0 \ (j = 1, \cdots, n) \\ & \lambda_i^* \geqslant 0 \ (i = m+1, \cdots, m+n) \\ & \lambda_i^* = 0 \ (\text{当 } i \geqslant m+1, \text{并且第 } m+j \text{ 个约束条件 } x_j^* > 0 \text{ 时}) \end{aligned} \qquad ㉓$$

证 只证明充分性. 只须证明 x^* 和 $y^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_m^*)^T$ 满足 $A^T y^* \leqslant c$ 和互补松弛条件 ⑪ 即可.

注 结合题 5.2.7 和 5.2.8 的结论，可以对更为一般的线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & p_i^T x = b_i (i = 1, \cdots, m) \\ & p_i^T x \geqslant b_i (i = m+1, \cdots, m+l) \end{aligned} \qquad ㉔$$

讨论最优解的充分必要条件：

x^* 是 ㉔ 的最优解的充分必要条件是，存在乘子向量 $\lambda^* = (\lambda_1^*, \cdots, \lambda_{m+l}^*)^T$，满足

$$\begin{aligned} & c - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* p_i - \sum_{i=m+1}^{m+l} \lambda_i^* p_i = 0 \\ & p_i^T x^* = b_i (i = 1, \cdots, m) \\ & p_i^T x^* \geqslant b_i (i = m+1, \cdots, m+l) \\ & \lambda_i^* \geqslant 0 \ (i = m+1, \cdots, m+l) \\ & \lambda_i^* = 0 \ (\text{当 } i \geqslant m+1, \text{且 } p_i^T x^* > b_i \text{ 时}) \end{aligned} \qquad ㉕$$

5.2.9 求解下列线性规划

(1) $\min \quad -x_2 - x_3$

$\text{s.t.} \ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -1$

$\quad x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2$

(2) $\min \quad x_1 - x_2 - x_3$

$\text{s.t.} \ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -1$

$\quad x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2$

(3) $\min \quad x_2 + x_3$

$\text{s.t.} \ -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -1$

$\quad x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2$

解 (1) ~ (3) 的约束条件相同. $p_1 = (-1, -1, -1)^T$, $p_2 = (1, -1, -1)^T$, $b_1 = -1$, $b_2 = -2$. 我们使用题 5.2.8 的注求解.

(1) 此处 $c = (0, -1, -1)^T$，式 ㉕ 中的第一式为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \lambda_1^* \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \lambda_2^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

有唯一解 $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \frac{1}{2} > 0$，因此只须让 x^* 满足 $p_1^T x^* = b_1$ 和 $p_2^T x^* = b_2$ 即可，也就是求解方程组

$$\begin{cases} -x_1^* - x_2^* - x_3^* = -1 \\ x_1^* - x_2^* - x_3^* = -2 \end{cases}$$

解为 $x_1^* = -\frac{1}{2}, x_2^* = k, x_3^* = \frac{3}{2} - k$ (k 为任意实数).

(2) 此处 $c = (1, -1, -1)^T$，式 ㉕ 中的第一式为

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\lambda_1^*\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\lambda_2^*\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$$

有唯一解 $\lambda_1^*=0,\lambda_2^*=1>0$,因此只须让 $\boldsymbol{x}^*$ 满足 $\boldsymbol{p}_1^T\boldsymbol{x}^*\geqslant b_1,\boldsymbol{p}_2^T\boldsymbol{x}^*=b_2$ 即可,也就是求解

$$\begin{cases}-x_1^*-x_2^*-x_3^*\geqslant -1\\ x_1^*-x_2^*-x_3^*=-2\end{cases}$$

两式相加得到 $x_2^*+x_3^*\leqslant\frac{3}{2}$,与第二个式子 $x_1^*-x_2^*+x_3^*-2$ 联立求解,得到

$$\begin{cases}x_1^*\leqslant-\frac{1}{2}\\ x_2^*\leqslant\frac{3}{2}-x_3^*\end{cases}$$

上述不等式组有无穷多个解:$x_1^*\leqslant-\frac{1}{2},x_2^*\leqslant\frac{3}{2}-k,x_3^*=k$($k$ 为任意实数).

(3) 此处 $c=(0,1,1)^T$,式㉕中的第一式为

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\lambda_1^*\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}-\lambda_2^*\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}=0$$

有唯一解 $\lambda_1^*=\lambda_2^*=-\frac{1}{2}<0$,因此原规划无最优解.

对偶单纯形法是求解线性规划③的方法,③即为§5.1中的(LP).

设 $\boldsymbol{x}$ 是(LP)的基本解,B 为基矩阵.若 $\boldsymbol{x}$ 的检验数均非负,则称 $\boldsymbol{x}$ 是(LP)的正则解.

设(LP)的初始正则解为 $\boldsymbol{x}$,基矩阵

$$B=(\boldsymbol{a}_{t_1},\cdots,\boldsymbol{a}_{t_m}) \qquad ㉖$$

从正则解 $\boldsymbol{x}$ 开始的对偶单纯形法如下:

1) 计算 B^{-1}.

2) 计算 $\boldsymbol{x}_B=(x_{t_1},\cdots,x_{t_m})^T=B^{-1}\boldsymbol{b}$. ㉗

3) 取 $x_{t_p}=\min\{x_{t_i}\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$. ㉘

这里 p 是使上式成立的最小下标.若 $x_{t_p}\geqslant 0$,则求得(LP)的最优解;否则 p 为主元行标号,转4).

4) 对 $j\in R$($\boldsymbol{x}$ 的非基本变量的下标集),计算

$$\alpha_{pj}=(B^{-1}\boldsymbol{a}_j)_p \qquad ㉙$$

其中 $(B^{-1}\boldsymbol{a}_j)_p$ 是向量 $B^{-1}\boldsymbol{a}_j$ 的第 p 个分量.

5) 若对所有 $j\in R$ 有 $\alpha_{pj}\geqslant 0$,则(LP)无可行解;否则对使 $\alpha_{pj}<0$ 的 j 计算

$$\lambda_j=c_j-\boldsymbol{c}_B^TB^{-1}\boldsymbol{a}_j \qquad ㉚$$

其中 $\boldsymbol{c}_B=(c_{t_1},\cdots,c_{t_m})^T$.

6) 求 q,使

$$\frac{\lambda_q}{\alpha_{pq}}=\max\left\{\frac{\lambda_j}{\alpha_{pj}}\mid \alpha_{pj}<0\right\} \qquad ㉛$$

这里 q 是使上式成立的最小下标.

7) $q\Rightarrow t_p,c_q\Rightarrow c_{t_p}$,计算

$$B^{-1}\boldsymbol{a}_q=(\alpha_{1q},\cdots,\alpha_{mq})^T \qquad ㉜$$

形成矩阵

$$E_{pq}=\begin{pmatrix}1&\cdots&-\frac{\alpha_{1q}}{\alpha_{pq}}&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&\frac{1}{\alpha_{pq}}&\cdots&0\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&-\frac{\alpha_{mq}}{\alpha_{pq}}&\cdots&1\end{pmatrix}_{(m\times m)}\to\text{第 } p \text{ 行} \qquad ㉝$$

8) $E_{pq}B^{-1}\Rightarrow B^{-1}$,转2).

上述过程,可以在单纯形表上实现.

5.2.10 用对偶单纯形法求解线性规划

$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1+x_2\\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+x_2\geqslant 3\\ & 4x_1+3x_2\geqslant 6\\ & x_1+2x_2\geqslant 2\\ & x_1\geqslant 0,x_2\geqslant 0\end{aligned}$$

解 引入松弛变量 x_3,x_4,x_5,化为

$$\begin{aligned}\min\quad & 2x_1+x_2\\ \text{s.t.}\quad & 3x_1+x_2-x_3=3\\ & 4x_1+3x_2-x_4=6\\ & x_1+2x_2-x_5=2\\ & x_j\geqslant 0\ (j=1,2,3,4,5)\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{x}=(0,0,-3,-6,-2)^T$ 是正则解,基矩阵

$$B=(\boldsymbol{a}_3,\boldsymbol{a}_4,\boldsymbol{a}_5)=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=B^{-1}$$

$$\boldsymbol{c}_B=(0,0,0)^T$$

$x_{t_1}=x_3=-3,x_{t_2}=x_4=-6,x_{t_3}=x_5=-2$.易见 $p=2$ 为主元行标号.计算

$$B^{-1}\boldsymbol{a}_1=(-3,-4,-1)^T,$$

$$B^{-1}\boldsymbol{a}_2=(-1,-3,-2)^T$$

$$\alpha_{21}=(B^{-1}\boldsymbol{a}_1)_2=-4,\alpha_{22}=(B^{-1}\boldsymbol{a}_2)_2=-3$$

$$\lambda_1=2-(0,0,0)\begin{pmatrix}-3\\-4\\-1\end{pmatrix}=2$$

$$\lambda_2=1-(0,0,0)\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix}=1$$

$$\max\left\{\frac{\lambda_1}{\alpha_{21}},\frac{\lambda_2}{\alpha_{22}}\right\}=\max\left\{\frac{2}{-4},\frac{1}{-3}\right\}=-\frac{1}{3}$$

$q=2$ 为主元列标号,$a_{pq}=a_{22}=-3$ 为主元,用非基本变量 $x_q=x_2$ 替换基本变量 $x_{t_p}=x_{t_2}=x_4$,

$$B^{-1}a_2=(a_{12},a_{22},a_{32})^T$$
$$=(\ 1,\ \ 3,-2)^T$$

$$E_{pq}=E_{22}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & -\frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$$

$$E_{22}B^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{1}{3} & 0\\ 0 & \frac{2}{3} & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}$$

$(0,1,0)^T\Rightarrow c_B$

第一次迭代结束.

$$x_B=(x_{t_1},x_{t_2},x_{t_3})^T$$
$$=(x_3,x_2,x_5)^T$$
$$=B^{-1}b=(-1,2,2)^T$$

$p=1$,

$$B^{-1}a_1=(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3})^T,$$

$$B^{-1}a_4=(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{2}{3})^T$$

$$a_{11}=-\frac{5}{3},a_{14}=-\frac{1}{3}$$

$$\lambda_1=2-(0,1,0)\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ \frac{4}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix}=\frac{2}{3}$$

$$\lambda_4=0-(0,1,0)\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{1}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}=\frac{1}{3}$$

$$\max\{\frac{\lambda_1}{a_{11}},\frac{\lambda_4}{a_{14}}\}=\max\{-\frac{2}{5},-1\}=-\frac{2}{5}$$

$q=1,a_{11}=-\frac{5}{3}$,用 x_1 替换 x_3,

$$B^{-1}a_1=(a_{11},a_{21},a_{31})^T$$
$$=(-\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3})^T$$

$$E_{pq}=E_{11}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5} & 0 & 0\\ \frac{4}{5} & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$E_{11}B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0\\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}$$

$(2,1,0)^T\Rightarrow c_B$

第二次迭代结束.

$$x_B=(x_1,x_2,x_5)^T=B^{-1}b=(\frac{3}{5},\frac{6}{5},1)^T$$

得到最优解 $x_1^*=\frac{3}{5},x_2^*=\frac{6}{5},\min=\frac{12}{5}$.

注 使用单纯形表求解,单纯形表依次为

x_3	-3	-1	1	0	0	-3
x_4	-4	-3	0	1	0	-6
x_5	-1	2	0	0	1	-2
λ_j	2	1				0

x_3	$-\frac{5}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	-1
x_2	$\frac{4}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	2
x_5	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$	1	2
λ_j	$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{3}$		-2

x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$-\frac{3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
x_5	0	0	1	-1	1	1
λ_j			$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$		$-\frac{12}{5}$

使用上述算法求解(LP)时,或者求得(LP)的最优解,或者断定(LP)无可行解,不会出现(LP)无有限解的情况,其原因如下:

因为上述算法是从(LP)的一个正则解开始的,当(LP)有正则解时,其对偶规划一定有可行解.事实上,设 x 是(LP)的正则解,其基本变量为 $x_{t_1},\cdots,x_{t_m}$,基矩阵 $B=(a_{t_1},\cdots,a_{t_m})$,则有

$$x_B=(x_{t_1},\cdots,x_{t_m})^T=B^{-1}b \quad ㉞$$

$$x_j=0\ (j\in R)$$

记 $c_B=(c_{t_1},\cdots,c_{t_m})^T$,令

$$y=(B^T)^{-1}c_B \quad ㉟$$

用 N 表示矩阵 A 除去 B 后的列向量形成的矩阵:

$$N = (\boldsymbol{a}_{s_1}, \cdots, \boldsymbol{a}_{s_{n-m}})$$
$$s_i \in R \ (i = 1, \cdots, n - m) \quad ㊱$$

并记 $\boldsymbol{c}_N = (c_{s_1}, \cdots, c_{s_{n-m}})$ ㊲

则 $\boldsymbol{x}$ 的非基本变量的检验数

$$\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{c}_N - (\boldsymbol{c}_B^T B^{-1} N)^T$$
$$= \boldsymbol{c}_N - N^T \boldsymbol{y} \geqslant 0 \quad ㊳$$

由式㉟得到 $B^T \boldsymbol{y} = \boldsymbol{c}_B$,即

$$\boldsymbol{a}_{t_i}^T \boldsymbol{y} = c_{t_i} \ (i = 1, \cdots, m) \quad ㊴$$

由式㊳得到 $N^T \boldsymbol{y} \leqslant \boldsymbol{c}_N$,即

$$\boldsymbol{a}_{s_i}^T \boldsymbol{y} \leqslant c_{s_i} \ (i = 1, \cdots, n - m) \quad ㊵$$

上两式合在一起,即为 $A^T y \leqslant \boldsymbol{c}$,从而 $\boldsymbol{y}$ 是对偶规划④的可行解.

根据对偶定理,(LP) 或者有可行解,或者无可行解,而不会无有限解.

当(LP) 没有明显的正则解时,则可以从(LP) 的一个基本解出发构造正则解,然后再用上述算法求解.

设(LP) 的基本解 $\boldsymbol{x}$ 的基本变量为 $x_{t_1}, \cdots, x_{t_m}$,非基本变量 $x_j (j \in R)$ 相应的检验数为 λ_j,并且 $\lambda_j (j \in R)$ 中至少有一个小于零.考虑(LP) 的增广规划

$$\begin{aligned} \min \quad & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x} \\ \text{s.t.} \quad & x_0 + \sum_{j \in R} x_j = M \\ & A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \\ & \boldsymbol{x} \geqslant 0, x_0 \geqslant 0 \end{aligned} \quad ㊶$$

其中 x_0 是新增加的一个变量,M 是任意正数.

增广规划㊶的基本解的基本变量为 $x_0, x_{t_1}, \cdots, x_{t_m}$,非基本变量为 $x_j (j \in R)$,相应的检验数仍为 λ_j.令

$$\lambda_k = \min\{\lambda_j \mid j \in R\} < 0 \quad ㊷$$

则用 x_k 替换 x_0 作一次迭代,便可得到正则解,可以使用上述对偶单纯形法求解㊶,并且,

(1) 若㊶无解,则(LP) 也无解.

(2) 若㊶有最优解,则(LP) 或者有最优解,或者无有限解.

5.2.11 证明

(1) 若㊶有最优解,且 x_0 相应的检验数 $\lambda_0^* = 0$,则(LP) 有最优解.

(2) 若㊶有最优解,且 $\lambda_0^* > 0$,则(LP) 无有限解.

证 为简单计,设(LP) 的基本解 $\boldsymbol{x}$ 的基本变量为 $x_1, \cdots, x_m$,非基本变量为 $x_{m+1}, \cdots, x_n$,则㊶的初始单纯形表为

x_0	1	0	$\cdots$	0	1	$\cdots$	1	M
x_1	0	1	$\cdots$	0	$\alpha_{1,m+1}$	$\cdots$	α_{1n}	β_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
x_m	0	0	$\cdots$	1	$\alpha_{m,m+1}$	$\cdots$	α_{mn}	β_m
λ_j					λ_{m+1}	$\cdots$	λ_n	Z

表中最右一列可以写为

$$1 \cdot M + 0, 0 \cdot M + \beta_1, \cdots, 0 \cdot M + \beta_m, 0 \cdot M + Z \quad ㊸$$

其中 M 的系数与表中左数第二列(即典式中 x_0 的系数和 x_0 相应的检验数)对应相等.在进行迭代时,所得到的各个单纯形表中最右一列中 M 的系数也与表中左数第二列对应相等.记㊶的最优解对应的单纯形表中最右一列为 $\beta_0^*, \beta_1^*, \cdots, \beta_m^*, Z^*$,左数第二列为 $\alpha_{00}^*, \alpha_{10}^*, \cdots, \alpha_{m0}^*, \lambda_0^*$,则

$$\beta_i^* = \alpha_{i0}^* M + \bar{\beta}_i (i = 0, 1, \cdots, m) \quad ㊹$$
$$Z^* = \lambda_0^* M + \bar{Z} \quad ㊺$$

其中 $\bar{\beta}_i, \bar{Z}$ 是与 M 无关的数.

不难看出,对初始单纯形表中基本变量为 $x_0, x_{t_1}, \cdots, x_{t_m}$ 的情况,也可以证明上述结论.

(1) 设㊶有最优解

$$\bar{\boldsymbol{x}}^* = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_n^*)^T$$

并且 $\lambda_0^* = 0$,由式㊺知,$\bar{\boldsymbol{x}}^*$ 对应的㊶的目标函数值 $Z(\boldsymbol{x}^*) = -Z^* = -\bar{Z}$,与 M 无关.令

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)^T$$

则 $\boldsymbol{x}^*$ 是(LP)的可行解,其对应的(LP)的目标函数值 $Z(\boldsymbol{x}^*) = Z(\bar{\boldsymbol{x}}^*)$.现证 $\boldsymbol{x}^*$ 是(LP)的最优解.若(LP) 有可行解 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)^T$,其对应的(LP) 的目标函数值 $Z(\boldsymbol{x}) < Z(\boldsymbol{x}^*)$,令

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (M - \sum_{j \in R} x_j, x_1, \cdots, x_n)^T$$

$\bar{\boldsymbol{x}}$ 是㊶的可行解,且 $\bar{\boldsymbol{x}}$ 对应的㊶的目标函数值 $Z(\bar{\boldsymbol{x}}) = Z(\boldsymbol{x}) < Z(\boldsymbol{x}^*) = Z(\boldsymbol{x}^*)$,而这与 $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ 是㊶的最优解矛盾.

(2) 设㊶有最优解

$$\bar{\boldsymbol{x}}^* = (x_0^*, x_1^*, \cdots, x_n^*)^T$$

并且 $\lambda_0^* > 0$,因为 $\bar{\boldsymbol{x}}^*$ 对应的单纯形表中

$$\beta_i^* \geqslant 0 \ (i = 0, 1, \cdots, m)$$

因此由式㊹可知

$$\alpha_{i0}^* \geqslant 0 \ (i = 0, 1, \cdots, m)$$

$\bar{\boldsymbol{x}}^*$ 中的基本变量取值一般与 M 有关.

由式㊺知,$\bar{\boldsymbol{x}}^*$ 对应的㊶的目标函数值

$$Z(\boldsymbol{x}^*) = -Z^* = -\lambda_0^* M - \bar{Z} \quad ㊻$$

令 $x^* = (x_1^*, \cdots, x_n^*)^T$，则 x^* 是(LP)的可行解，其对应的(LP)的目标函数值 $Z(x^*) = Z(x^*)$. 由于 M 是任意正数，当 $M \to \infty$ 时，可行域无界，目标函数值 $Z(x^*) \to -\infty$，即(LP)无有限解.

注 本题的结论也可以表述如下：

(1) 若 ㊶ 有最优解 $\bar{x}^*$，且目标函数最优值 $Z(\bar{x}^*) = Z(x^*)$ 与 M 无关，则(LP)有最优解.

(2) 若 ㊶ 有最优解 $\bar{x}^*$，且目标函数最优值 $Z(x^*) = Z(x^*)$ 与 M 有关，则(LP)无有限解.

当(LP)有最优解时，其最优解就是 ㊶ 的最优解 $\bar{x}^*$ 中除去 x_0^* 以外的部分，即 x^*.

例如线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & 1.1x_1 - 2.2x_2 + 3.3x_3 - 4.4x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 4 \\ & x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4) \end{aligned}$$

其增广规划的最优解 $\bar{x}^*$ 对应的单纯形表为

x_3	0	0	-1	1	-3	1
x_1	0	1	3	0	6	3
x_0	1	0	1	0	4	$M-1$
λ_j			4.4		12.1	0

$\bar{x}^* = (M-1,3,0,1,0)^T$，$Z(\bar{x}^*) = 0$. 由于 $\lambda_0^* = 0$，或者 $Z(\bar{x}^*)$ 与 M 无关，则原规划有最优解 $x^* = (3,0,1,0)^T$，$Z(x^*) = 0$.

又例如线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 + 3x_2 - 2x_6 \\ & \begin{cases} \text{s.t.}\ x_1 + x_4 - 3x_5 + 7x_6 = -5 \\ x_2 - x_4 + x_5 - x_6 = 1 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 - 10x_6 = 8 \end{cases} \\ & x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4,5,6) \end{aligned}$$

其增广规划的最优解 $\bar{x}^*$ 对应的单纯形表为

x_6	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	0	0	0	1	$\frac{M-3}{6}$
x_5	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0	1	0	$\frac{M+1}{2}$
x_4	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$	0	1	0	0	$\frac{M}{3}$
x_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{16}{3}$	1	0	0	0	$\frac{M+15}{6}$
λ_j	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{11}{3}$					$\frac{M-3}{3}$

$\bar{x}^* = (0,0,0,\frac{M+15}{6},\frac{M}{3},\frac{M+1}{2},\frac{M-3}{6})^T$，$Z(x^*) = -\frac{M-3}{3}$. 由于 $\lambda_0^* = \frac{1}{3}$，或者 $Z(\bar{x}^*)$ 与 M 有关，则原规划无有限解.

5.2.12 设 ㊶ 的一个最优基本可行解 $\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_0^* \\ x^* \end{pmatrix}$，证明

(1) 若 x_0^* 是基本变量，则 x^* 与 M 无关.

(2) 若 x_0^* 是非基本变量，则 x^* 与 M 有关.

证 (1) 当 x_0^* 是基本变量时，则在 $\bar{x}^*$ 对应的单纯形表中的左数第二列元素 $\alpha_{00}^*, \alpha_{10}^*, \cdots, \alpha_{m0}^*$ 中只有一个取值为 1，其余均为 0. 设 x_0^* 是第 k 个基本变量，则 $\alpha_{k0}^* = 1$，其余 $\alpha_{i0}^* = 0$. 这时，由式㊹知，x^* 中的基本变量

$$x_{i_i}^* = \beta_i^* = \bar{\beta}_i (i = 0,1,\cdots,m, i \neq k)$$

从而 x^* 与 M 无关.

(2) 当 x_0^* 是非基本变量时，上述 $\alpha_{00}^*, \alpha_{10}^*, \cdots, \alpha_{m0}^*$ 不会同时为零，这样 x^* 与 M 有关.

注 题 5.2.11 注中的两个具体例题，分别对应了本题中的两种情况.

当第(2)种情况发生时，(LP)的目标函数值 $Z(x^*)$ 可能与 M 有关，也可能与 M 无关. 当 $Z(x^*)$ 与 M 无关时，(LP)有最优解，但此时最优解的个数是无穷多个，见下例.

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 - x_2 - x_3 = -1 \\ & x_2 + x_4 = 2 \\ & x_j \geqslant 0 \ (j = 1,2,3,4) \end{aligned}$$

其增广规划的最优解 $\bar{x}^*$ 对应的单纯形表为

x_2	0	0	1	0	1	2
x_3	1	0	0	1	0	$M-1$
x_1	1	1	0	0	-1	$M-2$
λ_j	0				1	2

此时，x_0^* 是非基本变量，x^* 与 M 有关，但 $\lambda_0^* = 0$，故原规划有最优解 $x^* = (M-2,2,M-1,0)^T$，$Z(x^*) = -2$，此时对 $M \geqslant 2$，x^* 都是最优解.

§5.3 有效约束方法

从§5.2中引入的有效约束的概念出发，可以得到求解线性规划的另一种方法——有效集法，它与单纯形法等价，但与求解非线性规划的方法更为接近，可以处理更一般形式的线性规划.

对线性规划

$$\min \quad c^Tx$$

$$\text{s.t.} \quad a_i^Tx = b_i (i = 1,\cdots,m) \qquad ①$$

$$a_i^Tx \geqslant b_i (i = m+1,\cdots,m+l)$$

引入下面的概念.

称满足①所有约束条件的 x 为①的可行解，可行解的集合称为可行域，记为 D. 显然 D 为一凸集. 若存在 $x^* \in D$，使对任意 $x \in D$，都有 $c^Tx^* \leqslant c^Tx$，则称 x^* 是①的最优解.

设 $x \in D$，在 x 处的所有的有效约束的下标组成的集合称为在 x 处的有效集，记为 $F(x)$，即

$$F(x) = \{i \mid a_i^Tx = b_i\} \qquad ②$$

显然 $F(x) \supset \{1,\cdots,m\}$.

对 $x \in D$，不能成为 D 中任何线段的内点，则称 x 为 D 的顶点.

对 $x \in D$ 以及非零向量 d，若存在 $\delta > 0$，使得对 $0 < \theta \leqslant \delta$ 有

$$x + \theta d \in D \qquad ③$$

则称 d 是 x 处的可行方向.

对①，如果它的若干个约束条件的系数 a_i 是线性无关的，则称这些约束条件是线性无关的.

5.3.1 设 $\hat{x} \in D$，则 $\hat{x}$ 是 D 的顶点的充分必要条件是，在 $\hat{x}$ 处的有效约束中，有 n 个是线性无关的.

证 必要性. 设 $\hat{x}$ 是 D 的顶点，则对于任意的非零向量 d 以及任意的实数 $\beta > 0$，$\hat{x} + \beta d$ 和 $\hat{x} - \beta d$ 不能同时属于 D. 现设在 $\hat{x}$ 处的线性无关的有效约束的个数小于 n，并在 $\hat{x}$ 处的有效集为 $F(\hat{x})$，则以 y 为未知变量的齐次线性方程组

$$a_i^Ty = 0 \ (i \in F(\hat{x})) \qquad ④$$

有非零解. 从而对上述方程组的任一非零解 y，只要 $\beta > 0$ 充分小，$\hat{x} + \beta y$ 和 $\hat{x} - \beta y$ 都属于 D，产生矛盾. 因此在 $\hat{x}$ 处有 n 个线性无关的有效约束.

充分性. 设在 $\hat{x}$ 处存在着 n 个线性无关的有效约束，记 $\hat{x}$ 处的有效集为 $F(\hat{x})$，则 $\hat{x}$ 是满足方程组

$$a_i^Tx = b_i (i \in F(\hat{x})) \qquad ⑤$$

的唯一解. 现设 $\hat{x}$ 不是 D 的顶点，则存在着某个数 $\alpha \in (0,1)$，以及 $x^{(1)} \in D$，$x^{(2)} \in D$，$x^{(1)} \neq x^{(2)}$，使得

$$\hat{x} = \alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)} \qquad ⑥$$

显然 $\hat{x} \neq x^{(1)}$，这样 $x^{(1)}$ 不能满足方程组⑤，即存在着某个 $j \in F(\hat{x})$，使得

$$a_j^Tx^{(1)} > b_j \qquad ⑦$$

于是

$$\begin{aligned} a_j^T\hat{x} &= a_j^T[\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}] \\ &= \alpha a_j^Tx^{(1)} + (1-\alpha)a_j^Tx^{(2)} \\ &> \alpha b_j + (1-\alpha)b_j \\ &= b_j \end{aligned}$$

产生矛盾. 从而 $\hat{x}$ 是 D 的顶点.

注 对 $\hat{x} \in D$，若在 $\hat{x}$ 处的所有有效约束线性无关，则称 $\hat{x}$ 是非退化可行解；否则称为退化可行解. 若 D 的某个顶点是非退化可行解，则称该顶点为非退化顶点；否则称为退化顶点.

这样可得如下结论：设 $\hat{x} \in D$，则 $\hat{x}$ 是 D 的非退化顶点的充分必要条件是，在 $\hat{x}$ 处恰有 n 个有效约束，并且这 n 个有效约束是线性无关的.

5.3.2 考虑线性规划

$$\min \quad x_1 - x_2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 - x_2 \geqslant -1$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 1$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0$$

的可行域的顶点，哪些是退化的，哪些是非退化的？

解 其可行域有两个顶点 $(0,1)^T$ 和 $(1,0)^T$，其中顶点 $(0,1)^T$ 是退化的，$(1,0)^T$ 是非退化的.

5.3.3 设 $\hat{x} \in D$，是 D 的非退化顶点，为简单计，不妨设

$$F(\hat{x}) = \{1,\cdots,m,m+1,\cdots,n\} \qquad ⑧$$

令

$$\hat{A} = (a_1,\cdots,a_n) \qquad ⑨$$

其逆矩阵为

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^T \\ \vdots \\ \hat{d}_n^T \end{pmatrix} \qquad ⑩$$

则方向 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向的充分必要条件是 $d \in M$，这里

$$M = \{\sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \hat{d}_j \mid \alpha_j \geqslant 0, j = m+1,\cdots,n\} \qquad ⑪$$

证 必要性. 设 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向，则存在 $\delta > 0$，使得对 $0 < \theta \leqslant \delta$，有

$$a_i^T(\hat{x} + \theta d) = b_i (i = 1, \cdots, m)$$

$$a_i^T(\hat{x} + \theta d) \geqslant b_i (i = m+1, \cdots, m+l)$$

从而

$$a_i^T d = 0 \ (i = 1, \cdots, m) \tag{12}$$

这就是说，d 属于由 $a_1, \cdots, a_m$ 所张成的子空间的正交补空间. 注意到由 $\hat{A}^{-1}\hat{A} = I$ 可得

$$a_i^T \hat{d}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (i, j = 1, \cdots, n) \tag{13}$$

所以上述正交补空间由向量 $\hat{d}_{m+1}, \cdots, \hat{d}_n$ 张成，因此

$$d = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \hat{d}_j \tag{14}$$

现设某个 $\alpha_k < 0 \ (m+1 \leqslant k \leqslant n)$，于是由式⑬可得

$$\begin{aligned} a_k^T(\hat{x} + \theta d) &= a_k^T \hat{x} + \theta \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_k^T \hat{d}_j \\ &= b_k + \theta \alpha_k < b_k \end{aligned} \tag{15}$$

从而 $\hat{x} + \theta d$ 不满足约束条件 $a_k^T x \geqslant b_k$，这与 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向矛盾. 从而

$$\alpha_j \geqslant 0 \ (j = m+1, \cdots, n)$$

充分性. 设 $d \in M$，则对 $i \in F(\hat{x})$ 和任何 $\theta > 0$，

$$a_i^T(\hat{x} + \theta d) = a_i^T \hat{x} + \theta \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j a_i^T \hat{d}_j = \begin{cases} b_i & (i = 1, \cdots, m) \\ b_i + \theta \alpha_i & (i = m+1, \cdots, n) \end{cases} \tag{16}$$

从而 $\hat{x} + \theta d$ 满足 $\hat{x}$ 处的有效约束.

对 $\hat{x}$ 处的非有效约束

$$a_i^T x \geqslant b_i (i = n+1, \cdots, m+l) \tag{17}$$

有

$$\begin{aligned} a_i^T(\hat{x} + \theta d) &= a_i^T \hat{x} + \theta a_i^T d \\ &> b_i + \theta a_i^T d \ (i = n+1, \cdots, m+l) \end{aligned} \tag{18}$$

若 $a_i^T d \geqslant 0 \ (i = n+1, \cdots, m+l)$，则取 $\delta = \infty$；否则取

$$\delta = \min\left\{ -\frac{a_i^T \hat{x} - b_i}{a_i^T d} : a_i^T d < 0, n+1 \leqslant i \leqslant m+l \right\} \tag{19}$$

则对 $0 < \theta \leqslant \delta$，成立

$$a_i^T(\hat{x} + \theta d) \geqslant b_i (i = n+1, \cdots, m+l)$$

因此 $\hat{x} + \theta d \in D$，即 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向.

注 在本题的条件中，若 $\hat{x}$ 处的有效集 $F(\hat{x})$ 中除去 $1, \cdots, m$ 外的元素不恰好是 $m+1, \cdots, n$，而是 $m+1, \cdots, m+l$ 中的某 $n-m$ 个，显然也有相应的结论.

5.3.4 在题5.3.3的条件下，并记

$$\hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \cdots, \hat{\lambda}_n)^T = \hat{A}^{-1} c \tag{20}$$

则 $\hat{x}$ 是线性规划①的最优解的充分必要条件是

$$\hat{\lambda}_i \geqslant 0 \ (i = m+1, \cdots, n) \tag{21}$$

证 容易看出

$$\hat{\lambda}_i = c^T \hat{d}_i (i = 1, \cdots, n) \tag{22}$$

必要性. 设 $\hat{x}$ 是①的最优解，但某个 $\hat{\lambda}_q < 0 \ (m+1 \leqslant q \leqslant n)$. 由题5.3.3中的式⑪，取 $\alpha_q = 1, \alpha_j = 0 \ (j = m+1, \cdots, n$，但 $j \neq q)$，则 $d = \hat{d}_q$ 是 $\hat{x}$ 处的可行方向，从而存在 $\delta > 0$，使得

$$\hat{x} + \theta d = \hat{x} + \theta \hat{d}_q \in D \ (0 < \theta \leqslant \delta) \tag{23}$$

但是

$$\begin{aligned} c^T(\hat{x} + \theta \hat{d}_q) &= c^T \hat{x} + \theta c^T \hat{d}_q \\ &= c^T \hat{x} + \theta \hat{\lambda}_q \\ &< c^T \hat{x} \end{aligned}$$

这与 $\hat{x}$ 是①的最优解相矛盾.

充分性. 设式㉑成立. 对任意 $x \in D$，令 $d = x - \hat{x}$. 由于 D 是凸集，从而

$$\hat{x} + \theta d = \theta x + (1-\theta)\hat{x} \in D \ (0 \leqslant \theta \leqslant 1) \tag{24}$$

这样 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向. 由题5.3.3，存在 $\alpha_j \geqslant 0 \ (j = m+1, \cdots, n)$，使得

$$d = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \hat{d}_j \tag{25}$$

于是

$$\begin{aligned} c^T x - c^T \hat{x} = c^T d &= \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j c^T \hat{d}_j \\ &= \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \hat{\lambda}_j \geqslant 0 \end{aligned}$$

因此 $c^T x \geqslant c^T \hat{x}$，表明 $\hat{x}$ 是 ① 的最优解.

注 类似于题 5.3.3 的注.

5.3.5 对线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 3x_1 + x_2 = 9 \\ & x_1 - x_2 \geqslant -1 \\ & x_1 - 2x_2 \geqslant 3 \end{aligned}$$

试判断顶点 $\hat{x} = (2,3)^T$ 和 $\tilde{x} = (3,0)^T$ 是否为最优解?

解 $c = (1, -2)^T, a_1 = (3,1)^T, a_2 = (1, -1)^T, a_3 = (1,2)^T$. 容易验证，$\hat{x}$、$\tilde{x}$ 都是非退化顶点. 在 $\hat{x}$ 处，$F(\hat{x}) = \{1,2\}$，

$$\hat{A} = (a_1, a_2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^T \\ \hat{d}_2^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\hat{\lambda}_2 = c^T \hat{d}_2 = \frac{7}{4} > 0$$

因此 $\hat{x}$ 是最优解. 在 $\tilde{x}$ 处，$F(\tilde{x}) = \{1,3\}$，$\tilde{A} = (a_1, a_3) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，

$$\tilde{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_1^T \\ \tilde{d}_3^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda}_3 = c^T \tilde{d}_3 = -\frac{7}{5} < 0$$

因此 $\tilde{x}$ 不是最优解.

5.3.6 在题 5.3.4 的条件下，如果存在某个 $\hat{\lambda}_q < 0 \ (m+1 \leqslant q \leqslant n)$，并且

$$a_i^T \hat{d}_q \geqslant 0 \ (i = n+1, \cdots, m+l) \qquad ㉖$$

则线性规划 ① 无有限解.

证 取 $d = \theta \hat{d}_q (\theta > 0)$，则由题 5.3.3 可知 d 是 $\hat{x}$ 处的可行方向. 令 $x = \hat{x} + d = \hat{x} + \theta \hat{d}_q$，则对 $\theta > 0$，

$$\begin{aligned} a_i^T x &= a_i^T (\hat{x} + \theta \hat{d}_q) \\ &= a_i^T \hat{x} + \theta a_i^T \hat{d}_q \\ &= b_i (i = 1, \cdots, q-1, q+1, \cdots, n) \qquad ㉗ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_q^T x &= a_q^T (\hat{x} + \theta \hat{d}_q) \\ &= a_q^T \hat{x} + \theta a_q^T \hat{d}_q \\ &= b_q + \theta > b_q \qquad ㉘ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_i^T x &= a_i^T (\hat{x} + \theta \hat{d}_q) \\ &= a_i^T \hat{x} + \theta a_i^T \hat{d}_q \\ &\geqslant a_i^T \hat{x} \\ &> b_i (i = n+1, \cdots, m+l) \qquad ㉙ \end{aligned}$$

式 ㉗ ~ ㉙ 表明，对任何 $\theta > 0$，$x = \hat{x} + \theta \hat{d}_q \in D$，这时

$$\begin{aligned} c^T x &= c^T \hat{x} + \theta c^T \hat{d}_q \\ &= c^T \hat{x} + \theta \hat{\lambda}_q \qquad ㉚ \end{aligned}$$

当 $\theta \to \infty$ 时，$c^T x \to -\infty$，表明线性规划 ① 无有限解.

注 由题 5.3.4 和 5.3.6 可以看出，它们类似于单纯形法中最优解的检验和无有限解的判定步骤. 进一步，还可以类似于单纯形法中的顶点的转移，对有效集进行调整，便能得到求解一般形式的线性规划 ① 的有效集法.

5.3.7 对线性规划

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -2 \\ & -x_1 - x_2 - x_3 \geqslant -4 \\ & x_1 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0 \end{aligned}$$

是否无有限解?

解 $c = (-1,1,1)^T, a_1 = (1,-1,-1)^T, a_2 = (-1,-1,-1)^T, a_3 = (1,0,0)^T, a_4 = (0,0,1)^T$.

容易验证，$\hat{x} = (1,3,0)^T$ 是非退化顶点，$F(\hat{x}) = \{1,2,4\}$，

$$\hat{A} = (a_1, a_2, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\hat{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{d}_1^T \\ \hat{d}_2^T \\ \hat{d}_4^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} &= (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_4)^T \\ &= \hat{A}^{-1} c = (-1,0,0)^T \end{aligned}$$

其中 $\hat{\lambda}_1 = -1 < 0$. 这时 $a_3^T \hat{d}_1 = \frac{1}{2} > 0$，因此该规划无有限解. 事实上，对 $\theta > 0$，

$$\hat{x} + \theta\hat{d}_1 = (1 + \frac{1}{2}\theta, 3 - \frac{1}{2}\theta, 0)^T$$

都是可行解，相应的目标函数值

$$c^T(\hat{x} + \theta\hat{d}_1) = 2 - \theta$$

当 $\theta \to \infty$ 时，$2 - \theta \to -\infty$.

§5.4　整数规划方法

整数规划包括全整数规划、混合整数规划以及 0－1 规划. 常用的求解方法有：割平面法、分枝定界法；求解 0－1 规划的隐枚举法.

许多有趣并且有实用意义的问题都与整数规划有关，首先考虑运输问题.

5.4.1　(运输问题) 把某种物资从 m 个产地(产量分别为 $a_1,\cdots,a_m$) 运往 n 个销地(销量分别为 $b_1,\cdots,b_n$)，设 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，把单位物资从第 i 个产地运往第 j 个销地的运费为 c_{ij}，问如何确定第 i 个产地运往第 j 个销地的物资运输量，使得满足需求并且总的运费最少？

解　由于 $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i = \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$，这种运输问题称为产销平衡的运输问题.

设第 i 个产地运往第 j 个销地的物资运输量为 $x_{ij}(i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n)$，则上述运输问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1,\cdots,m) \\ & \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j (j = 1,\cdots,n) \qquad ① \\ & x_{ij} \geqslant 0 \ (i = 1,\cdots,m; j = 1,\cdots,n) \end{aligned}$$

注　运输问题的数学模型是个线性规划. 在 ① 中，只要产量 a_i 和销量 b_j 都是整数，则该线性规划一定有整数最优解，尽管在约束条件中没有对变量的整数要求. 为证明这一结论，先引入下列概念.

如果方阵 B 的元素都是整数，并且 B 的行列式 $\det B = 0$ 或 1 或 -1，则称 B 为单模阵. 如果 $m \times n$ 阶矩阵 A 的任一子方阵都是单模阵，则称 A 为全单模矩阵.

5.4.2　若标准形式的线性规划(LP) 的矩阵 A 是全单模矩阵，并且 b 为整数向量(每个分量均为整数)，则(LP) 的任一基本解 x 都是整数向量.

证　设(LP) 的任一基本解 x 的基本变量为 $x_{t_1},\cdots,x_{t_m}$，非基本变量为 $x_j(j \in R)$，相应的基矩阵为 B. 记 $x_B = (x_{t_1},\cdots,x_{t_m})^T$，则 x_B 是方程组 $Bx_B = b$ 的解，$x_j = 0(j \in R)$.

使用解线性方程组的 Cramer 法则，得到

$$x_{t_i} = \frac{\det B_i}{\det B} \ (i = 1,\cdots,m) \qquad ②$$

其中方阵 B_i 是用向量 b 替换 B 的第 i 列后所得. 由于 A 是全单模矩阵，因此 A 的元素都是整数，并且 $\det B = \pm 1$. 这样，B_i 的元素都是整数，$\det B_i$ 为整数，x_{t_i} 均为整数，x 为整数向量.

5.4.3　设 $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 的元素均为0，1 或－1，且 A 的每列至多有两个非零元素. 那末 A 为全单模矩阵的一个充分条件为：能将 A 的行划分成两个集合 T_1 和 T_2，使得

(1) 当 A 的某列含有两个同号的非零元素时，这两个非零元素所在的行分别属于 T_1 和 T_2.

(2) 当 A 的某列含有两个异号的非零元素时，这两个非零元素所在的行同属于 T_1 或 T_2.

证　设 $\mathbf{Q}$ 是 A 的任一 k 阶子方阵，根据全单模矩阵的定义，只要证明 $\det\mathbf{Q} = 0$ 或 1 或 -1 即可. 下面使用归纳法证明. 由于 $a_{ij} = 0$ 或 1 或 -1，故 $k = 1$ 时结论显然成立.

假设对 A 的任一 $k-1(k \geqslant 2)$ 阶子方阵结论成立，进而考察 A 的任一 k 阶子方阵 $\mathbf{Q}$ 的行列式，其仅可能有以下三种情况：

(i) $\mathbf{Q}$ 中有一列元素全是零，则 $\det\mathbf{Q} = 0$.

(ii) $\mathbf{Q}$ 中有一列只含有一个非零元素，则将 $\det\mathbf{Q}$ 按此列展开，由归纳假设可知，$\det\mathbf{Q} = 0$ 或 1 或 -1.

(iii) $\mathbf{Q}$ 中每列都有两个非零元素. 由条件(1) 和(2) 可知，对于 $\mathbf{Q}$ 的任一列，都有下面的关系

$$\sum_{i\in T_1} a_{ij} = \sum_{i\in T_2} a_{ij} \ (j = 1,\cdots,k) \qquad ③$$

上式表明 $\mathbf{Q}$ 的行向量之间线性相关，故 $\det\mathbf{Q} = 0$.

5.4.4　在运输问题① 中，只要 $a_i(i = 1,\cdots,m)$，$b_j(j = 1,\cdots,n)$ 都是整数，则 ① 有整数最优解.

证　①是(LP) 的形式，其中 A 是$(m+n)\times mn$ 阶矩阵

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1\,1\cdots1 & & & \\ & 1\,1\cdots1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\,1\cdots1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \ \ 1 & \ \ 1\cdots & & 1 \\ \ \ \ \ \ddots & \ \ \ \ \ddots & & \ddots \\ \ \ \ \ \ \ 1 & \ \ \ \ \ \ 1 & & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m\text{ 行} \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} n\text{ 行} \end{array} \qquad ④$$

$\underbrace{\qquad}_{n\text{列}}\underbrace{\qquad}_{n\text{列}}\cdots\underbrace{\qquad}_{n\text{列}}$

$b = (a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n)^T$

$c = (c_{11}, \cdots, c_{1n}, c_{21}, \cdots, c_{2n}, \cdots, c_{m1}, \cdots, c_{mn})^T$

$x = (x_{11}, \cdots, x_{1n}, x_{21}, \cdots, x_{2n}, \cdots, x_{m1}, \cdots, x_{mn})^T$

矩阵 A 的元素均为0或1，且 A 的每列只有两个非零元素1.取 $T_1 = \{1, \cdots, m\}$，$T_2 = \{m+1, \cdots, m+n\}$，则由题5.4.3知，$A$ 是全单模矩阵.

显然①有可行解

$$x_{ij} = \frac{a_i b_j}{S} \ (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n) \qquad ⑤$$

其中 $S = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$，又目标函数值 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \geqslant 0$，即有下界，因此①必有最优解.

如果把 A 的前 m 行元素对应相加，后 n 行元素对应相加，两者再相减，得到一个零行向量，这说明 A 的 $m+n$ 行线性相关，因此 A 的秩 $r(A) < m+n$.另一方面，把 A 的第 $2,3,\cdots,m+n$ 行与第 $1,2,\cdots,n,n+1,2n+1,\cdots,(m-1)n+1$ 列元素所形成的 $m+n-1$ 阶子方阵的行列式计算出来，其值不等于零，因此 $r(A) \geqslant m+n-1$.于是 $r(A) = m+n-1$，即①的 $m+n$ 个约束条件中有一个是多余约束.

设去掉多余约束以后的约束条件的系数矩阵为 A'，相应的右端向量为 b'，则 A' 仍为全单模矩阵，并且 b' 为整数向量，由题5.4.2知

$$\begin{aligned} \min \quad & c^T x \\ \text{s.t.} \quad & A'x = b' \\ & x \geqslant 0 \end{aligned} \qquad ⑥$$

的任一基本解都是整数向量.

⑥的最优解即为①的最优解，而⑥的最优解一定可以在基本可行解上达到，从而①一定有整数最优解.

注 运输问题的数学模型①是个线性规划，可以使用单纯形法求解.但由于该线性规划具有特殊的结构，因此有求解的专用方法，常用的两种方法是表上作业法和图上作业法.在求解运输问题时，它们比单纯形法更加简单和有效.其中用表上作业法求得的最优解是基本可行解.

5.4.5 (分配问题)设有 n 个人 $A_1, \cdots, A_n$ 和 n 种工作 $B_1, \cdots, B_n$，不同人做不同的工作支出不一样，设 A_i 做工作 B_j 的支出为 c_{ij}，现要分配每个人做一件工作，问应该如何安排，才能使总支出最少?

解 令

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{当 } A_i \text{ 做工作 } B_j \text{ 时} \\ 0, \text{当 } A_i \text{ 不做工作 } B_j \text{ 时} \end{cases} \qquad ⑦$$

则上述分配问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (i = 1, \cdots, n) \\ & \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \ (j = 1, \cdots, n) \\ & x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 \ (i, j = 1, \cdots, n) \end{aligned} \qquad ⑧$$

注 在上述模型中，x_{ij} 只能取值0或1，即为0-1变量.分配问题的数学模型是个0-1规划.

关于分配问题的求解:(1)可以把⑧视为①的特例，即在①中令 $m = n, a_i = b_j = 1 \ (i, j = 1, \cdots, n)$，根据题5.4.4的结论，⑧有整数(并且只能是0或1)最优解.这样，可以使用求解运输问题的表上作业法求解⑧.不过这时，基本可行解是高度退化的(基本变量的个数是 $2n-1$，其中有 n 个基本变量取值为1，其余 $n-1$ 个基本变量取值为0).这样，在求解中往往迭代多次而目标函数值并不下降，计算效果不理想.(2)可以使用求解整数规划的割平面法或分枝定界法以及求解0-1规划的隐枚举法求解⑧.但⑧是有着特殊结构的0-1规划，因此也有专门的求解方法，例如匈牙利算法.

5.4.6 (装载问题)有一艘集装箱货船，其最大载重量为 b.现有 n 种不同类型的集装箱可供装载，设第 j 种集装箱每箱重量为 a_j，装载一箱收费为 $c_j (j = 1, 2, \cdots, n)$.求使货船一次载货收入最大的装载方案.

解 设装载第 j 种集装箱 x_j 箱，则上述装载问题的数学模型为

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \\ & x_j \geqslant 0, \text{且为整数} (j = 1, \cdots, n) \end{aligned} \qquad ⑨$$

注 ⑨是个整数规划，可以使用割平面法或分枝定界法求解.但是当 b 较大，而 n, a_j, c_j 相对较小时，可以先把各个 x_j 作为连续型变量，求得相应的线性规划的最优解.如果最优解不满足整数要求，可保留其整数部分，舍掉小数部分，则结果显然仍是⑨的可行解，并且相应的目标函数值与最优值的相对误差也比较小，于是可将上述可行解近似作为⑨的最优解.但当上述条件不成立时，一般就不能这样处理了.

在⑨中，若各个 x_j 只能取值0或1，即 x_j 是0-1变量，则⑨成为0-1规划:

$$\max \quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b \tag{⑩}$$

$$x_j = 0 \text{ 或 } 1\ (j = 1,\cdots,n)$$

⑩ 是背包问题的数学模型. 背包问题是：一个旅行者在 n 件物品中选择几件放入背包中随身带走. 背包的容积为 b，每件物品的体积和价值分别为 $a_1,\cdots,a_n$ 及 $c_1,\cdots,c_n$. 旅行者应如何确定携带物品的组合使总价值最大？

显然

$$x_j = \begin{cases}1, & \text{携带第 } j \text{ 件物品}\\ 0, & \text{不带第 } j \text{ 件物品}\end{cases}\quad (j = 1,\cdots,n)$$

可以使用动态规划的方法求解 ⑩.

5 4.7 （巡回推销员问题）一个巡回推销员从公司所在地城市 v_1 出发，去城市 $v_2,\cdots,v_n$ 推销商品，每个城市必须去一次也只能去一次，最后回到城市 v_1. 各城市之间均可直接连通，城市 v_i, v_j 之间的距离为 c_{ij}. 问如何安排巡回推销员的旅程路线，使他所走的总距离最短？

解 设

$$x_{ij} = \begin{cases}1, & \text{在旅程路线中含有 } v_i \text{ 到 } v_j \text{ 之行程}\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{⑪}$$

则旅程路线的总距离为

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

其中 $c_{ii}(i = 1,\cdots,n)$ 为一充分大的正数 M.

因为在旅程路线中恰有一段以 v_i 为起点的行程，因此

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ (i = 1,\cdots,n) \tag{⑫}$$

同样地，也恰有一段以 v_j 为终点的行程，因此

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ (j = 1,\cdots,n) \tag{⑬}$$

显然，满足约束条件 ⑫ 和 ⑬ 的解，并不一定能够形成推销员的一条旅程路线，可能出现多个回路的分割现象. 为此，还应该增加一些约束条件，以避免出现这种分割现象. 这时，当把 n 个城市任意分成非空的两组 S_1 和 S_2 后，只需要求在旅程路线中至少存在一段以 S_1 中某个城市 v_i 为起点，并以 S_2 中某个城市 v_j 为终点的行程即可. 若以 S 表示集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的任一非空的真子集，则上述要求可表示为

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geqslant 1 \tag{⑭}$$

注意到 $\{1,\cdots,n\}$ 的非空真子集共有 $2^n - 2$ 个，因此形如 ⑭ 的约束条件也有 $2^n - 2$ 个.

这样，巡回推销员问题的数学模型为

$$\min\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1\ (i = 1,\cdots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1\ (j = 1,\cdots,n) \tag{⑮}$$

$$\sum_{i\in S}\sum_{j\notin S} x_{ij} \geqslant 1\ (\text{对}\{1,\cdots,n\}\text{ 的所有非空真子集 } S)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1 (i,j = 1,\cdots,n)$$

注 巡回推销员问题又称为货郎担问题，是个古老而著名的运筹学问题. ⑮ 是该问题的 0－1 规划模型中的一种. 下面再介绍利用三下标 0－1 变量建立该问题 0－1 规划模型的方法.

设

$$x_{ijk} = \begin{cases}1, & \text{如果旅程路线中第 } k \text{ 段行程是从 } v_i \text{ 到 } v_j\\ 0, & \text{否则}\end{cases} \tag{⑯}$$

现城市个数为 n，行程段数也是 n. 第 1 段行程只能以城市 v_1 为起点，可以以城市 $v_2,\cdots,v_n$ 中的任何一个为终点，因此

$$\sum_{j=2}^{n} x_{1j1} = 1 \tag{⑰}$$

第 2 段、第 3 段以至第 $n-1$ 段行程每次只能从一个城市 v_i 到一个城市 v_j，因此

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n} x_{ijk} = 1(k = 2,\cdots,n-1; i \neq j) \tag{⑱}$$

最后一段行程必须以城市 v_1 为终点，但起点可以是城市 $v_2,\cdots,v_n$ 中的任一个，因此

$$\sum_{i=2}^{n} x_{i1n} = 1 \tag{⑲}$$

对任一城市 $v_i(i = 2,\cdots,n)$，为保证在旅程路线中有一次且仅有一次以 v_i 为起点，要求

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=2}^{n} x_{ijk} = 1\ (i = 2,\cdots,n)$$

$$(i \neq j; \text{如 } j = 1, \text{则 } k = n; \text{如 } k = n, \text{则 } j = 1) \tag{⑳}$$

对任一城市 $v_j(j = 2,\cdots,n)$，为保证在旅程路线中有一次且仅有一次以 v_j 为终点，要求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n-1} x_{ijk} = 1\ (j = 2,\cdots,n)$$

$$(i \neq j; \text{如 } i = 1, \text{则 } k = 1; \text{如 } k = 1, \text{则 } i = 1) \tag{㉑}$$

为避免出现分割现象，要求第 k 段行程如以城市 v_j 为终点时，第 $k+1$ 段行程必须以 v_j 为起点. 对第 1 段行程，如果以 v_j 为终点，则第 2 段行程必须以 v_j 为起点：

$$x_{1j1} = \sum_{i=2}^{n} x_{ij2} \quad (j = 2,\cdots,n; i \neq j) \qquad ㉒$$

对第 2 段到第 $n-2$ 段行程有

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ijk} = \sum_{r=2}^{n} x_{jr,k+1}$$

$$(j = 2,\cdots,n; k = 2,\cdots,n-2; i \neq j) \qquad ㉓$$

对第 $n-1$ 段行程，若以 v_j 为终点，则第 n 段行程必须以 v_j 为起点到达 v_1：

$$\sum_{i=2}^{n} x_{ij,n-1} = x_{j1n} \quad (j = 2,\cdots,n; i \neq j) \qquad ㉔$$

最后，旅程路线的总距离是

$$\sum_{j=2}^{n} c_{1j}x_{1j1} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=2}^{n}\sum_{k=2}^{n-1} c_{ij}x_{ijk} + \sum_{i=2}^{n} c_{i1}x_{i1n}$$

$$(i \neq j) \qquad ㉕$$

对式㉕求最小值，以式⑰～㉔为约束条件，加上对变量取值为 0 或 1 的要求，即可得到巡回推销员问题的又一种 0－1 规划模型.

巡回推销员问题的 0－1 规划模型是很复杂的，变量和约束条件都很多. 但上述约束条件并非全部都是必要的，其中有多余约束.

显然，使用求解 0－1 规划的通常方法求解巡回推销员问题是不适宜的，需要特殊的求解方法. 可以使用图论或动态规划的方法求解，但至今尚无一种有效方法能够对任意 n 求得问题的最优解.

第6篇　复变函数

§6.1　沿特殊方向取极限

复函数(以下如不作特殊声明,所讲到的函数均指单值函数)极限$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=A$的定义是:对于任意$\varepsilon>0$,总能找到$\delta>0$,使对一切满足$0<|z-z_0|<\delta$的$z$,都有$|f(z)-A|<\varepsilon$成立.上述定义意味着,当$z$在复平面上依一切可能的方式趋于$z_0$时,$f(z)$的极限值都是$A$.这样,就可以通过在某些特殊方向取极限来解决一些问题.例如,若能找到两个不同的z趋于z_0的方式,使$f(z)$的极限值不同,就能断定$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$不存在,并由此解决一些与极限有关的问题,如函数的连续性、可微性、解析性等.

6.1.1　研究函数

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0;\\ \dfrac{z}{|z|}, & z\neq 0\end{cases}$$

的连续性.

解　由于当$z_0\neq 0$时,有

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\frac{z_0}{|z_0|}=f(z_0),$$

所以,$f(z)$在复平面(不作特殊声明时,所提到的复平面、全平面均指开复平面,即不含无穷远点∞的复平面)上的点$z\neq 0$连续.

令$z=x+iy$,则

$$\frac{z}{|z|}=\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

于是,当z沿着射线$y=mx(x>0)$趋于原点时,有

$$\lim_{\substack{x\to 0^+\\ y=mx}}f(z)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+imx}{\sqrt{x^2+m^2x^2}}=\frac{1+im}{\sqrt{1+m^2}},$$

对不同的m这个极限值不同,从而$\lim\limits_{z\to 0}f(z)$不存在.因此$f(z)$在$z=0$不连续.

6.1.2　研究函数

$$f(z)=\begin{cases}0, & z=0;\\ \arg z, & z\neq 0\end{cases}$$

的连续性,这里约定$-\pi<\arg z\leqslant\pi$.

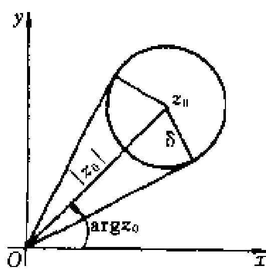


图6.1

解　分几种情形考虑在点z_0的连续性:

(1) $z_0=0$.由于当z沿射线$\arg z=\theta_0(-\pi<\theta_0\leqslant\pi)$趋于$z_0$时,$f(z)$趋于$\theta_0$.由于$\theta_0$可以取不同的值,因而,$f(z)$在$z=0$不连续.

(2) $z_0=x(<0)$.由定义当z从上半平面趋于z_0时,$f(z)$趋于π;当z从下半平面趋于z_0时,$f(z)$趋于$-\pi$.所以,$f(z)$在负实轴上不连续.

(3) 其它点z_0.以z_0为中心,δ为半径作圆,只要δ充分小,这个圆总可以不与负实轴相交(图6.1).于是,当$|z-z_0|<\delta$时,有

$$|\arg z-\arg z_0|<\arcsin\frac{\delta}{|z_0|}=\varphi(\delta).$$

又因$\delta\to 0$时,$\varphi(\delta)\to 0$,故总可以选取δ,使$\varphi(\delta)$小于任意给定的$\varepsilon<0$.即有$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

综上知除原点及负实轴外,$f(z)$在复平面上处处连续.

6.1.3　研究函数

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\varphi}, & 当\ z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),r>0,\\ & 0<\varphi\leqslant 2\pi\ 时;\\ 2\pi, & 当\ z=0\ 时\end{cases}$$

的连续性.

解　(1) $z_0=0$是$f(z)$的不连续点.这是由于,当z沿着正虚轴趋于0时,恒有

$$|f(z)-f(0)|=\left|\frac{1}{\varphi}-2\pi\right|=2\pi-\frac{2}{\pi},$$

它不可能任意地小.

(2) 对正实轴上的每一点z_0,$f(z)$也不连续.这是因为,当z从上半平面趋于z_0时,$\varphi\to 0$,从而

$$|f(z)-f(z_0)|=\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{2\pi}\to\infty.$$

(3) 对于其它的z_0,$f(z)$连续.事实上,记$z_0=r_0e^{i\varphi_0}$,$\psi(\delta)=\arcsin\dfrac{\delta}{r_0}$,用与6.1.2完全相同的方法,可以得到下面的估计:

$$|f(z)-f(z_0)|=\left|\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi_0}\right|=\frac{|\varphi-\varphi_0|}{\varphi\varphi_0}<\frac{\psi(\delta)}{\frac{\varphi_0^2}{2}}.$$

由此可见,当δ充分小时,$|f(z)-f(z_0)|$可以小于任意给定的正数ε,所以,$f(z)$在z_0连续.

6.1.4　设z沿着通过原点的射线趋于∞点,试讨

论下列函数的极限：

(1) $f(z) = z + e^z$； (2) $g(z) = \mathrm{tg}z$.

解 (1) 设 $z = re^{i\theta}$，当 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta > 0$，所以

$$|f(z)| = |z + e^z| \geqslant |e^z| - |z| = e^{r\cos\theta} - r \to \infty\ (r \to +\infty).$$

当 $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ 时，$\cos\theta = 0$，故

$$|f(z)| \geqslant |z| - |e^z| = r - 1 \to \infty\ (r \to +\infty).$$

当 $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ 时，$\cos\theta < 0$，所以

$$|f(z)| \geqslant r - e^{r\cos\theta} \to \infty\ (r \to +\infty).$$

综上讨论，当 z 沿着通过原点的任何射线趋于 ∞ 点时，都有 $f(z) \to \infty$.

(2) 依定义

$$g(z) = \mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z} = -i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{e^{iz} + e^{-iz}} = -i\frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1}.$$

设 $z = re^{i\theta}$，当 $0 < \theta < \pi$ 时，有

$$|e^{2iz}| = e^{-2y} = e^{-2r\cos\theta} \to 0\ (r \to +\infty),$$

所以

$$\lim_{r\to+\infty} g(z) = i.$$

当 $-\pi < \theta < 0$ 时，由

$$g(z) = -i\frac{1 - e^{-2iz}}{1 + e^{2iz}}$$

及

$$|e^{-2iz}| = |e^{2y}| = e^{2r\sin\theta} \to 0\ (r \to +\infty),$$

得

$$\lim_{r\to+\infty} g(z) = -i.$$

当 $\theta = 0$ 或 π 时，$\mathrm{tg}z = \mathrm{tg}(\pm r)$，故当 $r \to +\infty$ 时，$g(z)$ 没有确定的极限值.

6.1.5 设 z 沿着虚轴趋于 ∞ 点，求 $\lim\limits_{z\to\infty}\sin z$.

解 令 $z = iy$（y 为实数），依定义

$$\sin z = \sin iy = \frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i\,\mathrm{sh}y,$$

故

$$|\sin z| = |\mathrm{sh}y| \to \infty\ (\text{当 } y \to \infty \text{ 时})$$

从而，当 z 沿虚轴趋于 ∞ 点时，$\sin z$ 也趋于 ∞ 点.

注 6.1.5的结果说明，当 z 为复数时，正弦函数 $\sin z$ 是无界函数.

与一个区域联系在一起的函数的解析性，在复变函数里起着重要作用. 解析函数的定义如下：若复函数 $f(z)$ 在区域 D 内处处可微，则称 $f(z)$ 在 D 内解析，或者说 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数；若 $f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内解析，则称 $f(z)$ 在点 z_0 解析. 由于区域是开集，所以 $f(z)$ 在 D 内解析，就意味着它在 D 内的每一点解析. 如果 $f(z)$ 在 z_0 不解析，则称 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.

6.1.6 研究函数 $f(z) = z\mathrm{Re}z = x^2 + ixy$ 的可微性和解析性.

解 研究函数的可微性和解析性有多种方法(参看6.2.1)，下面从定义出发来考虑. 设 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$，则

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(z + \Delta z)\mathrm{Re}(z + \Delta z) - z\mathrm{Re}z}{\Delta z} = \mathrm{Re}z + \mathrm{Re}\Delta z + z\frac{\mathrm{Re}\Delta z}{\Delta z} = x + \Delta x + z\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y}.$$

于是，当 $z = 0$ 时，有

$$f'(0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}(0 + \Delta x + 0) = 0.$$

当 $z \neq 0$，令 $\Delta x = 0$，当 $\Delta z = i\Delta y \to 0$ 时，有

$$\lim_{\substack{\Delta y\to 0\\ \Delta x = 0}}\frac{\Delta f}{\Delta z} = x.$$

又

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y = 0}}\frac{\Delta f}{\Delta z} = x + z = 2x + iy.$$

由 $z \neq 0$，易知上述两个方向的极限值不相等. 所以 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 不存在.

综上得知，$f(z)$ 在 $z = 0$ 可微；在任何其它点 $z \neq 0$ 都不可微. 从而这个函数在全平面处处不解析.

6.1.7 (1) 若函数 $f(\frac{1}{z})$ 在 $z = 0$ 解析，就称 $f(z)$ 在 $z = \infty$ 解析. 试在闭复平面(即包含 ∞ 点的复平面)上分析函数 $f(z) = \exp\left\{\frac{1}{z - 1}\right\}$ 的解析性.

(2) 证明：对任何复数 A（有限或无限），存在以1为极限的点列 $\{z_n\}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$），使满足

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

证 (1) 由复合函数的求导法则，当 $z \neq 1$ 及 ∞ 时，有

$$f'(z) = -\frac{1}{(z - 1)^2}\exp\left\{\frac{1}{z - 1}\right\}.$$

故所给函数 $f(z)$ 在除 $z = 1$ 及 ∞ 的闭复平面上解析. 又

$$f(\frac{1}{z}) = \exp\left\{\frac{1}{1 - z}\right\}.$$

显然，$f(\frac{1}{z})$ 在 $z = 0$ 解析，从而依定义，$f(z)$ 在 $z = \infty$ 解析.

下面讨论 $f(z)$ 在 $z = 1$ 的解析性. 令 $z = x \in$

$\mathbf{R}$,则

$$\lim_{x\to1^-}\exp\left\{\frac{1}{x-1}\right\}=\infty,\ \lim_{x\to1^+}\exp\left\{\frac{1}{x-1}\right\}=0.$$

因而$\lim\limits_{z\to1}f(z)$不存在,所以$f(z)$在$z=1$不解析,即$z=1$是$f(z)$的奇点.

(2) 若$A=0$或∞,则由(1)的证明中可见,只要取$\{z_n\}$是x轴上趋于1^-或1^+的点列,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=0$或$\infty$.

若$A\neq0$及∞,我们可以通过解方程

$$\exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\}=A$$

把合乎要求的点列$\{z_n\}$构造出来.在方程两边取对数,得

$$\frac{1}{z-1}=\mathrm{Ln}A=\ln|A|+i\arg A+2n\pi i,$$

于是,令$z_n=\dfrac{1}{\ln|A|+(\arg A+2n\pi)i}+1(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

则 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=1$,且$\exp\left\{\dfrac{1}{z_n-1}\right\}=A$,所以

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A.$$

若极限$\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$存在,有时可通过在两个不同方向取极限,得到两个形式上不同的极限值.由于这两个极限值应相等,从而就可以得到一个复的(或两个实的)关系式.著名的Cauchy-Riemann方程(简称C-R方程)就是这样得出来的(参看下面6.1.8).

6.1.8 (1) 如果对于函数$w=f(z)=u+iv$,极限$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,则$\dfrac{\partial u}{\partial x}$,$\dfrac{\partial v}{\partial y}$一定存在而且相等;如果$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Im}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,则$\dfrac{\partial u}{\partial y}$、$\dfrac{\partial v}{\partial x}$一定存在,且$\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}$.这里$\Delta w=f(z+\Delta z)-f(z)$.

(2) 如果$u(x,y)$及$v(x,y)$作为二元函数可微,且$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$或$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Im}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,则函数$f(z)$可微.

证 (1) 令$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$,则

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{1}{\Delta x+i\Delta y}\{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)+i[v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)]\}$$

取$\Delta y=0$,得

$$\lim_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{u(x+\Delta x,y+\Delta y)-u(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

取$\Delta x=0$,得

$$\lim_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{v(x+\Delta x,y+\Delta y)-v(x,y)}{\Delta y}=\frac{\partial v}{\partial y}.$$

所以,$\dfrac{\partial u}{\partial x}$、$\dfrac{\partial v}{\partial y}$存在且相等.

类似可证(1)中的第二个结论.

(2) 设$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,则由(1)的结论,有$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$.因$u(x,y)$及$v(x,y)$可微,故

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(\rho),$$

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(\rho),$$

这里$o(\rho)$是$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$的高阶无穷小量.于是

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}&=\mathrm{Re}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta u\Delta x+\Delta v\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\\&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(\rho)\right)\frac{\Delta x}{\rho^2}\\&\quad+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(\rho)\right)\frac{\Delta y}{\rho^2}.\end{aligned}$$

令$\Delta x=\Delta y>0$,并利用(1)中已证得的$\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}$,有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}&=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\&\quad+\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{o(\rho)}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\right)\\&=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{o(\rho)}{\rho}+\frac{o(\rho)}{\rho}\right),\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta x=\Delta y>0}}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right).\qquad①$$

又在(1)中已得到

$$\lim_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y=0}}\mathrm{Re}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\partial u}{\partial x}.\qquad②$$

由于$\lim\limits_{\Delta z\to0}\mathrm{Re}\dfrac{\Delta w}{\Delta z}$存在,故由①,②得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=0,$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

这就证得u,v满足C-R方程,从而$f'(z)$存在.

从以上几个例题可以看出,沿特殊方向取极限,说得更具体一些,沿着一些不同的方向去考虑(或计算)同一个复函数极限,对解决复变函数中的一些与极限有关的问题有着重要的意义.这种方法是数学里的一种重要思想方法——算两次,在复极限问题上的体现.在解决各种数学问题时,常要选择一个适当的量,然后从两个(或多个)不同的方面去考虑(如计算或估计等)它,从而得到一个关系(等式、不等式或

其它关系)，这称为算两次，又称 Fubini 原理. 算两次这一方法，在数学里到处都能见到. 例如，小学生做减法题，然后用加法检验；列方程(这包括代数方程、微分方程等)解应用题，常是"为了得到一个方程，我们必须把同一个量用不同的方法表示出来"(G. Polya 著《数学的发现》，欧阳绛中译本第 37 页)；在考虑与重积分有关的问题时，常要交换积分顺序；等等. 这都属于算两次的思想.

§6.2 C-R 方程及其应用

复变函数论中关于函数的可微性及解析性有下面的判定定理：

定理 1 设函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内定义，则 $f(z)$ 在点 $z=x+iy\in D$ 可微的充要条件是：二元函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在点(x,y)可微，并且在点(x,y)满足 C-R 方程(或称 C-R 条件)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

而且当 $f(z)$ 可微时，可以用下面公式之任一计算导数：

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

定理 2 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 内可微(即在 D 内解析)的充要条件是：二元函数 $u(x,y)$ 及 $v(x,y)$ 在 D 内可微，且在 D 内处处满足 C-R 方程.

C-R 方程实际上是一个一阶偏微分方程组，在复变函数中有着广泛的应用，首先是关于函数的可微性和解析性的判定.

6.2.1 再讨论函数 $f(z)=x^2+ixy$ 的可微性及解析性(参看 6.1.6).

解 由题设，$u=x^2$, $v=xy$，它们都是全平面上的可微函数. 由于

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\frac{\partial u}{\partial y}=0,\frac{\partial v}{\partial x}=y,\frac{\partial v}{\partial y}=x,$$

故 C-R 方程成为

$$\begin{cases}2x=x\\ -y=0,\end{cases}$$

解得 $x=y=0$，即C-R方程只在点 $z=0$ 成立. 于是，由定理 1，$f(z)$ 在点 $z=0$ 可微，且

$$f'(0)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=0.$$

对于其它点 $z\neq 0$，$f(z)$ 不可微，所以这个函数在 $z=0$ 不解析，在 $z\neq 0$ 也不解析.

6.2.2 证明：函数 $f(z)=f(x+iy)=\sqrt{|xy|}$ 在 $z=0$ 满足 C-R 方程，但 $f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

解 $f(z)$ 的实部 $u=\sqrt{|xy|}$，虚部 $v\equiv 0$. 故

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x,0)-u(0,0)}{\Delta x}=0.$$

同理$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(0,0)}=0$，又 $v_x=v_y=0$. 所以，C-R 方程在 $z=0$ 成立.

如果令 z 沿射线

$$\begin{cases}x=\alpha t\\ y=\beta t\end{cases}(0<t<+\infty)$$

(α,β 是不全为 0 的常数) 趋于 0 时，

$$\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=\frac{f(z)}{z}=\frac{\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha+i\beta},$$

这说明极限$\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}$不存在，所以，$f(z)$ 在 $z=0$ 不可导.

注 6.2.2 并不违背 C-R 定理，因为 $u=\sqrt{|xy|}$ 不是二元可微函数. 这个例子还说明，仅仅从函数 $f(z)$ 满足 C-R 方程，还不足以断定它的可微性.

6.2.3 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，且在 D 内满足下列条件之一：

(1) $f'(z)=0$；　(2) $\mathrm{Re}f(z)\equiv$ 常数；

(3) $\mathrm{Im}f(z)\equiv$ 常数；　(4) $|f(z)|\equiv$ 常数.

则 $f(z)$ 在 D 内恒为常数.

证 这里只在条件(4)的情况下证明，其它情况可类似证明. 设 $|f(z)|=C$(常数). 若 $C=0$，则显然有 $f(z)\equiv 0$. 现设 $C\neq 0$，记 $f(z)=u+iv$，则

$$u^2+v^2=C^2.$$

两边对 x,y 求偏导数，得

$$2uu_x+2vv_x=0,$$
$$2uu_y+2vv_y=0.$$

利用 C-R 方程，得

$$\begin{cases}uu_x+vv_x=0,\\ vu_x-uv_x=0.\end{cases}$$

把这两个式子看成是关于 u_x 及 v_x 的齐次线性方程组，由于其系数行列式 $=-(u^2+v^2)=-C^2\neq 0$，故只有零解，即 $u_x=v_x\equiv 0$. 再由 C-R 方程，又得 $v_y=u_y\equiv 0$. 因而 $u=C_1$, $v=C_2$(C_1,C_2 为实常数)，所以 $f(z)=C_1+iC_2$(常数).

6.2.4 设 $f(z)$ 是解析函数，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 是两个正交向量，且从 $\boldsymbol{n}$ 按逆转$\frac{\pi}{2}$能重合于 $\boldsymbol{s}$，试证明：

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{s}},\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{s}}=-\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}.$$

证法 1 不妨设 $\boldsymbol{n}$ 及 $\boldsymbol{s}$ 都是单位向量，并令 $\boldsymbol{n}=$

$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，则 $s=(\cos\beta,\sin\beta)$，$\beta=\frac{\pi}{2}+\alpha$. 于是由 C-R 方程，得

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha,$$

$$\frac{\partial v}{\partial s}=\frac{\partial v}{\partial x}\cos\beta+\frac{\partial v}{\partial y}\sin\beta$$

$$=-\frac{\partial v}{\partial x}\sin\alpha+\frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha.$$

所以

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial s}.$$

同理

$$\frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{\partial v}{\partial n}.$$

证法 2 用单位复数 $e^{i\alpha}$ 表示向量 n，则 $s=e^{i\beta}=ie^{i\alpha}$，$\beta=\alpha+\frac{\pi}{2}$. 由于 $f'(z)$ 存在，我们可以沿特殊方向取极限来计算它，令 $\Delta z=re^{i\alpha}$，则有

$$f'(z)=\lim_{r\to0}\frac{f(z+re^{i\alpha})-f(z)}{re^{i\alpha}}$$

$$=\frac{1}{e^{i\alpha}}\lim_{r\to0}\Big[\frac{u(x+r\cos\alpha,y+r\sin\alpha)-u(x,y)}{r}$$

$$+i\frac{v(x+r\cos\alpha,y+r\sin\alpha)-v(x,y)}{r}\Big]$$

$$=\frac{1}{e^{i\alpha}}\Big(\frac{\partial u}{\partial n}+i\frac{\partial v}{\partial n}\Big).\qquad ①$$

再令 $\Delta z=re^{i\beta}$，又有

$$f'(z)=\frac{1}{e^{i\beta}}\Big(\frac{\partial u}{\partial s}+i\frac{\partial v}{\partial s}\Big)=\frac{1}{e^{i\alpha}}\Big(\frac{\partial v}{\partial s}-i\frac{\partial u}{\partial s}\Big).\ ②$$

比较 ① 及 ② 式，即得

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial v}{\partial s},\ \frac{\partial u}{\partial s}=-\frac{\partial v}{\partial n}.$$

注 本题是 C-R 方程的推广. 如果取 n 是圆周 $|z|=r$ 的外法线单位向量，s 是 $|z|=r$ 的逆时针方向的切向单位向量，则

$$\frac{\partial}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial r},\ \frac{\partial}{\partial s}=\frac{\partial}{r\partial\varphi},$$

这里(r,φ) 表示极坐标，这就得到极坐标系下的 C-R 方程是

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=-r\frac{\partial v}{\partial r}.$$

6.2.5 设 $u(\xi,\eta)$ 在 $\zeta=\xi+i\eta$ 平面的区域D 内有二阶连续偏导数，$z=f(\zeta)=x(\xi,\eta)+iy(\xi,\eta)$ 是 D 内单叶解析函数(即双方单值的解析函数). 则

$$\frac{\partial^2u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2u}{\partial\eta^2}=|f'(\zeta)|^2\Big(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}\Big).\qquad ③$$

证 设 $z=f(\zeta)$ 的反函数是 $\zeta=f^{-1}(z)=\xi(x,y)+i\eta(x,y)$. 于是，由多元函数的复合函数求导法则，有

$$u_\xi=u_xx_\xi+u_yy_\xi,$$

$$u_{\xi\xi}=(u_{xx}x_\xi+u_{xy}y_\xi)x_\xi+u_xx_{\xi\xi}$$

$$+(u_{xy}x_\xi+u_{yy}y_\xi)y_\xi+u_yy_{\xi\xi}$$

$$=u_{xx}x_\xi^2+2u_{xy}x_\xi y_\xi+u_{yy}y_\xi^2$$

$$+u_xx_{\xi\xi}+u_yy_{\xi\xi},$$

同理

$$u_{\eta\eta}=u_{xx}x_\eta^2+2u_{xy}x_\eta y_\eta+u_{yy}y_\eta^2+u_xx_{\eta\eta}$$

$$+u_yy_{\eta\eta}$$

所以

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=(x_\xi^2+x_\eta^2)u_{xx}+2(x_\xi y_\xi+x_\eta y_\eta)u_{xy}+$$

$$(y_\xi^2+y_\eta^2)u_{yy}+(x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta})u_x+(y_{\xi\xi}+y_{\eta\eta})u_y.$$

由 C-R 方程 $x_\xi=y_\eta$，$x_\eta=-y_\xi$，有

$$x_{\xi\xi}+x_{\eta\eta}=0,\ y_{\xi\xi}+y_{\eta\eta}=0,$$

$$x_\xi y_\xi+x_\eta y_\eta=0,$$

又

$$x_\xi^2+x_\eta^2=y_\xi^2+y_\eta^2=|f'(\zeta)|^2,$$

从而

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}=|f'(\zeta)|^2(u_{xx}+u_{yy}).$$

注 由等式③可知：如果 $u(x,y)$ 是 x,y 的调和函数，在单叶解析变换 $z=f(\zeta)$ 之下，u 变为ξ,η 的调和函数；反之，若 u 是 ξ,η 的调和函数，则在变换 $\zeta=f^{-1}(z)$ 之下，u 变为 x,y 的调和函数(注意，单叶解析函数 $f(\zeta)$ 的导数 $f'(\zeta)$ 处处不为零). 这个结论对应用保形变换解决平面场问题有重要意义.

6.2.6 我们知道，若 $f(z)=u+iv$ 在区域D 内解析，则 u,v 是 D 内的共轭调和函数；反之，如果在单连通区域 D 内给定调和函数 $u(x,y)$(或 $v(x,y)$)就可以确定以 $u(x,y)$ 为实部(或以 $v(x,y)$ 为虚部)的解析函数 $f(z)=u+iv$(相差一个常数). 这里

$$v(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C_1\qquad ④$$

(或 $u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy+C_2$)，

式中(x,y) 是 D 内任一动点，(x_0,y_0) 是 D 内一定点，C_1,C_2 都是实常数.

求解析函数 $f(z)$，使其实部为调和函数 $u(x,y)=\sin x\operatorname{ch}y$，且满足条件 $f(0)=i$.

解法 1 在 ④ 式中，取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，积分路线为图 6.2 所示折线，则

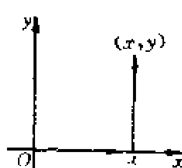


图 6.2

$$v=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\sin x\operatorname{sh}y\,dx+\cos x\operatorname{ch}y\,dy+C$$

$$= \int_0^x -\sin x\,\text{sh}0\,dx + \int_0^y \cos x\,\text{ch}y\,dy + C$$
$$= \cos x\,\text{sh}y + C.$$
所以
$$f(z) = u + iv = \sin x\,\text{ch}y + i\cos x\,\text{sh}y + Ci$$
$$= \sin x\cos iy + \cos x\sin iy + Ci$$
$$= \sin(x + iy) + Ci = \sin z + Ci$$
由 $f(0) = i$,得 $C = 1$,从而 $f(z) = \sin z + i$.

解法 2 $v(x,y)$ 可以利用 C-R 方程,通过不定积分计算.由
$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\sin x\,\text{sh}y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = \cos x\,\text{ch}y.$$
把第一个方程两边对 x 积分,得
$$v = \int -\sin x\,\text{sh}y\,dx = \cos x\,\text{sh}y + \varphi(y).$$
再把 v 代入第二个方程,得 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C$.所以 $v = \cos x\,\text{sh}y + C$.以下与解法 1 相同.

6.2.7 若 $f(z) = u + iv$ 是解析函数,且 $u - v = (x - y)(x^2 + 4xy + y^2)$,求 u 及 v.

解 由题设
$$u - v = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3, \qquad ⑤$$
得
$$u_x - v_x = 3x^2 + 6xy - 3y^2,$$
即
$$v_y + u_y = 3(x^2 + 2xy - y^2).$$
对 y 积分,得
$$u + v = 3x^2y + 3xy^2 - y^3 + \varphi(x). \qquad ⑥$$
⑥ 式及 ⑤ 式分别相加、减,得
$$2u = x^3 + 6x^2y - 2y^3 + \varphi(x),$$
$$2v = -x^3 + 6xy^2 + \varphi(x).$$
再由 $u_x = v_y$,得
$$3x^2 + 12xy + \varphi'(x) = 12xy,$$
即 $\varphi'(x) = -3x^2, \varphi(x) = -x^3 + C$($C$ 为任意实数),所以
$$u = 3x^2y - y^3 + C,\ v = -x^3 + 3xy^2 + C.$$

6.2.8 若 $u = u(x^2 - y^2)$,试求解析函数 $f(z) = u + iv$.

解 对本题必须先确定何时 $u(x^2 - y^2)$ 是调和函数.令 $t = x^2 - y^2$,有
$$u_x = 2x\frac{du}{dt}, u_{xx} = 2\frac{du}{dt} + 4x^2\frac{d^2u}{dt^2};$$
$$u_y = -2y\frac{du}{dt}, u_{yy} = -2\frac{du}{dt} + 4y^2\frac{d^2u}{dt^2}.$$
因而 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 4(x^2 + y^2)\frac{d^2u}{dt^2} = 0$,即$\frac{d^2u}{dt^2} = 0$.所以
$$u = At + B = A(x^2 - y^2) + B,$$
这里 A, B 为任意实数.下面求 $f(z)$ 的虚部 v,由
$$v_x = -u_y = 2Ay$$
得
$$v = \int 2Ay\,dx = 2Axy + \varphi(y).$$
再由 $v_y = u_x = 2Ax$,得 $\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C_1$(任意实常数),所以
$$f(z) = A(x^2 - y^2) + B + i(2Axy + C_1)$$
$$= Az^2 + B + iC_1 = Az^2 + C,$$
这里 $C = B + iC_1$ 是任意复常数.

§6.3 多值函数

多值函数是复函中的一个难点,复函数的多值性常是由于辐角函数 $\omega = \text{Arg}z(z \neq 0)$ 的多值性造成的.我们知道,对于每一个复数 z,有
$$\text{Arg}z = \arg z + 2n\pi(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$
这里及以下用 $\arg z$ 表示 z 的任一个特定的辐角.通常还把落在区间 $(-\pi, \pi]$ 内的辐角作为辐角的主值,也用 $\arg z$ 表示.

多值函数的一个重要问题是:对于一个给定的多值函数,如何选取适当的支割线把复平面割开,以分出它的单值解析分支,并对指定的单值解析分支作各种计算.先简单地回顾一下有关的基本概念.

(1) 支点:设 $w = f(z)$ 是一个多值函数,如果 $z = a$(含 ∞ 点)具有这样一个特性:在点 a 的充分小邻域(对 ∞ 点是指某圆外域:$R < |z| < \infty$)内,任作一条包围 a 点的简单闭曲线 C,当 z 从 C 上的某点出发,沿 C 连续变动一周回到出发点时,多值函数 $f(z)$ 会从一个值变成另一个值,则称 a 点是 $f(z)$ 的一个支点.例如,$z = 0$ 及 $z = \infty$ 都是辐角函数 $\text{Arg}z$ 的支点,此外,它再无其它的支点;根式函数$\sqrt[n]{z}$($n \geq 2$ 为自然数)及对数函数 $w = \text{Ln}z$ 也只以 0 及 ∞ 点为支点.

(2) 支割线:用一条约当曲线把一个多值函数 $f(z)$ 的所有支点都连接起来,这条曲线叫做 $f(z)$ 的支割线.

(3) 单值解析分支.设 $F(z)$ 是区域 D 内的多值函数,$f(z)$ 是 D 内单值解析函数.如果 $f(z)$ 在 D 内每一点的值,都等于 $F(z)$ 在该点的一个值,则 $f(z)$ 称为多值函数 $F(z)$ 在 D 内的一个单值解析分支.

例如,取负实轴(或正实轴、或从原点出发的其它射线)为支割线,由于在用支割线割开了(即去掉支割线)的 z 平面 G 上,已不存在把支点包含在内部的闭路,这样在 G 内就可以分出根式函数$\sqrt[n]{z}$ 及对数函

数的单值解析分支. 还必须注意，对应于支割线的不同取法，分支也就不同.

6.3.1　设 $w=\sqrt[3]{z}$ 确定在沿正实轴割开的 z 平面上，并且 $w(i)=-i$，求 $w(-i)$ 及 $w'(-i)$.

解　因题设 z 平面已沿正实轴割开，$w=\sqrt[3]{z}$ 的三个单值解析分支的表达式分别为

$$w_0=\sqrt[3]{|z|}\exp\left\{i\frac{\arg z}{3}\right\}\ (0<\arg z<2\pi),$$

$$w_1=w_0\exp\left\{i\frac{2\pi}{3}\right\},$$

$$w_2=w_0\exp\left\{i\frac{4\pi}{3}\right\}.$$

这里 $\exp\{i\theta\}$ 即是 $e^{i\theta}$. 它们分别把沿正实轴割开了的 z 平面变成角域 $0<\arg w<\frac{2\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}<\arg w<\frac{4\pi}{3}$，$\frac{4\pi}{3}<\arg w<2\pi$. 由于 $w(i)=-i$，且 $-i$ 是位于第三个角域内，故符合题设条件的是第三个分支 w_2. 又 $-i=\exp\left\{i\frac{3\pi}{2}\right\}$，故

$$w_2(-i)=\exp\left\{i\left(\frac{3\pi}{6}+\frac{4\pi}{3}\right)\right\}=\exp\left\{\frac{11\pi i}{6}\right\}$$

$$=\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-i).$$

依导数计算法则，有

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt[3]{z}}{\mathrm{d}z}=\frac{1}{3}z^{-2/3}=\frac{1}{3z}\sqrt[3]{z}.$$

值得注意的是，计算导数值时，上式两边的 $\sqrt[3]{z}$ 必须取同一分支，即有

$$w_2'(-i)=\frac{w_2(-i)}{3(-i)}=\frac{1}{6}(1+\sqrt{3}i).$$

注　一般说来，取定支割线后，只要给定多值函数的某个分支在割开了的区域内一点的值，或者给出了分支在支割线一岸(上岸或下岸)的值，就可以根据辐角的连续变化来确定该分支在其它点的值. 对本题也可以先计算出 $\sqrt[3]{i}$ 的三个值：

$$\exp\left\{i\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right\},k=0,1,2.$$

当 $k=2$ 时，有

$$\exp\left\{i\frac{3\pi}{2}\right\}=-i.$$

所以，题中所指定的分支的表达式可以写成

$$w=\sqrt[3]{|z|}\exp\left\{i\frac{\arg z}{3}\right\},4\pi<\arg z<6\pi.$$

在 $4\pi<\arg z<6\pi$ 这个范围内，有 $\arg(-i)=4\pi+\frac{3}{2}\pi$，所以

$$w(-i)=\exp\left\{i\frac{11\pi}{6}\right\}.$$

6.3.2　试证明函数 $f(z)=\sqrt{z^2-a^2}$ (a 为正常数)在割去线段 $-a\leqslant z\leqslant a$ 的 z 平面上可以分出两个单值解析分支. 并求在支割线：$-a\leqslant z\leqslant a$ 的上沿取值为 $-bi(b>0)$ 的那支在点 $z=2a$ 处的一阶及二阶导数的值.

证　先求函数

$$f(z)=\sqrt{|z^2-a^2|}\times\exp\left\{i\frac{\operatorname{Arg}(z-a)+\operatorname{Arg}(z+a)}{2}\right\}\qquad ①$$

的支点. 对于任何 $z_0\neq -a,a,\infty$，作 z_0 的充分小的邻域，使点 $-a,a$ 及 ∞ 都不在此邻域内. 在此邻域内作一条包含点 z_0 的简单闭曲线 C，对 C 上的一点 z，先分别选取 $\operatorname{Arg}(z-a)$ 及 $\operatorname{Arg}(z+a)$ 的值为 φ_1 及 φ_2. 当 z 沿曲线 C 的正向绕行一周回到出发点时，φ_1 及 φ_2 都不变，因而函数值也不变，故 z_0 不是 $f(z)$ 的支点.

再任作一条内部包含点 a(但不包含点 $-a$，也不通过点 $-a$)的简单闭曲线 C_1，对 C_1 上任一点 z，以 φ_1 及 φ_2 分别表示 $\operatorname{Arg}(z-a)$ 及 $\operatorname{Arg}(z+a)$ 的某特定的值. 则当 z 沿 C_1 的正向绕行一周时(图 6.3)，φ_1 将增加 2π，φ_2 未改变. 所以，由①式可知，$f(z)$ 的辐角将增加

$$\frac{2\pi+0}{2}=\pi.$$

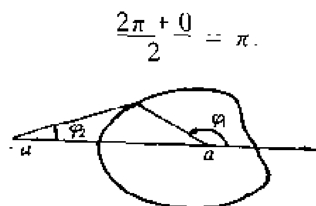


图 6.3

因而函数 $f(z)$ 的值要改变一个因子 $e^{i\pi}=-1$. 这说明 a 是 $f(z)$ 的支点.

同理，$-a$ 是 $f(z)$ 的支点.

对于 ∞ 点的邻域 $|z|>a$ 内任一闭曲线 C，在 C 内必含点 $-a$ 及 a，当 z 沿 C 的正向运行一周时，φ_1 及 φ_2 各获得增量 2π. 因而 $f(z)$ 的辐角增加

$$\frac{2\pi+2\pi}{2}=2\pi.$$

结果只是原来的函数值乘以 $e^{i2\pi}=1$，因而函数值未变，即 ∞ 点不是 $f(z)$ 的支点.

由于 $f(z)$ 只有支点 $-a$ 及 a，所以，在割去线段 $[-a,a]$ 的平面上能分出它的两个单值解析分支. 其一阶及二阶导数为

$$f'(z)=\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}=\frac{z}{f(z)},\qquad ②$$

$$f''(z)=\frac{1}{f(z)}-\frac{zf'(z)}{f^2(z)}$$

$$=\frac{1}{f(z)}-\frac{z^2}{f^3(z)}.\qquad ③$$

再提请读者注意，计算导数值时，两边必须取同一分支. 下面计算题中指定的分支在 $z=2a$ 处的值. 对于这一支，若规定在割线 $[-a,a]$ 的上沿，

$$\arg(z-a)=\pi, \arg(z+a)=2\pi,$$

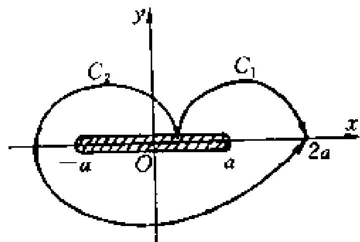


图 6.4

则

$$f(z)=\sqrt{|z^2-a^2|}e^{i3\pi/2}$$

$$=-\sqrt{|z^2-a^2|}i\ (-a<z<a).$$

这表明上述对支割线上沿辐角的规定，符合题目的要求. 当 z 沿图 6.4 中的曲线 C_1，从 $(-a,a)$ 的上沿变到点 $2a$ 时，$\arg(z-a)$ 变化 $-\pi$，$\arg(z+a)$ 不变. 因而对这一支在 $z=2a$ 有

$$\arg(z-a)=0, \arg(z+a)=2\pi.$$

所以在 $z=2a$ 处，$\arg f(z)=\frac{0+2\pi}{2}=\pi$. 所以

$$f(2a)=\sqrt{|z^2-a^2|}e^{\pi i}\Big|_{z=2a}=-\sqrt{3}a.$$

再由②式及③式，得

$$f'(2a)=-\frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$f''(2a)=-\frac{1}{\sqrt{3}a}-\frac{4a^2}{-3\sqrt{3}a^3}=\frac{1}{3\sqrt{3}a}.$$

注 (1) 若 z 沿图 6.4 中的曲线 C_2，从割线的上沿变到点 $2a$ 时，$\arg(z+a)$ 变化 2π，$\arg(z-a)$ 变化 π，因而在 $z=2a$ 处，$\arg f(z)=\frac{2\pi+4\pi}{2}=3\pi$. 仍然是

$$f(2a)=\sqrt{|z^2-a^2|}e^{i3\pi}\Big|_{z=2a}=-\sqrt{3}a.$$

(2) 从本题的证明可以看出：若 $P(z)$ 是一个多项式，则多值函数 $f(z)=\sqrt[n]{P(z)}$ 的所有支点的集合 $\subset\{z: P(z)=0$ 或 $\infty\}$. 对本题，∞ 不是支点.

6.3.3 证明：把 z 平面适当割开后，能分出 $f(z)=\sqrt[3]{z(1-z)}$ 的三个单值解析分支，并求出在点 $z=2$ 取负值的那个分支在 $z=i$ 的值.

证 $f(z)$ 的可能支点是 $0,1$ 及 ∞. 仿照 6.3.2 的方法，易知 $0,1$ 都是支点. 在 ∞ 点的邻域 $|z|>1$ 内任作一简单闭曲线 C，则点 0 及 1 都在 C 的内部. 当 z 沿 C 的正向运行一周时，z 及 $1-z$ 的辐角都获得增量 2π，从而 $z(1-z)$ 的辐角增加 4π，$\sqrt[3]{z(1-z)}$ 的辐角增加 $\frac{4\pi}{3}$. 所以，函数值将发生变化（变化一个因子 $e^{i4\pi/3}\neq1$），即 ∞ 是 $f(z)$ 的支点.

取实轴上的射线 $(-\infty,1]$ 为支割线，在沿支割线割开的 z 平面 G 内就可以分出 $f(z)$ 的三个单值解析分支.

令 $z=r_1e^{i\varphi_1}$，$1-z=r_2e^{i\varphi_2}$，则

$$f_k(z)$$

$$=\sqrt[3]{r_1(z)r_2(z)}\exp\left\{i\frac{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+2k\pi}{3}\right\}$$

$$(z\in G, k=0,1,2).$$

当 $z=2$ 时，$r_1=2, r_2=1$. 若取 $\varphi_1=0, \varphi_2=\pi$，则

$$f_k(2)=\sqrt[3]{2}\exp\left\{i\frac{(2k+1)\pi}{3}\right\}(k=0,1,2).$$

当且仅当 $k=1$ 时，$f_k(2)$ 取负值. 故所取分支为

$$f_1(z)$$

$$=\sqrt[3]{r_1(z)r_2(z)}\exp\left\{i\frac{\varphi_1(z)+\varphi_2(z)+2\pi}{3}\right\}.$$

由上述 $\varphi_1(2)$ 及 $\varphi_2(2)$ 的取法，有 $\varphi_1(i)=\frac{\pi}{2}$，$\varphi_2(i)=\frac{7\pi}{4}$，所以

$$f_1(i)=\sqrt[3]{|i|\cdot|1-i|}\exp\left\{i\frac{\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}\right\}$$

$$=-\sqrt[6]{2}e^{i5\pi/12}.$$

6.3.4 取实轴上的线段 $0\leqslant x\leqslant1$ 作支割线，在所得区域内取定函数

$$f(z)=\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{2z}\ (-1<p<2)$$

的一个单值解析分支，已知此分支在割线上沿取实数值. 试求这一支在 $\pm i$ 处的值.

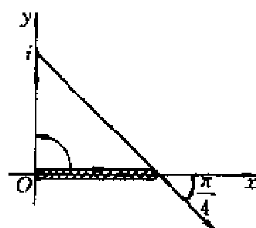


图 6.5

解 以 $f(z)$ 表示题设的那个分支. 若规定在割线 $0\leqslant x\leqslant1$ 的上沿有

$$\arg z=0,$$

$$\arg(1-z)=0,$$

则 $f(z)$ 在割线的上沿取实数值. 于是，由图 6.5 及上述对割线上沿辐角的规定，有

$$\arg i=\frac{\pi}{2}, \arg(1-i)=-\frac{\pi}{4}.$$

从而

$$\ln i=\frac{\pi}{2}i, \ln(1-i)=\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}i.$$

再由一般幂函数的定义，得

$$f(i)=\frac{i^{1-p}(1-i)^p}{2i}=\frac{1}{2i}e^{(1-p)\ln i}e^{p\ln(1-i)}$$

$$=\frac{1}{2i}\exp\left\{\frac{\pi i}{2}(1-p)\right\}\cdot\exp\left\{p\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi i}{4}\right)\right\}$$

$$=2^{\frac{p}{2}-1}e^{-\frac{3}{4}p\pi i}.$$

同样,由

$$\arg(-i) = \frac{3\pi}{4}i,\ \arg[1-(-i)] = \frac{\pi i}{4}$$

得

$$f(-i) = 2^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{5}{4}n\pi i}.$$

注 从以上几个题可见,解决多值函数的问题,先要求出它的全部支点,并取定支割线.在计算多值函数的单值解析分支在指定点 z_0 的值时,要根据取定的辐角求出 z_0 及有关的一些点的辐角,这在计算中是很容易出错的.

6.3.5 研究函数 $f(z) = \mathrm{Ln}\dfrac{z+1}{z-1}$ 在 $z=\infty$ 处的解析性.

解 由于对数函数 $\mathrm{Ln}z$ 的支点是 0 及 ∞,因而 $f(z)$ 的可能支点是使 $\dfrac{z+1}{z-1}$ 为 0 或 ∞ 的点,即 -1 及 1.以 θ_1 及 θ_2 表示 $\mathrm{Arg}(z+1)$ 及 $\mathrm{Arg}(z-1)$ 的选定的值,则

$$f(z) = \mathrm{Ln}\frac{z+1}{z-1} = \mathrm{Ln}(z+1) - \mathrm{Ln}(z-1)$$
$$= \ln|z+1| - \ln|z-1| + i(\theta_1 - \theta_2)$$

在 $z=1$ 的邻域 $|z-1|<1$ 内任作包含点 1 的简单闭路 l,沿 l 的正向绕行一周,θ_2 增 2π,θ_1 未改变,因而 $f(z)$ 的值增加 $-2\pi i$.所以,1 是 $f(z)$ 的支点.同样,-1 是 $f(z)$ 的支点.这样,$f(z)$ 在割去实轴上的线段 $[-1,1]$ 的 z 平面上可以分出无穷多个单值解析分支.任取一个确定的分支,对这个分支(仍用 $\mathrm{Ln}z$ 表示)有

$$g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}.$$

显然,$g(z)$ 在 $z=0$ 解析,从而 $f(z)$ 的每个分支都在 ∞ 处解析(参看 6.1.7).

6.3.6 试将函数 $w = \mathrm{Arcsin}z$ 用对数表示.

解 依定义 $w = \mathrm{Arcsin}z$ 是 $\sin z$ 的反函数.于是

$$z = \sin w = \frac{1}{2i}(e^{iw} - e^{-iw}),$$

故

$$(e^{iw})^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0.$$

解之得

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}.$$

所以

$$w = -i\mathrm{Ln}(iz + \sqrt{1-z^2}).$$

这里我们没有像平常解二次方程时,在根号前添加 $\pm$ 号,是因为把根式理解为双值的.

注 用同样的方法可以把其它几个复反三角函数 $\mathrm{Arccos}z$, $\mathrm{Arctg}z$, $\mathrm{Arcctg}z$ 及复反双曲函数 $\mathrm{Arcsh}z$, $\mathrm{Arcch}z$, $\mathrm{Arcth}z$, $\mathrm{Arccth}z$ 等都用对数表示出来.

6.3.7 说明 e^{1+i} 分别作为指数函数 $f(z) = e^z$ 在 $z = 1+i$ 的值和一般幂函数 $g(z) = z^{1+i}$ 在 $z = e$ 的值是不同的.

解 e^{1+i} 作为 $f(z)$ 在 $1+i$ 的值是单值的,即

$$f(1+i) = e(\cos 1 + i\sin 1).$$

而 e^{1+i} 作为 $g(z)$ 在 $z=e$ 的值是无穷多值的,有

$$g(e) = \exp\{(1+i)\mathrm{Ln}e\}$$
$$= \exp\{(1+i)(1+2k\pi i)\}$$
$$= e^{1-2k\pi}(\cos 1 + i\sin 1),$$
$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots,$$

只有 $k=0$ 时两者相同.

6.3.8 试问在复数域中 $(z^\alpha)^\beta$ 与 $z^{\alpha\beta}$ 是否相等,为什么?

解 设 $z = re^{i\theta}$,依一般幂函数的定义,有

$$z^\alpha = \exp\{\alpha\mathrm{Ln}z\}$$
$$= \exp\{\alpha\ln r + \alpha(\theta + 2k\pi)i\},$$
$$(z^\alpha)^\beta = \exp\{\beta\mathrm{Ln}z^\alpha\}$$
$$= \exp\{\alpha\beta\ln r + \alpha\beta(\theta + 2k\pi)i + 2n\beta\pi i\},$$

而

$$z^{\alpha\beta} = \exp\{\alpha\beta\mathrm{Ln}z\}$$
$$= \exp\{\alpha\beta\ln r + \alpha\beta(\theta + 2m\pi)i\},$$

这里 k,n,m 都是任意整数.由此可见,当且仅当

$$2\alpha\beta k\pi + 2n\beta\pi - 2m\alpha\beta\pi = 2l\pi\ (l\ 为整数)$$

即 $k\alpha\beta + n\beta - m\alpha\beta$ 为整数时,$(z^\alpha)^\beta$ 与 $z^{\alpha\beta}$ 相等.因而两者一般不相等.

§6.4 复积分

复积分是研究复函的一个重要工具,解析函数的一些表面上只与微分有关的性质(如解析函数的高阶导数的存在性等)都是利用复积分证明的.这是复函在方法论上的一个显著特点.本节主要讨论复积分的计算及估计.

6.4.1 利用定义计算

$$I = \int_C \frac{1}{z-a}\mathrm{d}z,\ C: |z-a| = \rho.$$

这里及以后约定,沿闭路的积分都是按正向(即逆时针方向)取的.

解 被积函数 $\dfrac{1}{z-a}$ 在曲线 C 上连续,故所给积分存在.这样就可以对曲线 C 作特殊的分割来计算.

把 C 分成 n 个相等的弧段,分点按正向依次排列为

$$z_0 = a+\rho,\ z_1 = a+\rho e^{i2\omega},\ z_2 = a+\rho e^{i4\omega},$$
$$\cdots,\ z_{n-1} = a+\rho e^{i2(n-1)\omega},\ z_n = a+\rho,$$

这里 $\omega = \dfrac{\pi}{n}$.取弧段 $\widehat{z_kz_{k+1}}$ $(k = 0,1,\cdots,n-1)$ 的中

点 $\zeta_k = a + \rho e^{i(2k+1)\omega}$，则依定义有

$$I = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\zeta_k - a}\Delta z_k \quad (\Delta z_k = z_{k+1} - z_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\rho}e^{-i(2k+1)\omega}(e^{i2(k+1)\omega} - e^{i2k\omega})\rho$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}2i\sin\omega$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}2i\sin\frac{\pi}{n} = \lim_{n\to\infty}2in\sin\frac{\pi}{n}$$

$$= 2\pi i\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi i.$$

6.4.2　计算复积分通常有三种方法：

(1) 如果曲线 C 是用直角坐标方程给出，则可化成第二型曲线积分计算. 设 $f(z) = u + iv$，形式地记 $dz = dx + idy$，则

$$\int_C f(z)dz = \int_C (u + iv)(dx + idy)$$

$$= \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

(2) 若 C 用参数方程给出，设为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t)\ (\alpha \leqslant t \leqslant \beta),$$

则可用定积分计算：

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt.$$

(3) 利用留数计算：这将在 §6.8 中再讨论.

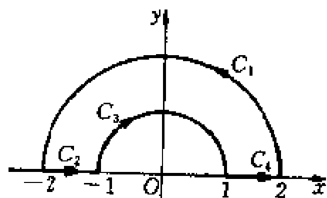


图 6.6

设曲线 C 是半圆环区域：$1 < |z| < 2, 0 < \arg z < \pi$ 的边界. 求积分 $\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz$.

解　如图 6.6，$C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$，这是 C_1 是大半圆周：$z = 2e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$；$C_2$ 是线段：$z = x(-2 \leqslant x \leqslant -1)$；$C_3$ 是小半圆周：$z = e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$；$C_4$ 是线段：$z = x(1 \leqslant x \leqslant 2)$. 计算 C_1 及 C_3 上的积分用参数方程较方便. 在 C_1 上有

$$z = 2e^{i\theta}, \bar{z} = 2e^{-i\theta}, dz = 2ie^{i\theta}d\theta,$$

故

$$\int_{C_1}\frac{z}{\bar{z}}dz = 2i\int_0^\pi e^{3i\theta}d\theta$$

$$= \frac{2i}{3i}e^{3i\theta}\Big|_0^\pi = -\frac{4}{3}.$$

同理

$$\int_{C_3}\frac{z}{\bar{z}}dz = i\int_\pi^0 e^{3i\theta}d\theta = \frac{2}{3}.$$

再用化成第二型曲线积分的方法，计算沿 C_2 及 C_4 上的积分. 在 C_2 上有

$$z = \bar{z} = x, dz = dx\ (因\ dy = 0),$$

故

$$\int_{C_2}\frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{-2}^{-1}dx = 1.$$

同理

$$\int_{C_4}\frac{z}{\bar{z}}dz = \int_1^2 dx = 1.$$

所以

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4} = \frac{4}{3}.$$

6.4.3　依下列各条件，分别计算积分

$$I = \int_C \frac{1}{\sqrt{z}}dz,$$

这里 C 是上半单位圆周(起点在 $z = 1$).

(1) 被积函数取 $\sqrt{1} = 1$ 的一支；

(2) 被积函数取 $\sqrt{1} = -1$ 的一支.

解　计算多值函数的积分，先要根据题设条件的分支，确定出积分路线的参数变化范围.

(1) 因 $\sqrt{1} = 1$，故上半平面的辐角变化范围应是 0 到 π. 在曲线 C 上 $z = e^{i\theta}(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$，则 $\sqrt{z} = e^{i\theta/2}$，$dz = ie^{i\theta}d\theta$，故

$$I = \int_0^\pi ie^{i\theta/2}d\theta = -2(1 - i).$$

(2) 因 $\sqrt{1} = -1$，上半平面的辐角变化范围应取 2π 到 3π，故

$$I = \int_{2\pi}^{3\pi} ie^{i\theta}d\theta = 2(1 - i).$$

注　本题还可用下面的方法求解. 如对 $\sqrt{1} = -1$ 的一支，作变量 $t = \sqrt{z}$，它把上半单位圆周 $C: |z| = 1, 2\pi \leqslant \arg z \leqslant 3\pi$ 映照成四分之一单位圆周 C_1：$|t| = 1, \pi \leqslant \arg t \leqslant \frac{3\pi}{2}$，且由 $t^2 = z$，得 $dz = 2tdt$，所以

$$I = \int_{C_1}\frac{2t}{t}dt = 2\int_{C_1}dt.$$

因被积函数 $f(t) = 1$ 在 t 平面上解析，$F(t)$ 是它的一个原函数，故

$$I = 2t\Big|_{-1}^{-i} = 2(1 - i).$$

6.4.4　对取定的 α，C 是从原点到点 $z = e^{i\alpha}$ 的直线段. 问 $\alpha(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$ 取哪些值时，积分

$$I = \int_C e^{-\frac{1}{z}}dz$$

存在.

解 由所设积分路线 C 是单位圆的一条半径,它的方程是:$z = re^{i\alpha}(0 \leqslant r \leqslant 1)$. 在 C 上有 $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\alpha} = \frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)$, $\mathrm{d}z = e^{i\alpha}\mathrm{d}r$. 于是,令 $\frac{1}{r} = r_1$,得

$$I = e^{i\alpha}\int_0^1 e^{-\frac{1}{r}(\cos\alpha - i\sin\alpha)}\mathrm{d}r$$
$$= e^{i\alpha}\int_1^{\infty} \frac{e^{-r_1\cos\alpha}}{r_1^2}e^{ir_1\sin\alpha}\mathrm{d}r_1. \qquad ①$$

当 $\cos\alpha \geqslant 0$,即 $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\left|\frac{e^{-r_1\cos\alpha}}{r_1^2}e^{ir_1\sin\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{r_1^2},$$

而积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{r_1^2}\mathrm{d}r_1$ 存在. 故此时原积分绝对收敛.

下面考虑 $\cos\alpha < 0$ 的情形. 令 $c = -\cos\alpha > 0$,则 ① 式右端积分(不计积分号外的因子)的实部为

$$I_1 = \int_1^{\infty} \frac{e^{cr_1}}{r_1^2}\cos(c_1r_1)\mathrm{d}r_1,$$

这里 $c_1 = \sin\alpha$. 不妨设 $c_1 > 0$,则令 $x = c_1r_1$,有

$$I_1 = c_1\int_{c_1}^{\infty} \frac{e^{\frac{c}{c_1}x}}{x^2}\cos x\mathrm{d}x.$$

在离原点任意远处,都存在区间 $[2n\pi - \frac{\pi}{3}, 2n\pi + \frac{\pi}{3}]$. 在这个区间上有 $\cos x \geqslant \frac{1}{2}$,于是

$$\int_{2n\pi-\frac{\pi}{3}}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\frac{c}{c_1}x}}{x^2}\cos x\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2}\int_{2n\pi-\frac{\pi}{3}}^{2n\pi+\frac{\pi}{3}} \frac{e^{\frac{c}{c_1}x}}{x^2}\mathrm{d}x \geqslant \frac{\pi}{3}.$$

这里的第二个不等式是由于当 n 充分大时,在积分区间上

$$\frac{e^{\frac{c}{c_1}x}}{x^2} \geqslant 1.$$

再由广义积分收敛的 Cauchy 准则知,积分 I_1 发散,即当 $\cos\alpha < 0$ 时,原积分 I 发散.

6.4.5 在复函的许多论证和计算中,常要对积分作估计. 其方法是基于长大不等式:设 $f(z)$ 是曲线 C 上的连续函数,则

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_C |f(z)|\mathrm{d}s \leqslant Ml.$$

这里第二个积分是实函数 $|f(z)|$ 的第一型曲线积分,l 是曲线 C 的长,$M = \max|f(z)|\ (z \in C)$.

在具体估计中,除了用到一些熟知的关于实数的不等式外,还要用到关于复数模的几个不等式,如:

$$|\mathrm{Re}z|\ (\text{或}\ |\mathrm{Im}z|) \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}z| + |\mathrm{Im}z|,$$
$$|z_1 \pm z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|,$$
$$|z_1 - z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||,$$
$$|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|.$$

设 $f(z)$ 在域 $D: |z| > R_0, 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha\ (0 < \alpha \leqslant 2\pi)$ 内连续,且存在极限

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A. \qquad ②$$

设 C_R 是位于 D 内的圆弧:$|z| = R, 0 \leqslant \arg z \leqslant \alpha$(起点在 $z = R$),证明:

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = iA\alpha.$$

证 首先有

$$\int_{C_R}\frac{1}{z}\mathrm{d}z = \int_0^{\alpha}\frac{1}{Re^{i\theta}}Re^{i\theta}i\mathrm{d}\theta = i\alpha.$$

由所设条件 ②,对任意 $\varepsilon > 0$,存在正数 K,当 $|z| > K$ 时,有

$$|zf(z) - A| < \varepsilon.$$

于是,当 $R > K$ 时,有

$$\left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - iA\alpha\right|$$
$$= \left|\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C_R}\frac{A}{z}\mathrm{d}z\right|$$
$$= \left|\int_{C_R}\frac{zf(z) - A}{z}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R}\cdot R\alpha$$
$$= \alpha\varepsilon.$$

结论得证.

注 用完全类似的方法可以证明下述结论:如果当 ρ 充分小时,$f(z)$ 在圆弧 $C_\rho: z = a + \rho e^{i\theta}\ (\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta)$ 上连续,且 $\lim_{z\to a}(z - a)f(z) = k$. 证明:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)\mathrm{d}z = i(\beta - \alpha)k.$$

这两个结论,在用留数计算定积分时常被当作定理使用.

6.4.6 设实数 $a \leqslant b$, $s = \sigma + it\ (\sigma, t \in R, \sigma > 0)$. 证明:

$$|e^{bs} - e^{as}| \leqslant (b - a)|s|e^{b\sigma}.$$

证 因为

$$s\int_a^b e^{s\tau}\mathrm{d}\tau = e^{s\tau}\Big|_a^b = e^{bs} - e^{as}.$$

所以

$$|e^{bs} - e^{as}| = \left|s\int_a^b e^{s\tau}\mathrm{d}\tau\right|$$
$$\leqslant |s|\int_a^b |e^{s\tau}|\mathrm{d}\tau.$$

由 $|e^{s\tau}| = |e^{\tau(\sigma + it)}| = e^{\tau\sigma}$ 及 $\sigma > 0$ 可见,当 $a \leqslant \tau \leqslant b$ 时,有 $|e^{s\tau}| \leqslant e^{b\sigma}$. 从而

$$|e^{bs} - e^{as}| \leqslant (b - a)|s|e^{b\sigma}.$$

6.4.7 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析,C 是 D 内以 a, b 为端点的直线段,证明存在复数 λ, $|\lambda| \leqslant 1$, 及点 $\zeta \in C$,使得

$$f(b) - f(a) = \lambda(b - a)f'(\zeta).$$

证 由于

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_{a,C}^{b} f'(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_{a,C}^{b} |f'(z)||\mathrm{d}z|,$$

又由 $|f'(z)|$ 在 C 上的连续性,必存在 $\zeta \in C$,使得

$$\int_{a,C}^{b} |f'(z)||\mathrm{d}z| = |f'(\zeta)||b - a|.$$

所以

$$|f(b) - f(a)| \leqslant |f'(\zeta)||b - a|.$$

如果 $f'(\zeta) = 0$,由上不等式得 $f(b) - f(a) = 0$,要证的等式显然成立.如果 $f'(\zeta) \neq 0$,令

$$\lambda = \frac{f(b) - f(a)}{f'(\zeta)(b - a)}$$

则

$$|\lambda| = \frac{|f(b) - f(a)|}{|f'(\zeta)(b - a)|} \leqslant 1,$$

且

$$f(b) - f(a) = \lambda f'(\zeta)(b - a).$$

*6.4.8 设 $f(\zeta)$ 是给定在一条简单曲线(封闭或不封闭)C 上的连续函数,对于任何不在曲线 C 上的点 z,定义函数列

$$F_n(z) = \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n}\mathrm{d}\zeta \ (n = 1,2,3,\cdots).$$

证明:对一切 n,$F_n(z)$ 在其定义域内解析,且

$$F_n'(z) = nF_{n+1}(z).$$

证 设 $z_0 \notin C$,适当地取 $\delta > 0$,使曲线 C 在圆 K: $|z - z_0| = 2\delta$ 的外部(图 6.7),则对于满足 $|z - z_0| < \delta$ 的点 z 及任何 $\zeta \in C$,有

$$|\zeta - z| > \delta.$$

图 6.7

于是,依定义有

$$\begin{aligned}
&|F_1(z) - F_1(z_0)| \\
&= \left|\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}\mathrm{d}\zeta\right| \\
&= |z - z_0| \cdot \left|\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta\right| \\
&\leqslant |z - z_0| \cdot \int_C \left|\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}\right| |\mathrm{d}\zeta|.
\end{aligned}$$

由于 $f(\zeta)$ 在 C 上连续,$|f(\zeta)|$ 在 C 上也连续,设 $M = \max|f(\zeta)|$ $(\zeta \in C)$,L 为曲线 C 的长.再注意到 $|\zeta - z_0| > 2\delta$,$|\zeta - z| > \delta$(设 z 满足 $|z - z_0| < \delta$),得

$$|F_1(z) - F_1(z_0)| \leqslant \frac{Ml}{2\delta^2}|z - z_0|.$$

所以

$$\lim_{z \to z_0} F_1(z) = F_1(z_0)$$

这就证明了 $F_1(z)$ 在 z_0 连续.

令 $f_1(\zeta) = \dfrac{f(\zeta)}{\zeta - z_0}$,易知 $f_1(\zeta)$ 在曲线 C 上连续,再令

$$G_1(z) = \int_C \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta \ (z \notin C), \qquad ③$$

则由前面的证明,有 $\lim\limits_{z \to z_0} G_1(z) = G(z_0)$(这即意味着 ③ 式中的积分可以在积分号下取极限).所以

$$\begin{aligned}
&\lim_{z \to z_0} \frac{F_1(z) - F_1(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(z - z_0)}\mathrm{d}\zeta \\
&= \lim_{z \to z_0} \int_C \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \lim_{z \to z_0} G_1(z) = G_1(z_0) \\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(z - z_0)^2}\mathrm{d}\zeta = F_2(z_0),
\end{aligned}$$

即 $$F_1'(z_0) = F_2(z_0).$$

故命题对 $n = 1$ 成立.

一般情形用归纳法证明.设命题对 $n = k$ 成立,依定义有

$$\begin{aligned}
&F_{k+1}(z) - F_{k+1}(z_0) \\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= (z - z_0)\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta \\
&\quad + \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta - \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= (z - z_0)G_{k+1}(z) + G_k(z) - G_k(z_0), \qquad ④
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
G_k(z) &= \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^k(\zeta - z_0)}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^k}\mathrm{d}\zeta, \\
G_k(z_0) &= \int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z_0)^k}\mathrm{d}\zeta. \\
G_{k+1}(z) &= \int_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

因

$$|G_{k+1}(z)| \leqslant \frac{Ml}{2\delta^{k+2}}|z - z_0|,$$

且由归纳假设知,$G_k(z)$ 在 z_0 连续(因 $f_1(\zeta)$ 在 C 上连续),即 $\lim\limits_{z \to z_0} G(z) = G(z_0)$,于是,在④式两边取极

限,有

$$\lim_{z\to z_0} F_{k+1}(z) = F_{k+1}(z_0). \quad ⑤$$

即 $F_{k+1}(z)$ 在 z_0 连续. 把 ① 改写成

$$\frac{F_{k+1}(z) - F_{k+1}(z_0)}{z - z_0}$$

$$= G_{k+1}(z) + \frac{G_k(z) - G_k(z_0)}{z - z_0}. \quad ⑥$$

由⑤ 类比知,$G_{k+1}(z)$ 在 z_0 连续, 又由归纳假设 $G_k'(z_0) = kG_{k+1}(z_0)$(这是对函数 $f_1(\zeta)$ 用的). 于是,⑥ 式两边令 $z \to z_0$ 取极限,得

$$F_{k+1}'(z_0) = (k+1)G_{k+1}(z_0)$$

$$= (k+1)\int_C \frac{f_1(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}}d\zeta$$

$$= (k+1)\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+2}}d\zeta$$

$$= (k+1)F_{k+2}(z_0).$$

故当 $n = k+1$ 时命题成立.

注 含参变量 z 的积分

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta$$

称为 Cauchy 型积分,这里 C 是题中所述曲线. 本题是解析函数论中的一个重要结论.

§6.5 利用重要定理解题

解析函数是一类有着良好性质的函数,首先是 Cauchy 积分定理和 Cauchy 积分公式,它们的最一般形式是:

Cauchy 积分定理 设 D 是以一条或有限多条简单闭曲线 C 为边界的区域,$f(z)$ 在 D 内解析,在闭区域 $\overline{D} = C + D$ 内连续,则

$$\int_C f(z)dz = 0 \quad ①$$

这里 C 取观察者在其上行进时,区域当总在其左边的方向,即边界 C 的正向.

当 D 是多连通域,它的边界是复闭路 $C = C_0 + C_1^- + C_2^- + \cdots + C_n^-$(图 6.8,这里 C_i^- 指相对于 C_i 所围区域为负向),则 ① 式成为

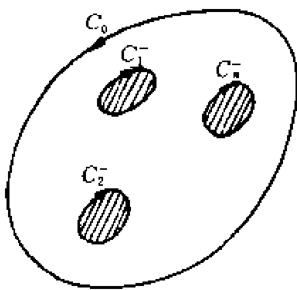


图 6.8

$$\int_{C_0} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \cdots + \int_{C_n} f(z)dz.$$

Cauchy 积分公式 设 $f(z)$ 满足 Cauchy 积分定理中的条件,则对于区域 D 内任一点 z,$f(z)$ 有任意阶导数,且有下面两个公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}dz;$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, n = 1,2,\cdots.$$

利用 Cauchy 积分公式,可以推出关于解析函数的许多重要定理,解题时较常用的有:

Cauchy 不等式 设 $f(z)$ 在圆域 $D: |z-a| < R$ 内解析,在闭圆域 $\overline{D}$ 内连续,则

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!M(R)}{R^n}, \ n = 1,2,\cdots.$$

这里 $M(R) = \max\limits_{|z-a|=R}|f(z)|$.

在利用 Cauchy 不等式作估计时,若能选取适当的 R,使 $M(R)R^{-n}$ 尽可能小,就能得到最佳估计(参看 6.5.4).

最大模原理 1. 若 $f(z)$ 在域 D 内解析,且 $f(z)$ 不为常数,则它的模 $|f(z)|$ 在 D 内取不到最大值.

2. 若 $f(z)$ 在有界域 D 内解析,在闭域 $\overline{D} = C + D$ 上连续,且 $f(z)$ 不为常数,则 $f(z)$ 只能在边界 C 上取得整个闭域 $\overline{D}$ 上的最大值.

Liouville 定理 如果整函数(即在全平面解析的函数)在全平面上有界,则 $f(z)$ 必为常数.

Morera 定理 如果 $f(z)$ 在单连通域 D 内连续,且对 D 内的任意闭路 C,有

$$\int_C f(z)dz = 0,$$

则 $f(z)$ 在 D 内解析.

6.5.1 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z| \leqslant 1$ 内解析,且 $f(0) = 1$.

(1) 证明:$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\{2 \pm (z + \frac{1}{z})\}\frac{f(z)}{z}dz = 2 \pm f'(0)$;

(2) 证明:$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = \pi + \frac{\pi}{2}f'(0)$,

$$\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = \pi - \frac{\pi}{2}f'(0).$$

证 (1) 由 Cauchy 定理及 Cauchy 积分公式,得

$$原式 = \frac{1}{2\pi i}[2\int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z}dz \pm \int_{|z|=1} f(z)d\theta \pm \int_{|z|=1}\frac{f(z)}{z^2}dz]$$

$$= 2f(0) \pm 0 \pm f'(0) = 2 \pm f'(0).$$

(2) 因 $z = e^{i\theta}, dz = ie^{i\theta}d\theta$,故

$$2 \pm f(0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\{2 \pm (z + \frac{1}{z})\}\frac{f(z)}{z}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\{2 + (e^{i\theta} + e^{-i\theta})\}f(e^{i\theta})id\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})(2 \pm 2\cos\theta)d\theta$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta \ (\text{取} + \text{号时}), \\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta \ (\text{取} - \text{号时}). \end{cases}$$

两边乘以$\frac{\pi}{2}$ 即得要证的两个等式.

6.5.2 设 $f(z)$ 在圆域: $|z-a|<R$ 内解析,试证明对任何 $r(0<r<R)$ 都有

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(a+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}d\theta.$$

证 从欲证的等式的形式看,用 Cauchy 积分公式把 $f'(a)$ 用积分表示是解本题的入手点. 在圆周 C: $|z-a|=r$上,有 $z=re^{i\theta}(0\leqslant\theta<2\pi)$,并令 $f(a+re^{i\theta}) = u(r,\theta)+iv(r,\theta)$,则

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^2}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u+iv)e^{-i\theta}d\theta. \qquad ②$$

为了把 ② 式右端积分的被积函数 v 消去,应用 Cauchy 积分定理,有

$$0 = \int_C f(z)dz = ir\int_0^{2\pi}(u+iv)e^{i\theta}d\theta = 0.$$

两边乘以$\frac{1}{2\pi r^2 i}$ 后再取共轭,得

$$\frac{1}{2\pi r}\int_0^{2\pi}(u-iv)e^{-i\theta}d\theta = 0. \qquad ③$$

② 式和 ③ 式相加,得

$$f'(a) = \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}u(r,\theta)e^{-i\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi r}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\{f(a+re^{i\theta})\}e^{-i\theta}d\theta.$$

6.5.3 设 $f(z)$ 是整函数,如果对于某个正整数 n,有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(z)}{z^n} = 0.$$

则 $f(z)$ 是一个次数不超过 $n-1$ 次的多项式.

证 显然, 我们只要证明对一切复数 z, 有 $f^{(n)}(z)=0$ 即可.

由所设知,对任意 $\varepsilon>0$,存在 $R>0$,当 $|z|>R$ 时,有

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right| \leqslant \varepsilon,$$

即 $\quad |f(z)| \leqslant \varepsilon|z|^n$.

对任何复数 z,取充分大的正数 R_1,使 $|z|\leqslant R_1$,且使圆周 $|\zeta|=R$ 被包含在圆周C: $|\zeta - z| = R_1$ 的内部(即对圆周 C 上的所有点ζ,有 $|\zeta|>R$).

于是,对任意 $\zeta\in C$,有

$$|f(\zeta)| \leqslant \varepsilon|\zeta|^n \leqslant \varepsilon(|z|+R_1)^n,$$

从而

$$\max_{\zeta\in C}|f(\zeta)| \leqslant \varepsilon(|z|+R_1)^n.$$

再应用 Cauchy 不等式,得

$$f^{(n)}(z) \leqslant \frac{n!}{R_1^n}\varepsilon(|z|+R_1)^n = n!\varepsilon(1+\frac{|z|}{R_1})^n$$

$$\leqslant n!2^n\varepsilon.$$

由于 n 是确定的自然数且ε 可任意小,故 $f^{(n)}(z)=0$.

6.5.4 设 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内解析,且

$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|}(|z|<1),$$

求证: $|f^{(n)}(0)| < (n+1)!e$.

证 对任意 $r(0<r<1)$,由 Cauchy 不等式,有

$$f^{(n)}(0) \leqslant \frac{n!}{1-r}r^{-n}. \qquad ④$$

下面求函数 $g(r) = \frac{r^{-n}}{1-r}$ 的最小值. 由

$$g'(r) = \frac{r^{-n}}{(1-r)^2} - nr^{-(n+1)}\frac{1}{1-r}$$

$$= \frac{r^{-n} - n(1-r)r^{-(n+1)}}{(1-r)^2} = 0,$$

即

$$r - n(1-r) = 0.$$

解得

$$r_0 = \frac{n}{n+1}.$$

由于 r_0 是区间$(0,1)$ 内唯一驻点,故 $g(r)$ 的最小值是

$$g(r_0) = (n+1)(1+\frac{1}{n})^n < (n+1)e.$$

于是,由 ④ 式得

$$|f^{(n)}(0)| < (n+1)!e.$$

6.5.5 证明:不存在这样的函数,它在闭单位圆 $|z|\leqslant 1$ 内解析,且在单位圆周 C 上的值为$\frac{1}{z}$.

证法 1 假设存在满足题设条件的函数, 则由 Cauchy 积分定理,有

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

但因在 C 上,$f(z)=\frac{1}{z}$,又有

$$\int_C f(z)dz = \int_C\frac{1}{z}dz = 2\pi i.$$

这就导致矛盾.

证法 2 仍设存在满足要求的函数,则对于单位圆内任一点 $z\neq 0$,由 Cauchy 积分公式,有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1/\zeta}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{z}\left(\int_C\frac{1}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta-\int_C\frac{1}{\zeta}\mathrm{d}\zeta\right)$$
$$=\frac{1}{2\pi zi}(2\pi i-2\pi i)=0.$$

即 $f(z)=0(|z|<1)$，再由连续性，得 $f(z)\equiv 0$ $(|z|\leqslant 1)$. 这与 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 时为 $\frac{1}{z}$ 相矛盾.

6.5.6 设 $f(z)$ 是整函数，且存在常数 M，使对一切复数 z，有 $\mathrm{Re}f(z)<M$. 求证：$f(z)$ 为常数.

证 令 $F(z)=e^{f(z)}$. 则 $f(z)$ 是整数. 又对一切复数 z，由题设有

$$|F(z)|=e^{\mathrm{Re}f(z)}<e^M.$$

即 $F(z)$ 在全平面内有界. 由 Liouville 定理，$F(z)$ 恒为常数. 从而，$f(z)$ 为常数.

6.5.7 设 $f(z)$ 在简单闭路 C 上及其内部解析，在 C 上 $|f(z)|=M$（M 为正常数）. 试证明：若 $f(z)$ 不是常数，则在 C 的内部存在点 z_0，使 $f(z_0)=0$.

证 记 C 所围闭区域为 $\overline{D}=C+D$，由最大模原理，当 $z\in\overline{D}$ 时，有 $|f(z)|\leqslant M$. 若对任意 $z\in D$，$f(z)\neq 0$，则 $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 也在 $\overline{D}$ 内解析. 再由最大模原理，对任意 $z\in\overline{D}$，有

$$|g(z)|=\left|\frac{1}{f(z)}\right|\leqslant\max_{z\in C}\frac{1}{|f(z)|}=\frac{1}{M}.$$

从而

$$|f(z)|\geqslant M.$$

所以 $|f(z)|=M$. 再由 6.2.2 所证结论，得 $f(z)$ 恒为常数. 这就导致矛盾.

6.5.8 证明 Schwarz 引理：若函数 $f(z)$ 在圆域 $|z|<1$ 内解析，且满足 $f(0)=0$，$|f(z)|\leqslant 1$，则在圆 $|z|<1$ 内，有

$$|f(z)|\leqslant|z|, \tag{5}$$

且

$$|f'(0)|\leqslant 1. \tag{6}$$

如果 ⑥ 式成立等号，或者在单位圆内存在一点 $z_0\neq 0$，使 ⑤ 式成立等号，则

$$f(z)=e^{i\theta}z,$$

这里 θ 是实常数.

证 考虑函数

$$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}\ (0<|z|<1).$$

由所设 $\varphi(z)$ 在去心圆 $0<|z|<1$ 内解析. 又由所设有

$$\lim_{z\to 0}\varphi(z)=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z-0}=f'(0),$$

故 $z=0$ 是 $\varphi(z)$ 的可去奇点. 补充定义 $\varphi(0)=f'(0)$，则 $\varphi(z)$ 在圆 $|z|<1$ 内解析.

在圆周 $|z|=r<1$ 上，有

$$|\varphi(z)|=\left|\frac{f(z)}{z}\right|\leqslant\frac{1}{r}.$$

由最大模原理，这个不等式在闭圆 $|z|\leqslant r$ 内成立. 令 $r\to 1$ 取极限，得

$$|\varphi(z)|\leqslant 1\ (|z|<1),$$

即 ⑤ 式和 ⑥ 式成立.

若 $|f'(0)|=1$，即 $|\varphi(0)|=1$；若存在一点 $z_0(0<|z_0|<1)$，使 $|f(z_0)|=|z_0|$，即 $|\varphi(z_0)|=1$. 这两种情形，都使 $\varphi(z)$ 在 $|z|<1$ 内的某点达最大值，由最大模原理，$\varphi(z)$ 为常数，从而 $\varphi(z)=e^{i\theta}$（θ 为实常数），即 $f(z)=e^{i\theta}z$.

6.5.9 设 $f(z)$ 在闭圆 $|z|\leqslant R$ 内解析，证明：

(1) 对圆域 $|z|<R$ 内任一点 z，有

$$\frac{R^2-|z|^2}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{(R^2-\bar{z}\zeta)(\zeta-z)}\mathrm{d}\zeta$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\bar{z}\zeta}\right]f(\zeta)\mathrm{d}\zeta=f(z) \tag{7}$$

这里 C 是取正向的圆周 $|z|=R$.

(2) 令 $z=re^{i\varphi}$，$\zeta=Re^{i\theta}(r<R)$，有

$$f(z)=\frac{R^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{i\theta})}{R^2-2Rr\cos(\theta-\varphi)+r^2}\mathrm{d}\theta. \tag{8}$$

证 (1) 通分得

$$\frac{1}{\zeta-z}+\frac{\bar{z}}{R^2-\bar{z}\zeta}=\frac{R^2-\bar{z}\zeta+\zeta\bar{z}-|z|^2}{(\zeta-z)(R^2-\bar{z}\zeta)}$$
$$=\frac{R^2-|z|^2}{(\zeta-z)(R^2-\bar{z}\zeta)}.$$

故 ⑦ 式中前一等式成立.

若 $z=0$，⑦ 的后一等式成为

$$f(0)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta}\mathrm{d}\zeta,$$

这由 Cauchy 积分公式立得.

若 $z\neq 0$，因 $|z|<R$，故由 Cauchy 积分公式，有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=f(z). \tag{9}$$

又

$$I=\int_C\frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2-\bar{z}\zeta}\mathrm{d}\zeta=-\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-(R^2/\bar{z})}\mathrm{d}\zeta,$$

因 $|z|<R$，故 $|R^2/\bar{z}|>R$，从而 $\frac{f(\zeta)}{\zeta-(R^2/\bar{z})}$ 在圆域 $|\zeta|\leqslant R$ 内解析，故 $I=0$. 即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\bar{z}f(\zeta)}{R^2-\bar{z}\zeta}\mathrm{d}\zeta=0. \tag{10}$$

⑨ 式和 ⑩ 式相加，即得 ⑦ 的后一等式.

(2) 当 $z=re^{i\varphi}$，$\zeta=Re^{i\theta}$ 时，有 $\zeta\bar{\zeta}=R^2$、$\bar{\zeta}=\frac{R^2}{\zeta}$，故

$$(\zeta-z)(R^2-\bar{z}\zeta)=\zeta(\zeta-z)(\bar{\zeta}-\bar{z})$$

$$= \zeta \cdot |\zeta - z|^2$$
$$= Re^{i\theta}[R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2].$$

最后一个等式是应用余弦定理而得. 又

$$d\zeta = iRe^{i\theta}d\theta,$$
$$f(\zeta) = f(Re^{i\theta}),$$

将以上结果应用于

$$f(z) = \frac{R^2 - |z|^2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(R^2 - \bar{z}\zeta)}d\zeta,$$

即得 ⑧ 式.

注 设 $u(x,y)$ 是闭圆$\overline{D}$: $|z| \leqslant R$ 内的调和函数, 于是存在$\overline{D}$ 内的解析函数$f(z)$, 使 $u(x,y) = \mathrm{Re}f(z)$. 对这个 $f(z)$⑧ 式成立. 再在 ⑧ 式两边取实部, 即得用调和函数的边界值表示其内部值的 Poisson 公式

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(R,\theta)\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi) + r^2}d\theta,$$

这里 $u(r,\theta) = u(x,y) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$, $u(R,\theta) = u(R\cos\theta, R\sin\theta)$, $0 \leqslant r < R$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. 许多关于调和函数的命题, 都可以用上述方法, 通过解析函数来证明.

6.5.10 证明下述定理(无界区域的 Cauchy 积分公式): 设 $f(z)$ 在闭路 C 及其外部区域D 内解析, 且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z) = A \neq \infty$. 则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} -f(z) + A, & z \in D; \\ A, & z \in C \text{ 的内部区域} D_1. \end{cases}$$

证 (1) 当 $z \in D$ 时, 以充分大的 R 为半径作圆 Γ: $|z| = R$, 使点 z 在复闭路 $L = \Gamma + C^-$ 的内部(图 6.9). 由复闭路的 Cauchy 积分公式, 有

图 6.9

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \quad ⑪$$

下面证明:

$$\lim_{R\to+\infty}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i A. \quad ⑫$$

事实上, 因 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z) = A$, 故对任意 $\varepsilon > 0$, 存在正数 R, 当 $|z| \geqslant R$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$. 又注意到

$$\int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z}d\zeta = 2\pi i.$$

所以

$$\left|\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - 2\pi i A\right| = \left|\int_\Gamma \frac{f(\zeta) - A}{\zeta - z}d\zeta\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{R - |z|}2\pi R.$$

⑫ 式得证.

在 ⑪ 式两边令 $R \to +\infty$ 取极限, 利用 ⑫ 式并移项得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = -f(z) + A.$$

(2) 当 $z \in D_1$ 时, 由 Cauchy 积分定理, 有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0,$$

即

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

令 $R \to +\infty$ 取极限, 得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = A.$$

§6.6 复级数

复数项级数及复函数项级数的收敛性的讨论是基于实数项级数(特别是正项级数)的有关判别法. 解析函数有两种无穷级数展开式:

(1) 设 $f(z)$ 在点 a 解析, 则 $f(z)$ 在 a 点的某邻域 K: $|z - a| < R$ 内可展开成 Taylor 级数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(z - a)^n \ (n = 0,1,2\cdots), \quad ①$$

这里

$$a_n = \frac{1}{n!}f^{(n)}(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta,$$

C 是圆K 内任何包含点a 的简单闭曲线. 幂级数 ① 的收敛半径

R = {a 到离 a 最近的 $f(z)$ 的奇点的距离} ②

(2) 设点 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $f(z)$ 在去心邻域 D: $0 < |z - a| < R$ 内可展开成 Laurent 级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z - a)^n,$$

这里

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}}d\zeta \ (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots),$$

C 是D 内任何包含a 点的简单闭路, R 亦可由 ② 式确定.

6.6.1 试证明: 当 z 是实数时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin z}{n^2}$ 绝对收敛; 当 z 不是实数时, 此级数发散.

证 当 z 是实数时, 对各 n 有

$$\left|\frac{\sin z}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

由于调和级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛，故由比较判别法，所给级数绝对收敛. 若$n$不是实数，令$z=x+iy(y\neq 0)$，则由

$$\sin nz=\frac{1}{2i}(e^{inz}-e^{-inz})$$
$$=\frac{1}{2i}(e^{-ny}e^{inx}-e^{ny}e^{-inx})$$

得

$$\left|\frac{\sin nz}{n^2}\right|\geqslant\frac{1}{2n^2}(e^{-ny}-e^{ny})\to\infty\ (n\to\infty).$$

故所给级数发散.

6.6.2 讨论函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$的收敛情况.

解 令$u_n(z)=\frac{z^n}{1-z^n}$，则

$$\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}=\frac{z(1-z^n)}{1-z^{n+1}}.$$

由此可见，由于当$|z|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}z^n=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right|=|z|<1.$$

由正项级数的Dalambert判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$收敛，即所给级数绝对收敛.

若$|z|\geqslant 1$，由于

$$|u_n(z)|\geqslant\frac{|z|^n}{1+|z|^n},$$

而当$n\to\infty$时，

$$\frac{|z|^n}{1+|z|^n}\to\begin{cases}\frac{1}{2},\text{当}|z|=1\text{时};\\1,\text{当}|z|>1\text{时}.\end{cases}$$

这样，当$n\to\infty$时，$u_n(z)$不趋于0，故级数发散.

若$|z|\leqslant r(r<1)$，则必存在自然数N，当$n\geqslant N$时有$|z|^n<\frac{1}{2}$. 于是当$n\geqslant N$时，便有

$$|u_n(z)|\leqslant\frac{|z|^n}{1-|z|^n}\leqslant\frac{r^n}{1-\frac{1}{2}}=2r^n.$$

而常数项级数$2\sum r^n$收敛，故由Weierstrass判别法，所给级数在闭域$|z|\leqslant r(r<1)$内一致收敛，但在圆$|z|<1$内非一致收敛.

6.6.3 证明：级数$\sum_{n=1}^{\infty}(z^n-z^{n-1})$在闭圆$|z|\leqslant r(r<1)$内一致收敛，但在圆$|z|<1$内非一致收敛.

证 当$|z|\leqslant r(r<1)$时，有

$$|z^n-z^{n-1}|\leqslant|z^n|+|z^{n-1}|=(1+r)r^{n-1},$$

而级数$\sum_{n=1}^{\infty}(1+r)r^{n-1}$收敛，故由Weierstrass判别法，所给级数在闭圆$|z|\leqslant r$内一致收敛.

由于所给级数的前n项和(部分和)是

$$S_n(z)=(z-1)+(z^2-z)+\cdots+(z^n-z^{n-1})$$
$$=z^n-1,$$

故对任何$z(|z|<1)$，级数的和函数为$S(z)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(z)=-1$. 用$\varepsilon$-$N$语言叙述就是：对任意固定的$z$及任意$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，当$n>N$时，有

$$|S_n(z)-S(z)|=|z|^n<\varepsilon.$$

另一方面，对任何固定的(不管多大的)n，取$z=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}(<1)$，有$|z|^n=\frac{1}{2}$. 因而$|S(z)-S_n(z)|$不可能任意小. 这就证得所给级数在$|z|<1$内非一致收敛.

6.6.4 证明：级数$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z-k)^2}$的和函数$S(z)$在复平面去掉全体正整数的区域$D$内解析.

证 只要证明：$S(z)$在任何点$z_0\in D$解析即可. 为此，在区域D内取一个含z_0于其内的圆K：$|z-a|<\delta$. 对K内的任何点z，有$|z|<|a|+\delta$，故存在充分大的R_0，当$k\geqslant k_0$时，可使$\frac{|z|^2}{k^2}\leqslant\frac{1}{2}$. 从而，当$k\geqslant k_0$时，对$K$内的一切点$z$，有

$$\frac{1}{|z-k|^2}=\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\left|1-\frac{z}{k}\right|^2}$$
$$\leqslant\frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{1-\left|\frac{z}{k}\right|^2}\leqslant\frac{2}{k^2}.$$

因调和级数$2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$收敛，故由Weierstrass判别法，所设级数在K内一致收敛. 又级数的每一项$\frac{1}{(z-k)^2}$都是K内的解析函数，根据关于复函数级数的Weierstrass定理，此级数的和函数$S(z)$在K内解析，从而$S(z)$在域D内任意点z_0解析.

注 本题所给级数在区域D内非一致收敛，因而不能对区域D直接使用Weierstrass定理，但由于题目的要求是证明和函数$S(z)$在D内解析，故可对D内的点用逐点证明的办法. 这是复变函数中，证明函数在某个区域解析的一种常用手法，值得注意.

6.6.5 将函数$f(z)=\frac{1}{2+2z+z^2}$在$z=0$展开成幂级数.

解 方程$z^2+2z+2=0$的两个根$\alpha=\sqrt{2}\exp\left\{\frac{i3\pi}{4}\right\}$及$\beta=\sqrt{2}\exp\left\{-\frac{i3\pi}{4}\right\}$，就是$f(z)$的全部奇点. 因而要求的幂级数的收敛半径为

$$R=\min\{|\alpha-0|,|\beta-0|\}=\sqrt{2}.$$

由所设,有

$$f(z)=\frac{1}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right).$$

当 $|z|<|\alpha|(=\sqrt{2})$ 时,有

$$\frac{1}{z-\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}=-\frac{1}{\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\alpha}\right)^n.$$

同理,当 $z<|\beta|$ 时,有

$$\frac{1}{z-\beta}=-\frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\beta}\right)^n.$$

所以,当 $|z|<\min\{|\alpha|,|\beta|\}=\sqrt{2}$ 时,有

$$f(z)=\frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta^{n+1}}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)z^n.$$

因

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^{n+1}}-\frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)\\&=\frac{1}{2i}2^{-(n+1)/2}\{\exp[\frac{3}{4}(n+1)\pi i]\\&\quad-\exp[-\frac{3}{4}(n+1)\pi i]\}\\&=2^{-(n+1)/2}\sin\frac{3}{4}(n+1)\pi,\end{aligned}$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n/2}\sin\frac{3}{4}(n+1)\pi z^n.$$

注 把复函数展开成幂级数的方法基本上与实的情形相同,这就是利用幂级数的四则运算、逐项微分、逐项积分和代入法等,但由于引进了复数,有时在运算上更方便.如对本题的特殊情形:求实函数

$$f(x)=\frac{1}{2+2x+x^2}$$

在 $x=0$ 的幂级数展开.如仅限于实数运算,要求出这个展开式是较复杂的.

6.6.6 设 $t(-1\leqslant t\leqslant 1)$ 是实参数,求函数 $f(z)=\frac{4-z^2}{4+4zt+z^2}$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展式.

解 解方程 $z^2-4zt+4=0$,求得 $f(z)$ 的全部奇点为 $z_{1,2}=2t\pm i\sqrt{1-t^2}$.因 $|z_{1,2}|=2$,故 $f(z)$ 在圆:$|z|<2$ 内解析.令 $t=\cos u$,得

$$\begin{aligned}&\frac{4-z^2}{4-4z\cos u+z^2}=-1+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{-iu}}+\frac{1}{1-\frac{z}{2}e^{iu}}\\&=-1+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n e^{-inu}+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n e^{-inu}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nu}{2^{n-1}}z^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\arccos t)}{2^{n-1}}z^n,\ |z|<2.\end{aligned}$$

由三角学知识得知,所求得的幂级数系数

$$T_n(t)=\cos(n\arccos t)(n=0,1,2,\cdots)$$

是一个关于 t 的 n 次多项式,称为 Чебышев 多项式.

6.6.7 试求下列级数的和:

(1) $C=1+\frac{\cos z}{1!}+\frac{\cos 2z}{2!}+\cdots+\frac{\cos nz}{n!}+\cdots$;

(2) $S=\frac{\sin z}{1!}+\frac{\sin 2z}{2!}+\cdots+\frac{\sin nz}{n!}+\cdots$.

解 由指数函数的幂级数展开,有

$$\begin{aligned}C+iS&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(e^{iz})^n\\&=\exp\{e^{iz}\}=e^{\cos z+i\sin z}\\&=e^{\cos z}(\cos\sin z+i\sin\sin z).\end{aligned}$$

同理

$$C-iS=e^{\cos z}(\cos\sin z-\sin\sin z).$$

两式相加及相减,并分别除以 $\frac{1}{2}$ 及 $\frac{1}{2i}$ 即得

$$C=e^{\cos z}\cos\sin z,S=e^{\cos z}\sin\sin z.$$

6.6.8 把 $f(z)=(\ln\frac{1}{1-z})^2$ 展开成幂级数,式中对数函数是以正实轴上的半射线 $\mathrm{Re}z\geqslant 1$ 为支割线、$\ln 1=0$ 的一支.

解 记 $g(z)=\ln\frac{1}{1-z}$($z=1$ 为其支点),对题设的一支,有 $g(0)=0$,且

$$g'(z)=\frac{1}{1-z},g^{(n)}(z)=\frac{(n-1)!}{(1-z)^n}\ (n=1,2,\cdots)$$

故 $g^{(n)}(0)=(n-1)!$,所以

$$g(z)=z+\frac{z^2}{2}+\cdots+\frac{z^n}{n}+\cdots(|z|<1),$$

$$f(z)=(\ln\frac{1}{1-z})^2=a_2z^2+a_3z^3+\cdots+a_nz^n+\cdots(|z|<1).$$

由幂级数相乘的系数法则,知

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{1\cdot(n-1)}+\frac{1}{2\cdot(n-2)}+\cdots\\&\quad+\frac{1}{(n-1)\cdot 1}\\&=\frac{1}{n}[(1+\frac{1}{n-1})+(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1})+\cdots\\&\quad+(\frac{1}{n-1}+1)]\\&=\frac{2}{n}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1})\ (n\geqslant 2).\end{aligned}$$

6.6.9 设 $f(z)=\frac{1}{z^2(z-i)}$,

(1) 求 $f(z)$ 在 $z=0$ 的 Laurent 展开;

(2) 求 $f(z)$ 在圆外域:$|z|>1$ 内的 Laurent 展开;

(3) 设 $a\neq 0,i,\infty$,求 $f(z)$ 在 a 点的 Taylor 展开.

解法 1 (1) 因 $f(z)$ 共有两个孤立奇点 $z=0$ 及 $z=i$,故所考虑的点 i 的去心邻域:$0<|z-i|<R$ 的半径 $R=|i-0|=1$.于是

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-i+i}=\frac{1}{i\left(1+\frac{z-i}{i}\right)}$$

$$=\frac{1}{i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{i}\right)^n(0<|z-i|<1).$$

再利用逐项求导,得

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{i}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{i}\left(\frac{z-i}{i}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n.$$

所以

$$f(z)=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n.$$

(2) 因 $|z|>1$,故

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z\left(1-\frac{i}{z}\right)}=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n.$$

从而

$$f(z)=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{i}{z}\right)^n\quad(|z|>1).$$

(3) 因 $a\neq 0,i,\infty$,故在 z_0 的Taylor展开的收敛半径 $R=\min\{|a-i|,|a-0|\}$. 用待定系数法,可求得

$$f(z)=\frac{z+i}{z^2}-\frac{1}{z-i}.$$

而

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{z-a+a}=\frac{1}{a\left(1+\frac{z-a}{a}\right)}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a}\right)^n(|z-a|<|a|),$$

$$\frac{1}{z^2}=-\left(\frac{1}{z}\right)'=-\frac{1}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{z-a}{a}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)\left(\frac{z-a}{a}\right)^n,$$

$$\frac{1}{z-i}=\frac{1}{z-i-a+a}=\frac{1}{(a-i)\left(1+\frac{z-a}{a-i}\right)}$$

$$=\frac{1}{a-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-a}{a-i}\right)^n(|z-a|<|a-i|)$$

所以,在 $|z-a|<R$ 内,有

$$f(z)=\frac{1}{z}+\frac{i}{z^2}-\frac{1}{z-i}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1-i(n+1)}{a^{n+1}}-\frac{1}{(a-i)^{n+1}}\right](z-a)^n.$$

解法 2 这里只用通过积分直接计算系数的方法解(1).设

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-i)^n(0<|z-i|<1),$$

则

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-i)^{n+1}}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1}{z^2(z-i)^{n+2}}dz,$$

这里 C 为圆周 $|z-i|=r(r<1)$.

记 $g(z)=\frac{1}{z^2(z-i)^{n+2}}$. 当 $n+2\leqslant 0$,即 $n\leqslant -2$ 时,$g(z)$ 在 C 所围区域内解析,因而 $a_n=0$. 当 $n>-2$ 时,由Cauchy积分公式,有

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{1/z^2}{(z-i)^{n+2}}dz$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\left(\frac{1}{z^2}\right)\Big|_{z=i}$$

$$=(-1)^{n+1}(n+2)\frac{1}{i^{n+3}}$$

$$=(-1)^n(n+2)\frac{1}{i^{n+1}}.$$

所以

$$f(z)=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^n(n+2)\frac{1}{i^{n+1}}(z-i)^n$$

$$=\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-1)^{n+1}\left(\frac{z-i}{i}\right)^n.$$

注 比较本题的两种解法可见,间接方法(即解法1)要简单一些. 由于函数在弧立奇点 a 附近的Laurent展开(或在解析点 a 附近的Taylor展开)式的系数是唯一的,故只要设法配成 $(z-a)^n$ 形式的幂即可. 这种方法对有理函数或形如 $f(z-a)$ 的函数特别适用.

6.6.10 设 t 是实参数,$|t|\leqslant 1$.

(1) 证明:

$$\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)z^n(|z|<1)\qquad ③$$

式中根式当 $z=0$ 时的值为1,且

$$P_n(t)=\frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

(2) 证明:递推关系

$$(n+1)P_{n+1}(t)-t(2n+1)P_n(t)+nP_{n-1}(t)=0$$

$$(n=1,2,3,\cdots).$$

证 (1) 关于 z 的方程 $z^2-2tz+1=0$ 的两根为 $z_k=t\pm\sqrt{t^2-1}=t\pm i\sqrt{1-t^2}(k=1,2)$. 由 $|t|\leqslant 1$,得

$$|z_k|=\sqrt{t^2+(1-t^2)}=1.$$

所以,$F(z)=\frac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}$ 对取定的分支是圆 $|z|<1$ 内的解析函数,从而在 $|z|<1$ 内可展开成幂级数③. 由幂级数的系数公式,有

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{1}{z^{n+1}\sqrt{1-2tz+z^2}}dz,$$

这里 C 是 $|z|<1$ 的包含原点 $z=0$ 于其内的简单闭路. 作替换

$$\sqrt{1-2tz+z^2} = 1 - zw,$$

即

$$z = \frac{2(w-t)}{w^2-1}.$$

在此变换下, $z=0$ 变成 $w=t$, C 变成包含点 $w=t$ 于其内的闭路 C_1.

$$\sqrt{1-2tz+z^2} = -\frac{w^2-2tw+1}{w^2-1},$$

$$dz = \frac{-2(w^2-2tw+1)}{(w^2-1)^2}dw$$

再由 Cauchy 积分公式, 得

$$P_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1}\frac{(w^2-1)^n}{2^n(w-t)^{n+1}}dw$$

$$= \frac{1}{2^n\cdot n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, n = 0,1,2,\cdots$$

(2) 把等式③的两边对 z 求导, 得

$$(t-z)(1-2tz+z^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(t)z^{n-1}.$$

用 $1-2tz+z^2$ 乘上式两边, 并对左方用③式, 得

$$(t-z)\sum_{n=0}^{\infty}P_n(t)z^n$$

$$= (1-2tz+z^2)\sum_{n=1}^{\infty}nP_n(t)z^{n-1}.$$

展开并作哑指标变换, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty}tP_nz^n - \sum_{n=1}^{\infty}P_{n-1}z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)P_{n+1}z^n$$

$$-2t\sum_{n=1}^{\infty}nP_nz^n + \sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P_{n-1}z^n,$$

即

$$P_1 - tP_0 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)P_{n+1} - (2n+1)tP_n + nP_{n-1}]z^n = 0.$$

比较等式两边的系数, 得 $P_1(t) - tP_0(t) = 0$, 及

$$(n+1)P_{n+1}(t) - t(2n+1)P_n(t) + nP_{n-1}(t) = 0,$$
$$n = 1,2,3,\cdots$$

注 (1) 易知 $P_n(t)$ 是一个关于 t 的 n 次多项式, 称为 Legendre 多项式. ③式表明: 函数 $\dfrac{1}{\sqrt{1-2tz+z^2}}$ 是 Legendre 多项式列 $\{P_n(t)\}(n=0,1,2,3,\cdots)$ 的母函数. Legendre 多项式及其母函数在数学物理方程中有重要应用.

(2) 本题解法中用到的比较系数法, 是基于一个函数在确定的区域内的 Taylor 展开(或 Laurent 展开)的唯一性.

6.6.11 设 t 是实参数, 且在 $0<|z|<\infty$ 内, 有

$$f(z) = \exp\left\{\frac{t}{2}(z-z^{-1})\right\} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}J_n(t)z^n \quad ④$$

证明:

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta - n\theta)d\theta$$
$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots). \quad ⑤$$

证 把④式看成是 $f(z)$ 在区域 $0<|z|<\infty$ 内的 Laurent 展开, 由系数公式得

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\exp\left\{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}}{z^{n+1}}dz.$$

这里 C 取圆周 $|z|=1$. 在 C 上 $z=e^{i\theta}$, 于是

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it\sin\theta}e^{i\theta}}{e^{i(n+1)\theta}}i\,d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(t\sin\theta-n\theta)}d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta-n\theta)d\theta + i\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta-n\theta)d\theta$$

作代换 $\varphi = 2\pi - \theta$, 得

$$\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta - n\theta)d\theta$$

$$= \int_{2\pi}^{0}\sin(-t\sin\varphi + n\varphi - 2n\pi)(-d\varphi)$$

$$= -\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta - n\theta)d\theta,$$

因而

$$\int_0^{2\pi}\sin(t\sin\theta - n\theta)d\theta = 0.$$

所以

$$J_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(t\sin\theta - n\theta)d\theta.$$

注 函数 $J_n(t)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 称为第一类 Bessel 函数, 这是一种特殊函数. ④式说明函数 $\exp\left\{\frac{t}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right\}$ 是函数列 $\{J_n(t)\}$ 的母函数, ⑤是 $J_n(t)$ 的积分表示. 这类函数在数理方程中有着重要应用.

6.6.12 证明:

(1) 当 $0<|z|<1$ 时,

$$\frac{1}{4}|z| < |e^z - 1| < \frac{7}{4}|z|;$$

(2) 对任何复数 z, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^z$.

证 (1) 由 e^z 的幂级数表示及 $e = 2.71828\cdots$, 有

$$|e^z - 1| = \left|z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots\right|$$

$$< |z|\left(1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots\right)$$

$$= (e-1)|z| < \frac{7}{4}|z|.$$

又 $\quad |e^z-1|>|z|(1-\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}-\cdots-\frac{1}{n!}-\cdots)$

$$=(3-e)|z|>\frac{1}{4}|z|$$

(2) 对任意取定的复数 z，设 $|z|\leqslant r$. 由于正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{r^k}{k!}$ 收敛，故对任意 $\varepsilon>0$，存在自然数 p，使得

$$\frac{r^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{r^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots\leqslant\frac{\varepsilon}{3}.$$

又由二项式定理，有

$$(1+\frac{z}{n})^n=\sum_{k=0}^{\infty}C_n^k(\frac{z}{n})^k$$

$$=1+z+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})z^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}[(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})]z^k+\cdots+\frac{z^n}{n^n},$$

上式右端是一个关于 z 的 n 次多项式，z^k 的系数是不超过 $\frac{1}{k!}$ 的正数. 于是，取 $n>p$，就有

$$|e^z-(1+\frac{z}{n})^n|=|\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}-(1+\frac{z}{n})^n|$$

$$\leqslant\frac{1}{2!}[1-(1-\frac{1}{n})]r^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{p!}[1-(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n})]r^p$$

$$+2[\frac{r^{p+1}}{(p+1)!}+\frac{r^{p+2}}{(p+2)!}+\cdots]$$

$$\leqslant\frac{1}{2!}[1-(1-\frac{1}{n})]r^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{p!}[1-(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n})]r^p+\frac{2}{3}\varepsilon.$$

又对所述的 p 及 r，当 $n\to\infty$ 时，有

$$\frac{1}{2!}[1-(1-\frac{1}{n})]r^2+\cdots$$

$$+\frac{1}{p!}[1-(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{p-1}{n})]r^p\to 0.$$

所以，存在自然数 N（并使 $N>p$），当 $n>N$ 时能使

$$|e^z-(1+\frac{z}{n})^n|\leqslant\frac{\varepsilon}{3}+\frac{2\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

结论得证.

6.6.13 设 $f(z)$ 在点 a 解析，且级数

$$f(z)+f'(z)+\cdots+f^{(n)}(z)+\cdots=F(z)$$

在点 a 收敛. 证明

(1) $f(z)$ 在全平面解析；

(2) $F(z)$ 在全平面解析.

证 (1) 因 $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)$ 收敛，故由收敛的必要条件有 $\lim_{n\to\infty}f^{(n)}(a)=0$. 于是，存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|f^{(n)}(a)|\leqslant 1$.

因 $f(z)$ 在 a 解析，于是在 a 的某邻域：$|z-a|<\rho$ 内有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \qquad ⑥$$

由于，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\left|\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n\right|\leqslant\left|\frac{1}{n!}(z-a)^n\right|.$$

而 Taylor 级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(z-a)^n$ 的收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n!}{1/(n+1)!}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty.$$

于是，⑥ 式右方级数在全平面收敛，从而，$f(z)$ 在全平面解析.

(2) 因 $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(a)$ 收敛，故由级数收敛的 Canchy 准则知：对任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|f^{(n+1)}(a)+\cdots+f^{(n+p)}(a)|<\varepsilon\ (p=1,2,\cdots).$$

因而对任意取定的正数 R，在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上，当 $n\geqslant N$ 时，使有

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}f^{(k)}(z)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m+k)}(a)}{m!}(z-a)^m\right|$$

$$=\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{f^{(m+n+1)}(a)+\cdots+f^{(m+n+p)}(a)}{m!}(z-a)^m\right|$$

$$<\varepsilon\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(R+|a|)^m=\varepsilon e^{R+|a|}.$$

这就证得 $\sum_{n=0}^{\infty}f^{(n)}(z)$ 在闭圆 $|z|\leqslant R$ 上一致收敛. 由于 R 是任意正数，故 $F(z)$ 在全平面内解析.

§6.7 孤立奇点及其留数

如果函数 $f(z)$ 在 a 点的某去心邻域：$0<|z-a|<\rho(0<\rho\leqslant+\infty)$ 内解析，但在 a 点不解析，则称 a 是 $f(z)$ 的孤立奇点. 根据 $f(z)$ 在孤立奇点的 Laurent 展开式，可将孤立奇点分成三类：可去奇点、极点和本性奇点. 函数在不同类型的孤立奇点附近的性状有着本质上的差异：

(1) a 是 $f(z)$ 的可去奇点的充要条件是：$\lim_{z\to a}f(z)=A$（有限）. 由此知，补充定义 $f(a)=A$，则 a 是 $f(z)$ 的解析点.

(2) a 是 $f(z)$ 的极点的充要条件是：$\lim_{z\to a}f(z)=\infty$.

(3) a 是 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件是：在 a 点的某去心邻域内，有

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-a)^m},$$

这里 m 是自然数，$\varphi(z)$ 在 a 点解析，且 $\varphi(a)\neq 0$.

此外，a 为 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级零点，也是 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点的充要条件.

(4) a 是 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是：不存在有限或无限的极限.

以上讲的是函数的有限弧立奇点. 如果 $f(z)$ 在某个圆的外部区域：$R<|z|<+\infty$ 内解析，则称 ∞ 点是 $f(z)$ 的弧立奇点. 令 $g(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})$，若 $\zeta=0$ 是 $g(\zeta)$ 的某种类型的奇点，则 $z=\infty$ 就是 $f(z)$ 的相应类型的奇点.

留数(或称残数)是复变函数中的一个重要概念，有着广泛的应用(见 § 6.8). 设 a 是 $f(z)$ 的弧立奇点，则积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

称为函数 $f(z)$ 在 a 点的留数，记作 $\mathrm{Res}[f(z),a]$. 这里 C 是一条在 a 点的充分小的邻域内的包含 a 点在其内部的闭路. 由 Lanrent 级数的系数公式(见 § 6.6)可见，$\mathrm{Res}[f(z),a]$ 等于 $f(z)$ 在 a 点的 Laurent 展开的负一次幂(即 $(z-a)^{-1}$) 系数，这是计算留数的一般方法. 若 a 是 $f(z)$ 的 m 级极点，则有公式：

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)].$$

特别地，当 $m=1$ 时，有

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

又若 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$，且 $P(a)\neq 0, Q(a)=0, Q'(a)\neq 0$(这时 a 是 $f(z)$ 的一级极点)，则

$$\mathrm{Res}[f(z),a]=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

6.7.1 设 a 分别是 $f(z)$ 的可去奇点及 $g(z)$ 的本性奇点，试问 a 是 $f(z)\pm g(z), f(z)g(z), f(z)/g(z)$ 及 $g(z)/f(z)$ 的何种奇点.

解 由所设，$f(z)$ 在去心邻域：$0<|z-a|<R_1$ 内的 Laurent 展开中不含 $z-a$ 的负次幂，$g(z)$ 在去心邻域：$0<|z-a|<R_2$ 内的 Laurent 展开中含有无穷多项 $z-a$ 的负次幂，因而 $f(z)\pm g(z)$ 在去心邻域：$0<|z-a|<R(R=\min\{R_1,R_2\})$ 中必含有无穷多项 $z-a$ 的负次幂. 所以，a 是 $f(z)\pm g(z)$ 的本性奇点.

对其余几个函数，从 Laurent 展开式不易说明，可利用函数在弧立奇点附近的性状来讨论. 先用反证法证明 a 是 $F(z)=f(z)g(z)$ 的本性奇点. 若否，则有 $\lim_{z\to a}F(z)=B$(有限或无限). 又因 a 是 $f(z)$ 的可去奇点，可令 $\lim_{z\to a}f(z)=A$(有限). 分几种情况讨论：若 $A\neq 0$，由 $g(z)=\frac{F(z)}{f(z)}$，得 $\lim_{z\to a}g(z)=\frac{B}{A}$(有限或无限)；若 $A=0, B\neq 0$，则 $\lim_{z\to a}g(z)=\infty$；若 $A=0, B=0$，这时可令 $f(a)=0, F(a)=0$，即 a 是 $f(z)$ 及 $F(z)$ 的零点，因而，在 a 点的某邻域内有 $f(z)=(z-a)^m\varphi(z), F(z)=(z-a)^n\psi(z), \varphi(a)\neq 0, \psi(a)\neq 0$，由此可见，当 $n\geqslant m$ 时，a 是 $g(z)=\frac{F(z)}{f(z)}$ 的解析点；当 $m>n$ 时，a 是 $g(z)$ 的极点. 总之，在各种情形下都与所设矛盾. 这就证得 a 是 $f(z)g(z)$ 的本性奇点.

同样的方法，可证 a 是 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 及 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的本性奇点.

注 若 a 分别是 $f(z)$ 的极点及 $g(z)$ 的本性奇点，则 a 仍是 $f(z)\pm g(z), f(z)g(z), \frac{f(z)}{g(z)}$ 及 $\frac{g(z)}{f(z)}$ 的本性奇点. 请读者自己证明. 此外，由 6.7.1 还可以得知，若 a 是函数 $f(z)$ 的本性奇点，则 a 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的本性奇点. 6.7.1 及这些结论在判别某些函数的奇点的类型时很有用.

6.7.2 设 $f(z)=\frac{\sin z}{(z-3)^2z^2(z+1)^3}$，试指出它的各奇点的类型.

解 容易看出 $z=-1,0$ 及 3 是 $f(z)$ 的所有有限弧立奇点. 先考虑 $z=-1$，记

$$f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z+1)^3},$$

这里 $\varphi(z)=\frac{\sin z}{(z-3)^2z^2}$，显然 $\varphi(z)$ 在 $z=-1$ 解析，且 $\varphi(-1)=\frac{-\sin 1}{16}\neq 0$，故 -1 是 $f(z)$ 的三级极点. 同理可说明，$z=3$ 是 $f(z)$ 的二级极点；$z=0$ 的情况要复杂些，因为 $z=0$ 不仅使 $f(z)$ 的分母为零，也使 $f(z)$ 的分子为零. 把 $f(z)$ 写成

$$f(z)=\frac{1}{z}\left[\frac{1}{(z-3)^2(z+1)^3}\cdot\frac{\sin z}{z}\right]=\frac{1}{z}\psi(z),$$

因 $\lim_{z\to 0}\psi(z)=\frac{1}{9}$，故 $z=0$ 是 $\psi(z)$ 的可去奇点，定义 $\psi(0)=\frac{1}{9}(\neq 0)$，$\psi(z)$ 在 $z=0$ 解析，所以 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点.

再考虑 ∞ 点. 令 $z=\frac{1}{\zeta}$，则

$$g(\zeta)=f(\frac{1}{\zeta})=\frac{\zeta^7}{(1-3\zeta)^2(1+\zeta)^3}\sin\frac{1}{\zeta}.$$

因 $\lim_{\zeta\to 0}\zeta^7(1-3\zeta)^{-2}(1+\zeta)^{-3}=0$，$\lim_{\zeta\to 0}\sin\frac{1}{\zeta}$ 不存在，所

以 $\zeta=0$ 分别是 $\zeta^7(1-3\zeta)^{-2}(1+\zeta)^{-3}$ 及 $\sin\frac{1}{\zeta}$ 的可去奇点及本性奇点. 于是,由 6.7.1 的结论,$\zeta=0$ 是 $g(\zeta)$ 的本性奇点,即 $z=\infty$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

6.7.3 指出函数 $f(z)=\frac{1}{\sin z-\sin a}$($a$ 为复常数)的各奇点的类型.

解 考虑函数 $f(z)$ 的分母

$$\varphi(z)=\sin z-\sin a=2\sin\frac{z-a}{2}\cos\frac{z+a}{2},$$

它的全部零点为:$z_k=2k\pi+a$ 及 $z_k'=(2k+1)\pi-a(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$. 以下分两种情况讨论:

(1) 当 $a\neq m\pi+\frac{\pi}{2}(m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$ 时,$\varphi'(z_k)=\cos z_k=\cos a\neq0,\varphi'(z_k')=\cos z_k'=-\cos a\neq0$,因而 z_k 及 z_k' 都是 $\varphi(z)$ 的一级零点,所以它们都是 $f(z)=\frac{1}{\varphi(z)}$ 的一级极点.

(2) 当 $a=m\pi+\frac{\pi}{2}$ 时,有 $\varphi'(z_k)=0,\varphi'(z_k')=0$,又 $\varphi''(z_k)=-\sin z_k=-\sin a\neq0,\varphi''(z_k')\neq0$. 因而 z_k 及 z_k' 都是 $\varphi(z)$ 的二级零点,所以它们都是 $f(z)$ 的二级极点.

因为 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=\infty$,所以无穷远点是极点的极限点,它是 $f(z)$ 的一个非孤立奇点.

6.7.4 证明:在闭复平面上只有一个奇点,而且是一级极点的解析函数 $f(z)$ 必然是一个分式线性函数,即

$$f(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

这里 a,b,c,d 是复常数,且 $ad-bc\neq0$.

证 若题述的 $f(z)$ 的一级极点是有限点 z_0,由所设 $f(z)$ 在 $|z-z_0|>0$ 内可展开成 Laurent 级数:

$$f(z)=\frac{C_{-1}}{z-z_0}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n,$$

且 $C_{-1}\neq0$. 由于 $f(z)$ 在 ∞ 点解析,故 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A$($A$ 为有限复数),从而

$$\lim_{z\to\infty}\left[f(z)-\frac{C_{-1}}{z-z_0}\right]=A.$$

于是

$$f(z)-\frac{C_{-1}}{z-z_0}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-z_0)^n$$

是全平面的有界解析函数. 再由 Liouville 定理,

有 $f(z)-\frac{C_{-1}}{z-z_0}\equiv C$(常数). 所以

$$f(z)=C+\frac{C_{-1}}{z-z_0}=\frac{Cz+(C_{-1}-Cz_0)}{z-z_0},$$

且 $ad-bc=C(-z_0)-(C_{-1}-Cz_0)=-C_{-1}\neq0$.

若题述的 $f(z)$ 的一级极点是 $z=\infty$,则在 $|z|<+\infty$ 内有如下的 Laurent 展开式:

$$f(z)=C_1z+C_0+\frac{C_{-1}}{z}+\frac{C_{-2}}{z^2}+\cdots,C_1\neq0.$$

从而

$$\lim_{z\to+\infty}[f(z)-C_1z]=C_0(\text{有限}).$$

所以 $f(z)-C_1z$ 是全平面的有界函数,故 $f(z)-C_1z\equiv C$(常数). 即 $f(z)=C_1z+C$,这是一个整线性函数,它是分式线性函数的特殊情形.

6.7.5 设 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 是不可约有理真分式函数,$\alpha_k(k=1,2,\cdots,m)$ 是 $Q(z)$ 的全部零点,级数为 n_k,证明

$$\frac{P(z)}{Q(z)}=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-\alpha_k)^s},$$

式中 A_{ks} 为复常数.

证 由题设条件,α_1 是 $f(z)$ 的 n_1 级极点,于是在 α_1 的某去心邻域内可展开成 Laurent 级数:

$$f(z)=\frac{A_{1n_1}}{(z-\alpha_1)^{n_1}}+\cdots+\frac{A_{11}}{z-\alpha_1}+\varphi(z),$$

这里 $\varphi(z)$ 在 α_1 解析. 显然 α_2 仍是 $\varphi(z)$ 的 n_2 级极点,于是又有

$$\varphi(z)=\frac{A_{2n_2}}{(z-\alpha_2)^{n_2}}+\cdots+\frac{A_{21}}{z-\alpha_2}+\varphi_1(z),$$

且 $\varphi_1(z)$ 在 α_2 解析,但 α_3 是 $\varphi_1(z)$ 的 n_3 级极点. 这样把上述过程进行 m 次,得

$$f(z)=\sum_{k=1}^{m}\sum_{s=1}^{n_k}\frac{A_{ks}}{(z-\alpha_k)^s}+h(z), \quad ①$$

式中 $h(z)$ 是全平面的解析函数. 因 $f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理真分式,故 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$. 于是,在 ① 式两端令 $z\to\infty$ 取极限,得 $\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=0$,因而 $h(z)$ 是全平面的有界解析函数. 再由 Liouville 定理,得 $h(z)\equiv C$(常数),又因 $\lim\limits_{z\to\infty}h(z)=0$,得 $C=0$. 结论得证.

6.7.6 (Weiestrass 定理)a 为 $f(z)$ 的本性奇点的充要条件是:对于任何有限或无限复数 A,都存在一个以 a 为极限的点列 $\{z_n\}$(即 $n\to\infty$ 时,$z_n\to a$),使得

$$\lim_{n\to\infty}f(z_n)=A.$$

证 若命题中所述条件成立,则必不存在有限或无限的极限 $\lim\limits_{z\to a}f(z)$,从而 a 是 $f(z)$ 的本性奇点. 下面分两种情形证明条件的必要性.

(1) 设 $A=\infty$. 由于 a 是 $f(z)$ 的本性奇点,故 $f(z)$ 在 a 的任何邻域内必是无界的(否则,a 是 $f(z)$ 的可去奇点). 所以必有以 a 为极限的点列 $\{z_n\}$,使得 $\lim\limits_{n\to\infty}f(z_n)=\infty=A$.

(2) 设 $A \neq \infty$. 若在 a 点的任意小的邻域内，都有这样的点 z 存在，使 $f(z) = A$，则结论已经成立.

若不是上述情形，则必存在点 a 的充分小的去心邻域 K，在 K 内 $f(z) \neq A$. 令

$$\varphi(z) = \frac{1}{f(z) - A}.$$

因 a 是 $f(z)$ 的本性奇点，故 a 是 $\varphi(z)$ 的本性奇点（参看 7.6.1 后的注）. 于是，由前面讨论过的情形，存在以 a 为极限的点列 $\{z_n\}$，使得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(z_n) = \infty.$$

从而

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

注　6.1.7 即是以函数 $f(z) = e^{\frac{1}{z-1}}$ 验证 Weierstrass 定理.

6.7.7　试以函数 $f(z) = \sin\frac{1}{z}$ 验证 Weierstrass 定理.

证　由于在 $|z| > 0$ 内有 Laurent 展开式

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5}\cdots$$

故 $z = 0$ 是 $f(z)$ 的本性奇点.

若 $A = \infty$，取点列 $z_n = \frac{i}{n}$. 显然，当 $n \to \infty$ 时，$z_n \to 0$. 且

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty}\sin\frac{n}{i} = -i\lim_{n\to\infty}\operatorname{sh} n = \infty = A.$$

若 $A \neq \infty$. 先解方程

$$\sin\frac{1}{z} = A$$

得

$$\frac{1}{z} = \operatorname{Arcsin} A = \frac{1}{i}\operatorname{Ln}(iA + \sqrt{1 - A^2}),$$

即

$$z = \frac{i}{\operatorname{Ln}(iA + \sqrt{1 - A^2})} = \frac{i}{\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2k\pi i}.$$

于是，取点列

$$z_n = \frac{i}{\ln(iA + \sqrt{1 - A^2}) + 2n\pi i}, n = 1,2,\cdots$$

有 $z_n \to 0$ ($n \to \infty$ 时)，且满足条件

$$f(z_n) = A \ (n = 1,2,\cdots),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} f(z_n) = A.$$

6.7.8　证明：对于任何有理函数 $f(z)$，必存在这样的有理函数 $g(z)$，使 $g(z)$ 在单位圆 $|z| < 1$ 内解析，且在 $|z| = 1$ 上 $|f(z)| = |g(z)|$.

证　我们把满足要求的有理函数构造出来. 首先注意到，有理函数 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内的奇点都是极点，设 $f(z)$ 在 $|z| < 1$ 内的全部极点为 a_k ($k = 1,2,\cdots,m$)，级数分别为 n_k. 于是有理函数

$$\varphi(z) = \Big[\prod_{k=1}^{m}(z - a_k)^{n_k}\Big]f(z)$$

在 $|z| < 1$ 内解析. 因为当 $|z| = 1$ 时，有

$$|z - a_k| = |z\bar{z} - a_k\bar{z}| = |1 - a_k\bar{z}| = |\bar{a}_k z - 1|,$$

故

$$\left|\frac{z - a_k}{\bar{a}_k z - 1}\right| = 1.$$

再令

$$g(z) = \Big[\prod_{k=1}^{m}\Big(\frac{z - a_k}{\bar{a}_k z - 1}\Big)^{n_k}\Big]f(z),$$

则当 $|z| = 1$ 时，有 $|f(z)| = |g(z)|$. 又因 $|a_k| < 1$，故 $\left|\frac{1}{\bar{a}_k}\right| > 1$，即 $g(z)$ 的可能奇点 $\frac{1}{\bar{a}_k}$ 在单位圆之外. 所以，有理函数 $g(z)$ 在 $|z| < 1$ 内解析. 结论得证.

6.7.9　求 $\operatorname{tg} z$ 在其所有极点附近的 Laurent 展开的主部.

解　由 $\cos z = 0$，得 $z_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$). 因 $\cos' z_n = -\sin z_n = -1 \neq 0$，故它们都是 $\cos z$ 的一级零点，从而都是 $\operatorname{tg} z$ 的一级极点. 因

$$\operatorname{Res}[\operatorname{tg} z, z_n] = \frac{\sin z}{\cos' z}\Big|_{z=z_n} = -1,$$

所以，$\operatorname{tg} z$ 在 z_n 的去心邻域：$0 < |z - z_n| < \pi$ 内的 Laurent 展开的主部为

$$\frac{\operatorname{Res}[\operatorname{tg} z, z_n]}{z - z_n} = -\frac{1}{z - n\pi - \frac{\pi}{2}}.$$

6.7.10　设 ∞ 点是 $f(z)$ 的一个孤立奇点（即 $f(z)$ 在某区域 D: $|z| > R$ 内解析），则称

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

为 $f(z)$ 在 ∞ 点的留数，记作 $\operatorname{Res}[f(z), \infty]$. 这里 C^- 是 D 内的任一闭路，并取负方向——这个方向使 ∞ 点永远在它的左边，因而可以看作是绕 ∞ 点的正方向.

(1) 证明：函数在 ∞ 点的留数等于这个函数在 ∞ 点的邻域内的 Laurent 展开式的负一次方项的系数反符号；

(2) 若 $f(z)$ 在闭复平面上除去有限多个点 a_1、$a_2, \cdots, a_n$ 及 ∞ 外均解析，试证明：$f(z)$ 在 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 及 ∞ 点的留数和为 0，即

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)+\text{Res}(f,\infty)=0.$$

证 (1) 设 $f(z)$ 在区域 $D: |z|>R$ 内的 Laurent 展开式为

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n z^n \qquad ②$$

取 C 为 D 内的圆周 $z=R_1e^{i\theta}(R_1>R)$，则

$$\int_C z^n\mathrm{d}z=R_1^{n+1}i\int_0^{2\pi}e^{i(n+1)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=R_1^{n+1}i\left[\int_0^{2\pi}\cos(n+1)\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{2\pi}\sin(n+1)\theta\mathrm{d}\theta\right]$$

$$=\begin{cases}2\pi i, & \text{若 } n=-1;\\ 0, & \text{若 } n\neq -1.\end{cases}$$

再由逐项积分定理，得

$$\text{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{C_{-1}}{2\pi i}\int_{C^-}\frac{1}{z}\mathrm{d}z=-C_{-1}.$$

(2) 由所设可见，对区域 D 内的任一闭路 C，点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都在 C 的内部，由留数定理有

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)\mathrm{d}z.$$

又由定义有

$$\text{Res}(f,\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C^-}f(z)\mathrm{d}z.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{n}\text{Res}(f,a_k)+\text{Res}(f,\infty)=0.$$

6.7.11 设 $f(z)=\dfrac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)(z-\beta)}$，这里 α,β 是常数，且 $\alpha\beta=1,\alpha\neq\beta$. 试求 $f(z)$ 在各奇点的留数.

解 α,β 是 $f(z)$ 的一级极点，故

$$\text{Res}(f,\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z)$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\beta)}\Big|_{z=\alpha}=\frac{(\alpha^2-1)^2}{\alpha^2(\alpha-\beta)}$$

$$=\frac{(\alpha^2-1)^2}{\alpha(\alpha^2-1)}=\alpha-\beta.$$

同理

$$\text{Res}(f,\beta)=\frac{(z^2-1)^2}{z^2(z-\alpha)}\Big|_{z=\beta}=\beta-\alpha.$$

由所设 α,β 均不为0，故 $z=0$ 是 $f(z)$ 的二级极点，下面用两种方法求 $\text{Res}(f,0)$.

(1) 由极点的留数公式，有

$$\text{Res}(f,0)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[\frac{(z^2-1)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}\right]$$

$$=\frac{1}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2}\{4(z^2-1)z(z-\alpha)(z-\beta)-(z^2-1)^2[(z-\alpha)+(z-\beta)]\}\Big|_{z=0}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2}=\alpha+\beta.$$

(2) 先求出 $\dfrac{(z^2-1)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}$ 在 $z=0$ 的 Taylor 展式的一次项系数，因

$$\frac{(z^2-1)^2}{(z-\alpha)(z-\beta)}=\frac{(z^2-1)^2}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{z-\alpha}-\frac{1}{z-\beta}\right)$$

$$=\frac{(z^2-1)^2}{\alpha-\beta}\left[\frac{1}{\beta}\left(1+\frac{z}{\beta}+\cdots\right)-\frac{1}{\alpha}\left(1+\frac{z}{\alpha}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{z^4-2z^2+1}{\alpha-\beta}\left[\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}\right)+\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)z+\cdots\right],$$

由此可见，其一次项系数为

$$\frac{1}{\alpha-\beta}\left(\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\alpha^2}\right)=\alpha+\beta,$$

它也是 $f(z)$ 在 $z=0$ 的 Laurent 展开的负一次方的系数，所以

$$\text{Res}(f,0)=\alpha+\beta.$$

最后，由 6.7.9(2) 得

$$\text{Res}(f,\infty)=-[\text{Res}(f,\alpha)+\text{Res}(f,\beta)+\text{Res}(f,0)]$$
$$=\alpha+\beta.$$

注 当极点的级数较高时，为了避免计算高阶导数，可设法求其 Laurent 展开的负一次方系数. 特别是对有理函数 $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$，为求其在极点 a 的留数，可先令 $z=t+a$，并依 t 的升幂排列，然后施行长除法以求得 t^{-1} 的系数.

6.7.12 求有理函数 $f(z)=\dfrac{z^4}{(2+3z^2)^4}$ 在上半平面内极点的留数.

解 由 $2+3z^2=0$，得 $z=\pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$. 故 $f(z)$ 在上半平面内只有 $a=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,i$ 是四级极点. 令 $z=a+t$，得

$$f(z)=\frac{z^4}{(2+3z^2)^4}$$

$$=\frac{z^4}{3^4(z-a)^4(z+a)^4}=\frac{(t+a)^4}{3^4t^4(t+2a)^4}$$

$$=\frac{a^4+4a^3t+6a^2t^2+4at^3+t^4}{3^4t^4(16a^4+32a^3t+24a^2t^2+8at^3+t^4)}$$

$$=\frac{1}{3^4t^4}\left(\frac{1}{16}+\frac{t}{8a}+\frac{t^2}{32a^2}-\frac{t^3}{32a^3}+\cdots\right).$$

所以

$$\text{Res}\left(f,\sqrt{\frac{2}{3}}\,i\right)=-\frac{1}{3^4\cdot 32a^3}=\frac{-i}{576\sqrt{6}}.$$

6.7.13 设 $f(z)$ 及 $g(z)$ 都在 $z=0$ 解析，且 $f(0)\neq 0$，$g(z)$ 以 $z=0$ 为二级零点，证明：

$$\text{Res}\left[\frac{f(z)}{g(z)},0\right]=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2},$$

这里 $a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(0),b_k=\dfrac{1}{k!}g^{(k)}(0)\ (k=0,1,2,$

3).

证 由所设条件,有

$$f(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_kz^k+\cdots$$
$$\left(a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!},a_0\neq 0\right)$$

及

$$g(z)=b_2z^2+b_3z^3+\cdots+b_kz^k+\cdots$$
$$\left(b_k=\frac{g^{(k)}(0)}{k!},b_2\neq 0\right).$$

设

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{a_0+a_1z+\cdots}{b_2z^2+b_3z^3+\cdots}=\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots$$

即

$$a_0+a_1z+\cdots$$
$$=(b_2z^2+b_3z^3+\cdots)\left(\frac{C_{-2}}{z^2}+\frac{C_{-1}}{z}+\cdots\right)$$
$$=b_2C_{-2}+(b_3C_{-2}+b_2C_{-1})z+\cdots.$$

比较两边系数,得

$$a_0=b_2C_{-2},a_1=b_3C_{-2}+b_2C_{-1}.$$

解之得

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g},0\right)=C_{-1}=\frac{a_1b_2-a_0b_3}{b_2^2}.$$

6.7.14 设 $g(z)$ 在点 a 解析,试在下列两种情形下,分别求 $\operatorname{Res}\left[g(z)\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]$:

(1) a 为 $f(z)$ 的 m 级极点;

(2) a 为 $f(z)$ 的 n 级零点.

解 (1) 若 a 为 $f(z)$ 的 m 级极点,则在 a 点的某去心邻域内有

$$f(z)=\frac{\psi(z)}{(z-a)^m}$$
$$(\psi(z)\text{ 在 } a \text{ 点解析,且 } \psi(a)\neq 0),$$

则

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-m}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}.$$

由于 $\psi(a)\neq0$,从而 a 是 $f'(z)/f(z)$ 的一级极点.又由 $g(z)$ 在 a 点解析,所以 a 是 $g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}$ 的一级极点.于是

$$\operatorname{Res}\left[g(z)\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]$$
$$=\lim_{z\to a}(z-a)g(z)\left[\frac{-m}{z-a}+\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]$$
$$=-mg(a).$$

(2) 若 a 为 $f(z)$ 的 n 级零点,则在 a 点的某邻域内有

$$f(z)=(z-a)^n\varphi(z),$$

这里 $\varphi(z)$ 在 a 点解析,且 $\varphi(a)\neq0$,用与上面完全相同的方法可断定 a 是 $g(z)f'(z)/f(z)$ 的一级极点,并求得

$$\operatorname{Res}\left[g(z)\frac{f'(z)}{f(z)},a\right]=n\varphi(a).$$

6.7.15 怎样分出函数 $f(z)=\frac{\operatorname{Ln}z}{z^2-1}$ 的各单值解析分支,使 $z=1$ 及 $z=-1$ 是这些分支的孤立奇点,并求出 $f(z)$ 在这些点的留数.

解 为使 $z=\pm1$ 是 $f(z)$ 的孤立奇点,必须使支割线不通过这两点.取从原点出发的,不是正或负半实轴的射线:$\arg z=\alpha(0<\alpha<2\pi,\alpha\neq\pi)$ 为支割线,分出 $\operatorname{Ln}z$ 的各单值解析分支:

$$(\operatorname{Ln}z)_k=\ln|z|+\arg z+i2k\pi$$
$$(\alpha-2\pi<\arg z<\alpha,k=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

它们都在 $z=\pm1$ 解析.而 $(z^2-1)^{-1}$ 以 $z=\pm1$ 为一级极点,因而除对应于 $\operatorname{Ln}1=0$ 的一支,即 $(\operatorname{Ln}z)_0=\ln z$,$f(z)$ 是以 $z=1$ 为可去奇点,以 $z=-1$ 为一级极点外,对所有其余的分支,$f(z)$ 都以 $z=\pm1$ 为一级极点.所以

$$\operatorname{Res}[f_k(z),1]=\operatorname{Res}\left[\frac{(\operatorname{Ln}z)_k}{z^2-1},1\right]$$
$$=\lim_{z\to1}(z-1)\frac{(\operatorname{Ln}z)_k}{z^2-1}=k\pi i,k\neq0;$$
$$\operatorname{Res}[f_k,-1]=\lim_{z\to-1}(z+1)\frac{(\operatorname{Ln}z)_k}{z^2-1}$$
$$=-\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi i.$$

§6.8 留数的应用

留数有许多应用,这包括:复积分及定积分计算;解析函数(特别是多项式)的零点分布;Laplace 变换的计算;等等.积分的计算是建立在下述定理的基础上.

留数定理 设 D 是以有限多条简单闭曲线 C 为边界的区域,函数 $f(z)$ 在 D 内除了有限个奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外处处解析,且在 C 上连续,则

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res}[f(z),a_i].$$

6.8.1 计算积分

$$I=\int_C\frac{\mathrm{d}z}{(z-1)^2(z^2+1)},$$

这里 C 是曲线 $x^2+y^2=2x+2y$.

解 把 C 改写成 $(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$,这是一个以 $(1,1)$ 为圆心,$\sqrt{2}$ 为半径的圆周,被积函数

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z^2+1)}$$

共有3个奇点:$1,i$ 及 $-i$,其中只有 1 及 i 点位于闭路 C 的内部,它们分别是 $f(z)$ 的二级及一级极点.于是

$$\text{Res}[f(z),1]=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-1)^2f(z)]$$
$$=\lim_{z\to 1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{z^2+1}=-\frac{1}{2};$$
$$\text{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}(z-i)f(z)$$
$$=\lim_{z\to i}\frac{1}{(z-1)^2(z+i)}=\frac{1}{4}.$$
所以
$$I=2\pi i\{\text{Res}[f(z),1]+\text{Res}[f(z),i]\}$$
$$=-\frac{\pi}{2}i.$$

6.8.2 计算积分
$$I=\int_C z^n\exp\left\{\frac{2}{z}\right\}\mathrm{d}z,$$
C 为圆周 $|z|=4$，n 为整数.

解 被积函数 $f(z)=z^n\exp\left\{\frac{2}{z}\right\}$ 在 C 内只有一个可能的奇点 $z=0$. 因 $|z|>0$ 时，有
$$f(z)=z^n\left(1+\frac{2}{z}+\cdots+\frac{2^k}{k!z^k}+\frac{2^{k+1}}{(k+1)!z^{k+1}}+\cdots\right),$$
故当 $n<-1$ 时，上式右端级数无负一次幂，即此时 $a_{-1}=\text{Res}[f(z),0]=0$；而当 $n\geqslant -1$ 时，此级数的负一次幂系数 $a_{-1}=\text{Res}[f(z),0]=\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. 所以
$$I=2\pi i\,\text{Res}[f(z),0]=\begin{cases}0, & n<-1;\\ \frac{2^{n+2}}{(n+1)!}\pi i, & n\geqslant -1.\end{cases}$$

6.8.3 计算积分
$$I=\int_C\frac{z^{15}}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}\mathrm{d}z, C:|z|=4.$$

解 被积函数 $f(z)$ 一共有 7 个奇点，即
$$z=\pm i, z=\sqrt[4]{2}\exp\left\{\frac{\pi+2k\pi}{4}i\right\}\ (k=0,1,2,3)\text{ 及 }\infty,$$
其中前 6 个奇点都在 C 内，把这 6 个极点的留数都计算出来然后再求它们的和，这显然是比较费事的. 我们可以利用 6.7.9(1) 的结论来考虑，根据上述结论，$f(z)$ 在这 6 个极点的留数和等于 $-\text{Res}[f(z),\infty]$. 因而
$$I=-2\pi i\,\text{Res}[f(z),\infty].$$
因为在 ∞ 点的邻域：$|z|>\sqrt[4]{2}$ 内，有
$$f(z)=\frac{1}{z\left(1+\frac{1}{z^2}\right)^2\left(1+\frac{2}{z^4}\right)^3}$$
$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{2}{z^2}+\cdots\right)\left(1-3\cdot\frac{2}{z^4}+\cdots\right),$$
上式右端 $1/z$ 的系数为 1，因而 $\text{Res}[f(z),\infty]=-1$. 所以
$$I=2\pi i.$$

注 利用留数计算沿闭路 C 的复积分，如果被积函数 $f(z)$ 在 C 内的奇点比 C 外的奇点多，一般说来，都可以用本题的方法，改为求 $f(z)$ 在 C 外各奇点的留数.

6.8.4 设 $f(z)$ 在 $|z|\leqslant 1$ 内解析. 证明：

(1) 若 $|z|<1$，则
$$(1-|z|^2)f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta, C:|\zeta|=1;$$
(2) 若 $|z|<1$，则
$$(1-|z|^2)|f(z)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

证 (1) 当 $|z|<1$ 时，函数 $g(\zeta)=f(\zeta)\left(\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta-z}\right)$ 在 C 内只有点 $\zeta=z$ 是一级极点，且
$$\text{Res}[g(\zeta),z]=\lim_{\zeta\to z}(\zeta-z)g(\zeta)$$
$$=f(z)(1-z\bar{z})$$
$$=(1-|z|^2)f(z).$$
所以
$$\frac{1}{2\pi i}\int_C f(\zeta)\left(\frac{1-\bar{z}\zeta}{\zeta-z}\right)\mathrm{d}\zeta=(1-|z|^2)f(z).\qquad ①$$
(2) 在 ① 式左端的积分内，令 $\zeta=e^{i\theta}$，得
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\left(\frac{1-\bar{z}e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right)e^{i\theta}\mathrm{d}\theta=(1-|z|^2)f(z),\qquad ②$$
又由 $|e^{i\theta}|=1$，得
$$|1-\bar{z}e^{i\theta}|=|e^{i\theta}(e^{-i\theta}-\bar{z})|=|e^{-i\theta}-\bar{z}|$$
$$=|\overline{e^{i\theta}-z}|=|e^{i\theta}-z|,$$
从而
$$\left|\frac{1-\bar{z}e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right|=1.$$
再在 ② 式两端取模，得
$$(1-|z|^2)|f(z)|$$
$$=\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(e^{i\theta})\left(\frac{1-\bar{z}e^{i\theta}}{e^{i\theta}-z}\right)e^{i\theta}\mathrm{d}\theta\right|$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(e^{i\theta})|\mathrm{d}\theta.$$

6.8.5 利用留数可以使许多定积分和广义积分的计算大为简化. 首先要熟悉一些标准模式的计算方法. 对于转换出的复积分中的被积函数是单值函数的情形，有 3 种常见的标准模式：

模式 1 设 $R(\sin\theta,\cos\theta)$ 是 $\sin\theta,\cos\theta$ 的有理函数，并且在 $[0,2\pi]$ 上连续，则令 $z=e^{i\theta}$，就有
$$\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)\mathrm{d}\theta$$
$$=\int_{|z|=1}R\left(\frac{z-z^{-1}}{2i},\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$
右端是一个复有理函数沿单位圆周的积分，并在积分路线上无奇点，可利用留数计算.

模式 2　设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 是有理函数，且 $Q(x)$ 在实轴上无零点，多项式 $Q(x)$ 比多项式 $P(x)$ 至少高两次. 则广义积分

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

存在，且有

$$I=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k],$$

这里 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 是函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 在上半面：$\mathrm{Im}z>0$ 内的所有极点.

模式 3　设 $f(z)$ 在 $\mathrm{Im}z>0$ 内有有限多个奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，在实轴上有有限个一级极点 $x_1,x_2,\cdots,x_l$，且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$. 则当 $m>0$ 时，有

$$\mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{imx}\mathrm{d}x=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},a_k]+\pi i\sum_{j=1}^{l}\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},x_j].\qquad ③$$

这里 v · p 表示 Cauchy 积分主值. 比较上式两边的实部及虚部，即可求得两个积分：

$$\mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos mx\mathrm{d}x,\ \mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin mx\mathrm{d}x.\qquad ④$$

说明　当 $f(x)$ 在实轴上无瑕点时，第一型广义积分的主值定义为

$$\mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 内有一个瑕点 $c(a<c<b)$，第二型广义积分的主值定义为

$$\mathrm{v\cdot p}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{r\to0^+}\left[\int_a^{c-r}f(x)\mathrm{d}x+\int_{c+r}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right]$$

显然，当广义积分存在时，其 Cauchy 积分主值存在，并且两者相等；但反过来不成立. 这样，在利用 ③ 式来计算 ④ 中的两个积分时，若它们在通常意义下存在，算出来的就是通常的积分值；如果两个积分在通常意义下不存在，当 $f(z)$ 满足前述条件时，可算得它们的主值.

由于模式 3 在一般的复变函数教材上，除个别例题外，较少给出其一般形式. 下面对这个模式作一推导，并籍此回顾用留数计算定积分的思路.

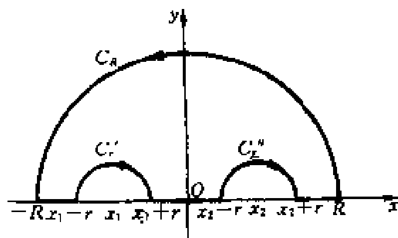


图 6.10

取辅助函数 $F(z)=f(z)e^{imz}$，这时积分闭路不能通过各极点 $x_j(j=1,2,\cdots,l)$，采用绕过奇点的办法处理（以下为了书写的方便，假定 $f(z)$ 在实轴上有两个极点 x_1,x_2，且 $x_1<x_2$）：即取闭路

$C=C_R+[-R,x_1-r]+C_r'+[x_1+r,x_2-r]+C_r''+[x_2+r,R]$，

如图 6.10 所示. 这里 C_R 是上半圆周：$|z|=R(\mathrm{Im}z\geqslant0)$；$C_r'$ 及 C_r'' 是分别以 x_1,x_2 为圆心，r 为半径的位于上半平面内的半圆周. 当 R 充分大且 r 充分小时，各奇点 $a_k(k=1,2,\cdots,n)$ 都包含在 C 内. 于是由留数定理得

$$\begin{aligned}\int_C F(z)\mathrm{d}z&=\int_{C_R}F(z)\mathrm{d}z+\int_{-R}^{x_1-r}F(x)\mathrm{d}x\\&+\int_{C_r'}F(z)\mathrm{d}z+\int_{x_1+r}^{x_2-r}F(x)\mathrm{d}x\\&+\int_{C_r''}F(z)\mathrm{d}z+\int_{x_2+r}^{R}F(x)\mathrm{d}x\\&=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[F(z),a_k].\end{aligned}\qquad ⑤$$

由 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}F(z)\mathrm{d}z=0.$$

由引理 2（Jordan 引理及引理 2 将在下面叙述），有

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r'}F(z)\mathrm{d}z=-\pi i\mathrm{Res}[F(z),x_1]$$

及

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r''}F(z)\mathrm{d}z=-\pi i\mathrm{Res}[F(z),x_2],$$

于是，在 ⑤ 式中令 $R\to\infty,r\to0$ 取极限，即得

$$\begin{aligned}&\mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{imx}\mathrm{d}x\\&=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},a_k]+\pi i\mathrm{Res}[f(z)e^{imz},x_1]\\&\quad+\pi i\mathrm{Res}[f(x)e^{imz},x_2].\end{aligned}$$

利用留数计算定积分时常用下面 3 条引理作积分估计.

引理 1　如果当 R 充分大时，$f(z)$ 在圆弧：C_R：$z=Re^{i\theta}(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 上连续，且 $\lim\limits_{z\to0}zf(z)=0$，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

特别地，当 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ 是有理函数，且 $Q(z)$ 至少比 $P(z)$ 高两次时，有 $\lim\limits_{R\to\infty}\displaystyle\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}\mathrm{d}z=0$. 在模式 2 的推导中，就要用到这个结论.

引理 2　如果当 ρ 充分小时，$f(z)$ 在圆弧 C_ρ：$z=a+\rho e^{i\theta}(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 上连续，且 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=$

k，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = i(\beta-\alpha)k.$$

特别地，若 a 是 $f(z)$ 的一级极点，则

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = i(\beta-\alpha)\mathrm{Res}[f(z),a].$$

引理1及引理2在6.4.5及其注中已讲过，在积分估计时，引理1被用来估计大圆上的积分，而引理2则用来估计小圆上的积分.

Jordan 引理 如果当 R 充分大时，$f(z)$ 在圆弧 C_R：$|z|=R$，$\mathrm{Im}z>-a$（a 为非负实常数，$a<R$）上连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$，则对任何正数 m，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{imz}\mathrm{d}z = 0.$$

计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}\theta}{a+\sin\theta}\ (\text{常数 } a>1).$$

解 因 $a>1$，$\dfrac{1}{a+\sin\theta}$ 在 $[0,2\pi]$ 上连续，故这个积分可应用模式1计算. 令 $z=e^{i\theta}$，得

$$I=\int_{|z|=1}\frac{2\mathrm{d}z}{z^2+2iaz-1}.$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{2}{z^2+2iaz-1}$ 有两个一级零点：

$$z_1=-ia+i\sqrt{a^2-1},\ z_2=-ia-i\sqrt{a^2-1}.$$

不难算得 $|z_1|<1$，$|z_2|>1$，即只有极点 z_1 在积分路线之内. 所以

$$\begin{aligned}I&=2\pi i\mathrm{Res}[f(z),z_1]\\&=2\pi i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{2}{z^2+2iaz-1}\Big|_{z=z_1}\\&=2\pi i\cdot\frac{2}{2z_1+2ia}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.\end{aligned}$$

6.8.6 求积分 $I=\int_0^{2\pi}\dfrac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x$.

解 $1+z^4=0$ 的4个根是辅助函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{1+z^4}$ 的全体极点，它们都是一级极点，其中位于上半平面内的有两个：

$$z_1=e^{\pi i/4},\ z_2=e^{3\pi i/4}.$$

再注意到 $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 内的偶函数，由模式2得

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x\\&=\pi i\{\mathrm{Res}[f(z),z_1]+\mathrm{Res}[f(z),z_2]\}\\&=\pi i\Big[\frac{1}{4}e^{-\pi i/4}+\frac{1}{4}e^{-3\pi i/4}\Big]=\frac{\sqrt{2}\pi}{4}.\end{aligned}$$

6.8.7 求积分 $I=\int_0^{\infty}\dfrac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\dfrac{\sin ax}{x}\mathrm{d}x$（$a$，$b$ 为正常数）.

解 辅助函数 $f(z)=\dfrac{z^2-b^2}{z(z^2+b^2)}$ 在上半平面内及实轴上分别有一级极点 $z=bi$ 及 $z=0$. 由模式3得

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{e^{iax}}{x}\mathrm{d}x\\&=2\pi i\mathrm{Res}[f(z)e^{iaz},bi]+\pi i\mathrm{Res}[f(z)e^{iaz},0]\\&=2\pi ie^{-ab}-\pi i.\end{aligned}$$

取虚部得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-b^2}{x^2+b^2}\cdot\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\pi(2e^{-ab}-1).$$

再注意到原积分 I 中的被积函数是偶函数，得

$$I=\pi\Big(e^{-ab}-\frac{1}{2}\Big).$$

6.8.8 求 $I=\mathrm{v.p}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x\cos x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解 由于在瑕点 $x=2$ 附近，被积函数 $\dfrac{x\cos x}{x^2-5x+6}=O\Big(\dfrac{1}{x-2}\Big)$，故所给积分在通常意义下不存在，只能求积分主值. $f(z)=\dfrac{z}{z^2-5z+6}$ 在上半平面内无奇点，在实轴上有两个一级极点 $z=2$ 及 $z=3$. 于是由模式3，得

$$\begin{aligned}&\mathrm{v}\cdot\mathrm{p}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{ix}\mathrm{d}x\\&=\pi i\{\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},2]+\mathrm{Res}[f(z)e^{iz},3]\}\\&=\pi i[-2(\cos2+i\sin2)+3(\cos3+i\sin3)]\end{aligned}$$

取实部得

$$I=\pi(2\sin2-3\sin3).$$

若取虚部可得另一个积分主值：

$$\mathrm{v}\cdot\mathrm{p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\sin x}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\pi(3\cos3-2\cos2).$$

6.8.9 求积分 $I=\int_0^{\pi}\dfrac{\cos5\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$.

分析 因被积函数为偶函数，故

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos5\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$$

如果把 $\cos5\theta$ 表示成 $\cos\theta$ 的5次多项式，使被积函数成为 $\cos\theta$ 的有理函数，再用模式1来计算，这显然比较繁. 若注意到 $\cos5\theta=\mathrm{Re}e^{i5\theta}$，就容易想到用模式3中取实部的办法处理，要简单得多.

解 令 $K=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{e^{i5\theta}}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$，则

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}K.$$

命 $z=e^{i\theta}(-\pi\leqslant\theta\leqslant\pi)$，则有

$$K=\frac{1}{i}\int_{|z|=1}\frac{z^5}{5z-2(1+z^2)}\mathrm{d}z.$$

这个积分的被积函数有两个一级极点 $z=\frac{1}{2}$ 及 $z=2$，只有 $z=\frac{1}{2}$ 在单位圆内，故

$$K=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\mathrm{Res}\left[\frac{z^5}{5z-2(1+z^2)},\frac{1}{2}\right]$$

$$=2\pi\left.\frac{z^5}{-4z+5}\right|_{z=1/2}=\frac{\pi}{48}.$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\mathrm{Re}K=\frac{\pi}{96}.$$

6.8.10　对于那些不属于前面讲的几个标准模式范畴的定积分，利用留数来计算它们时，关键在于选取一个合适的辅助函数及一条相应的辅助闭路，从而把定积分化成沿闭路的复积分．辅助函数尤其是辅助闭路的选取是很不规则的．一般说来，辅助函数 $F(z)$ 总要选得使当 $z=x$ 时，$F(x)=f(x)$；或者 $\mathrm{Re}F(x)=f(x)$；或者 $\mathrm{Im}F(x)=f(x)$（这里 $f(x)$ 是要求的定积分的被积函数）．辅助闭路的选取原则是：使添加的路线上的积分能够通过一定的办法估计出来；或者能够转化成原来的定积分，然后通过解代数方程的办法求得要算的定积分（如后面 6.8.11）．但在具体选择时，形状是多种多样的，常见的有：半圆形围道、长方形围道、扇形围道、三角形围道等等．此外，当围道上有奇点时还要绕过去．

求积分 $I=\int_0^{\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$.

解　根据这个积分中被积函数的形式，取辅助函数 $f(z)=\frac{e^{iz}-e^{-z}}{z}$，它是一个全平面上的解析函数（$z=0$ 是 $f(z)$ 的可去奇点）．又由于积分 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos x-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x$ 是发散的，故积分闭路上不能包含整个数轴．试取围道

图 6.11

$$C=[0,R]+C_R+C_1,$$

这里 C_R 是四分之一 C_1 是圆周：$|z|=R,0\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}$，虚轴上起点为 Ri，终点为原点的线段（图 6.11）．由于原点是 $f(z)$ 的可去奇点（即解析点），故积分线路不必绕过原点．于是由留数定理，得

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_0^{\infty}\frac{e^{ix}-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z$$
$$+\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=0.\qquad ⑥$$

由于在虚轴上 $z=iy$，故

$$\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=\int_R^0\frac{e^{-y}-e^{-iy}}{iy}i\mathrm{d}y=\int_0^R\frac{e^{-ix}-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

这样，⑥ 式便成为

$$2\int_0^R\frac{\cos x-e^{-x}}{x}\mathrm{d}x+\int_{C_R}\frac{e^{iz}-e^{-z}}{z}\mathrm{d}z=0.\qquad ⑦$$

由 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z}\mathrm{d}z=0.$$

又令 $\zeta=iz$，则

$$\int_{C_R}\frac{e^{-z}}{z}\mathrm{d}z=\int_{C_R'}\frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\mathrm{d}\zeta,$$

这里 C_R' 是圆周 $|z|=R$ 落在第二象限的圆弧，仍按 Jordan 引理，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{-z}}{z}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R'}\frac{e^{i\zeta}}{\zeta}\mathrm{d}\zeta=0.$$

这样，对 ⑦ 式两端令 $R\to\infty$ 取极限，即得 $I=0$.

6.8.11　求积分 $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin ax}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x$（常数 $a>0$）．

解　取辅助函数

$$f(z)=\frac{e^{iaz}}{\mathrm{sh}z}.$$

由 $\mathrm{sh}z=-i\sin iz=0$，求得 $f(z)$ 的所有奇点为 $z=n\pi i(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，它们都是一级极点．由于 $f(z)$ 在上、下半平面内都有无穷多个奇点，不宜取半圆形围道作辅助积分路线．转而考虑取一条边在实轴上的长方形围道．这种长方形围道，应选取得使沿上面水平线的积分与实轴上的积分只差一个常数因子．一般可取得使上面水平线过离实轴最近的一个奇点（πi），当然，对积分路线上的奇点要绕过去．具体说现在取的是如图 6.12 所示的围道

$$C=C_1+C_2+C_r'+C_3+C_4+[-R,-r]$$
$$+C_r''+[r,R].$$

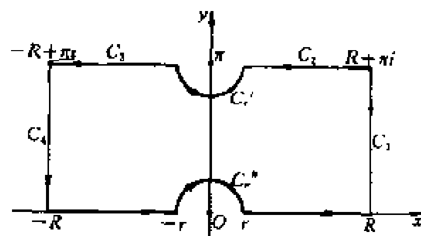


图 6.12

在这个围道内没有 $f(z)$ 的奇点，故

$$0=\int_C f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_r'}+\int_{C_3}+\int_{C_4}+\int_{-R}^{-r}f(x)\mathrm{d}x$$
$$+\int_{C_r''}+\int_r^R f(x)\mathrm{d}x.\qquad ⑧$$

对各段路线上的积分估计或计算如下：

在 C_1 上，$z=R+iy(0\leqslant y\leqslant R)$，故

$$|f(z)| = \left|\frac{2e^{ia(R+iy)}}{e^{R+iy}-e^{-(R+iy)}}\right| \leqslant \frac{2}{e^R - e^{-R}},$$

这是因为 $|e^{iaR}|=1$，$|e^{-ay}|\leqslant 1$. 再由长大不等式，便得

$$\left|\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \pi \frac{2}{e^R - e^{-R}} \to 0 \ (R\to\infty);$$

同理 $\left|\int_{C_4} f(z)\mathrm{d}z\right| \to 0\ (R\to\infty)$.

在 C_2 上，$z = x+\pi i\ (r\leqslant x\leqslant \pi)$，故

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^r \frac{e^{ia(x+\pi i)}}{\mathrm{sh}(x+\pi i)}\mathrm{d}x$$

$$= e^{-a\pi}\int_r^R \frac{e^{iax}}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x.$$

同理

$$\int_{C_3} f(z)\mathrm{d}z = e^{-a\pi}\int_{-R}^{-r}\frac{e^{iax}}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x.$$

又由引理 2，有

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r'} f(z)\mathrm{d}z = -\pi i\mathrm{Res}[f(z),\pi i] - \pi i e^{-a\pi},$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)\mathrm{d}z = -\pi i\mathrm{Res}[f(z),0] = -i\pi.$$

在 ⑧ 式两端令 $R\to\infty$ 取极限，并应用以上结论，得

$$(1+e^{a\pi})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x = \pi i(1-e^{-a\pi}),$$

即

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iax}}{\mathrm{sh}x}\mathrm{d}x = \pi i\frac{1-e^{-a\pi}}{1+e^{a\pi}} = i\pi\mathrm{th}\frac{a\pi}{2}.$$

再比较两边的虚部，得

$$I = \pi\mathrm{th}\frac{a\pi}{2}.$$

6.8.12　求 Fresnel 积分：

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x$$

及

$$\int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x.$$

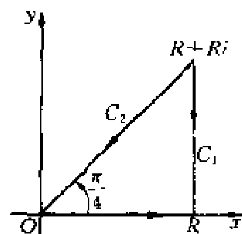


图 6.13

解　取辅助函数 $f(z)=\exp\{iz^2\}$ 及图 6.13 所示的三角形围道

$$C = [0,R]+C_1+C_2.$$

因 $f(z)$ 在 C 内无奇点，故

$$0 = \int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \exp\{ix^2\}\mathrm{d}x + \int_{C_1} + \int_{C_2}. \qquad ⑨$$

在 C_1 上，$z = R+iy\ (0\leqslant y\leqslant R)$，故

$$\left|\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z\right| \leqslant \int_0^R |\exp\{i(R+iy)^2\}|\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^R e^{-2Ry}\mathrm{d}y = \frac{1}{2R}(1-e^{-2R^2}) \to 0\ (R\to\infty).$$

在 C_2 上，$z = r\exp\{\frac{i\pi}{4}\}$，$z^2 = r^2\exp\{\frac{i\pi}{2}\} = ir^2\ (0\leqslant r\leqslant \sqrt{2}R)$，$\mathrm{d}z = \exp\{i\frac{\pi}{4}\}\mathrm{d}r$. 故

$$\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z = -\exp\{\frac{i\pi}{4}\}\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-r^2}\mathrm{d}r.$$

这样，在 ⑨ 式两边令 $R\to\infty$ 取极限，得

$$\int_0^{\infty} e^{ix^2}\mathrm{d}x = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\int_0^{\infty} e^{-r^2}\mathrm{d}r = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

这里应用了概率积分 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-r^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$. 再比较两边的实部及虚部，得

$$\int_0^{\infty}\cos x^2\mathrm{d}x = \int_0^{\infty}\sin x^2\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

6.8.13　设 m,n 都是自然数，且 $m<n$，求积分：

$$I = \int_0^{\infty}\frac{x^{2m}}{x^{2n}+1}\mathrm{d}x.$$

解　被积函数 $f(x) = \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ 是有理函数，且分母比分子至少高两次. $f(z) = \frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$ 有 $2n$ 个一级极点

$$z_k = \exp\{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}\},\ k=0,1,2,\cdots,2n-1.$$

如果用模式 2(这个模式实际上是取半圆形围道)来计算，就必须求 $f(z)$ 的位于上半平面内的 n 个极点 $z_k(k=0,1,2,\cdots,n-1)$ 的留数及它们的和. 若改取如图 6.14 所示的扇形围道

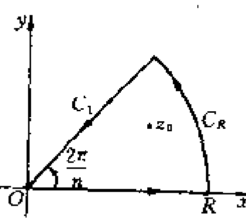


图 6.14

$$C = [0,R]+C_R+C_1,$$

当 $R>1$ 时，只有奇点 $z_0 = \exp\{\frac{i\pi}{2n}\}$ 在 C 内. 故

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} + \int_{C_1}$$

$$= 2\pi i\mathrm{Res}[f(z),z_0]$$

$$= 2\pi i\cdot\frac{z^{2m}}{2nz^{2n-1}}\Big|_{z=z_0}$$

$$= -\frac{\pi i}{n}z_0^{2m+1}$$

$$= -\frac{\pi i}{n}\exp\{\frac{2m+1}{2n}i\pi\}. \qquad ⑩$$

由引理 1，有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

在 C_1 上，$z = x\exp\{\frac{\pi i}{n}\}\ (0\leqslant x\leqslant R)$，故

$$\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z = -\exp\{\frac{2m+1}{n}\pi i\}\int_0^R\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}\mathrm{d}x.$$

这样，在 ⑩ 式两边令 $R\to\infty$ 取极限，得

$$I=-\frac{\pi i}{n}\cdot\frac{\exp\{\frac{2m+1}{2n}\pi i\}}{1-\exp\{\frac{2m+1}{n}\pi i\}}$$

$$=-\frac{\pi}{2n\sin(\frac{2m+1}{2n})\pi}.$$

6.8.14　在计算某些定积分时(例如，当被积函数中含有 $\ln x$，一般幂函数 x^{α}(α 为实数)等时)，选取的辅助复函数是多值函数，这就要对此多值函数分出明确的单值解析分支，一切的计算都必须对指定的单值分支进行.

模式 4(Mellin 变换型积分)　设 $R(z)$ 是在正实轴上无极点的有理函数，p 为实数但不是整数，且满足条件：

$$\lim_{z\to 0}z^{1+p}R(z)=0,\ \lim_{z\to\infty}z^{1+p}R(z)=0.$$

则

$$\int_0^{+\infty}x^pR(x)\mathrm{d}x=\frac{2\pi i}{1-e^{2p\pi i}}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[z^pR(z),a_k],\quad ⑪$$

这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $R(z)$ 的所有非零极点，$z^p=e^{p\ln z}$，$\ln z=\ln|z|+i\arg z(0<\arg z<2\pi)$.

证　取辅助函数 $f(z)=z^pR(z)$，这是一个以 $z=0$ 及 $z=\infty$ 为支点的多值函数. 取正实轴为支割线，在这张割开了的 z 平面内能分出 $f(z)$ 的单值解析分支. 取定一支：

$$f(z)=R(z)e^{p\ln z},$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z,0<\arg z<2\pi,$$

这一支在支割线两岸的值分别是：

在支割线上岸：$f(z)=x^pR(x)$，

在支割线下岸：$f(z)=(xe^{2\pi i})^pR(x)=e^{2p\pi i}x^pR(x)$.

取辅助闭路 $C=C_1+C_R+C_2-C_r$(图 6.15)：从正实轴上岸 $x=r(r>0)$ 处出发，沿实轴正向到 $x=R$(即 C_1)，再沿圆周 C_R：$|z|=R$ 的正向转一周到正实轴的下岸 $x=Re^{i2\pi}$ 处，然后沿正实轴的下岸的负向到 $x=re^{i2\pi}$(即 C_2)，最后沿圆周 C_r：$|z|=r$ 的负向回到出发点. 当 r 充分小且 R 充分大时，$f(z)$ 的所有奇点 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 都在闭路 C 内. 于是

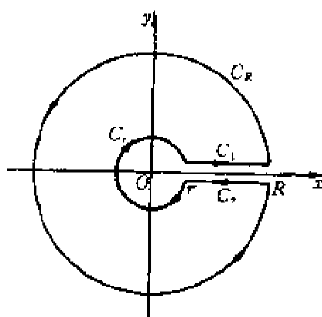


图 6.15

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_r^R x^pf(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z+e^{2p\pi i}\int_R^r f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),a_k].\quad ⑫$$

由所设条件，有

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}z^{1+p}R(z)=0,$$

$$\lim_{z\to 0}zf(z)=\lim_{z\to 0}z^{1+p}R(z)=0,$$

故分别由引理 1 及引理 2，得

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0,$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

这样，在 ⑫ 式两边令 $R\to\infty$，$r\to 0$ 取极限并变形即得 ⑪ 式.

计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{x^p}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ $(-1<p<3,\ p\neq 0,1,2)$.

解　令 $f(z)=\frac{z^p}{(1+z^2)^2}$，可用模式 4 求 I. 因 $0<1+p<4$，故

$$\lim_{z\to 0}z^{1+p}\frac{1}{(1+z^2)^2}=0,$$

$$\lim_{z\to+\infty}z^{1+p}\frac{1}{(1+z^2)^2}=0.$$

$f(z)$ 共有 2 个二级极点：i 及 $-i$，于是，当 $p\neq 0,1,2$ 时，由 ⑪ 式得

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2p\pi i}}\{\mathrm{Res}[f(z),i]+\mathrm{Res}[f(z),-i]\}.$$

由于模式 4 的推导中，取定的辐角变化范围是 $0<\arg z<2\pi$，这时 $\arg i=\frac{\pi}{2}$，$\arg(-i)=\frac{3\pi}{2}$. 故

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[(z-i)^2\cdot\frac{z^p}{(1+z^2)^2}]$$

$$=\frac{p-1}{4}i^{p+1}=\frac{p-1}{4}\exp\{\frac{p+1}{2}\pi i\}.$$

同样

$$\mathrm{Res}[f(z),-i]=\frac{p-1}{4}(-i)^{p+1}$$

$$=\frac{p-1}{4}\exp\{\frac{3(p+1)}{2}\pi i\}.$$

所以

$$I=\frac{(p-1)\pi}{2(1-e^{2p\pi i})}(e^{p\pi i}-1)e^{p\pi i/2}$$

$$=\frac{\pi(1-p)}{2}\cdot\frac{e^{p\pi i/2}}{1+e^{p\pi i}}=\frac{\pi(1-p)}{4\cos\frac{p\pi}{2}}.$$

6.8.15　计算积分 $I=\mathrm{v\cdot p}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{pt}}{1-e^t}\mathrm{d}t$ $(0<p<$

1).

解　先令 $x=e^t$，则

$$I=\mathrm{v\cdot p}\int_0^{+\infty}\frac{x^{p-1}}{1-x}\mathrm{d}x.$$

取辅助函数 $f(z)=\frac{z^{p-1}}{1-z}$，取定单值解析分支：

$$z^{p-1}=e^{(p-1)\ln z},$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z(0<\arg z<2\pi).$$

由于 $f(z)$ 在正实轴上一级极点 $z=1$，故取如图6.16所示的围道 C，在 C 内 $f(z)$ 无奇点. 由

$$\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^p}{1-z}=0\ (因\ p>0),$$

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{z^p}{1-z}=0\ (因\ p<1),$$

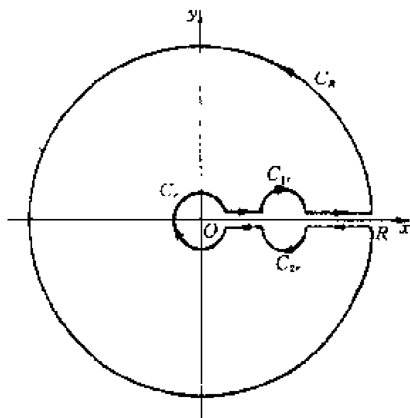


图 6.16

故

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z=0,$$

$$\lim_{r\to0}\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z=0.$$

由此利用留数定理，可得

$$(1-e^{2(p-1)\pi i})I+\lim_{r\to0}\int_{C_{1r}}f(z)\mathrm{d}z+\lim_{r\to0}\int_{C_{2r}}f(z)\mathrm{d}z.$$

由引理2，有

$$\lim_{r\to0}\int_{C_{1r}}f(z)\mathrm{d}z=\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^{p-1}}{1-z},1\right]$$

$$=-\pi i\ (这里1在上岸，故\arg1=0).$$

$$\lim_{r\to0}\int_{C_{2r}}f(z)\mathrm{d}z=\pi i\mathrm{Res}\left[\frac{z^{p-1}}{1-z},1\right]$$

$$=-\pi ie^{2(p-1)\pi i}=-\pi ie^{2p\pi i}(这里\arg1=2\pi).$$

所以

$$I=\pi i\frac{1+e^{2p\pi i}}{1-e^{2p\pi i}}=-\pi i\frac{e^{p\pi i}+e^{-p\pi i}}{e^{p\pi i}-e^{-p\pi i}}=-\pi\mathrm{ctg}p\pi.$$

6.8.16　计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

解　取辅助函数

$$f(z)=\frac{\ln z}{(1+z^2)^2},$$

这是一个以 $z=0$ 及 $z=\infty$ 为支点的多值函数. 选取如图6.17所示的辅助闭路

$$C=[r,R]+C_R+[-R,-r]+C_r.$$

由于支点0及 ∞ 已在 C 的外部，故 $f(z)$ 在 C 所围区域内可分出单值解析分支(除了 $z=i$ 为其二级极点). 约定对数函数取主支：

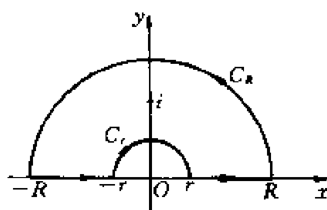


图 6.17

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z(0<\arg z<2\pi).$$

则

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}[f(z)(z-i)^2]$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{\ln z}{(z+i)^2}\Big|_{z=i}=-\frac{1}{4i}+\frac{1}{4i}\ln i.$$

因 $\ln z$ 是主支，故 $\ln i=\frac{\pi}{2}i$. 所以

$$\mathrm{Res}[f(z),i]=\frac{\pi+2i}{8}.$$

由留数定理，得

$$2\pi i\mathrm{Res}[f(z),i]=\int_r^R\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z$$

$$+\int_{[-R,-r]}f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z. \qquad ⑬$$

下面分别讨论⑬式右端各积分：

(1) 在 $[-R,-r]$ 上，$z=xe^{i\pi}(x>0)$，于是

$$\ln z=\ln x+i\pi,\mathrm{d}z=e^{i\pi}\mathrm{d}x=-\mathrm{d}x.$$

所以

$$\int_{[-R,-r]}f(z)\mathrm{d}z=\int_R^r\frac{\ln x+i\pi}{(1+x^2)^2}(-\mathrm{d}x)$$

$$=\int_r^R\frac{\ln x+i\pi}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x.$$

(2) 在 C_R 上，$z=Re^{i\varphi}(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，故

$$|\ln z|=|\ln R+i\varphi|=\sqrt{\ln^2R+\varphi^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\ln^2R+\pi^2}$$

$$\leqslant|\ln R|+\pi.$$

又

$$\left|\frac{1}{(1+z^2)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(R^2-1)^2},$$

所以

$$\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{|\ln R|+\pi}{(R^2-1)^2}\pi R\to0\ (R\to\infty).$$

(3) 在 C_r 上，$z=re^{i\varphi}(0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$，故

$$|f(z)|=\left|\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\right|$$

$$\leqslant\frac{|\ln r|+\pi}{(1-r^2)^2}\pi r\to0(r\to+0).$$

在 ⑬ 式中，令 $r\to+0, R\to+\infty$ 取极限，得

$$\frac{\pi^2 i}{4}-\frac{\pi}{2}=2\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x+\pi i\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2},$$

比较两端的实部，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{4}.$$

说明 (1) 本题也可以用图 6.16(图中不必绕过 1) 所示的闭路计算，但这时辅助函数要取

$$f(z)=\frac{(\ln z)^2}{(1+z^2)^2}.$$

建议读者把它作个练习.

(2) 从本题的计算方法可以推导出下述模式：

模式 5 设 $f(z)$ 是实轴上无极点的有理函数，且满足条件

$$\lim_{z\to\infty}zf(z)=0,$$

则

$$\int_0^{+\infty}\ln x[f(x)+f(-x)]\mathrm{d}x+\pi i\int_0^{+\infty}f(-x)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)\ln z,a_k],$$

这里 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $f(z)\ln z$ 在上半平面内的所有奇点，而且在计算留数时，$\ln z$ 取主支.

特别地，当 $f(z)$ 是偶函数时，有

$$2\int_0^{+\infty}f(x)\ln x\mathrm{d}x+\pi i\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

$$=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z)\ln z,a_k].$$

6.8.17 计算积分 $I=\int_0^{+\infty}\frac{\cos\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解 由 $\cos\ln x+i\sin\ln x=e^{i\ln x}=x^i$，可见辅助函数中应含有 z^i. 取辅助函数

$$f(z)=\frac{z^i}{z^2-1},$$

这是一个以 $z=0$ 及 $z=\infty$ 为支点的多值函数，以负实轴为支割线，取主支：

$$z^i=e^{i\ln z},$$

$$\ln z=\ln|z|+i\arg z$$

$$(-\pi<\arg z<\pi).$$

又取如图 6.18 所示的积分闭路：

$$C=C_R+C_1+C_r+C_2.$$

$f(z)$ 在 C 内只有一个一级极点 $z=1$，故

$$\mathrm{Res}[f(z),1]=\frac{z^i}{z+1}\Big|_{z=1}=\frac{1}{2}.$$

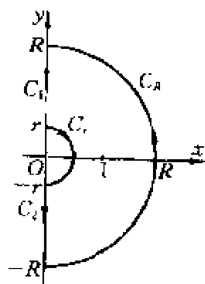


图 6.18

再由留数定理，有

$$\pi i=\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_{C_R}+\int_{C_1}+\int_{C_r}+\int_{C_2}. \qquad ⑭$$

在 C_R 上：$z=Re^{i\theta}(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，故

$$\left|\frac{z^i}{z^2-1}\right|\leqslant\frac{|R^ie^{-\theta}|}{R^2-1}\ (\text{设 } R>1)$$

$$=\frac{|e^{i\ln R}e^{-\theta}|}{R^2-1}=\frac{e^{-\theta}}{R^2-1}.$$

从而

$$\left|\int_{C_R}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{R}{R^2-1}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}e^{-\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{R}{R^2-1}(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})\to 0\ (R\to+\infty).$$

在 C_r 上：$z=re^{i\theta}(-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2})$，同上有

$$\left|\int_{C_r}f(z)\mathrm{d}z\right|\leqslant\frac{r}{1-r^2}(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})\to 0(r\to+0).$$

在 C_1 上：$z=iy(r\leqslant y\leqslant R)$，故

$$\int_{C_1}f(z)\mathrm{d}z=i\int_R^r\frac{(iy)^i}{(iy)^2-1}\mathrm{d}y$$

$$=ie^{-\pi/2}\int_r^R\frac{e^{i\ln y}}{y^2+1}\mathrm{d}y$$

$$=ie^{-\pi/2}\int_r^R\frac{e^{i\ln x}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

同理

$$\int_{C_2}f(z)\mathrm{d}z=ie^{\pi/2}\int_r^R\frac{e^{i\ln x}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

这样，在 ⑭ 式两边令 $R\to+\infty, r\to+0$ 取极限，得

$$\pi i=2i\,\mathrm{ch}\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\frac{e^{i\ln x}}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

消去公因子 i，并在等式两边取实部，得

$$I=\frac{\pi}{2\mathrm{ch}(\pi/2)}.$$

如果取虚部，还得到

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0.$$

6.8.18 设 a 是正常数，t 是非零实数. 计算复积分

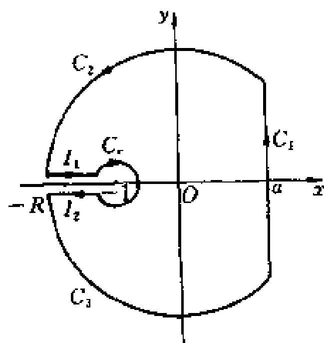


图 6.19

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{1}{\sqrt{p+1}} e^{pt} \mathrm{d}p,$$

被积函数中的多值函数取 $p=0$ 时 $\sqrt{p+1}=1$ 的一支.

解 (1) 若 $t>0$,多值函数 $\sqrt{p+1}$ 有两个支点 $p=-1$ 及 ∞,取负实轴上的射线: $-\infty<\mathrm{Re}p<-1$ 为支割线,并依题意设 $p=0$ 时,$\sqrt{p+1}=1$.取如图 6.19 所示的闭路:

$$C = C_1 + C_2 + l_1 + C_r + l_2 + C_3,$$

这里 C_1 是圆周 $|p|=R$ 与直线 $\mathrm{Re}p=a$ 相交的弦;C_2,C_3 是圆周上的弧段;l_1 是支割线上岸的线段 $[-R,-r-1]$;C_r 是圆周:$p=-1+re^{i\theta}$;l_2 是支割线下岸的线段 $[-R,-r-1]$.

按上述单值解析分支的取法,函数 $f(p)=\frac{1}{\sqrt{p+1}}e^{pt}$ 在 C 所围区域内解析.故

$$\int_C f(p)\mathrm{d}p = \int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{l_1}+\int_{C_r}+\int_{l_2}+\int_{C_3} = 0. \qquad ⑮$$

令 $z=-ip(p=iz)$,C_2+C_3 变成 $C_2'+C_3'$:$|z|=R$,$\mathrm{Im}z>-a$,由 Jordan 引理,有

$$\int_{C_2+C_3} f(p)\mathrm{d}p = i\int_{C_2'+C_3'} \frac{1}{\sqrt{iz+1}} e^{itz}\mathrm{d}z \to 0\ (R\to\infty).$$

在 C_r 上:$p=-1+re^{i\theta}(0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)$,故

$$\left|\int_{C_r} f(p)\mathrm{d}p\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{r}}e^{(r-1)t}\cdot 2\pi r \to 0\ (r\to 0).$$

在 l_1 上:$p=xe^{i\pi}(1+r<x<R)$.$\sqrt{p+1}=i\sqrt{x-1}$,故

$$\int_{l_1} f(p)\mathrm{d}p = \int_R^{1+r} \frac{1}{i\sqrt{x-1}} e^{-xt}(-\mathrm{d}x)$$

$$= -i\int_{1+r}^{R} \frac{1}{\sqrt{x-1}} e^{-xt}\mathrm{d}x(\text{令 } x-1=u)$$

$$= -ie^{-t}\int_r^{R-1} \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-ut}\mathrm{d}u(\text{令 } ut=u_1)$$

$$= \frac{-ie^{-t}}{\sqrt{t}}\int_r^{R-1} u_1^{\frac{1}{2}-1} e^{-u_1}\mathrm{d}u_1$$

$$\to -\frac{ie^{-t}}{\sqrt{t}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{ie^{-t}}{\sqrt{t}}\sqrt{\pi}\ (r\to+0,R\to+\infty).$$

同理

$$\int_{l_2} f(p)\mathrm{d}p \to -\frac{ie^{-t}}{\sqrt{t}}\cdot\sqrt{\pi}.$$

又

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} f(p)\mathrm{d}p \to I\ (R\to\infty).$$

这样,在 ⑮ 式两端令 $r\to+0$,$R\to+\infty$ 取极限,并除以 $2\pi i$,得

$$I = \frac{e^{-t}}{\sqrt{\pi t}}.$$

(2) 若 $t<0$,取图 6.20 所示的闭路(C_R 是圆周 $|p|=R$ 上的弧),易求得 $I=0$.

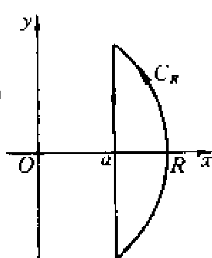


图 6.20

6.8.19 利用留数可以推出下面两条关于解析函数零点的定理.

辐角原理 设 $f(z)$ 在简单闭曲线 C 的内部可能有有限多个极点,除去这些极点外,$f(z)$ 在 C 上及其内部解析.且设在 C 上 $f(z)$ 无零点,则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi}\Delta_C\arg f(z) = N-P,$$

这里 $\Delta_C\arg f(z)$ 表示 z 绕 C 的正向一周后,$\arg f(z)$ 的变化量;N 及 P 分别表示 $f(z)$ 在 C 的内部的零点和极点的个数,并且每个 k 级零点或 k 级极点算 k 个零点或极点.

Rouch'e 定理 设函数 $f(z)$ 及 $\varphi(z)$ 在简单闭曲线 C 及其内部解析,且在 C 上满足不等式

$$|f(z)|>|\varphi(z)|,$$

则在 C 的内部 $f(z)+\varphi(z)$ 和 $f(z)$ 的零点个数相等.

设 $a>1$,证明:方程 $z^ne^{a-z}-1$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个根.

证 令 $g(z)=z^ne^{a-z}-1$,$f(z)=z^ne^{a-z}$,$\varphi(z)=-1$.当 $|z|=1$ 时,有

$$|f(z)|=|e^{a-z}|\geqslant e^{a-1}>1=|\varphi(z)|.$$

于是,由 Rouch'e 定理,$g(z)=f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数相等.而在 $|z|<1$ 内,只有 $z=0$ 是 $f(z)$ 的 n 级零点,所以 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 内有 n 个零点.结论得证.

6.8.20 求方程 $z^4-6z+3=0$ 在圆环 $1<|z|<2$ 内有多少个根.

解 令 $f(z)=-6z$,$\varphi(z)=z^4+3$,$g(z)=z^4-6z+3$.当 $|z|=1$ 时,有

$$|f(z)|=6,\quad |\varphi(z)|\leqslant|z^4|+3=4,$$

故

$$|f(z)|>|\varphi(z)|.$$

由 Rouch'e 定理,$g(z)=f(z)+\varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 $|z|<1$ 内的零点个数相等.而 $f(z)=-6z$ 在 $|z|<1$ 内只有一个单(一级)零点 $z=0$,所以 $g(z)$ 在 $|z|<1$ 只有一个单零点.

再令 $f_1(z)=z^4$,$\varphi_1(z)=-6z+3$.当 $|z|=2$ 时,有

$$|f_1(z)| = 16,\ |\varphi_1(z)| \leqslant |6z| + 3 = 15,$$

故

$$|f_1(z)| > |\varphi_1(z)|.$$

由于 $f_1(z) = z^4$ 在 $|z| < 2$ 内有一个4级零点,所以 $g(z) = f_1(z) + \varphi_1(z)$ 在 $|z| < 2$ 内有4个零点.

由前面的讨论知,当 $|z| = 1$ 时,有

$$\begin{aligned}|g(z)| &= |f(z) + \varphi(z)| \\ &\geqslant |f(z)| - |\varphi(z)| > 0,\end{aligned}$$

故 $g(z)$ 在圆周 $|z| = 1$ 没有零点.

综上知,$g(z)$ 在圆环 $1 < |z| < 2$ 内有3个零点,即方程 $z^4 - 6z + 3 = 0$ 在此圆环内有3个根.

6.8.21 设 $a > 1$,证明:方程 $z + e^{-z} = a$ 在右半平面 $\mathrm{Re}z > 0$ 内只有唯一根,而且是实根.

证 令 $g(z) = a - z - e^{-z}$,$f(z) = a - z$,$\varphi(z) = -e^{-z}$,取闭路 $C = C_R + C_1$,这里 C_R 是右半圆周:$|z| = R$,$\mathrm{Re}z \geqslant 0$,C_1 是虚轴上从点 iR 到 $-iR$ 的线段.

对于充分大的 R,在 C_R 上有

$$\begin{aligned}|f(z)| &= |a - z| \geqslant R - a > 1 \\ &\geqslant |e^{-\mathrm{Re}z}| = |e^{-z}| = |\varphi(z)|.\end{aligned}$$

在 C_1 上,$z = iy(-R \leqslant y \leqslant R)$,有

$$|f(z)| = |a - iy| \geqslant a > 1 = |e^{-iy}| = |\varphi(z)|.$$

综上知,在闭路 C 上有 $|f(z)| > |\varphi(z)|$.所以 $g(z) = f(z) + \varphi(z)$ 与 $f(z)$ 在 C 内有相同个数的零点.而 $f(z) = a - z$ 在 C 内只有一个单零点 $z = a$,所以 $g(z)$ 在 C 内有唯一的单零点.由于上述讨论中的半径 R 可取得任意大,因而 $g(z)$ 在 $\mathrm{Re}z > 0$ 内有唯一单零点.

考虑实函数 $g(x) = a - x - e^{-x}$.由于 $g(0) = a - 1 > 0$,$g(a) = -e^{-a} < 0$,由连续性知 $g(x)$ 在区间内必有正零点.

综上讨论,结论得证.

6.8.22 设 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant r$ 内解析,在 $|z| = r$ 上 $f(z) \neq 0$.证明

$$\max_{|z|=r}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \geqslant N(r),$$

这里 $N(r)$ 表示 $f(z)$ 在 $|z| < r$ 内的零点个数.

证 由于 $f(z)$ 在 $|z| < r$ 内无极点,故由辐角原理,有

$$\begin{aligned}N(r) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\mathrm{d}z\ (令\ z = re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right)\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \max_{|z|=r}\mathrm{Re}\left(z\frac{f'(z)}{f(z)}\right).\end{aligned}$$

§6.9 保形变换

如果 $w = f(z)$ 是区域 D 内的单叶解析函数,则称它是 D 内的保形变换(或保形映照),这里单叶的含义是指:当 $z_1 \in D$,$z_2 \in D$ 且 $z_1 \neq z_2$ 时,$f(z_1) \neq f(z_2)$,即不同的原象点对应不同的象点.

由于区域 D 内的保形变换 $f(z)$,对任何点 $z \in D$,有 $f'(z) \neq 0$,所以,保形变换在区域 D 上有保角性:设 z_0 是 D 内任一点,C_1 及 C_2 是 D 内两条过 z_0 的曲线,它们在映射 $w = f(z)$ 下的象分别是两条过 $w_0 = f(z_0)$ 的曲线 C_1' 及 C_2',则 C_1' 和 C_2' 在点 w_0 处的夹角,在大小和方向上都与 C_1 和 C_2 在点 z_0 处的夹角相同.

保形变换是复变函数论中最重要的课题之一,它的基本问题是:已给两个满足一定条件的区域 D_1 及 D_2,能不能和怎样找到一个保形变换把 D_1 映照成 D_2,其实只要能把区域 D_1 映照成单位圆内部就行了.这是因为如果 $\zeta = f(z)$ 把 D_1 映成 $|\zeta| < 1$,$\zeta = g(w)$ 把 D_2 映成 $|\zeta| < 1$(因而逆映射 $w = g^{-1}(\zeta)$ 把 $|\zeta| < 1$ 映成 D_2),则复合映射 $w = g^{-1}[f(z)]$ 就把 D_1 映成 D_2.这是我们在做题时,常把一个区域映成单位圆(或上半平面)的原因之一.关于保形变换的存在性及唯一性有下面的基本定理:

Riemann 定理 如果 D 是闭复平面上的一个边界至少包含有两个点的单连通区域,则必存在保形变换 $w = f(z)$ 把 D 映照成单位圆的内部 D_1:$|w| < 1$.如果还要求把 D 内的一个已知点 z_0 变为 D_1 内指定的点 w_0,且过点 z_0 的已知方向变成已知方向,即要求 $f(z)$ 满足条件

$$f(z_0) = w_0,\ \arg f'(z_0) = \alpha_0,$$

这里 α_0 是已给实常数,则这个变换是唯一的.

6.9.1 证明:(1) 函数 $w = z^2 + 2z + 3$ 是单位圆 $|z| < 1$ 内的单叶解析映照;(2) 它在任何更大的圆 $|z| < 1 + \varepsilon$(ε 为任意正数)内是非单叶的.

证 (1) 用反证法.若否,则必存在 $z_1 \neq z_2$($|z_1| < 1$,$|z_2| < 1$),使得 $z_1^2 + 2z_1 + 3 = z_2^2 + 2z_2 + 3$,因而

$$(z_1 - z_2)(z_1 + z_2 + 2) = 0. \qquad ①$$

由于 $z_1 \neq z_2$,故 $z_1 + z_2 + 2 = 0$.但另一方面,又有

$$|z_1 + z_2 + 2| > 2 - |z_1| - |z_2| > 0.$$

导致矛盾.这就证得 $w = z^2 + 2z + 3$ 在单位圆内是单叶的.又显然 w 在 $|z| < 1$ 内解析.结论得证.

(2) 由①式可见,只要能在圆 $|z| < 1 + \varepsilon$ 内找到两点 $z_1 \neq z_2$,使得 $z_1 + z_2 + 2 = 0$,由此即得 $w(z_1) = w(z_2)$,从而说明了函数 w 在 $|z| < 1 + \varepsilon$ 内是非单叶的.

不妨设 $\varepsilon < 1$.取 $z_1 = -\varepsilon_1(1 - \varepsilon < \varepsilon_1 < 1)$,$z_2 = -2 + \varepsilon_1$,则 $z_1 + z_2 + 2 = 0$,且 $|z_1| = \varepsilon_1 < 1 +$

$\varepsilon, |z_2| \geq 2-\varepsilon_1 < 1+\varepsilon$.

6.9.2 试确定下列函数 $w=f(z)$ 在 z-平面上的哪些点是保角的,哪些点是不保角的:

(1) $f(z)=z^2+z+1$;

(2) $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

解 (1) 当 $z\neq -\frac{1}{2}$ 时,$f'(z)=2z+1\neq 0$.故在这些点 $f(z)$ 是保角的.由配方得

$$f(z)=\left(z+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

由此可见,通过 $z=-\frac{1}{2}$ 的射线 $C_1:z=-\frac{1}{2}+re^{i\theta}(0\leq r<\infty,\theta$ 为常数)被映照成 w-平面上从 $w=\frac{3}{4}$ 出发的射线 $C_1':w=\frac{3}{4}+r^2e^{i2\theta}$.又令 $\theta=0$,可见 x 轴上的射线 $C_2:z=-\frac{1}{2}+r$ 被映照成 u 轴上的射线 $C_2':w=\frac{3}{4}+r^2$.而 C_1 与 C_2 的夹角是 θ,C_1' 与 C_2' 的夹角是 2θ.所以映照 $f(z)=z^2+z+1$ 在点 $z=-\frac{1}{2}$ 处是不保角的.

(2) 这时 $f'(z)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{z^2}\right)$.由此可见,当 $z\neq\pm 1$ 时,$f'(z)\neq 0$,故 $f(z)$ 在 $z\neq\pm 1$ 时是保角的.在点 $z=\pm 1$ 处圆周 $|z|=1$ 与 x 轴正交.而在映照 $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 下,圆周 $|z|=1$ 的象曲线的方程是

$$w=\frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})=\cos\theta(0\leq\theta\leq\pi).$$

这是 u 轴上的线段 $[-1,1]$,又 x 轴被映照成 u 轴上的两条射线:$w=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)(-\infty<x<0,0<x<+\infty)$.所以,映照 $f(z)$ 在 $z=\pm 1$ 处是不保角的.

6.9.3 试求线段 $C:x=1,-1\leq y\leq 1$ 在映照 $w=z^2$ 下的象曲线的长度.

解 $w=z^2$ 在线段 C 上的点 $z=1+iy(-1\leq y\leq 1)$ 处的伸长度是

$$|w'|=2|z|=2\sqrt{1+y^2}.$$

故象曲线的长为

$$l=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y^2}\,dy=2\sqrt{2}+\ln(3+2\sqrt{2}).$$

6.9.4 设 $f(z)$ 在可求面积的区域 D 内单叶解析,且 $|f(z)|\leq 1$.证明:

$$\iint_D |f'(z)|^2 dxdy\leq\pi.$$

证 设 $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 把区域 D 映成区域 D_1.则区域 D_1 的面积是

$$A=\iint_{D_1}dudv=\iint_D\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|dxdy.$$

由 C-R 方程,得 Jacobi 行列式

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\begin{vmatrix}u_x & u_y\\ v_x & v_y\end{vmatrix}=u_xv_y-v_xu_y$$
$$=u_x^2+v_x^2=|u_x+iv_x|^2$$
$$=|f'(z)|^2.$$

所以

$$A=\iint_D|f'(z)|^2dxdy.$$

因 $|f(z)|\leq 1$,故 D_1 在单位圆 $|w|\leq 1$ 内,所以 D_1 的面积 $A\leq\pi$.

6.9.5 证明:如果存在保形变换 $w=f(z)$,把区域 D 变成单位圆 $|w|<1$,则 D 不能是闭复平面或去掉一点 a 的闭复平面.

证 分几种情形考虑:

(1) 若 D 是闭复平面或开复平面(即闭复平面去掉 ∞ 点),这时对任一点 $z\in D$ 有 $|f(z)|<1$.从而由 Liouville 定理知 $f(z)\equiv$ 常数,这与 $f(z)$ 的单叶性相矛盾.

(2) 若 D 是去掉一点 $a(\neq\infty)$ 的闭复平面,由于保形变换 $z=a+\frac{1}{\zeta}$ 把开复平面 ζ 映照成 D,从而保形变换 $w=f\left(a+\frac{1}{\zeta}\right)$ 把开复平面 ζ 映照成单位圆 $|w|<1$,但根据(1)这是不可能的.

注 本题说明:如果存在保形变换 $w=f(z)$ 把区域 D 映成单位圆 $|w|<1$,则 D 的边界至少包含两个点(请与 Riemann 定理作一对比).

6.9.6 设 $w=f(z)$ 是全平面的解析函数,且 $\mathrm{Re}f(z)>0$,证明 $f(z)$ 恒为常数.

证 设 $\zeta=g(w)$ 是一个把右半平面 $\mathrm{Re}w>0$ 映为单位圆 $|\zeta|<1$ 的保形变换(这种变换的存在性可由 Riemann 定理或利用分式线性变换来说明).于是,由所设条件 $\zeta=g(w)=g[f(z)]$ 是 z 平面内的解析函数,且 $|g[f(z)]|<1$.因而由 Liouville 定理,$g[f(z)]\equiv$ 常数,由此又得 $f(z)\equiv$ 常数.事实上,若 $f(z)$ 不恒为常数,则存在 $z_1\neq z_2$,使 $f(z_1)\neq f(z_2)$.再由 $g(w)$ 的单叶性,得 $g[f(z_1)]\neq g[f(z_2)]$,这与 $g[f(z)]\equiv$ 常数相矛盾.

6.9.7 若 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将单位圆周 $|z|=1$ 映成一条直线,则系数应满足什么条件?

解法 1 首先为使 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 不恒为常数,应有 $ad-bc\neq 0$.再由所设条件,它应将单位圆上一点映照成 $w=\infty$.因分式线性函数是双方单值的,并且对

所给的分式线性函数有 $w(-\frac{d}{c})=\infty$，故点 $-\frac{d}{c}$ 应在单位圆周上，即 $|-\frac{d}{c}|=1$，亦即 $|c|=|d|$. 反之，当 $ad-bc\neq 0$ 且 $|c|=|d|$ 时，由分式线性变换的保圆性知，$w=\frac{az+b}{cz+d}$ 把单位圆周 $|z|=1$ 映照成直线. 于是，所求的（充要）条件是：$ad-bc\neq 0$，且 $|c|=|d|$.

解法2 由解法1知 $ad-bc\neq 0$. 再从 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 解得

$$z=\frac{-dw+b}{cw-a}.$$

当 $|z|=1$ 时，得 $|b-dw|=|cw-a|$，即

$$(dw-b)(\bar{d}\bar{w}-\bar{b})=(cw-a)(\bar{c}\bar{w}-\bar{a}),$$

亦即

$$(|d|^2-|c|^2)|w|^2+(\bar{a}c-\bar{b}d)w+(a\bar{c}-b\bar{d})\bar{w}+|b|^2-|a|^2=0.$$

此式表示直线的充要条件是 $|w|^2$ 的系数为零，即 $|c|=|d|$. 以下叙述与解法1相同.

注 在解决许多保形变换的问题时，常要用到分式线性变换的一些基本性质：保圆性；保对称点不变性；保交比不变性，即

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}:\frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}=\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}, \quad ②$$

由这个式子所确定的隐式函数 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 唯一地确定满足条件 $w(z_k)=w_k(k=1,2,3)$ 的分式线性变换.

由②式立即得知：若 $w=w(z)$ 是一分式线性变换，且 $w(z_1)=w_1$，$w(z_2)=w_2$，则此分式线性变换可表示为

$$\frac{w-w_1}{w-w_2}=k\frac{z-z_1}{z-z_2} \ (k\text{ 为任意非零复常数}).$$

特别地，若 $w(z_1)=0$，$w(z_2)=\infty$，则

$$w=k\frac{z-z_1}{z-z_2}.$$

这一事实在求具体的分式线性变换时常用到，式中的复常数 k 可由其它条件确定.

6.9.7 的解法1是基于分式线性变换的保圆性，在应用这个性质时，为了判定一个圆周 C 究竟是映照成圆周还是直线，只要考察 C 的象曲线上有没有无穷远点就可以确定，这在解题时是常用的. 解法2实际上是求出了单位圆周 $|z|=1$ 在所给映射下的象.

6.9.8 试证明：分式线性变换 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 把上半 z 平面 $\mathrm{Im}z>0$ 映为上半 w 平面 $\mathrm{Im}w>0$ 的充要条件是 a,b,c,d 为实数，且 $ad-bc>0$.

证 充分性. 因 a,b,c,d 是实数，故 z 为实数时，w 亦为实数，即所给映射将实数轴映照成实数轴. 又因

$$w'(z)=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}, \quad ③$$

故当 $z=x$（实数）且 $(cx+d)^2\neq 0$ 时，$w'(x)>0$. 于是由导数的几何意义知所给映射在实数轴上的转动角为零，所以 $\mathrm{Im}z>0$ 被映照成 $\mathrm{Im}w>0$.

必要性. 设分式线性函数 $w=w(z)$ 将 $\mathrm{Im}z>0$ 映照成 $\mathrm{Im}w>0$，则实轴上的三点 $x_1<x_2<x_3$ 应分别映为实轴上的三点 $u_1<u_2<u_3$. 故所给映射由

$$\frac{w-u_1}{w-u_2}:\frac{u_3-u_1}{u_3-u_2}=\frac{z-x_1}{z-x_2}:\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}$$

确定. 显然，由此解得的显式

$$w=\frac{az+b}{cz+d}$$

中的系数 a,b,c,d 都是实数. 再由③式可见，为使实数轴的旋转角为零，必须 $ad-bc>0$.

6.9.9 分式线性映射 $w=\frac{2z-i}{2iz-1}$ 将 $\mathrm{Im}z<0$ 映成 w 平面上的什么区域？

解 当 z 位于实轴上，即 $z=x$ 时，有

$$|w|=\left|\frac{2x-i}{2ix-1}\right|=1,$$

故所给映射把 $\mathrm{Im}z=0$ 映成单位圆周 $|w|=1$. 再注意到 $w(-\frac{i}{2})=\infty$，所以这个映射把 $\mathrm{Im}z<0$ 映为单位圆外部：$|w|>1$.

注 由保圆性，分式线性函数 $w=w(z)$ 把 z 平面上的圆周（包括直线）C 映照成 w 平面的圆周（包括直线）C'. 圆周 C 把 z 平面划分成两个以 C 为公共边界的区域 D_1 及 D_2，C' 把 w 平面划分成两个区域 D_1' 及 D_2'. 为确定 D_1 究竟是映成 D_1' 还是 D_2'，有两种方法：(1) 根据边界的对应方向确定：设 z_1,z_2,z_3 是 C 上的三点，$w_k=w(z_k)(k=1,2,3)$ 是 C' 上与之对应的三点. 若在 C 上由 z_1 经 z_2 走向 z_3 时，区域 D_1 位于其左边，则在 C' 上由 w_1 经 w_2 走向 w_3 时，位于其左边的区域就是 D_1 在映射 $w=w(z)$ 下的象区域. (2) 在 D_1 中取一点 z_0，看象点 $w(z_0)$ 落在哪个区域里，这个区域就是 D_1 的象区域. 本题是根据上述(2)做的.

6.9.10 求一分式线性映射，把圆周 C_1：$|z-3|=9$ 及圆周 C_2：$|z-8|=16$ 所围成的偏心圆环域（图6.21）映照成中心在 $w=0$ 的同心圆环域，并使其外半径为1.

解 设所求分式线性函数 $w=w(z)$ 把 C_1 及 C_2 分别映成以 $w=0$ 为中心的同心圆周 C_1' 及 C_2'. 又设 $w(z_1)=0$，$w(z_2)=\infty$. 因 0 及 ∞ 关于圆周 C_1' 和 C_2' 都对称，所以，z_1 及 z_2 关于圆周 C_1 和 C_2 都对

称.由此可见，z_1,z_2 应在 C_1 及 C_2 的圆心的连线上，即在实轴上.设 $z_1=x_1,z_2=x_2$，则有

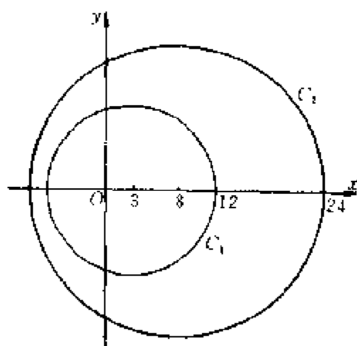


图6.21

$$\begin{cases}(x_1-3)(x_2-3)=9^2=81,\\(x_1-8)(x_2-8)=16^2=256.\end{cases}$$

解之得 $x_1=-24,x_2=0$(或 $x_1=0,x_2=-24$).由 $w(-24)=0$ 及 $w(0)=\infty$，所求映射可写成

$$w=k\frac{z+24}{z}.$$

下面确定 k.因 $z_0=0$ 在 C_1 及 C_2 的内部，而其象 $w(z_0)=\infty$ 在 C_1' 及C_2' 的外部，故 C_1' 应是同心圆环的外圆周 $|w|=1$.又因 $z=12$ 在 C_1 上，所以

$$1=|w(12)|=|k|\frac{12+24}{12}=3|k|.$$

从而 $k=\frac{1}{3}e^{i\theta}$(θ 为任意实常数)，于是，得到一个符合要求的映射为

$$w=e^{i\theta}\frac{z+24}{3z}.$$

如取 $z_1=0,z_2=-24$，则同法可求得另一个合要求的映射

$$w=e^{i\theta}\frac{2z}{z+24}.$$

6.9.11　试证明：只要适当地选取 k 值，一定存在着这样的分式线性变换，它将任意给定的相异四点映成 $1,-1,k$ 及 $-k$.

证　设 z_1,z_2,z_3,z_4 是 z 平面上的相异四点，则将 z_1,z_2,z_3 映成 $1,-1,k$ 的分式线性变换为

$$\frac{z-z_1}{z-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{w-1}{w+1}:\frac{k-1}{k+1}.\qquad ④$$

为使 $w(z_4)=-k$，故 k 应选择得使

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=\frac{-k-1}{-k+1}:\frac{k-1}{k+1}=\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2.$$

记上式左边的交比为 A，则上式可化为

$$A(k-1)^2=(k+1)^2,$$

即

$$(A-1)k^2-2(A+1)k+(A-1)=0.\qquad ⑤$$

上面的讨论说明：只要把 k 选取为二次方程 ⑤ 的非零根，则由 ④ 式确定的分式线性变换把四个不同点 z_1,z_2,z_3,z_4 映成 $1,-1,k$ 及 $-k$.

现在剩下的事情是证明方程 ⑤ 必有非零根，这只须证明 $A\neq1$ 即可.反设 $A=1$，即

$$\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}:\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}=1,$$

亦即

$$(z_4-z_1)(z_3-z_2)=(z_4-z_2)(z_3-z_1).$$

再展开化简，得

$$z_1(z_3-z_4)=z_2(z_3-z_4).$$

因 $z_3\neq z_4$，故得 $z_1=z_2$.这就导致矛盾.

注　6.9.7～6.9.11 是几个关于分式线性变换的常见题型.对于许多求保形变换的问题，要用分式线性映射和其它一些初等函数的映射复合起来才能解决.而且解许多题的第一步，常是使用分式线性映射，它起着一种把圆弧“拉直”(即映成某直线的一部分)的作用.在实际解题时，还要注意使用下面几个函数.

(1) 幂函数 $w=z^{n/m}$($\frac{n}{m}$ 是既约分数)的以正实轴为支割线且 $w(1)=1$ 的一支：

$$w=r^{\frac{n}{m}}e^{i\frac{n}{m}\varphi}(z=re^{i\varphi},0<\varphi<\pi).$$

把角域：$0<\arg z<\frac{m\pi}{n}$($\frac{m\pi}{n}\leqslant2\pi$)保形地映成半平面：$0<\arg w<\pi$.

(2) 指数函数 $w=e^z$ 把条形域 D：$0<\operatorname{Im}z<a(a\leqslant2\pi)$ 保形地映成角域 D_1：$0<\arg w<a$；对数函数的主支：

$$w=\ln z=\ln|z|+i\arg z\ (0<\arg z<2\pi)$$

保形地将角域 $0<\arg z<a$ 映成条形域 $0<\operatorname{Im}w<a$.

6.9.12　求一保形变换，把区域 D：$|z|<1$，$|z+i|<1$ 映照成上半平面.

分析　区域 D 的边界是两段圆弧，如果用一个分式线性函数把这两段圆弧的两个交点分别映成 0 及 ∞，这两段圆弧都被“拉直”，D 就变成一个角域 D_1，然后再用幂函数就可以把 D_1 变成半平面.

解　不难算得两圆周 $|z|=1$ 及 $|z+i|=1$ 的交点是

$$z_1=\frac{1}{2}(\sqrt3-i),\quad z_2=-\frac{1}{2}(\sqrt3+i).$$

(1) 作分式线性映射

$$w_1=\frac{z-z_2}{z-z_1}=\frac{2z+\sqrt3+i}{2z-\sqrt3+i},\qquad ⑥$$

它把 z_2 映为0，z_1 映为 ∞.因而区域 D 的边界圆弧 l_1

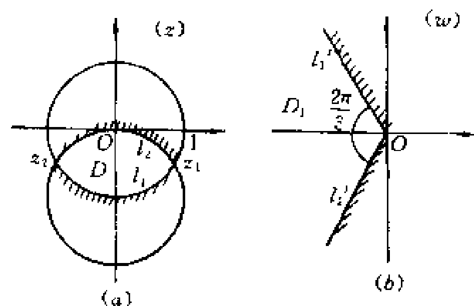


图6.22

及 l_2(图6.22(a))分别映为从原点出发的射线 l_1' 及 l_2'. 为了确定 l_1' 及 l_2' 的位置,可分别在 l_1 及 l_2 上取点 $z=-i$ 及 $z=0$,代入⑥式,得象点

$$w_1(-i)=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2},w_1(0)=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}.$$

从而可确定出 l_1' 及 l_2' 的位置(图6.22(b)).这样,映射(1)把 D 映成角域 D_1:$\frac{2\pi}{3}<\arg w_1<\frac{4}{3}\pi$.

(2) 作旋转变换

$$w_2=e^{-\frac{2}{3}\pi i}w_1$$

把 D_1 映成角域 D_2:$0<\arg w_2<\frac{2\pi}{3}$.

(3) 映射 $w=w_2^{3/2}$(取以正实轴为支割线,$w(1)=1$ 的一支)把角域 D_2 扩大 $\frac{3}{2}$ 倍,即映成上半 w 平面.

把映射(1)、(2)、(3)复合起来,得到一个符合要求的保形映射

$$w=\left(\frac{2z+\sqrt{3}+i}{2z-\sqrt{3}+i}\right)^{3/2}.$$

6.9.13 求一保形变换:把区域 D:$|z|>2$,$|z-3|>1$ 映成上半 w 平面 $\text{Im}w>0$.

解 (1) 所给区域 D 是两个相外切于点 $z=2$ 的圆周的外部,只要作一个把2映成 ∞ 的分式线性变换,就把这两个相外切的圆映成两条平行线.例如,作变换 $z_1=\frac{z+2}{z-2}$,由 $z_1(4)=3$,$z_1(3+i)=3-2i$,$z_1(-2)=0$,可以确定出这两条平行线是 $\text{Re}z=3$ 及 $\text{Re}z=0$. 从而区域 D 被保形地映成条形域 D_1:$0<\text{Re}z<3$.

(2) 相似及旋转映射 $z_2=\frac{\pi i}{3}z_1$ 把 D_1 保形地映成条形域 D_2:$0<\text{Im}z<\pi$.

(3) $w=e^{z_2}$ 把 D_2 保形地映成上半 w 平面 $\text{Im}w>0$

把映射(1)、(2)、(3)复合起来,得到一个符合要求的保形变换

$$w=\exp\left\{\frac{\pi i(z+2)}{3(z-2)}\right\}.$$

注 一般地说,对图6.23所示的由两段圆弧(直线段也看作是圆弧)所围弓形域或月牙形域,都可以如6.9.12那样,用分式线性变换 $\frac{z-a}{z-b}$ 保形地映成角域,再用幂函数保形地映成上半平面.对图6.24所示由两个相内切于 a 的圆所围的区域 D,可用分式线性变换 $\frac{1}{z-a}$ 保形地映成两条平行线所围条形域 D_1;再通过平移、旋转及相似变换可把 D_1 保形地映成条形域 D_2:$0<\text{Im}\zeta<\pi$;最后用指数函数 $w=e^{\zeta}$ 把 D_2 保形地映成上半平面.



图6.23

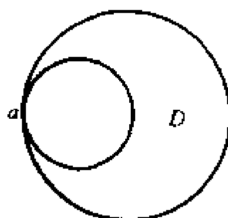


图6.24

6.9.14 设 G 是从带域 $0<\text{Im}z<\pi$ 除去线段 l:$x=0,0\leqslant y\leqslant h(0<h<\pi)$ 而得的区域(图6.25(a)),试求一保形变换把 D 映成上半平面.

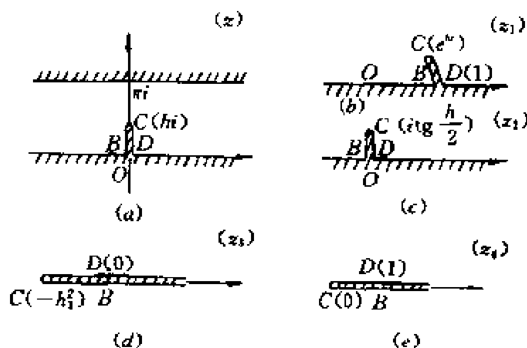


图6.25

分析 指数函数 e^z 能把带域 $0<\text{Im}z<\pi$ 映成上半平面,现在 G 是有割痕 l 的带形 $0<\text{Im}z<\pi$,e^z 把 G 变成有割痕的上半平面.故可先作映射 $z_1=e^z$,再设法逐步把上半平面的割痕消去.

解 (1) 作映射 $z_1=e^z$,割痕 l:$x=0,0\leqslant y\leqslant h$ 映成上半单位圆周上的一段弧 $\overset{\frown}{CD}$(图6.25(b)),这里 C,D 分别是点 $z=1$ 及点 $z=e^{hi}$,因而 G 保形地映成上半 z_1 平面去掉 $\overset{\frown}{CD}$ 而得的区域 G_1.

(2) 映射 $z_2=\frac{z_1-1}{z_1+1}$ 把圆弧"拉直",点 e^{ih} 的象是

$$\frac{e^{ih}-1}{e^{ih}+1}=i\,\mathrm{tg}\frac{h}{2}=ih_1.$$

因而 G_1 保形地映成有割痕:$\mathrm{Re}z_2=0,0\leqslant\mathrm{Im}z_2\leqslant h_1$ 的上半平面 G_2(图 6.25(c)).

(3) 映射 $z_3=z_2^2$ 把 G_2 保形地映成沿射线:$h_1^2\leqslant\mathrm{Re}z_2<+\infty,\mathrm{Im}z_2=0$ 割开了的 z_3 平面 G_3.

(4) 平移映射 $z_4=z_3+h_1^2$,把 G_3 保形地映成沿正实轴割开了的 z_4 平面 G_4.

(5) 映射 $w=\sqrt{z_4}$(正实轴为支割线,$\sqrt{-1}=i$ 的一支)把 G_4 保形地映成上半 w 平面.

把映射(1)～(5)复合起来,得到一个符合要求的保形映射

$$w=\sqrt{\left(\frac{e^z-1}{e^z+1}\right)^2+\mathrm{tg}^2\frac{h}{2}}$$
$$=\sqrt{\mathrm{tg}^2\frac{z}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{h}{2}}.$$

6.9.15 求一保形变换,把闭 z 平面上的单位圆外部 $D:|z|>1$ 映照成闭 w 平面上去掉线段:$-1\leqslant\mathrm{Re}w\leqslant1,\mathrm{Im}w=0$ 而得的区域 G.

解 (1) 作分式线性函数

$$z_1=\frac{z+1}{z-1},$$

由 $z(1)=\infty,z_1(i)=-i,z_1(-1)=0$,可见这个函数把圆周变成虚轴,而且区域 D 被保形地映成右半平面 $D_1:\mathrm{Re}z_1>0$.

(2) 映射 $t=z_1^2$ 把 D_1 保形地映成 t 平面去掉负实轴而得的区域 D_2.

综上知,函数 $t=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$ 把 D 保形地映成 D_2.

(3) 作分式线性函数

$$t=\frac{w+1}{w-1},$$

由 $t(-1)=0,t(0)=-1,t(1)=\infty$,可见割线段:$-1\leqslant\mathrm{Re}w\leqslant1,\mathrm{Im}w=0$ 被映成负实轴,把区域 G 保形地映照成 t 平面上的区域 D_2.

这样,就求得了两个函数把题中所述的区域 D 及 G 保形地映成 t 平面的同一区域 D_2.消去 t,得

$$\frac{w+1}{w-1}=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2,$$

解得

$$w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad ⑦$$

它是一个把区域 D 映成区域 G 的保形变换.

注 (1) 函数⑦是一个很有用的映射,称为 Жуковский 函数.现在考虑它把单位圆的内部 D_*:$|z|<1$ 映成什么区域.先作变换 $z_1=\frac{1}{z}$,它把区域 D_* 保形地映成区域 D:$|z_1|>1$;再作变换 $w=\frac{1}{2}\left(z_1+\frac{1}{z_1}\right)$,它把 D 保形地映成 6.9.15 中所述区域 G.所以 Жуковский 函数⑦把单位圆内部保形地映照成去掉实轴上的线段 $[-1,1]$ 的 w 平面.

(2) 在⑦式中,令 $z=re^{i\varphi},w=u+iv$,得

$$\begin{cases}u=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\varphi,\\ v=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\varphi=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)\sin\varphi.\end{cases}$$

由此可见,Жуковский 函数把圆周 $|z|=r(r<1)$ 映成按负向画出的以 $w=\pm1$ 为焦点的椭圆周

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4}\left(r+\frac{1}{r}\right)^2}+\frac{v^2}{\frac{1}{4}\left(r-\frac{1}{r}\right)^2}=1.$$

由此不难得知,Жуковский 函数把上(或下)半单位圆的内部保形地映成下(或上)半平面.

6.9.16 求一保形变换,把从单位圆 $|z|<1$ 内去掉线段 l:$\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant1,y=0$ 而得的区域 G 映成上半 w 平面 $\mathrm{Im}w>0$.

解法 1 (1) 由于 G 是有割痕 l 的单位圆内部,映射 $z_1=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$ 把割痕 l 映成线段:$1\leqslant\mathrm{Re}z_1\leqslant\frac{5}{4},\mathrm{Im}z_1=0$.因而 G 被保形地映成 z_1 平面去掉线段 l_1:$-1\leqslant\mathrm{Re}z_1\leqslant\frac{5}{4}$ 而得的区域 G_1.

(2) 作使 $z_1(-1)=0,z_2(\frac{5}{4})=\infty$ 的分式线性变换

$$z_2=\frac{z_1+1}{\frac{5}{4}-z_1}=\frac{4z_1+4}{5-4z_1}.$$

由 $z_2(0)=\frac{4}{5}$,可见 l_1 被映成射线 l_2:$0\leqslant\mathrm{Re}z_2\leqslant\infty,\mathrm{Im}z_2=0$.$G_1$ 被保形地映成沿正实轴割开的 G_2 平面.

(3) 根式函数 $w=\sqrt{z_2}$(取以正实轴为支割线,$w(-1)=i$ 的一支)把区域 G_2 保形地映成上半 w 平面.

综合(1)、(2)、(3),得到一个符合要求的保形变换

$$w=\sqrt{\frac{2z^2+4z+2}{-2z^2+5z-2}}.$$

在不增加附加条件的情况下,求一个区域到另一个区域的保形变换的途径是多种多样的,而且求得的结果也不相同.下面再给出本题的一些解法途径.具体细节请读者自己完成.

解法 2 先用分式线性变换

$$z_1 = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z} = \frac{2z-1}{2-z}$$

把区域 G 保形地映成去掉线段:$0 \leqslant \mathrm{Re} z_1 \leqslant 1$ 的单位圆 G_1. 再以根式函数 $z_2 = \sqrt{z_1}$ 的一支,把区域 G_1 保形地映成上半单位圆 G_2. 至于把 G_2 保形地映成上半平面就容易了. 例如,用 $z_3 = \frac{1}{2}(z_2 + \frac{1}{z_2})$ 可把 G_2 保形地映成下半 z_3 平面 G_3:$\mathrm{Im} z_3 < 0$. 最后作旋转变换 $w = -z_3$ 即将 G_3 保形地映成上半 w 平面.

此外,读者还不难求得,函数

$$w = \left(\frac{1+z_2}{1-z_2}\right)^2$$

也能把区域 G_2 保形地映成上半 w 平面.

解法 3 用一个分式线性函数把 $|z| < 1$ 映成上半平面,这样区域 G 就保形地映成去掉一段圆弧(由保角性知此圆弧与实数轴垂直)的上半平面,以下的步骤如 6.9.14 的(2) ~ (5).

6.9.17 证明 $w = \sin z$ 是半带形域 D: $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re} z < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im} z > 0$ 内的单叶解析函数,又问它把 D 映成什么区域?

解 由于

$$w = \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{1}{2}\left(-ie^{iz} + \frac{1}{-ie^{iz}}\right),$$

故可把映射 $w = \sin z$ 看成是由下面几个映射复合而成:

$$z_1 = iz = e^{i\pi/2} z, \quad z_2 = e^{z_1},$$

$$z_3 = -iz_2 = e^{-i\pi/2} z_2, \quad w = \frac{1}{2}\left(z_3 + \frac{1}{z_3}\right).$$

映射 z_1 把半带域 D 保形地映成半带域 D_1:$\mathrm{Re} z_1 < 0$, $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Im} z_1 < \frac{\pi}{2}$;映射 z_2 把 D_1 保形地映为右半单位圆 D_2: $|z| < 1$, $\mathrm{Re} z > 0$;射映 z_3 把 D_2 保形地映为下半单位圆 D_3: $|z_3| < 1$, $\mathrm{Im} z_3 < 0$;映射 w 是 Жуковский 函数,它把 D_3 保形地映为上半平面 $\mathrm{Im} w > 0$. 综合起来,即知 $w = \sin z$ 是 D 内的单叶解析函数,并把 D 保形地映为上半平面.

注 研究一个比较复杂的初等函数的映射时,常将它分解成一些比较简单的函数,然后逐一研究它们的映射.

6.9.18 函数 $w = \frac{z}{(z-1)^2}$ 把单位圆 D: $|z| < 1$ 映成什么区域?

解 由于

$$w = \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{1}{z + \frac{1}{z} - 2},$$

故知此映射可以看成是下列映射:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), z_2 = 2z_1, z_3 = z_2 - 2, w = \frac{1}{z_3}$$

的复合映射. 由此不难得知,题设映射把 D 保形地映成去掉半射线:$\mathrm{Re} w \leqslant -\frac{1}{4}$, $\mathrm{Im} w = 0$ 的 w 平面.

在保形映射的实际应用中,除要求把给定的区域映成简单的区域外,还提出了一些附加的要求. 解这类问题时,应注意在变换过程中一些特殊点的对应关系,特别是在用多值函数作映射时,要注意割线上两岸的点的对应关系.

6.9.19 求一保形变换,把单位圆内部 G: $|z| < 1$ 映成 w 平面上的条形域 G_1:$0 < \mathrm{Im} w < 1$,并把上半单位圆周: $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z > 0$ 映成 G_1 的下边 $\mathrm{Im} w = 0$,下半单位圆周: $|z| = 1$, $\mathrm{Im} z < 0$ 映成 G_1 的上边 $\mathrm{Im} w = 1$.

分析 我们知道,对数函数的主支 $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z (0 < \arg z < 2\pi)$ 能把上半平面:$0 < \arg z < \pi$ 保形地映成条形域:$0 < \mathrm{Im} w < \pi$,且把正半实轴 $\mathrm{Re} z > 0$ 映成条形的下边 $\mathrm{Im} w = 0$,负半实轴映成条形域的上边 $\mathrm{Im} w = \pi$. 这样,为了解决本题,应先求一个分式线性函数把 $|z| < 1$ 映成上半平面,且把上半单位圆周映成正半实轴,下半单位圆周映成负半实轴.

解 (1) 作使 $z_1(1) = 0, z_1(-1) = \infty$ 的分式线性映射

$$z_1 = k\frac{z-1}{1+z}.$$

由保圆性,它把上半单位圆周映成一条从原点出发的射线(不含原点),为使这条射线是正实轴,只须使上半单位圆周上的点 i 映成正实轴上的一点即可. 故应选取 k 使

$$z_1(i) = k\frac{i-1}{1+i} = ki > 0,$$

例如取 $k = -i$. 再由点的走向(图 6.26) 可见,映射

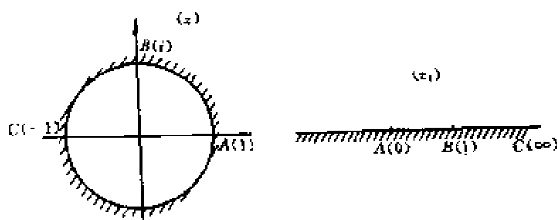


图 6.26

$$z_1 = i\frac{1-z}{1+z}$$

把单位圆内部保形地映成上半平面,且把下半单位圆周映成负实轴.

(2) 作映射

$$w=\frac{1}{\pi}\ln z_1$$
$$=\frac{1}{\pi}[\ln|z_1|+i\arg z_1]\ (0<\arg z_1<\pi)$$
把上半 z_1 平面保形地映成条形域：$0<\mathrm{Im}w<1$，且正实轴 $\mathrm{Re}z_1>0$ 映成条形的下边 $\mathrm{Im}w=0$，负半实轴映成条形的上边 $\mathrm{Im}w=1$.

综上得到一个符合要求的保形映射
$$w=\frac{1}{\pi}\ln\frac{i(1-z)}{1+z}.$$

6.9.20 设 D 是把 z 平面去掉实数轴上的两条射线：$-\infty\leqslant x\leqslant -a$ 和 $a\leqslant x\leqslant+\infty\ (a>0)$ 而得的区域. 求一保形映射，把 D 映成带域 $G:0<\mathrm{Im}w<2v_0$，并且要求左边射线映成带域的下边 $\mathrm{Im}w=0$，右边的射线映成带域的上边 $\mathrm{Im}w=2v_0$.

解 (1) 映射
$$w_1=\frac{z+a}{z-a}$$
把 D 保形地映射成 w_1 平面上去掉正实轴而得的区域 D_1(图 6.27(a),(b)).

(2) 映射 $w_2=\sqrt{w_1}$(以正实轴为支割线，$\sqrt{1}=1$ 的一支) 把 D_1 保形地映成上半 w_2 平面 $D_2:\mathrm{Im}w_2>0$(图 6.27(c)). 下面如果立即用对数函数，虽可把 D_2 映成带域，但不能满足题目的要求.

(3) 作分式线性映射 $w_3=w_3(w_2)$，把上半 w_2 平面 D_2 仍保形地映成上半平面 $\mathrm{Im}w_3>0$，且使得 $w_2(-1)=0,w_2(1)=\infty$. 于是，这个映射把 w_2 平面的实轴上的线段 $A(-1)B(0)A(1)$(图 6.27(d)) 映成正实轴. 满足上述要求的分式线性映射可取

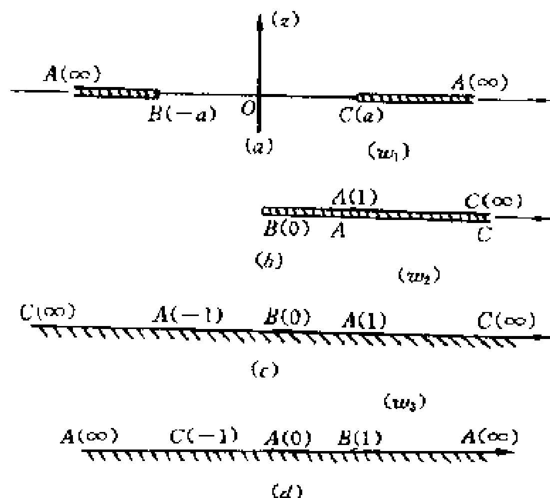


图 6.27

$$w_3=\frac{1+w_2}{1-w_2}.$$
这样，映射(1)～(3)的复合映射 $w_3=w_3(z)$ 就把 D 保形地映成上半 w_3 平面，并且把左边的射线映成正实轴，右边的射线映成负实轴.

(4) 最后用对数函数的主支
$$w=\frac{2v_0}{\pi}\ln w_3=\frac{2v_0}{\pi}(\ln|w_3|+i\arg z)$$
$$(0<\arg z<2\pi),$$
就把 $\mathrm{Im}w_3>0$ 保形地映成带域 $0<\mathrm{Im}w<2v_0$，且正实轴映成带形的下边 $\mathrm{Im}w=0$，负实轴映成带形的上边 $\mathrm{Im}w=2v_0$.

把映射(1)～(4)复合起来，得到一个符合要求的保形映射
$$w=\frac{2v_0}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\dfrac{z+a}{z-a}}}{1-\sqrt{\dfrac{z+a}{z-a}}}$$
$$=\frac{2v_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{z-a}+\sqrt{z+a}}{\sqrt{z-a}-\sqrt{z+a}}.$$

注 用 6.9.19 立即解决了下述静电场问题：

设有一个用金属薄片制成的无限长圆柱形空筒(设圆柱的半径为 1)，用极薄的绝缘材料沿着圆柱的母线把它们分成相等的两片. 已知一片的电位为 0，另一片的电位为 1，求筒内的电位.

由于圆柱是无限长的，所以这个场是平面场. 取垂直于圆柱母线的平面为 z 平面，并取坐标系使 z 平面与电位为 0 的那片半圆柱相交的半圆周为上半单位圆周：$|z|=1,\mathrm{Im}z>0$. 则此电场的复势是一个保形变换，把单位圆内域：$|z|<1$ 映照成 w 平面上的条形：$0<\mathrm{Im}z<1$，并把上半单位圆周映成 $\mathrm{Im}w=0$，下半单位圆周映成 $\mathrm{Im}w=1$. 由 6.9.19 的结果，知这个电场的复势是
$$w=\frac{1}{\pi}\ln\frac{i(1-z)}{1+z}.$$
筒内的电位为复势的虚部
$$v(x,y)=\mathrm{Im}\left(\frac{1}{\pi}\ln\frac{i(1-z)}{1+z}\right)=\frac{1}{\pi}\arg\left(i\frac{1-z}{1+z}\right)$$
$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{2y}\right), & y>0;\\ \dfrac{1}{2}, & y=0;\\ \dfrac{1}{\pi}\left[\pi+\mathrm{arctg}\left(\dfrac{1-x^2-y^2}{2y}\right)\right], & y<0.\end{cases}$$
与 6.9.20 相应的是下述静电场问题：设有两张都垂直于 z 平面的半无限大金属平面板，且分别与 z 平面交于半直线：$\mathrm{Re}z\leqslant a,\mathrm{Im}z=0$ 及 $\mathrm{Re}z\geqslant a,\mathrm{Im}z=0\ (a>0)$. 已知左右两个半平面的电位分别是 0 及 $2v_0$，求此电场的复势.

这个电场的复势就是 6.9.20 中所得保形映射.

第 7 篇　实变函数

§7.1　势的比较（构造法应用之一）

若存在一一映射 $\varphi: X \to Y$，则称集合 X 和 Y 是**对等的**，记作 $X \overset{\varphi}{\sim} Y$ 或 $X \sim Y$。易见 $\sim$ 为等价关系，即 $\sim$ 满足(1°) 反身性：$X \sim X$；(2°) 对称性：若 $X \sim Y$，则 $Y \sim X$；(3°) 传递性：若 $X \sim Y, Y \sim Z$，则 $X \sim Z$.

在上述等价关系下，将集合划分若干等价类，同一等价类中的集合彼此对等，不同等价类中的集合彼此不对等．凡对等的集合，称它们有相同的**势**（或**基数**），集 X 的势用记号 $\overline{\overline{X}}$ 表示．

空集 $\varnothing$ 的势为 $\overline{\overline{\varnothing}} = 0$；$n$ 元集 $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ 的势（元素的数目）为 $\overline{\overline{X}} = n$；若集 $X \sim \mathbf{N}$（自然数集）或 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$，则称 X 为**可数集**，其势记为 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{\mathbf{N}}} = \aleph_0$（读作"阿列夫零"）；有限集和可数集统称为**至多可数集**．非至多可数的集合称为**不可数集**．

对等于区间 $[0,1]$ 的集合称为**具有连续势的集**，有时称它为**连续统**．此势记为 $\aleph$（读作"阿列夫"）．X 上一切子集所成之集记为 2^X，其势记作 $\overline{\overline{2^X}} = 2^{\overline{\overline{X}}}$．势为 $2^{\overline{\overline{[0,1]}}} = 2^{\aleph}$ 的集称为**超连续势的集**．

若集 $X \sim Y$，即它们有相同的势，记作 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$．若 $X \sim Y_1 \subset Y$，则称集 X 的**势不超过**集 Y 的势，记作 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} \geqslant \overline{\overline{X}}$．若 $X \sim Y_1 \subset Y$，但 $X \not\sim Y$，则称 X 的**势小于** Y 的势或 Y 的**势大于** X 的势，记作 $\overline{\overline{X}} < \overline{\overline{Y}}$ 或 $\overline{\overline{Y}} > \overline{\overline{X}}$．

证明 $X \sim Y$，有两个重要的方法：

(1) 直接建立一一映射 $\varphi: X \to Y$；

(2) 利用 Cantor-Bernstein 定理：若 $X \sim Y_1 \subset Y$ 且 $Y \sim X_1 \subset X$，则 $X \sim Y$，即若 $\overline{\overline{X}} \leqslant \overline{\overline{Y}}$ 且 $\overline{\overline{Y}} \leqslant \overline{\overline{X}}$，则 $\overline{\overline{X}} = \overline{\overline{Y}}$．

特例：若 $C \subset A \subset B, B \sim C$，则 $A \sim B$．

本节主要介绍构造法，通过大量的具体实例的构造，来掌握此法在建立等价关系上的运用．

7.1.1　建立下列集合之间的一一对应：

(1) (a,b) 与 $(-\infty, +\infty)$；

(2) $[a,b]$ 与 (a,b)；

(3) $\mathbf{N} \cup \{0\}$ 与 $\mathbf{N}$.

解　显然 $\varphi_1: (a,b) \to (-\infty, +\infty)$,

$$x \to y = \varphi_1(x) = \mathrm{tg}\left(\frac{1}{2} - \frac{b-x}{b-a}\right)\pi;$$

$\varphi_2: [a,b] \to (a,b)$,

$$x \to y = \varphi_2(x) = \begin{cases} a + \dfrac{b-a}{2}, & x = a, \\ a + \dfrac{b-a}{2^{n+2}}, & x = a + \dfrac{b-a}{2^n},\ n = 0,1,2,\cdots \\ x, & x \neq a, a + \dfrac{b-a}{2^n},\ n = 0,1,2,\cdots \end{cases}$$

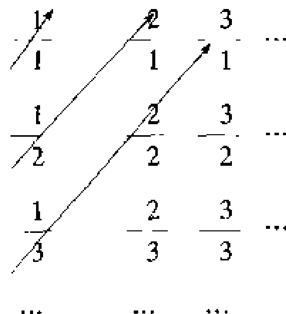
$\varphi_3: \mathbf{N} \cup \{0\} \to \mathbf{N}$,

$$x \to y = \varphi_3(x) = x + 1,$$

都为一一对应．

7.1.2　证明有理数集 $\mathbf{Q}$ 为可数集．

证　有理数集 $\mathbf{Q}$ 可按图



中斜线和有理数正负相间的次序（有重复只排第一个，如 $\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \cdots$，只排 $\frac{1}{1}$）依次排列为

$$0, 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, -2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 3, -3, \cdots,$$

所以 $\mathbf{Q}$ 为可数集．

7.1.3　证明 $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$.

证法 1　任何 $n \in \mathbf{N}$ 可唯一表为 $n = 2^p \cdot q$（p 为非负整数，q 为正奇数），而对非负整数 p 及正奇数 q，又有唯一的 $i, j \in \mathbf{N}$，使得 $p = i - 1, q = 2j - 1$．于是

$$\varphi: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$$
$$(i,j) \to \varphi(i,j) = 2^{i-1}(2j-1)$$

为一一映射，即 $\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$.

证法 2　由下图

(1, 1)　(1, 2)　(1, 3)……

(2, 1)　(2, 2)　(2, 3)……

(3, 1)　(3, 2)　(3, 3)……

…　　…　　…

按斜线排列为

(1,1),(2,1),(1,2),(3,1),(2,2),(1,3)….

于是,令 $\varphi:\mathbf{N}\times\mathbf{N}\to\mathbf{N}$,

$\varphi(1,1)=1,\varphi(2,1)=2,\varphi(1,2)=3,$

$\varphi(3,1)=4,\varphi(2,2)=5,\varphi(1,3)=6,$

…

显然,φ 为一一映射,即 $\mathbf{N}\times\mathbf{N}\sim\mathbf{N}$.

7.1.4　建立 $S^n=\{(x_1,\cdots,x_{n+1})\in\mathbf{R}^{n+1}\mid\sum_{i=1}^{n+1}x_i^2=1\}$ 和 $\mathbf{R}^n=\{(x_1,\cdots,x_n,0)\in\mathbf{R}^{n+1}\}$ 之间的一一对应.

证　设北极投影为

$$\varphi_1:S^n-\{P_0\}\to\mathbf{R}^n,$$
$$P\to Q=\varphi_1(P),$$

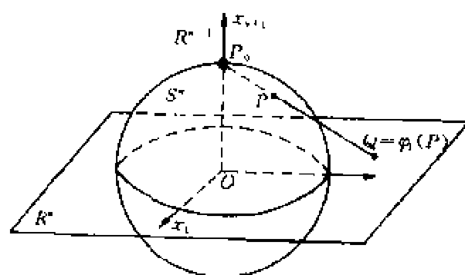


图 7.1

使得 $P_0=(0,\cdots,0,1)$,$P=(x_1,\cdots,x_{n+1})$ 和 $Q=\varphi_1(P)=(u_1,\cdots,u_n,0)$ 在一直线上,即存在 $t\in(0,1)$,有 $P=(1-t)P_0+t\varphi_1(P)$,$x_{n+1}=(1-t)+t\cdot0=1-t$,$t=1-x_{n+1}$,

$$Q=\varphi_1(P)=\frac{P-x_{n+1}P_0}{1-x_{n+1}}$$
$$=\left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}},\cdots,\frac{x_n}{1-x_{n+1}},0\right),$$
$$P=\varphi_1^{-1}(Q)=\left(\frac{2u_1}{1+u_1^2+\cdots+u_n^2},\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{2u_n}{1+u_1^2+\cdots+u_n^2},\frac{u_1^2+\cdots+u_n^2-1}{1+u_1^2+\cdots+u_n^2}\right),$$

则 φ_1 为一一映射.

取 $P_m\in S^n-\{P_0\}$,$m=1,2,\cdots$,为彼此不同的可数个点.显然,

$$\varphi_2:S^n\to S^n-\{P_0\},$$

$$P\to\varphi_2(P)=\begin{cases}P_{m+1},P=P_m,\\P,P\neq P_m,m=0,1,2,\cdots\end{cases}$$

也为一一映射,于是

$$\varphi=\varphi_1\circ\varphi_2:S^n\to\mathbf{R}^n$$

是所求的一一映射.

7.1.5　设 E 为无限集,$E_1\subset E$ 为有限集,则 $E\sim E-E_1$.

证　设 $E_1=\{a_1,\cdots,a_N\}$.因为 E 是无限集,所以可选取 $a_{N+i}\in E-E_1$,$i\in\mathbf{N}$,使得 $a_{N+i}\neq a_{N+j}$,$i\neq j$,$i,j\in\mathbf{N}$.于是

$\varphi:E\to E-E_1$,

$$x\to y=\varphi(x)=\begin{cases}a_{N+i},x=a_i,\\x,x\neq a_i,\end{cases}i\in\mathbf{N}$$

为一一映射,故 $E\sim E-E_1$.

7.1.6　设 E 为不可数集,$E_1\subset E$ 为可数集,则 $E\sim E-E_1$.

证　设 $E_1=\{a_n\mid n\in\mathbf{N}\}$.因 E 为不可数集,故 $E-E_1$ 也为不可数集,于是可选取可数集 $E_2=\{b_n\mid n\in\mathbf{N}\}\subset E-E_1$,其中 $b_n\neq b_m$,$n\neq m$.于是

$\varphi:E\to E-E_1$,

$$x\to y=\varphi(x)=\begin{cases}b_{2n-1},x=a_n,\\b_{2n},x=b_n,\\x,x\neq a_n,b_n,n=1,2,\cdots\end{cases}$$

为一一映射,故 $E\sim E-E_1$.

7.1.7　可数集 E 的任何子集为至多可数集.

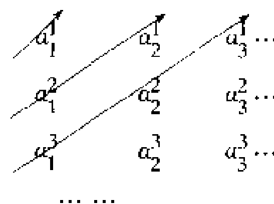
证　设可数集 $E=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$,则 E 的子集 A 可表示为 $\{a_{n_1},a_{n_2},\cdots\mid n_1<n_2<\cdots\}$.如果 $\{n_1,n_2,\cdots\}$ 有最大数,则 A 为有限集;如果 $\{n_1,n_2,\cdots\}$ 无最大数,则 A 为可数集.因此,A 为至多可数集.

7.1.8　设 $\Gamma=\{1,2,\cdots,N\}$ 或 $\Gamma=\mathbf{N}$,任意 $n\in\Gamma$,$1\leqslant\overline{\overline{A}}_n\leqslant\aleph_0$,且存在 $n_0\in\Gamma$,使 $\overline{\overline{A}}_{n_0}=\aleph_0$,则 $\overline{\overline{\bigcup_{n\in\Gamma}A_n}}=\aleph_0$.

证　由 $1\leqslant\overline{\overline{A}}_n\leqslant\aleph_0$,则可设

$A_n=\{a_1^n,a_2^n,a_3^n,\cdots\}$(可为有限集),$n\in\Gamma$.

按图



… …

中斜线次序可将 $\bigcup_{n\in\Gamma}A_n$ 中元素依次排列(遇到相同的元素只取第一个)为

$$a_1^1,a_1^2,a_2^1,a_1^3,a_2^2,a_3^1,\cdots$$

由于$\overline{\overline{A_{n_0}}} = \aleph_0$可知，上述点列为无限集，故$\overline{\overline{\bigcup_{n\in\Gamma} A_n}} = \aleph_0$.

7.1.9 设$1 \leqslant \overline{\overline{A_n}} \leqslant \aleph_0, n\in \mathbf{N}, A_n \cap A_m = \emptyset$，当$n\neq m$时，则$\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph_0$.

证 由上题，$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$可排列为

$$a_1^1, a_1^2, a_2^1, a_1^3, a_2^2, a_3^1, \cdots$$

由于$1\leqslant \overline{\overline{A_n}} \leqslant \aleph_0, n\in\mathbf{N}, A_n\neq A_m$，当$n\neq m$时，则可知上述点列为无限集，故

$$\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}} = \aleph_0.$$

7.1.10 设A_i为可数集，$i=1,2,\cdots,n$. 则积集合$A_1\times\cdots\times A_n$也为可数集.

证法1 设$A_i = \{a_i^1, a_i^2, \cdots\}$，$(a_1^{k_1},\cdots,a_n^{k_n})\in A_1\times\cdots\times A_n$，按$k_1+\cdots+k_n = l$从小到大将$A_1\times\cdots\times A_n$中的点可完全排列出来，故$A_1\times\cdots\times A_n$为可数集.

证法2 （归纳法）当$n=1$时，A_1为可数集，故命题成立. 假设$n=k$时，命题成立，则当$n=k+1$时，设$A_{k+1} = \{a_{k+1}^1, a_{k+1}^2, \cdots\}$，由归纳知

$$E_l = \{(x_1,\cdots,x_k,a_{k+1}^l) \mid x_1\in A_1,\cdots,x_k\in A_k\}$$

为可数集，根据题7.1.9，

$$A_1\times\cdots\times A_{k+1} = \bigcup_{l=1}^{\infty} E_l$$

也为可数集. 故对任何自然数n，$A_1\times\cdots\times A_n$为可数集.

7.1.11 $\mathbf{R}^1$上两两不相交的开区间的集合$\mathscr{A}$为至多可数集.

证 显然，因$\mathscr{A}$中元素为两两不相交的开区间，故映射

$$\varphi: \mathscr{A}\to\mathbf{Q}$$
$$(\alpha,\beta)\to\varphi(\alpha,\beta) = r\in\mathbf{Q}\cap(\alpha,\beta)$$

为单射，于是$\overline{\overline{\mathscr{A}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \aleph_0$.

7.1.12 $\mathbf{R}^n$中两两不相交的连通开集（如开球，开长方体）组成的集合$\mathscr{A}$为至多可数集.

证 显然，由$\mathscr{A}$中元素为两两不相交的连通开集知，映射

$$\varphi: \mathscr{A}\to\mathbf{Q}^n$$
$$U\to\varphi(U) = r\in\mathbf{Q}^n\cap U$$

为单射，故

$$\overline{\overline{\mathscr{A}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}^n}} = \aleph_0.$$

7.1.13 证明$\mathbf{R}^n$中以有理点为中心，正有理数为半径的开球的全体$\mathscr{A}$为可数集.

证 容易看出

$$\varphi: \mathscr{A}\to\mathbf{Q}^n\times\mathbf{Q}^+,$$
$$B(x,r)\to(x,r)$$

为一一映射，其中$B(x,r)$是以x为中心，r为半径的开球，$(x,r)\in\mathbf{Q}^n\times\mathbf{Q}^+$. 故

$$\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\mathbf{Q}^n\times\mathbf{Q}^+}} = \aleph_0.$$

7.1.14 若$E\subset\mathbf{R}^n$中任意二点之间的距离大于固定的正数δ，则E为至多可数集.

证 作$\mathbf{R}^n$中超平面$x_i = k_i\frac{\delta}{\sqrt{n}}$，$k_i\in\mathbf{Z}, i=1,\cdots,n$，将$\mathbf{R}^n$分成可数个边长为$\frac{\delta}{\sqrt{n}}$的正方体. 由于正方体中任何两点$x$和$y$的距离$\rho(x,y)\leqslant\sqrt{\underbrace{(\frac{\delta}{\sqrt{n}})^2+\cdots+(\frac{\delta}{\sqrt{n}})^2}_{n\text{个}}} = \delta$，故从题设知每个正方体中至多含$E$中一个点，再从正方体的全体为可数集推得$E$为至多可数集.

为了证明Cantor-Bernstein定理，我们先证下面的集合在映射下的分解定理.

7.1.15 （集合在映射下的分解定理，Banach）若有$f: X\to Y, g: Y\to X$，则存在分解：

$$X = A\cup\tilde{A}, Y = B\cup\tilde{B},$$

其中$f(A) = B, g(\tilde{B}) = \tilde{A}, A\cap\tilde{A} = \emptyset$及$B\cap\tilde{B} = \emptyset$.

证 对于X中的子集E，若满足

$$E\cap g(Y-f(E)) = \emptyset,$$

则称E为X中的隔离集. X中隔离集的全体记为Γ，令

$$A = \bigcup_{E\in\Gamma} E,$$

则有$A\in\Gamma$. 事实上，对于任意的$E\in\Gamma$，由于$A\supset E$，故从$E\cap g(Y-f(E)) = \emptyset$知$E\cap g(Y-f(A)) = \emptyset$. 从而有$A\cap g(Y-f(A)) = \emptyset$，即$A\in\Gamma$，且关于包含关系是$\Gamma$中的最大元.

现令$f(A) = B, \tilde{B} = Y-B$以及$g(\tilde{B}) = \tilde{A}$. 于是立得$Y = B\cup\tilde{B}, B\cap\tilde{B} = \emptyset$. 其次由于

$$A\cap\tilde{A} = A\cap g(\tilde{B}) = A\cap g(Y-B)$$
$$= A\cap g(Y-f(A)) = \emptyset,$$

又可得$A\cup\tilde{A} = X$. 事实上，（反证）假设$A\cup\tilde{A}\subsetneqq X$，则存在$x_0\in X$，但$x_0\overline{\in} A\cup\tilde{A}$，作$A_0 = A\cup\{x_0\}$，则$B = f(A)\subset f(A_0)$，而$\tilde{B} = Y-B\supset Y-f(A_0)$. 从而$\tilde{A} = g(\tilde{B})\supset g(Y-f(A_0))$. 这就是说$A\cap g(Y-f(A_0)) = \emptyset$. 再由$x_0\overline{\in}\tilde{A}$知$x_0\overline{\in} g(Y-f(A_0))$及

$$A_0\cap g(Y-f(A_0)) = \emptyset,$$

即$A_0\in\Gamma$，这与A是Γ中的最大元相矛盾.

7.1.16 Cantor-Bernstein定理：若$X\sim Y_1\subset Y$且

$Y\sim X_1\subset X$，则 $X\sim Y$. 即若 $\bar{X}\leqslant\bar{Y}$，且 $\bar{Y}\leqslant\bar{X}$，则 $\bar{X}=\bar{Y}$.

特例：若 $C\subset A\subset B$，且 $B\sim C$，则 $B\sim A$.

（此定理是由 Cantor 提出，首先由 Bernstein 给出正确证明. 下面的证法 1 的方法则属于 Banach.）

证法 1 由题设知存在单射 $f:X\to Y$ 及单射 $g:Y\to X$，根据映射分解定理知

$X=A\cup\tilde{A}, Y=B\cup\tilde{B}, f(A)=B, g(\tilde{B})=\tilde{A}$.

注意到这里的 $f:A\to B$ 及 $g:\tilde{B}\to\tilde{A}$ 是一一映射. 因而可作一一映射 $F:X\to Y$ 如下：

$$F(x)=\begin{cases}f(x), x\in A,\\ g^{-1}(x), x\in\tilde{A}.\end{cases}$$

这就证明了 $X\sim Y$.

证法 2 由题设，存在一一映射

$$\varphi_1:X\to\varphi_1(X)=Y_1\subset Y$$

和

$$\varphi_2:Y\to\varphi_2(Y)=X_1\subset X.$$

令 $X_2=\varphi_2(Y_1)\subset\varphi_2(Y)=X_1$，显然 $\varphi_2:Y_1\to X_2$ 为一一映射，$\varphi=\varphi_2\circ\varphi_1:X\to X_2$ 也是一一映射. 由 $X_1\subset X$，令 $X_3=\varphi(X_1)\subset X_2$，$\varphi:X_1\to X_3$ 为一一映射. 依次类推可以得到一串子集：

$$X\supset X_1\supset X_2\supset X_3\supset\cdots\supset X_n\supset\cdots,$$

且在同一映射 φ 下有

$$X\sim X_2\sim X_4\sim\cdots \text{及} X_1\sim X_3\sim X_5\sim\cdots.$$

这样，就将 X 分解为一系列互不相交的子集之并

$$X=(X-X_1)\cup(X_1-X_2)\cup(X_2-X_3)\cup\cdots\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n).$$

同样有

$$X_1=(X_1-X_2)\cup(X_2-X_3)\cup(X_3-X_4)\cup\cdots\cup(\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n).$$

由于 φ 为一一映射，容易看出：

$$X-X_1\overset{\varphi}{\sim}X_2-X_3,$$

$$X_1-X_2\overset{\varphi}{\sim}X_3-X_4,$$

……

$$X_n-X_{n+1}\overset{\varphi}{\sim}X_{n+2}-X_{n+3},$$

……

将 X 和 X_1 的上述分解改写为下图：

$$X=(\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n)\cup(X-X_1)\cup(X_1-X_2)\cup(X_2-X_3)\cup(X_3-X_4)\cup\cdots$$

$$X_1=(\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n)\cup(X_2-X_3)\cup(X_1-X_2)\cup(X_4-X_5)\cup(X_3-X_4)\cup\cdots$$

$$X_{2n}-X_{2n+1}\overset{\varphi}{\sim}X_{2n+2}-X_{2n+3}(n=0,1,2,\cdots,X_0=X),$$

而 $\bigcap_{n=1}^{\infty}X_n, X_1-X_2,\cdots,X_{2n-1}-X_{2n},\cdots$ 中每个集都在恒等映射 I_d 下分别与自身对等，因此 $X\sim X_1$. 又因 $X_1\sim Y$，所以 $X\sim Y$.

注 应用集合在映射下的分解定理而构造一一映射来证明 Cantor-Bernstein 定理（证法 1）是一种独特的方法. 而证法 2 是根据题设 $X\sim Y_1\subset Y$ 和 $Y\sim X_1\subset X$ 自然构造的一一映射，这是一种标准的方法. 更重要的是，在证明两个集合对等（即势相等）时，大量的例子表明，简单直接地构造一一映射是很困难的，Cantor-Bernstein 定理提供了一个非常有效的方法.

7.1.17 **无最大势定理**：设 E 为集合，2^E 为 E 上所有子集所成之集，则 $\bar{E}<\overline{\overline{2^E}}$.

证 （反证）假设 E 与 2^E 对等，即存在一一映射 $\varphi:E\to 2^E$. 作集合

$$A=\{x\in E\mid x\overline{\in}\varphi(x)\},$$

于是存在 $y\in E$，使 $\varphi(y)=A\in 2^E$.

(1) 如果 $y\in A$，则由 A 的定义知 $y\overline{\in}\varphi(y)=A$，矛盾；

(2) 如果 $y\overline{\in}A$，则由 A 的定义知 $y\in\varphi(y)=A$，也矛盾.

这就证明了 $E\not\sim 2^E$.

另一方面，显然

$$\eta:E\to 2^E,$$
$$x\to\eta(x)=\{x\}\text{（独点子集）}$$

为单射. 故 $\bar{E}\leqslant\overline{\overline{2^E}}$.

综上所述，$\bar{\bar{E}}<\overline{\overline{2^E}}$.

7.1.18 $[0,1]=\{x\in\mathbf{R}\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$ 为不可数集.

证法 1 （反证）假设 $[0,1]$ 为可数集，则 $[0,1]=\{x_1,x_2,x_3,\cdots\}$. 将 $[0,1]$ 三等分，$[0,\frac{1}{3}]$，$[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$，$[\frac{2}{3},1]$ 中至少有一个区间不含 x_1，记为 $[a_1,b_1]$；再将 $[a_1,b_1]$ 三等分，同理也至少有一区间 $[a_2,b_2]$ 不含 x_2；依次类推，得到一个闭区间套：

$$[0,1]\supset[a_1,b_1]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$$

使得 $[a_n,b_n]$ 不含 x_n. 根据闭区间套原理，存在唯一的点 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]\subset[0,1]$，由 $[a_n,b_n]$ 的造法知 $x_0\neq x_n, n=1,2,\cdots$，故 $x_0\overline{\in}\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}=[0,1]$，矛盾.

证法 2 只须证 $(0,1]$ 不可数. 为此，采用二进位小数表示法：

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},$$

其中 $a_n = 0$ 或 1，并在表示式中有无穷个 a_n 等于 1，显然 $(0,1]$ 与全体二进位制非 0 小数一一对应.

在上述表示式中，把 $a_n = 0$ 的项舍去，则得到 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n_i}}$，这里 n_i 是严格上升的自然数列. 再令 $k_1 = n_1, k_i = n_i - n_{i-1}, i = 2,3,\cdots$，则 k_i 为自然数数列. 自然数数列的全体表示为 $\mathbf{N}^{\infty}$，则 $(0,1] \sim \mathbf{N}^{\infty}$.

(反证) 假设 $(0,1]$ 为可数集，则 $\mathbf{N}^{\infty}$ 也为可数集. 不妨将其排列如下:

$$(k_1^{(1)}, k_2^{(1)}, \cdots, k_i^{(1)}, \cdots)$$
$$(k_1^{(2)}, k_2^{(2)}, \cdots, k_i^{(2)}, \cdots)$$
$$\cdots\cdots$$
$$(k_1^{(i)}, k_2^{(i)}, \cdots, k_i^{(i)}, \cdots)$$
$$\cdots$$

显然，$(k_1^{(1)}+1, k_2^{(2)}+1, \cdots, k_i^{(i)}+1, \cdots) \in \mathbf{N}^{\infty}$，但未被排列出来，矛盾.

证法 3 只须证 $(0,1]$ 为不可数集. (反证) 假设 $(0,1]$ 为可数集，则 $(0,1] = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 将 $(0,1]$ 中的实数用十进位无限小数表示:

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}x_{13}x_{14}\cdots,$$
$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}x_{23}x_{24}\cdots,$$
$$x_3 = 0.x_{31}x_{32}x_{33}x_{34}\cdots,$$
$$\cdots$$

其中 $x_{ij} = 0,1,\cdots,9$，且对每个 i，数列 $\{x_{ij} \mid j = 1,2,\cdots\}$ 中有无限项不为 0，作十进位小数

$$\alpha = 0.\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\cdots,$$

满足 $\alpha_i \neq x_{ii}, \alpha_i \neq 0, i = 1,2,\cdots$（例如 $x_{ii} = 1$，就令 $\alpha_i = 2$；如 $x_{ii} \neq 1$，则令 $\alpha_i = 1$）. 于是 $\alpha \in (0,1]$，但由 α 的造法知 $\alpha \neq x_n, n = 1,2,\cdots$，即 $\alpha \overline{\in} \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} = (0,1]$，矛盾.

证法 4 由题 7.1.36 和题 7.1.17 知

$$\overline{\overline{(0,1]}} = \aleph = 2^{\aleph_0} > \aleph_0,$$

因此，$(0,1]$ 是不可数的.

7.1.19 证明直线上任一开区间 (a,b) 不能表示成至多可数个彼此不相交的闭区间 $F_i = [a_i, b_i]\ (a_i \leqslant b_i)$ 的并集，因而开区间 (a,b) 为不可数集.

证 (反证) 假设 (a,b) 可表示成至多可数个不相交的闭区间 $F_i = [a_i, b_i]\ (a_i \leqslant b_i)$ 的并，即 $(a,b) = \bigcup_i F_i$.

(1) 如果 $\{F_i\}$ 为有限集，记为 $\{F_i \mid i = 1,\cdots,n\}$，显然，从

$$(a,b) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i = [\min_{1\leqslant i\leqslant n} a_i, \max_{1\leqslant i\leqslant n} b_i] \subsetneq (a,b)$$

得到矛盾.

(2) $\{F_i\}$ 为可数集. 因为 $F_1 \cap F_2 = \varnothing$，令

$$(c_1, d_1) = (\min(b_1, b_2), \max(a_1, a_2)),$$

则 $(c_1, d_1) \cap (F_1 \cup F_2) = \varnothing$. 设含在 (c_1, d_1) 内的 F_i 中下标最小的为 m_1，次小的为 n_1，同上可令

$$(c_2, d_2) = (\min(b_{m_1}, b_{n_1}), \max(a_{m_1}, a_{n_1})),$$

显然 $(c_2, d_2) \subset (c_1, d_1)$，且 $(c_2, d_2) \cap (F_{m_1} \cup F_{n_1}) = \varnothing$. 依次类推，得到 (c_k, d_k) 使 $(c_k, d_k) \subset (c_{k-1}, d_{k-1})$ 且 $(c_k, d_k) \cap (F_{m_{k-1}} \cup F_{n_{k-1}}) = \varnothing$. 于是由闭区间套原理，一定存在 $\xi \in [c_i, d_i], i = 1,2,\cdots$.

由区间的造法知 $\xi \overline{\in} \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$，这与 $\xi \in (a,b) = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 矛盾.

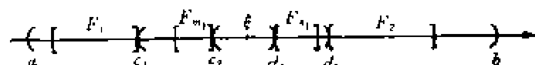


图 7.2

从反证法和上述结论立得 (a,b) 为不可数集.

7.1.20 g 进位小数.

设 $g > 1$ 为取定的自然数，称级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{g^n}, \quad a_n = 0,1,\cdots,g-1$$

为 g 进位小数，常常记作 $0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$. 若一个 g 进位小数，从某一项开始 a_n 全为 0，则称之为 g 进位有限小数. 否则，称为 g 进位无限小数.

若 $x \in [0,1]$，当 $x \neq \frac{m}{g^n}$ 时，则 g 进位小数的表示是唯一的，若 $x = \frac{m}{g^n}$，则 x 就有二种表示，如 $g = 10$，

$$x = 0.a_1\cdots a_{n-1}1000\cdots = 0.a_1\cdots a_{n-1}0999\cdots$$

如果选定一种表示，则 $[0,1]$ 与 g 进位小数的全体 G 是对等的.

记 G 是 g 进位小数全体，$G_{无}$ 是 g 进位无限小数全体，$G_{有}$ 是 g 进位有限小数全体，则

$$\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{G_{无}}} = \aleph, \quad \overline{\overline{G_{有}}} = \aleph_0.$$

证 $\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{[0,1]}} = \aleph$. 再由题 7.1.6 知 $\overline{\overline{G_{无}}} = \overline{\overline{G}} = \aleph$.

显然，$G_n = \{0.a_1a_2\cdots a_n0\cdots \in G\}$ 为有限集，而 $G_{有} = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$，故

$$\overline{\overline{G_{有}}} = \overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n}} = \aleph_0.$$

7.1.21 有理数全体的势 $\overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \aleph_0$，无理数全体的势 $\overline{\overline{\mathbf{R}-\mathbf{Q}}} = \aleph$.

证 由题 7.1.2，$\overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{N}}} = \aleph_0$. 再由题 7.1.6 和 7.1.1，$\overline{\overline{\mathbf{R}-\mathbf{Q}}} = \overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{[0,1]}} = \aleph$.

7.1.22 代数数和超越数.

整系数多项式的复根称为代数数,不是代数数的复数称为超越数.记 $C_{代}$ 为代数数的全体,$C_{超}$ 为超越数的全体.则

$$\overline{\overline{C_{代}}} = \aleph_0, \quad \overline{\overline{C_{超}}} = \aleph.$$

证 因 $\{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \mid a_0 \neq 0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$ 为可数个多项式,而每个多项式至多有 n 个复根,故 $\overline{\overline{\mathbf{R}_{代}}} \leqslant \aleph_0$.

另一方面,对任意 $n \in \mathbf{N}$,因 $x - n = 0$,故 n 是代数数.从而 $\aleph_0 = \overline{\overline{\{n \mid n \in \mathbf{N}\}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{R}_{代}}}$.

根据 Cantor-Bernstein 定理知,$\overline{\overline{\mathbf{C}_{代}}} = \aleph_0$.再由题 7.1.6 知 $\overline{\overline{\mathbf{C}_{超}}} = \overline{\overline{\mathbf{C}}} = \aleph$.

7.1.23 建立三个集合:

$E = \mathbf{N}^\infty = \{(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots) \mid n_k \in \mathbf{N}\}$,

$F = \{(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots) \mid n_k \in \mathbf{N}, n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$,

$G = \{0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\cdots \mid \alpha_i = 0 或 1, 且有无限个 \alpha_i \neq 0\} = (0,1]$

之间的一一对应.

证 易见

$$\varphi_1: E \to F,$$

$$(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots) \to \varphi_1((n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)) = (n_1, n_1 + n_2, \cdots, n_1 + \cdots + n_k, \cdots)$$

和

$$\varphi_2: F \to G,$$

$$(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots) \to \varphi_2((n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)) = 0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_k\cdots,$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & i = n_k, \\ 0, & i \neq n_k, k = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

都为一一映射.

7.1.24 证明 $(0,1) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \sim \mathbf{N}^\infty$, $\overline{\overline{(0,1) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})}} = \aleph$.

证 显然

$$\varphi: (0,1) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \to \mathbf{N}^\infty,$$

$$x = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}} \to \varphi(x) = (n_1, n_2, n_3, \cdots)$$

为一一映射,所以 $(0,1) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q}) \sim \mathbf{N}^\infty$.于是

$$\overline{\overline{(0,1) \cap (\mathbf{R} - \mathbf{Q})}} = \overline{\overline{\mathbf{N}^\infty}} = \overline{\overline{(0,1]}} = \aleph.$$

7.1.25 实数列全体 $\mathbf{R}^\infty = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_n \in \mathbf{R}, n = 1, 2, \cdots\}$ 的势为 $\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \aleph$.

证法 1 设 $(0,1)^\infty = \{x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots) \mid 0 < x_n < 1, n = 1, 2, \cdots\}$.显然

$$\varphi: (0,1)^\infty \to \mathbf{R}^\infty,$$

$$x \to \varphi(x) = \left(\operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots, \operatorname{tg}\left(x_n - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots\right)$$

为一一映射.下面证明 $\overline{\overline{(0,1)^\infty}} = \aleph$,因而 $\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \overline{\overline{(0,1)^\infty}} = \aleph$.

一方面,

$$\aleph = \overline{\overline{(0,1)}} = \overline{\overline{\{x = (a, \cdots, a, \cdots) \mid a \in (0,1)\}}} \leqslant \overline{\overline{(0,1)^\infty}},$$

另一方面,对任何 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \in (0,1)^\infty$,按十进位无限小数(无限个非 0)表示有

$$x_1 = 0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$
$$x_2 = 0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$
$$\cdots$$
$$x_n = 0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,$$
$$\cdots$$

作映射

$$\psi: (0,1)^\infty \to (0,1),$$

$$x \to \psi(x) = 0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{n-1,2}\cdots x_{1n}\cdots,$$

易见,ψ 为单射.于是 $\overline{\overline{(0,1)^\infty}} \leqslant \overline{\overline{(0,1)}} = \aleph$.根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{(0,1)^\infty}} = \aleph$.

证法 2 由题 7.1.1 和题 7.1.23,$\overline{\overline{\mathbf{N}^\infty}} = \overline{\overline{(0,1]}} = \overline{\overline{\mathbf{R}}} = \aleph$,故存在一一映射 $\theta: \mathbf{R} \to \mathbf{N}^\infty$.再作映射

$$\varphi: \mathbf{R}^\infty \to \mathbf{N}^\infty,$$

$$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \to \varphi(x) = (m_1^{(1)}, m_1^{(2)}, m_2^{(1)}, m_1^{(3)}, m_2^{(2)}, m_3^{(1)}, \cdots),$$

其中 $m_j^{(i)}(i, j \in \mathbf{N})$ 由下图按斜线次序取到:

$$\theta(x_1) = (m_1^{(1)}, m_2^{(1)}, \cdots, m_n^{(1)}, \cdots),$$
$$\theta(x_2) = (m_1^{(2)}, m_2^{(2)}, \cdots, m_n^{(2)}, \cdots),$$
$$\cdots$$
$$\theta(x_n) = (m_1^{(n)}, m_2^{(n)}, \cdots, m_n^{(n)}, \cdots),$$
$$\cdots$$

易见 φ 为一一映射.于是 $\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \overline{\overline{\mathbf{N}^\infty}} = \aleph$.

7.1.26 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = \aleph$.

证法1

$$\aleph = \overline{\overline{\mathbf{R}}} = \overline{\overline{\{(x_1, 0, \cdots, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}}} = \overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = \overline{\overline{\{(x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) \mid x_1, \cdots, x_n \in \mathbf{R}\}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \aleph.$$

由 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = \aleph$.

证法 2 显然

$$\varphi: (0,1)^n \to \mathbf{R}^n,$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \to \varphi(x) = \left(\operatorname{tg}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right)\pi, \cdots, \operatorname{tg}\left(x_n - \frac{1}{2}\right)\pi\right)$$

为一一映射.下面可证 $\overline{\overline{(0,1)^n}} = \aleph$,因而 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}} = \overline{\overline{(0,1)^n}} = \aleph$.

一方面,

$$\aleph = \overline{\overline{(0,1)}} = \overline{\overline{\{x = (a, \cdots, a) \mid a \in (0,1)\}}} \leqslant \overline{\overline{(0,1)^n}},$$

另一方面,对任意 $x=(x_1,\cdots,x_n)\in(0,1)^n$,按十进位无限小数(无限个非0)表示,有

$$x_1=0.x_{11}x_{12}\cdots x_{1k}\cdots,$$
$$x_2=0.x_{21}x_{22}\cdots x_{2k}\cdots,$$
$$\cdots$$
$$x_n=0.x_{n1}x_{n2}\cdots x_{nk}\cdots,$$

作映射

$\psi:\mathbf{R}^n\to(0,1)$,

$x_1\to\psi(x)=0.x_{11}\cdots x_{n1}x_{12}\cdots x_{n2}\cdots x_{1k}\cdots x_{nk}\cdots,$

显然,ψ 为单射.于是

$$\overline{\overline{(0,1)^n}}\leqslant\overline{\overline{(0,1)}}=\aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{(0,1)^n}}=\aleph$.

证法3 由题7.1.23,$\overline{\overline{\mathbf{R}}}=\overline{\overline{(0,1]}}=\overline{\overline{\mathbf{N}^\infty}}$,故存在一一映射 $\theta:\mathbf{R}\to\mathbf{N}^\infty$.再作映射

$$\varphi:\mathbf{R}^n\to\mathbf{N}^\infty,$$

$x=(x_1,\cdots,x_n)\to\varphi(x)=(m_1^{(1)},\cdots,m_1^{(n)},\cdots,m_k^{(1)},\cdots,m_k^{(n)},\cdots)$,

其中 $m_j^{(i)}(i=1,2,\cdots,n,j=1,2,\cdots,k,\cdots)$ 由下面所列自然数列得到

$$\theta(x_1)=(m_1^{(1)},\cdots,m_k^{(1)},\cdots)$$
$$\theta(x_2)=(m_1^{(2)},\cdots,m_k^{(2)},\cdots)$$
$$\cdots$$
$$\theta(x_n)=(m_1^{(n)},\cdots,m_k^{(n)},\cdots)$$

易见,φ 为一一映射.于是 $\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=\overline{\overline{\mathbf{N}^\infty}}=\aleph$.

7.1.27 $\overline{\overline{\{0,1\}^\infty}}=\aleph$.

证 利用二进位小数,作映射

$\varphi:(0,1]\to\{0,1\}^\infty$,

$x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\to\varphi(x)=(a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots)$(其中无穷个 $a_n=1$).显然,φ 为单射,且 $\{0,1\}^\infty-\varphi(0,1]$ 为可数集,故由题7.1.6,

$$\overline{\overline{\{0,1\}^\infty}}=\overline{\overline{\varphi((0,1])}}=\overline{\overline{(0,1]}}=\aleph.$$

7.1.28 设 $2\leqslant\overline{\overline{X_n}}\leqslant\aleph$,$\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_n\in X_n,n=1,2,\cdots\}$,则 $\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}=\aleph$.

证 至多差一个一一映射,不妨设 X_n 为含 $\{0,1\}$ 的 $\mathbf{R}$ 的子集,则

$$\aleph=\overline{\overline{\{0,1\}^\infty}}\leqslant\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}=\aleph,$$

根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}=\aleph$.

7.1.29 设 $1\leqslant\overline{\overline{X_n}}\leqslant\aleph$,且存在 $\overline{\overline{X_{n_0}}}=\aleph$.$\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n=\{x=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)\mid x_n\in X_n,n=1,2,\cdots\}$,则 $\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}=\aleph$.

证 至多差一个一一映射,不妨设 X_n 为 $\mathbf{R}$ 的子集,则

$$\aleph=\overline{\overline{X_{n_0}}}\leqslant\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}}=\aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{\mathop{\times}\limits_{n=1}^{\infty}X_n}}=\aleph$.

7.1.30 设 Γ 为指标集,$1\leqslant\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\aleph$,对任意 $\alpha\in\Gamma$,$\overline{\overline{A_\alpha}}\leqslant\aleph$ 且存在 $\alpha_0\in\Gamma$,$\overline{\overline{A_{\alpha_0}}}=\aleph$,则 $\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}=\aleph$.

证 由 $1\leqslant\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\aleph$ 知存在单射 $\theta:\Gamma\to\mathbf{R}$,再由 $\overline{\overline{A_\alpha}}\leqslant\aleph$ 知存在单射 $\varphi_\alpha:A_\alpha\to L_\alpha=\{(\theta(\alpha),y)\mid y\in\mathbf{R}\}$.作映射

$$\varphi:\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha\to\mathbf{R}^2,$$
$$a\to\varphi(a)=\varphi_{\alpha(a)}(a),$$

其中取定一个 $\alpha(a)\in\Gamma$,使 $a\in A_{\alpha(a)}$,易见 φ 为单射.于是,

$$\aleph=\overline{\overline{A_{\alpha_0}}}\leqslant\overline{\overline{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^2}}=\aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}=\aleph$.

7.1.31 设 Γ 为指标集,$\overline{\overline{\Gamma}}=\aleph$.如果 $1\leqslant\overline{\overline{A_\alpha}}\leqslant\aleph$ 对任意 $\alpha\in\Gamma$ 成立,且当 $\alpha\neq\beta$ 时,$A_\alpha\cap A_\beta=\varnothing$,则 $\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}=\aleph$.

证 由上题知 $\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}\leqslant\aleph$.作映射

$$\eta:\Gamma\to\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha,$$
$$\alpha\to\eta(\alpha)=a_\alpha\in A_\alpha.$$

因 $\overline{\overline{A_\alpha}}\geqslant1$,故对 α,可取且只取一个 a_α.于是,η 为单射,且

$$\aleph=\overline{\overline{\Gamma}}\leqslant\overline{\overline{\bigcup_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理,$\overline{\overline{\bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma}A_\alpha}}=\aleph$.

7.1.32 设 $A=B\cup C$,$\overline{\overline{A}}=\aleph$,则 B 和 C 中至少有一集的势为 $\aleph$.

证法1 由于 $\overline{\overline{A}}=\aleph$,则存在一一映射

$$\varphi:A\to\mathbf{R}^2,a\to\varphi(a)=(x,y).$$

记 $\varphi(B)=U,\varphi(C)=V$.有

$$\mathbf{R}^2=\varphi(A)=\varphi(B)\cup\varphi(C)=U\cup V.$$

假设 $\overline{\overline{U}}=\overline{\overline{B}}<\aleph,\overline{\overline{V}}=\overline{\overline{C}}<\aleph$.设

$P_1:\mathbf{R}^2\to X(x\text{ 轴}),P_1(x,y)=(x,0)$,

$P_2:\mathbf{R}^2\to Y(y\text{ 轴}),P_2(x,y)=(0,y)$.

则 $\overline{\overline{P_1(U)}}\leqslant\overline{\overline{U}}<\aleph,\overline{\overline{P_2(V)}}\leqslant\overline{\overline{V}}<\aleph$,从而存在 x^*,y^* 使得 $(x^*,0)\overline{\in}P_1(U),(0,y^*)\overline{\in}P_2(V)$.由此得到

$$(x^*,y^*)\overline{\in}U\cup V=\mathbf{R}^2,$$

矛盾.

证法2 若 $\overline{\overline{B}}<\aleph$.由于 $\overline{\overline{A}}=\aleph$,故存在一一映射

$$\varphi:\mathbf{R}^2\to A.$$

记直线 $L_x=\{(x,y)\mid y\in\mathbf{R}\}$.由 $\overline{\overline{L_x}}=\aleph,\overline{\overline{B}}<\aleph$,

则存在一点 $P_x \in L_x$，使 $\varphi(P_x) \overline{\in} B$，从而 $\varphi(P_x) \in C$. 于是,

$$\aleph = \overline{\overline{\{P_x \mid x \in \mathbf{R}\}}} = \overline{\overline{\varphi(\{P_x \mid x \in \mathbf{R}\})}} \leqslant \overline{\overline{C}} \leqslant \overline{\overline{A}} = \aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理，立得

$$\overline{\overline{C}} = \aleph.$$

7.1.33 设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$，$\overline{\overline{A}} = \aleph$，则至少存在一个 A_n，使 $\overline{\overline{A_n}} = \aleph$.

证 (反证)假设 $\overline{\overline{A_n}} < \aleph$，$n = 1,2,\cdots$. 由于 $\overline{\overline{A}} = \aleph$，则存在一一映射

$$\varphi: A \to \mathbf{R}^{\infty},$$
$$a \mapsto \varphi(a) = (x_1,\cdots,x_n,\cdots).$$

记 $\varphi(A_n) = U_n$，$n = 1,2,\cdots$. 于是有

$$\mathbf{R}^{\infty} = \varphi(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

又记 $X_n = \{(0,\cdots,0,x_n,0,\cdots) \mid x_n$ 是实数$\}$,

$$P_n: \mathbf{R}^{\infty} \to X_n,$$
$$x = (x_1,\cdots,x_n,\cdots) \to P_n(x) = (0,\cdots,0,x_n,0,\cdots),$$

$n = 1,2,\cdots$. 显然，$\overline{\overline{P_n(U_n)}} \leqslant \overline{\overline{U_n}} = \overline{\overline{A_n}} < \aleph$，而 $\overline{\overline{X_n}} = \aleph$，故存在 $x_n^* \in \mathbf{R}$，使得

$$(0,\cdots,0,x_n^*,0,\cdots) \overline{\in} P_n(U_n), n = 1,2,\cdots.$$

即对任意 $x_i (i \neq n)$，有

$$(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n^*,x_{n+1},\cdots) \overline{\in} U_n, n = 1,2,\cdots.$$

从而 $(x_1^*,\cdots,x_n^*,\cdots) \overline{\in} \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n = \mathbf{R}^{\infty}$，矛盾.

7.1.34 当 $X = \{a_1,\cdots,a_n\}$ 为 n 元集时，$\overline{\overline{2^X}} = 2^n$.

证法 1 X 的子集罗列如下:

$\varnothing$;

$\{a_1\},\{a_2\},\cdots,\{a_n\}$;

$\{a_i,a_j \mid i < j\}$;

$\cdots$

$\{a_{i_1},\cdots,a_{i_k} \mid i_1 < \cdots < i_k\}$;

$\cdots$

$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$.

共有子集 $C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$(个)，即 $\overline{\overline{2^X}} = 2^n$.

证法 2 $E = \{a_{i_1},\cdots,a_{i_k}\}$ 对应于 $\{\hat{a}_1,\cdots,a_{i_1},\cdots,a_{i_k},\cdots,\hat{a}_n\}$，其中 $\hat{a}_i$ 表示不取 a_i，而每个 a_i 恰有"取"与"不取"两种选择，显然共有

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n\text{个}} = 2^n(\text{个})$$

情形，即有 2^n 个 X 的子集.

7.1.35 设 $2^X = \{E \mid E \subset X$ 为子集$\}$，$Y^X = \{f \mid f: X \to Y$ 为映射$\}$，$\overline{\overline{Y^X}} \xlongequal{\text{记作}} \overline{\overline{Y}}^{\overline{\overline{X}}}$.

$\{0,1\}^X = \{f \mid f: X \to \{0,1\}\} = \left\{\chi_E \mid \chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E \\ 0, x \overline{\in} E \end{cases}\right\}$ 为 X 上特征函数的全体. 证明 $\overline{\overline{2^X}} = \overline{\overline{\{0,1\}^X}} = 2^{\overline{\overline{X}}}$.

证 显然,

$$\varphi: 2^X \to \{0,1\}^X$$
$$E \to \varphi(E) = \chi_E$$

为一一映射，故 $\overline{\overline{2^X}} = \overline{\overline{\{0,1\}^X}} = 2^{\overline{\overline{X}}}$.

7.1.36 当 $\overline{\overline{X}} = \aleph_0$ 时，$\overline{\overline{2^X}} = 2^{\overline{\overline{X}}} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

证 不失一般性，只须对 $X = \mathbf{N}$ 的情况给以证明. 为此，令

$$\varphi: \{0,1\}^{\mathbf{N}} \to [0,1),$$
$$\chi_E \to \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_E(n)}{3^n},$$

易知 φ 为单射，故有 $\overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbf{N}}}} \leqslant \overline{\overline{[0,1)}} = \aleph$.

另一方面，对任意的 $x \in (0,1]$，用二进位小数(必须出现无穷个 1)表示为

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},\ a_n = 0 \text{ 或 } 1.$$

令

$$\psi: (0,1] \to \{0,1\}^{\mathbf{N}}$$
$$x \to \psi(x) = \chi, \text{使 } \chi(n) = a_n, n = 1,2,\cdots,$$

易知 ψ 为单射，故又得 $\aleph = \overline{\overline{(0,1]}} \leqslant \overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbf{N}}}}$.

根据 Cantor-Bernstein 定理知 $\overline{\overline{2^X}} = \overline{\overline{\{0,1\}^{\mathbf{N}}}} = \aleph$.

7.1.37 $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^2 \sim \mathbf{R}$.

证 设 $\mathbf{Z}$ 为整数集，由题 7.1.36，因 $\mathbf{R} \sim 2^{\mathbf{N}} \sim 2^{\mathbf{Z}-\mathbf{N}}$，所以有

$$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \sim 2^{\mathbf{N}} \times 2^{\mathbf{Z}-\mathbf{N}} \sim 2^{\mathbf{Z}} \sim 2^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}.$$

7.1.38 设可数集 $A = \{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 的所有有限子集的集合为 B，所有可数子集的集合为 C，所有子集的集合为 D. 则 $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$，$\overline{\overline{C}} = \overline{\overline{D}} = \aleph$.

证 设 B_n 为 $\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 的所有子集的集合，它是有限集，则 $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ 显然为无限集，且依次按 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$ 中元素排列(凡有重复者，只排第一次出现的元素)，故 B 为可数集，即 $\overline{\overline{B}} = \aleph_0$.

由题 7.1.23 知 $\overline{\overline{C}} = \aleph$，再由题 7.1.6 知 $\overline{\overline{D}} = \overline{\overline{B \cup C}} = \overline{\overline{C}} = \aleph$.

7.1.39 设 $X = \{x_1,\cdots,x_n,\cdots\}$ 为一序列，其中元素彼此不同，则它的子序列全体

$$Y = \{(x_{n_1},\cdots,x_{n_k},\cdots) \mid n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$$

的势 $\overline{\overline{Y}} = \aleph$.

证 下面的 F,G 如题 7.1.23 所述，显然

$$\varphi_1: Y \to F,$$

$$(x_{n_1},\cdots,x_{n_k},\cdots)\to(n_1,\cdots,n_k)$$

为一一映射,再由题 7.1.23 可得 $\overline{\overline{Y}}=\overline{\overline{F}}=\overline{\overline{G}}=\aleph$.

7.1.40 势为 $\aleph$ 的集,不妨设为 $\mathbf{R}$,它的有限子集的全体为 B,可数子集的全体为 C,则 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{C}}=\aleph$.(注意,$\mathbf{R}$ 的全体子集 $2^{\mathbf{R}}$ 的势为 $2^{\aleph}>\aleph$)

证 设 B_n 为 $\mathbf{R}$ 中 n 元子集的全体,显然

$$\varphi_n:B_n\to\mathbf{R}^n,$$

$$\{a_1,\cdots,a_n\}\to(a_1,\cdots,a_n)$$

为单射,$n=1,2,\cdots$. 于是

$$\aleph=\overline{\overline{\{\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}\mid a_1\in\mathbf{R},\text{固定 }a_2,\cdots,a_n\}}}\leqslant\overline{\overline{B_n}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^n}}=\aleph.$$

根据 Cantor-Bernstein 定理知 $\overline{\overline{B_n}}=\aleph$,再由题 7.1.30 知 $\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n}}=\aleph$.

另一方面,由

$$\varphi:C\to\mathbf{R}^{\infty}$$

$$\{a_1,\cdots,a_n,\cdots\}\to(a_1,\cdots,a_n,\cdots)$$

为单射知

$$\aleph=\overline{\overline{\{\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\mid a_1\in\mathbf{R},\text{固定 }a_2,\cdots,a_n,\cdots\}}}\leqslant\overline{\overline{C}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^{\infty}}}=\aleph.$$

再根据 Cantor-Bernstein 定理,就有 $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

应用势的知识和一些已知集合的势可以得到 $\mathbf{R}^n$ 中开集或闭集的势;$\mathbf{R}^1$ 上实函数全体的势;区间 I 上连续函数全体的势;区间 I 上单调函数的不连续点的全体的势;区间 (a,b) 上凸函数不可导点集的势;n 元函数极值的势.

7.1.41 设 $\mathscr{U}=\{U\mid U\subset\mathbf{R}^1\text{ 为开集}\}$,$\mathscr{F}=\{F\mid F\subset\mathbf{R}^1\text{ 为闭集}\}$,证明:$\overline{\overline{\mathscr{U}}}=\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\aleph$.

证 记可数集 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}=\{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_2),\cdots,(\alpha_n,\beta_n),\cdots\}$. 显然

$$\varphi:\mathscr{U}\to\{0,1\}^{\infty}=\{(a_1,\cdots,a_n,\cdots)\mid a_n=0\text{ 或 }1\},$$

$$U=\bigcup_{\substack{(\alpha,\beta)\subset U\\ \alpha,\beta\in\mathbf{Q}\\ \alpha<\beta}}(\alpha,\beta)\longmapsto(a_1,\cdots,a_n,\cdots),$$

$$a_n=\begin{cases}1,(\alpha_n,\beta_n)\subset U,\\ 0,(\alpha_n,\beta_n)\not\subset U,\end{cases}$$

为单射,于是

$$\aleph=2^{\aleph_0}=\overline{\overline{\{0,1\}^{\infty}}}\geqslant\overline{\overline{\mathscr{U}}}\geqslant\overline{\overline{\{(\alpha,1)\mid 0<\alpha<1\}}}=\aleph.$$

从而 $\overline{\overline{\mathscr{U}}}=\aleph$. 且

$$\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\overline{\overline{\{F\mid F\subset\mathbf{R}^1\text{ 为闭集}\}}}=\overline{\overline{\{F^c\mid F\subset\mathbf{R}^1\text{ 为闭集}\}}}=\overline{\overline{\{U\mid U\subset\mathbf{R}^1\text{ 为开集}\}}}=\aleph.$$

7.1.42 设 $\mathscr{U}=\{U\mid U\subset\mathbf{R}^n\text{ 为开集}\}$,$\mathscr{F}=\{F\mid F\subset\mathbf{R}^n\text{ 为闭集}\}$,证明 $\overline{\overline{\mathscr{U}}}=\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\aleph$.

证 记可数集 $\mathscr{V}=\{B(x,r)\mid x\in\mathbf{Q}^n,r\in\mathbf{Q}^+\}=\{B(x^{(1)},r_1),\cdots,B(x^{(m)},r_m),\cdots\}$. 显然

$$\varphi:\mathscr{U}\to\{0,1\}^{\infty}=\{(a_1,\cdots,a_m,\cdots)\mid a_m=0\text{ 或 }1\},$$

$$U=\bigcup_{\substack{B(x,r)\subset U\\ (x,r)\in\mathbf{Q}^n\times\mathbf{Q}^+}}B(x,r)\to(a_1,\cdots,a_m,\cdots),$$

$$a_m=\begin{cases}1,B(x^{(m)},r_m)\subset U,\\ 0,B(x^{(m)},r_m)\not\subset U,\end{cases}$$

为单射. 于是

$$\aleph=2^{\aleph_0}=\overline{\overline{\{0,1\}^{\infty}}}\geqslant\overline{\overline{\mathscr{U}}}\geqslant\overline{\overline{\{B(0,r)\mid r\in\mathbf{R}^+\}}}=\aleph,$$

从而,$\overline{\overline{\mathscr{U}}}=\aleph$,且

$$\overline{\overline{\mathscr{F}}}=\overline{\overline{\{F\mid F\subset\mathbf{R}^n\text{ 为闭集}\}}}=\overline{\overline{\{F^C\mid F\subset\mathbf{R}^n\text{ 为闭集}\}}}=\overline{\overline{\{U\mid U\subset\mathbf{R}^n\text{ 为开集}\}}}=\aleph.$$

7.1.43 设 $A\subset(-\infty,+\infty)$,且对任意 $x\in A$,总存在 $\delta_x>0$,使 $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap A$ 为至多可数集. 则 A 为至多可数集.

证 由条件:对任意 $x\in A$,存在 $\delta_x>0$,使 $(x-\delta_x,x+\delta_x)\cap A$ 为至多可数集. 可取 $\alpha_x,\beta_x\in\mathbf{Q}$,使 $x\in(\alpha_x,\beta_x)\subset(x-\delta_x,x+\delta_x)$. 显然 $(\alpha_x,\beta_x)\cap A$ 也为至多可数集,设这样的 (α_x,β_x) 的全体为 $\mathscr{A}$(相同的只取一次),它是至多可数集. 于是,$A=\bigcup_{(\alpha,\beta)\in\mathscr{A}}(\alpha,\beta)\cap A$ 为至多可数集.

7.1.44 设 $A\subset\mathbf{R}^n$,且对任意 $x\in A$,总存在 $\delta_x>0$,使得 $B(x,\delta_x)\cap A$ 为至多可数集,其中 $B(x,\delta_x)$ 是以 x 为中心,δ_x 为半径的开球. 则 A 为至多可数集.

证 对任意的 $x\in A$,存在 $\delta_x>0$ 使 $B(x,\delta_x)\cap A$ 为至多可数集. 取 $r_x\in\mathbf{Q}^+$,$0<r_x<\frac{\delta_x}{2}$ 和 $y_x\in\mathbf{Q}^n$,使 $\rho(x,y_x)<r_x$,则 $x\in B(y_x,r_x)\subset B(x,\delta_x)$. 显然,$B(y_x,r_x)\cap A$ 也为至多可数集. 设这样得到的 $B(y_x,r_x)$ 的全体为集合 $\mathscr{A}$(相同的只取一次),它是至多可数集. 于是 $A=\bigcup_{B(y,r)\in\mathscr{A}}B(y,r)\cap A$ 为至多可数集.

7.1.45 $\mathbf{R}^1$ 上的实函数的全体为 $\mathscr{F}$,证明 $\overline{\overline{\mathscr{F}}}=2^{\aleph}$.

证 对任意集合 $E\subset\mathbf{R}^1$,记 E 的特征函数为

$$\chi_E(x)=\begin{cases}1,x\in E,\\ 0,x\notin E.\end{cases}$$

显然,E 与 χ_E 一一对应. 另一方面,对任意 $f\in\mathscr{F}$,f 的图形 $C_f=\{(x,f(x))\mid x\in\mathbf{R}^1\}$ 为 $\mathbf{R}^2$ 的子集,且

$$\mathscr{F}\to2^{\mathbf{R}^2},$$

$$f\to C_f=\{(x,f(x))\mid x\in\mathbf{R}^1\}$$

为单射,记 $C_{\mathscr{F}}=\{C_f\mid f\in\mathscr{F}\}$,则

$$2^{\aleph} = \overline{\overline{\{E \mid E \subset \mathbf{R}^1\}}} = \overline{\overline{\{\chi_E \mid E \subset \mathbf{R}^1\}}}$$
$$\leqslant \overline{\overline{\mathscr{F}}} = \overline{\overline{\mathscr{C}}} \leqslant \overline{\overline{2^{\mathbf{R}^2}}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{R}^2}}} = 2^{\aleph}.$$
根据 Cantor-Bernstein 定理，$\overline{\overline{\mathscr{F}}} = 2^{\aleph}$.

7.1.46 设区间 $I \subset \mathbf{R}^1$ 上的连续函数的全体为 $C(I)$，证明 $\overline{\overline{C(I)}} = 2^{\aleph_0} = \aleph$.

证法 1 首先，$\aleph = \overline{\overline{\{f = c \mid c \in \mathbf{R}\}}} \leqslant \overline{\overline{C(I)}}$.
其次，作映射
$$\varphi: C(I) \to 2^{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}} = 2^{\mathbf{Q}^2},$$
$$f \mapsto \varphi(f) = \{(s,t) \in \mathbf{Q}\times\mathbf{Q} \mid s \in I, t \leqslant f(s)\},$$
由连续性易知 φ 为单射. 因此，
$$\overline{\overline{C(I)}} \leqslant \overline{\overline{2^{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}} = 2^{\overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}}} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$
根据 Cantor-Bernstein 定理，$\overline{\overline{C(I)}} = \aleph$.

证法 2 首先 $\aleph = \overline{\overline{\{f = c \mid c \in \mathbf{R}\}}} \leqslant \overline{\overline{C(I)}}$.

其次，设 $\mathbf{R}^\infty = \{(a_1,\cdots,a_n,\cdots) \mid a_n \in \mathbf{R}, n = 1, 2,\cdots\}$，$\mathbf{Q}\cap I = \{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$，并作映射
$$\varphi: C(I) \to \mathbf{R}^\infty$$
$$f \mapsto \varphi(f) = (f(r_1),\cdots,f(r_n),\cdots)$$
由连续性易知 φ 为单射，因此有 $\overline{\overline{C(I)}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \aleph$. 再根据 Cantor-Bernstein 定理可得 $\overline{\overline{C(I)}} = \aleph$.

7.1.47 设 $\mathscr{A} = \{f \mid f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 至多有一点不连续$\}$，证明：$\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \aleph$.

证 记 $\mathscr{A}_{(x,c)} = \{f \in \mathscr{A} \mid f$ 至多以 x 为不连续点，且 $f(x) = c\}$，由题 7.1.46 知 $\overline{\overline{\mathscr{A}_{(x,c)}}} = \aleph$. 于是再由题 7.1.30，
$$\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \overline{\overline{\bigcup_{(x,c)\in\mathbf{R}^2} \mathscr{A}_{(x,c)}}} = \aleph.$$

7.1.48 区间 I 上的单调函数的不连续点的全体为至多可数集.

证法 1 不妨设 $f: I\to\mathbf{R}$ 为单调增函数，其不连续点的全体记为 E. 对任意 $x_0\in E$，$x_1\in E$，$x_0<x_1$ 有 $f(x_0-0) < f(x_0+0) \leqslant f(x_1-0) < f(x_1+0)$，故
$$(f(x_0-0), f(x_0+0)) \cap (f(x_1-0), f(x_1+0)) = \varnothing.$$
显然
$$\varphi: E \to \mathbf{Q},$$
$$x \mapsto \varphi(x) = r_x \in (f(x-0), f(x+0))\text{（任取 } r_x\in\mathbf{Q}\text{）}$$
为单射. 于是
$$\overline{\overline{E}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}}} = \aleph_0.$$
即 E 为至多可数集.

证法 2 设 x 处的振幅为 $\omega(x) = |f(x+0) - f(x-0)|$,
$$E_0 = \{x\in(a,b) \mid \omega(x) \geqslant 1\},$$
$$E_n = \left\{x \in (a,b) \mid \frac{1}{n+1} \leqslant \omega(x) < \frac{1}{n}\right\},$$
$$n=1,2,\cdots.$$
如果 E_n 中有 m 个不同的点 $x_1,\cdots,x_m$，则由 f 为单调函数知
$$\frac{m}{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^m \omega(x_i) \leqslant |f(b)-f(a)|,$$
$$m \leqslant (n+1)|f(b)-f(a)|,$$
从而 E_n 为有限集. 由此推出 f 在 (a,b) 上的不连续点的全体
$$\bigcup_{n=0}^\infty E_n$$
为至多可数集.

对一般的区间 I，可令
$$I = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n,b_n].$$
由上已证 f 在 (a_n,b_n) 上的不连续点至多可数，从而 f 在 $\bigcup_{n=1}^\infty (a_n,b_n)$ 上，因而在 $I = \bigcup_{n=1}^\infty [a_n,b_n]$ 上的不连续点至多可数.

7.1.49 设 $\mathscr{A} = \{f \mid f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为单调函数$\}$，则 $\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \aleph$.

证 显然，$x + c \in \mathscr{A}$，故 $\aleph = \overline{\overline{\{x+c \mid c\in\mathbf{R}\}}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{A}}}$.

另一方面，对任意 $f\in\mathscr{A}$，f 在有理点集 $\mathbf{Q} = \{r_1,\cdots,r_n,\cdots\}$ 上的值
$$\{f(r_1),\cdots,f(r_n),\cdots\}$$
完全决定了所有 f 的连续点上的函数值和无理数间断点处函数值的左右极限. 对于无理数间断点，由 f 为单调函数和题 7.1.48 知它们至多有可数个，排列为（如果间断点有限，取有限个）
$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$
显然，映射
$$\varphi: \mathscr{A} \to \mathbf{R}^\infty$$
$$f \mapsto \varphi(f) = (f(r_1), x_1, f(x_1), f(r_2), x_2, f(x_2), \cdots, f(r_n), x_n, f(x_n), \cdots)$$
为单射. 于是 $\overline{\overline{\mathscr{A}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{R}^\infty}} = \aleph$.

根据 Cantor-Bernstein 定理，$\overline{\overline{\mathscr{A}}} = \aleph$.

7.1.50 设 $\mathscr{B} = \{f \mid f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为严格单调函数$\}$，$\mathscr{C} = \{f\mid f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为严格单调增函数$\}$，$\mathscr{D} = \{f \mid f: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 为严格单调减函数$\}$. 则 $\overline{\overline{\mathscr{B}}} = \overline{\overline{\mathscr{C}}} = \overline{\overline{\mathscr{D}}} = \aleph$.

证 因为 $\aleph = \overline{\overline{\{x+c\mid c\in\mathbf{R}\}}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{C}}} \leqslant \overline{\overline{\mathscr{A}}} = \aleph$，故由 Cantor-Bernstein 定理得
$\overline{\overline{\mathscr{C}}} = \aleph$（$\mathscr{A}$ 如 7.1.49 所述）. 同理 $\overline{\overline{\mathscr{B}}} = \overline{\overline{\mathscr{D}}} = \aleph$.

7.1.51 设 $f: \mathbf{R}^1\to\mathbf{R}$ 为实值函数，则集合 $E = \{x$

$\in \mathbf{R}^1 \mid f$ 在 x 不连续，但右极限 $f(x+0)$ 存在有限$\}$为至多可数集.

证 令 $S = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid f(x+0)$ 存在有限$\}$，对任意自然数 n，作

$E_n = \{x \in \mathbf{R}^1 \mid$ 存在 $\delta > 0$，当 $x', x'' \in (x-\delta, x+\delta)$ 时，有 $|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}\}$.

显然，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 为 f 的连续点集，从而由 de Morgan 公式得到 $E = S - \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(S - E_n)$. 下面可证 $S - E_n$ 为至多可数集，$n = 1,2,\cdots$. 参照题 7.1.8 的证法知 $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(S - E_n)$ 也是至多可数集.

设 $x \in S - E_n$，由 S 的定义可知，存在 $\delta > 0$，使得，对任意 $x' \in (x, x+\delta)$ 有 $|f(x') - f(x+0)| < \frac{1}{2n}$，从而，当 $x', x'' \in (x, x+\delta)$ 时，就有

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{1}{n}.$$

这说明 $(x, x+\delta) \subset E_n$. 也就是说 $S - E_n$ 中每个点 x 都是开区间 $I_x = (x, x+\delta)$ 的左端点，且 I_x 与 $S - E_n$ 不相交，因此，当 $x_1, x_2 \in S - E_n$ 且 $x_1 \neq x_2$ 时，必有 $I_{x_1} \cap I_{x_2} = \varnothing$.

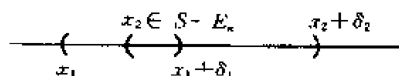


图 7.3

根据题 7.1.11，区间族 $\{I_x \mid x \in S - E_n\}$ 为至多可数集，即 $S - E_n$ 为至多可数集.

7.1.52 设 $f(x)$ 为 (a,b) 上的实函数，则集合 $E = \{x \in (a,b) \mid$ 右导数 $f_+'(x)$ 以及左导数 $f_-'(x)$ 存在但不相等$\}$ 为至多可数集.

证 令 $A = \{x \in (a,b) \mid f_+'(x) < f_-'(x)\}$，$B = \{x \in (a,b) \mid f_+'(x) > f_-'(x)\}$.

对任意 $x \in A$，选有理数 r_x，使得 $f_+'(x) < r_x < f_-'(x)$. 再选有理数 s_x 及 t_x：$a < s_x < x < t_x < b$，使得

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} > r_x, s_x < y < x,$$

以及

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} < r_x, x < y < t_x.$$

合并得

$$f(y) - f(x) < r_x(y - x),$$

其中 $y \neq x$ 且 $s_x < y < t_x$. 因此，

$$\varphi_A : A \to \mathbf{Q}^3, x \to (r_x, s_x, t_x)$$

为单射. 事实上，若有 $x_1, x_2 \in A$，$x_1 \neq x_2$ 使 $(r_{x_1}, s_{x_1}, t_{x_1}) = (r_{x_2}, s_{x_2}, t_{x_2})$，则 $(s_{x_1}, t_{x_1}) = (s_{x_2}, t_{x_2})$ 且均含 x_1 和 x_2，于是，同时有

$$f(x_2) - f(x_1) < r_{x_1}(x_2 - x_1),$$
$$f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2),$$
$$f(x_1) - f(x_2) < r_{x_2}(x_1 - x_2) = r_{x_1}(x_1 - x_2) < f(x_1) - f(x_2),$$

矛盾. 因此 $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}^3}} = \aleph_0$. 同理，$\overline{\overline{B}} \leqslant \aleph_0$. 从而，

$$\overline{\overline{E}} = \overline{\overline{A \cup B}} \leqslant \aleph_0.$$

注 本题关键之处在于建立 $A = \{x \in (a,b) \mid f_+'(x) < f_-'(x)\}$ 与可数集 $\mathbf{Q}^3$ 之间的单射 $\varphi_A : A \to \mathbf{Q}^3, x \to (r_x, s_x, t_x)$.

7.1.53 设 $f(x)$ 为区间 (a,b) 上的凸函数，则集合 $E = \{x \in (a,b) \mid f$ 在 x 不可导$\}$ 为至多可数集.

证 所谓 (a,b) 上的凸函数 $f(x)$，是指对 (a,b) 中任意点 $x_1, x_2, x_1 < x_2$，均有

$$f(x) \leqslant \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2),$$

$$x_1 < x < x_2, x = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} x_2.$$

将上式进行变换，得

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}.$$

于是，对 $a < a_1 < x_1 < x < x_2 < b_1 < b$，有

$$\frac{f(a_1) - f(x)}{a_1 - x} \leqslant \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(b_1) - f(x)}{b_1 - x}.$$

由于 f 为凸函数和上式易知

$$\varphi(u) = \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

为单调函数，从而 $f_-'(x)$ 和 $f_+'(x)$ 存在有限，且

$$-\infty < \frac{f(a_1) - f(x)}{a_1 - x} \leqslant \lim_{x_1 \to x^-} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \leqslant \lim_{x_2 \to x^+} \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \leqslant \frac{f(b_1) - f(x)}{b_1 - x} < +\infty.$$

再由题 7.1.52，集合

$$E = \{x \in (a,b) \mid f \text{ 在 } x \text{ 不可导}\} = \{x \in (a,b) \mid f_-'(x) \neq f_+'(x)\}$$

为至多可数集.

注 从 E 的定义和题 7.1.52 自然会想到只须 $f_+'(x)$ 和 $f_-'(x)$ 是存在有限的.

7.1.54 设 $I \subset \mathbf{R}^1$ 为区间，$C(I)$ 为 I 上连续函数的集合. $\mathscr{A} = \{(f_1, \cdots, f_n, \cdots) \mid f_n \in C(I), n = 1,2,$

$\cdots\}$, $\mathscr{A}_1 = \{(f_1,\cdots,f_n,\cdots) \in \mathscr{A} \mid$ 函数列 $\{f_n\}$ 在 I 上一致收敛$\}$. 则 $\bar{\bar{\mathscr{A}}}_1 = \bar{\bar{\mathscr{A}}} = \aleph$.

证 由题 7.1.46 知 $\overline{\overline{C(I)}} = \aleph$. 再由题 7.1.28 知 $\bar{\bar{\mathscr{A}}} = \aleph$. 此外, 由

$$\aleph = \overline{\overline{\{(f_1,\cdots,f_n,\cdots) = (c,\cdots,c,\cdots) \mid c \in \mathbf{R}\}}}$$

$\leqslant \bar{\bar{\mathscr{A}}}_1 \leqslant \bar{\bar{\mathscr{A}}} = \aleph$ 和 Cantor-Bernstein 定理, 立得 $\bar{\bar{\mathscr{A}}}_1 = \aleph$.

7.1.55 设 $f:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}$ 为一元实函数, 令

$$f_{\max} = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^1 \text{ 为 } f \text{ 的极大值点}\},$$

$$f_{\min} = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^1 \text{ 为 } f \text{ 的极小值点}\},$$

证明: $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$ 为至多可数集.

证 设 x 为 f 的极大值点, 选一个区间 (α_x,β_x) 使得 $x \in (\alpha_x,\beta_x)$, $\alpha_x,\beta_x \in \mathbf{Q}$. 且 $f(u) \leqslant f(x)$ 对任意 $u \in (\alpha_x,\beta_x)$ 成立. 由极大值的性质知

$$\varphi: f_{\max} \to \mathbf{Q}\times\mathbf{Q},$$

$$y = f(x) \to (\alpha_x,\beta_x)$$

$$(\text{对 } y, \text{只选一个区间} (\alpha_x,\beta_x))$$

为单射. 于是, $\bar{\bar{f}}_{\max} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}}} = \aleph_0$. 即 $f_{\max}$ 为至多可数集.

同理可证 $f_{\min}$ 也为至多可数集.

注 证明的难点也是关键之处在于在 $f_{\max}$ 与可数集 $\mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$ 之间的单射 $\varphi: f_{\max} \to \mathbf{Q}\times\mathbf{Q}$, $y = f(x) \to (\alpha_x,\beta_x)$ (f 在区间 (α_x,β_x) 中达最大值). 这一简单证法, 往往难以想到.

7.1.56 设 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为 n 元实函数, 令

$$f_{\max} = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n \text{ 为 } f \text{ 的极大值点}\},$$

$$f_{\min} = \{f(x) \mid x \in \mathbf{R}^n \text{ 为 } f \text{ 的极小值点}\}.$$

证明 $f_{\max}$ 和 $f_{\min}$ 为至多可数集.

证 设 x 为 f 的极大值点, 则存在 $r > 0$, 使对任意的 $u \in B(x,r)$ (以 x 为中心, r 为半径的开球), 有 $f(u) \leqslant f(x)$. 可以选一个 $B(x_*,r_*) \subset B(x,r)$ 使 $x \in B(x_*,r_*)$, $(x_*,r_*) \in \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$. 由极大值的性质知

$\varphi: f_{\max} \to \mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+$,

$y = f(x) \to (x_*,r_*)$ (对 y, 只选一个 (x_*,r_*)) 为单射. 于是

$$\bar{\bar{f}}_{\max} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}^n \times \mathbf{Q}^+}} = \aleph_0.$$

即 $f_{\max}$ 为至多可数集. 同理, $f_{\min}$ 也为至多可数集.

7.1.57 设 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ 为连续函数, 处处达极大或极小. 则 f 为常值函数.

证 (反证) 假设 f 不是常值函数, 则存在 $a,b \in \mathbf{R}^n$, 使 $f(a) \neq f(b)$, 不妨设 $f(a) < f(b)$. 由连续函数的介值定理知, $f(\mathbf{R}^n) \supset [f(a),f(b)]$. 于是

$$\overline{\overline{f(\mathbf{R}^n)}} \geqslant \overline{\overline{[f(a),f(b)]}} = \aleph.$$

另一方面, 由题设和上题有

$$\overline{\overline{f(\mathbf{R}^n)}} = \overline{\overline{f_{\max} \cup f_{\min}}} = \aleph_0 < \aleph.$$

矛盾.

(该命题也可用反证法, 连续函数的介值定理和区间套原理证明 (参阅第 1 篇题 1.3.17), 在此不再赘述.)

7.1.58 平面上两两无公共内点的闭圆片集合 $\mathscr{A}$ 不能覆盖平面 $\mathbf{R}^2$.

证 对任意的 $B \subset \mathscr{A}$, 取定一个 $x_B \in \mathring{B} \cap \mathbf{Q}^2$, 其中 $\mathring{B}$ 为 B 的内点集. 作映射

$$\varphi: \mathscr{A} \to \mathbf{Q}^2,$$

$$B \to \varphi(B) = x_B \in \mathring{B} \cap \mathbf{Q}^2.$$

由题设 $\mathscr{A}$ 中闭圆片彼此无公共内点, 故 φ 为单射. 所以 $\bar{\bar{\mathscr{A}}} \leqslant \overline{\overline{\mathbf{Q}^2}} = \aleph_0$.

(反证) 假设 $\mathscr{A}$ 能覆盖平面 $\mathbf{R}^2$, 明显地, 因 $\mathscr{A}$ 至多可数, 故 $\mathscr{A}$ 中任两闭圆片的切点的全体为至多可数集. 又因 $\mathbf{R}$ 为不可数集, 故存在 $c \in \mathbf{R}$, 使直线 $l = \{(x,c) \mid x \in \mathbf{R}\}$ 不经过所有的切点. 于是, l 与各圆片或者不相交, 或者相交于一闭区间线段 (包括退缩为一点), 而这些闭区间至多可数个, 且彼此不相交, 记为 F_i, $i = 1,2,\cdots$. 于是, $l = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$.

这与题 7.1.19 矛盾.

7.1.59 设 $E \subset l^2 = \{x = (x_1,\cdots,x_n,\cdots) \mid x_n \in \mathbf{R}, \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < +\infty\}$ 为 l^2 的线性基, 试证: E 为不可数集.

证 对任意 $a \in (0,1)$, 令

$$x = (1,a,\cdots,a^n,\cdots).$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a^{n-1})^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2n}}{1-a^2} = \frac{1}{1-a^2}, a \in (0,1),$$

所以 $x \in l^2$. 现证 $V = \{(1,a,\cdots,a^n,\cdots) \mid a \in (0,1)\}$ 中的向量线性无关. 事实上, 如果

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i a_i = 0,$$

其中 $a_i = (1,a_i,\cdots,a_i^n,\cdots)$, $i \neq j$ 时, $a_i \neq a_j$, $i,j \in \{1,\cdots,m\}$, 则

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = 0, \\ \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_m a_m = 0, \\ \cdots \\ \lambda_1 a_1^{m-1} + \lambda_2 a_2^{m-1} + \cdots + \lambda_m a_m^{m-1} = 0 \end{cases}$$

是关于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 的线性方程组, 由 Vandermonde 行列式

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_1 & a_2 & \cdots & a_m\\ \cdots & & & \\ a_1^{m-1} & a_2^{m-1} & \cdots & a_m^{m-1}\end{bmatrix}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m}(a_j-a_i)\neq 0$$

知 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_m=0$.

(反证) 假设 E 为可数集,则可记 $E=\{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n,\cdots)\}$. 于是 l^2 和 V 中元素均可由 E 中元素有限线性表示. 设

$U_1=\{\lambda\beta_1 \mid \lambda\in\mathbf{R}\}$

$U_2=\{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2 \mid \lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}\}$,

$\cdots$

$U_n=\{\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_n\beta_n \mid \lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbf{R}\}$,

$\cdots$

则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}U_n=l^2\supset V$. 因此,至少存在一个自然数 N,使 U_N 中含 V 中不可数个点(否则会得出 V 为可数集,与上述 V 不可数矛盾). 设其形成的集合为 V_1. 于是, V_1 可由 $\beta_1,\cdots,\beta_N$ 线性表示. 因 V_1 中向量线性无关,故 V_1 中向量个数 $\leqslant N$,这与 V_1 为不可数集矛盾.

因此 E 是不可数集.

7.1.60 $\mathbf{R}^1$ 中非空完全集(无孤立点的闭集)C(即 $C'=C$),其势 $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

证 因为 C 为非空完全集,故存在点 $x\in C$ 及一个包含 x 的区间 Δ. 由于 x 不是 C 的孤立点,所以 $C\Delta\stackrel{\Delta}{=\!=}C\cap\Delta$ 是一个无限集.

在 $C\Delta$ 中取两个相异点 x_0 和 x_1,又作具有下列诸性质的两个区间 Δ_0 和 Δ_1:当 $i=0,1$ 时,

(i) $x_i\in C\Delta_i$;(ii) $\Delta_i\subset\Delta$;(iii) $\overline{\Delta}_0\overline{\Delta}_1=\varnothing$;(iv) $m\Delta_i<1$ ($\overline{\Delta}_i$ 表示 Δ_i 的闭包, $m\Delta_i$ 表示 Δ_i 的长或 Lebesgue 测度).

因为 x_0 为 C 的聚点,所以 $C\Delta_0$ 是一个无限集. 取 $x_{0i}\in C\Delta_0$, $i=0,1$. 又作如下的区间 Δ_{00} 和 Δ_{01}:当 $k=0,1$ 时,

(i) $x_{0k}\in C\Delta_{0k}$;(ii) $\Delta_{0k}\subset\Delta_0$;(iii) $\overline{\Delta}_{00}\overline{\Delta}_{01}=\varnothing$;(iv) $m\Delta_{0k}<\dfrac{1}{2}$.

对于点 x_1 施以同样的手续. 于是得到如下的点 $x_{ik}(i,k=0,1)$ 和区间 Δ_{ik} 满足:

(i) $x_{ik}\in C\Delta_{ik}$;(ii) $\Delta_{ik}\subset\Delta_i$;(iii) $\overline{\Delta}_{ik}\overline{\Delta}_{i'k'}=\varnothing$, $(i,k)\neq(i',k')$;(iv) $m\Delta_{ik}<\dfrac{1}{2}$.

这种手续继续进行下去,至 n 次得到如下的点 $x_{i_1i_2\cdots i_n}(i_k=0,1;k=1,\cdots,n)$ 和区间 $\Delta_{i_1i_2\cdots i_n}$ 满足:

(i) $x_{i_1\cdots i_n}\in C\Delta_{i_1\cdots i_n}$;

(ii) $\Delta_{i_1\cdots i_{n-1}i_n}\subset\Delta_{i_1\cdots i_{n-1}}$;

(iii) $\overline{\Delta}_{i_1\cdots i_n}\overline{\Delta}_{i_1'\cdots i_n'}=\varnothing$, $(i_1\cdots i_n)\neq(i_1'\cdots i_n')$;

(iv) $m\Delta_{i_1\cdots i_n}<\dfrac{1}{n}$.

因为每个 $x_{i_1\cdots i_n}$ 为 C 的聚点,所以可取两个相异点

$x_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}\in C\Delta_{i_1\cdots i_n}$, $i_{n+1}=0$ 或 1.

又可作如下的两个区间:

$\Delta_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}$, $i_{n+1}=0$ 或 1.

当 $i_{n+1}=0,1$ 时,有

(i) $x_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}\subset C\Delta_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}$;

(ii) $\Delta_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}\subset\Delta_{i_1\cdots i_n}$;

(iii) $\overline{\Delta}_{i_1\cdots i_n0}\overline{\Delta}_{i_1\cdots i_n1}=\varnothing$;

(iv) $m\Delta_{i_1\cdots i_ni_{n+1}}<\dfrac{1}{n+1}$.

于是,对所有的自然数 n 都施行了这种手续.

对于每一无限数列

$(i_1,i_2,i_3,\cdots)$, $i_k=0,1$,

根据闭区间套原理,存在唯一的点 $z_{i_1i_2i_3\cdots}$ 与之对应,即 $z_{i_1i_2i_3\cdots}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_{i_1\cdots i_n}$. 因为 C 为闭集, $z_{i_1i_2i_3\cdots}\in C$.

易见, $\varphi:\{(i_1,i_2,i_3,\cdots)\mid i_k=0,1\}\to S=\{z_{i_1i_2i_3\cdots}\mid i_k=0,1\}$ 为一一映射. 事实上,如果 $(i_1,i_2,i_3,\cdots)\neq(i_1',i_2',i_3',\cdots)$,则存在自然数 n,使

$i_1=i_1',i_2=i_2',\cdots,i_{n-1}=i_{n-1}',i_n\neq i_n'$.

因而 $\overline{\Delta}_{i_1\cdots i_n}\overline{\Delta}_{i_1'\cdots i_n'}=\varnothing$ 和 $z_{i_1i_2i_3\cdots}\neq z_{i_1'i_2'i_3'\cdots}$. 这就证明了 φ 为一一映射,再由题 7.1.28 得到

$\aleph=2^{\aleph_0}=\overline{\overline{\{(i_1,i_2,i_3,\cdots)\mid i_k=0,1\}}}$

$=\overline{\overline{S}}\leqslant\overline{\overline{C}}\leqslant\overline{\overline{\mathbf{R}^1}}=\aleph$,

$\overline{\overline{C}}=\aleph$.

7.1.61 设 (X,τ) 为 A_2 空间(即满足第二可数性公理)和 T_1 空间(参阅[3]),则 X 的势 $\overline{\overline{X}}\leqslant\aleph$.

证 因为 (X,τ) 为 A_2 空间,所以它有一可数拓扑基 $\tau^*=\{U_n\mid n\in\mathbf{N}\}$. 设 $\mathscr{A}$ 为 τ^* 的一切子集所成的集合. 令

$f:X\to\mathscr{A}$

$x\to f(x)=\{U_{n_1},U_{n_2},\cdots\}$, $x\in U_{n_i}$, $i=1,2,\cdots$, $n_1<n_2<\cdots$.

若 $x,y\in X$, $x\neq y$,则由 (X,τ) 为 T_1 空间,存在 $U\in\tau$ 使 $x\in U$,但 $y\notin U$. 而 $\{U_n\mid n\in\mathbf{N}\}=\tau^*$ 为拓扑基,故存在 $U_n\subset U$,使 $x\in U_n$,但 $y\notin U_n$. 于是, $f(x)\neq f(y)$, f 为单射. 这就蕴含着

$$\overline{\overline{X}}\leqslant\overline{\overline{\mathscr{A}}}=\aleph.$$

§7.2 测度、外测度和可测性（构造法应用之二）

设 X 为非空集合，$\mathscr{R}$ 为 X 上的集族，如果 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$，有

$$E_1\cup E_2\in\mathscr{R},E_1-E_2\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的环（环对"$\cup$"、"$-$"封闭）. 特别还有 $X\in\mathscr{R}$，则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的代数（代数对"$\cup$"、"$-$"和"余"运算封闭）. 由于

$$E_1\cap E_2=(E_1\cup E_2)-(E_1-E_2)-(E_2-E_1)$$

可见环对"$\cap$"运算也封闭. 取 $E\in\mathscr{R}$，则 $\varnothing=E-E\in\mathscr{R}$. 若 $E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{R}$，还可得到 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i\in\mathscr{R}$.

设 $\mathscr{R}$ 为 X 上的集族，如果任何 $E_i\in\mathscr{R},i=1,2,\cdots$，有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R},E_1-E_2\in\mathscr{R},$$

则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 σ 环（σ 环对"$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$"，"$-$"运算封闭）. 如果还有 $X\in\mathscr{R}$，则称 $\mathscr{R}$ 为 X 上的 σ 代数（σ 代数对"$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}$"，"$-$"和"余"运算封闭）. 显然，$\sigma$ 环必为环，σ 代数必为代数. 由于

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i-\bigcup_{i=1}^{\infty}\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j-E_i\Big),$$

故 σ 环对"$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}$"运算是封闭的. 由此得到 σ 环对上限集、下限集和极限运算也都是封闭的.

容易看出，包含环 $\mathscr{R}$ 的最小 σ 环 $S(\mathscr{R})$ 就是包含 $\mathscr{R}$ 的所有 σ 环（例如 X 的一切子集所构成的子集族是包含 $\mathscr{R}$ 的一个 σ 环）的交.

设环 $\mathscr{R}$ 上的集函数 $\mu:\mathscr{R}\to\mathbf{R}$ 具有性质：

(i) $\mu(\varnothing)=0$;

(ii) 非负性：对任何 $E\in\mathscr{R},\mu(E)\geqslant0$;

(iii) 可数可加性：对任何 $E_i\in\mathscr{R},i=1,2,\cdots$，如果 $E_i\cap E_j=\varnothing,i\neq j$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$，就必有

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

则称 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的测度，$\mu(E)$ 称为集 E 的测度.

环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 具有性质：

(i) 有限可加性：如果 $E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{R}$，且 E_i 彼此不相交，则

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{n}E_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\mu(E_i);$$

(ii) 单调性：如果 $E_1,E_2\in\mathscr{R}$，且 $E_1\subset E_2$，则

$$\mu(E_1)\leqslant\mu(E_2);$$

(iii) 次可数可加性：如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$ 及 $E\in\mathscr{R},E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$，则

$$\mu(E)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i);$$

(iv) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，且 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，则

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n);$$

(v) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，$E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$，$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$，且至少有一个 E_n 使 $\mu(E_n)<+\infty$，则

$$\mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\Big)=\lim_{n\to\infty}\mu(E_n);$$

此外，如果 $\mathscr{R}$ 还是 σ 环，则还有

(vi) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，则 $\mu(\varliminf\limits_{n\to+\infty}E_n)\leqslant\varliminf\limits_{n\to+\infty}\mu(E_n)$;

(vii) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，且有自然数 k 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)<+\infty$，则有 $\mu(\varlimsup\limits_{n\to+\infty}E_n)\geqslant\varlimsup\limits_{n\to+\infty}(E_n)$;

(viii) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，$\lim\limits_{n\to+\infty}E_n$ 存在，且有自然数 k 使得 $\mu(\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}E_n)<+\infty$，则 $\mu(\lim\limits_{n\to+\infty}E_n)=\lim\limits_{n\to+\infty}\mu(E_n)$;

(ix) 如果 $E_n\in\mathscr{R},n=1,2,\cdots$，且有自然数 k 使得 $\sum\limits_{n=k}^{\infty}\mu(E_n)<+\infty$，则 $\mu(\varlimsup\limits_{n\to+\infty}E_n)=0$.

设 $H(\mathscr{R})=\{E\mid E\subset X$，存在 $E_i\in\mathscr{R},i=1,2,\cdots$，使 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\}$，可证 $H(\mathscr{R})$ 为 σ 环，定义集函数 $\mu^*:H(\mathscr{R})\to\mathbf{R}$，

$$\mu^*(E)=\inf\Big\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i)\mid E_i\in\mathscr{R}\text{且 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big\},$$

称 μ^* 为由测度 μ 诱导出的外测度（注意，$\mu^*(E)$ 可能为 $+\infty$）. 易见，$\mathscr{R}\subset H(\mathscr{R})$，且具有以下性质：

(i) $\mu^*(\varnothing)=0$;

(ii) 非负性：对任何 $E\in H(\mathscr{R}),\mu^*(E)\geqslant0$;

(iii) 单调性：如果 $E_1,E_2\in H(\mathscr{R})$，且 $E_1\subset E_2$，则 $\mu^*(E_1)\leqslant\mu^*(E_2)$;

(iv) $\mu^*|_{\mathscr{R}}=\mu$，即对 $E\in\mathscr{R},\mu^*(E)=\mu(E)$;

(v) 次可数可加性：对 $E_i\in H(\mathscr{R}),i=1,2,\cdots$，有

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(E_i).$$

设 $\mathscr{R}^*=\{E\in H(\mathscr{R})\mid$ 对任何 $F\in H(\mathscr{R})$，$\mu^*(F)=\mu^*(F\cap E)+\mu^*(F-E)\}$，如果 $E\in\mathscr{R}^*$，则称 E 为 μ^* 可测集. 可证 $\mathscr{R}\subset\mathscr{R}^*$，$\mathscr{R}^*$ 为 σ 环. 所以 $S(\mathscr{R})\subset\mathscr{R}^*$. 如果 $E\in H(\mathscr{R}),\mu^*(E)=0$，则 $E\in\mathscr{R}^*$. 此外还可证 μ^* 为完全测度，即 μ^* 零集 $E(\mu^*(E)=0)$ 的任一子集也必是 μ^* 零集. σ 环 $\mathscr{R}^*$

上的测度 μ^* 为环 $\mathscr{R}$ 上的测度 μ 的延拓. 有时将此 μ^* 仍记为 μ. 更进一步, 如果 μ 为环 $\mathscr{R}$ 上的 σ 有限测度(即对任何 $E\in\mathscr{R}$, 存在 $E_i\in\mathscr{R}, i=1,2,\cdots,\mu(E_i)<+\infty$, 使 $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$), 则 $E\in\mathscr{R}^*\Leftrightarrow E=F\cup H$, 其中 $F\in S(\mathscr{R})$, H 为 μ^* 零集.

现在, 我们回忆一下 $\mathbf{R}^1$ 上的最重要的 Lebesgue 测度 m. 设 $\mathscr{R}_0=\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\mid -\infty<a_i\leqslant b_i<+\infty, i=1,\cdots,n\}$, 它是一个环. 再设 $E_1,\cdots,E_n\in\mathscr{R}_0$, 彼此不相交, 则称 $E=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$ 为 E 的一个初等分解(注意初等分解不是唯一的). 令集函数 $m:\mathscr{R}_0\to\mathbf{R}$,

$$m(E)=\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i).$$

可以证明 $m(E)$ 与 E 的初等分解无关, 而是由 E 完全确定, 且 m 为环 $\mathscr{R}_0$ 上的一个测度. 根据上述测度延拓的一般方法, 先在 $H(\mathscr{R}_0)$ 上引进外测度 m^*, 再将环 $\mathscr{R}_0$ 上的测度 m 延拓为 $L=\mathscr{R}_0^*\subset H(\mathscr{R})$ 上的测度 m^*, 称为 Lebesgne 测度(它是区间长度的推广, 有时仍记为 m), $L=\mathscr{R}_0^*$ 为 Lebesgue(L) 可测集的全体.

最后, 还必须指出的是: $E\subset\mathbf{R}^1$ 为 L 可测集与下面条件中的任何一个等价:

(i) 对任何 $\epsilon>0$, 存在开集 $G\supset E$, 使 $m^*(G-E)<\epsilon$;

(ii) 对任何 $\epsilon>0$, 存在闭集 $F\subset E$, 使 $m^*(E-F)<\epsilon$;

(iii) 对任何 $\epsilon>0$, 存在开集 G 和闭集 F, 使 $F\subset E\subset G$, 且 $m(G-F)<\epsilon$;

(iv) 存在 G_δ 型集 $G(=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$, G_n 为开集), 使 $G\supset E$, 且 $m^*(G-E)=0$;

(v) 存在 F_σ 型集 $F(=\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$, F_n 为闭集), 使 $F\subset E$, 且 $m^*(E-F)=0$;

(vi) 存在 $G\in S(\mathscr{R}_0)$, 使 $G\supset E$ 且 $m^*(G-E)=0$;

(vii) 存在 $F\in S(\mathscr{R}_0)$, 使 $F\subset E$ 且 $m^*(E-F)=0$.

以上内容可参阅[1].

本节通过对大量的集合和各种测度的构造, 来展示构造法的具体技巧.

7.2.1 设 μ 为集 X 上的环 $\mathscr{R}$ 上的测度, 则

(1) 如果 $E_n\in\mathscr{R}, n=1,2,\cdots$, 且 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$, 那么 $\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$.

(2) 如果 $E_n\in\mathscr{R}, n=1,2,\cdots$, $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$, $\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{R}$, 且至少有一个 E_{n_0}, 使 $\mu(E_{n_0})<+\infty$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)=\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

举例说明删去条件"$\mu(E_{n_0})<+\infty$"后, 上述结论不成立.

(3) 如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 环, $E_n\in H(\mathscr{R})$, $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$, 则

$$\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

(4) 如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 环, $E_n\in H(\mathscr{R})$, $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$, 且至少有一个 E_{n_0}, 使 $\mu_*(E_{n_0})<+\infty$, 则(参阅 7.2.3)

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)=\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n).$$

同(2)中反例, 条件"$\mu_*(E_{n_0})<+\infty$"不能删去. μ_* 定义见[1]130 页题 3.

(5) 举例说明虽有(3)中条件: $E_n\in H(\mathscr{R})$, $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$, 但 $\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)\neq\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$.

(6) 举例说明, 虽有(4)中条件: $E_n\in H(\mathscr{R})$, $E_1\supset E_2\supset E_n\supset\cdots$, 但 $\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)\neq\mu^*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)$.

证 (1) 设 $F_1=E_1$, $F_n=E_n-E_{n-1}$, $n=2,3,\cdots$, 则 F_n 是一列彼此不相交的集合, 且 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$, $\bigcup_{i=1}^{n}F_i=E_n$, 所以

$$\begin{aligned}\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)&=\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(F_i)\\&=\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu(F_i)=\lim_{n\to+\infty}\mu(\bigcup_{i=1}^{n}F_i)\\&=\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n).\end{aligned}$$

(2) 令 $F_n=E_{n_0}-E_n$, $n=n_0,n_0+1,\cdots$, 则 $F_{n_0}\subset F_{n_0+1}\subset F_{n_0+2}\subset\cdots$, 而且

$$\bigcup_{i=n_0}^{\infty}F_i=\bigcup_{i=n_0}^{\infty}(E_{n_0}-E_i)=E_{n_0}-\bigcap_{i=n_0}^{\infty}E_i\in\mathscr{R},$$

所以, 由(1)得到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\mu(E_n)&=\lim_{n\to+\infty}[\mu(E_{n_0})-\mu(F_n)]\\&=\mu(E_{n_0})-\lim_{n\to+\infty}\mu(F_n)=\mu(E_{n_0})-\mu(\bigcup_{i=n_0}^{\infty}F_i)\\&=\mu(E_{n_0}-\bigcup_{i=n_0}^{\infty}F_i)=\mu(\bigcap_{i=n_0}^{\infty}(E_{n_0}-F_i))\\&=\mu(\bigcap_{i=n_0}^{\infty}E_i)=\mu(\bigcap_{i=1}^{\infty}E_i).\end{aligned}$$

反例. 令 $E_n=[n,+\infty)\subset\mathbf{R}^1$.

$$\lim_{n\to+\infty}m(E_n)=+\infty\neq0=m(\varnothing)=m(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n).$$

(3) 由 $E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$ 知 $\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$, $\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(E_{n+1})$ 和 $\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)$ 存

在知，

$$\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)\leqslant\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

下证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)\geqslant\mu^*(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$.

如果 $\mu^*(E_n)=+\infty$，则 $\mu^*(E_i)=+\infty, i\geqslant n$，结论显然. 如果 $\mu^*(E_n)<+\infty, n=1,2,3,\cdots$，则对每个 E_n 和任何 $\varepsilon>0$，取 $G_n\in\mathscr{R}$，使 $E_n\subset G_n$ 且

$$\mu(G_n)<\mu^*(E_n)+\varepsilon.$$

记 $A_n=\bigcap\limits_{k=n}^{\infty}G_k$，易知 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset\cdots, E_n\subset A_n\subset G_n, n=1,2,\cdots$，再从(1)和 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ 得到

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\mu(G_n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)+\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$，立得

$$\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n).$$

综合上述，有

$$\lim_{n\to+\infty}\mu^*(E_n)=\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

(4) 由 $E_1\supset E_2\supset E_3\supset\cdots$ 知 $\mu_*(E_n)\geqslant\mu_*(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}E_n)$，$\mu_*(E_n)\geqslant\mu_*(E_{n+1})$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)$ 存在. 因此

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)\geqslant\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n).$$

下证 $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)\leqslant\mu_*(\bigcap\limits_{n}^{\infty}E_n)$.

对每个 $E_n(n\geqslant n_0)$ 和任何 $\varepsilon>0$，取 $F_n\in\mathscr{R}$，使 $F_n\subset E_n$ 且

$$\mu(F_n)>\mu_*(E_n)-\varepsilon.$$

记 $A_n=\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}F_k$. 易知 $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots, E_n\supset A_n\supset F_n, n=1,2,\cdots$. 再从(2)和 $\bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty}E_n\supset\bigcap\limits_{n=n_0}^{\infty}A_n$ 得到

$$\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)=\mu_*(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}E_n)\geqslant\mu(\bigcap_{n=n_0}^{\infty}A_n)=\lim_{n\to+\infty}\mu(A_n)\geqslant\overline{\lim_{n\to+\infty}}\mu(F_n)\geqslant\underline{\lim_{n\to+\infty}}\mu(F_n)\geqslant\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)-\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 立得

$$\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n)\geqslant\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n).$$

综合上述，有

$$\lim_{n\to+\infty}\mu_*(E_n)=\mu_*(\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n).$$

利用(3)的结果和令 $H_n=E_{n_0}-E_n, n\geqslant n_0$ 也可证得(4)中结果.

(5) 设 $[0,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_0,r_1,r_2,\cdots\}, r_0=0, x,y\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，定义 $x\sim y\Leftrightarrow x-y\in[0,1]\cap\mathbf{Q}$，$[x]$ 为 x 的等价类，在每个等价类中恰选一元素为代表得到代表集 A，记 $A_0=A, A_k=\varphi_k(A)$，其中 $\varphi_k(u)=u+r_k, u\in A$. 现在我们来证明 $m_*(\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_k)=0, n=0,1,2,\cdots$. 记 $E_n=\bigcup\limits_{k=0}^{n}A_k$，

$$\varphi_{n_i}(E_n)=\{\varphi_{n_i}(u)=u+r_{n_i}\mid u\in E_n\},$$

其中 $n_0<n_1<n_2<\cdots$，且对 $\forall i,j=0,1,2,\cdots, i\neq j$，有

$$|r_{n_i}-r_{n_j}|\notin\{|r_s-r_t|\mid s,t=0,1,2,\cdots,n\}\quad(*)$$

于是 $\varphi_{n_i}(E_n)(i=0,1,2,\cdots)$ 为彼此不相交的集合.

(反证)假设 $\varphi_{n_i}(E_n)\cap\varphi_{n_j}(E_n)\neq\varnothing$，则 $\exists z\in\varphi_{n_i}(E_n)\cap\varphi_{n_j}(E_n), i<j$. 于是

$$z=x+r_s+r_{n_i}=y+r_t+r_{n_j},\ x+r_s\in\varphi_s(A),$$
$$y+r_t\in\varphi_t(A), 0\leqslant s,t\leqslant n,$$
$$x-y=(r_t-r_s)+(r_{n_j}-r_{n_i})\in\mathbf{Q},$$

必有 $x=y$ 和 $r_s-r_t=r_{n_j}-r_{n_i}$，这与上面式(*)相矛盾. 由此得(记 $\delta=m_*(\varphi_{n_i}(E_n))$)

$$0\leqslant\sum_{i=0}^{\infty}\delta=\sum_{i=0}^{\infty}m_*(\varphi_{n_i}(E_n))\leqslant m_*(\bigcup_{i=0}^{\infty}\varphi_{n_i}(E_n))\leqslant m([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])=3$$

和

$$m_*(\bigcup_{k=0}^{n}A_k)=m_*(E_n)=m_*(\varphi_{n_i}(E_n))=\delta=0.$$

从上述可看出，$E_1\subset E_2\subset E_3\subset\cdots$ 及

$$\lim_{n\to+\infty}m_*(E_n)=\lim_{n\to+\infty}0=0<m([-\frac{1}{2},\frac{1}{2}])\leqslant m_*(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)=m_*(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n).$$

这就是所需要的反例.

(6) 对(5)中的 E_n，$[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-E_n$ 为集合的单调下降序列，根据 $m^*([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-E_n)=3-m_*(E_n)=3-0=3$，有

$$\lim_{n\to+\infty}m^*([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-E_n)=3>m^*([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n)=m^*(\bigcap_{n=0}^{\infty}([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-E_n)).$$

这说明 $[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]-E_n$ 为所需要的反例

7.2.2 设 $\mathscr{R}$ 为 X 的某些子集所成的 σ 环，μ 为 $\mathscr{R}$ 上的测度. 则 $H(\mathscr{R})$ 上的集函数

$$\mu^{**}(E)=\inf\{\mu(F)\mid E\subset F\in\mathscr{R}\}, E\in H(\mathscr{R})$$

为外测度.

证 设 $A = \{\mu(F) \mid E \subset F \in \mathscr{R}\}$，$B = \{\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \mid E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n, F_n \in \mathscr{R}\}$. 如果 $\mu(F) \in A$，则 $E \subset F \in \mathscr{R}$. 取 $F_1 = F, F_n = \varnothing, n = 2,3,\cdots$，则 $F_n \in \mathscr{R}, n = 1,2,\cdots$，且 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，

$$\mu(F) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \in B.$$

于是 $A \subset B$. $\inf A \geqslant \inf B$.

反之，若 $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \in B$，则 $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n, F_n \in \mathscr{R}$. 于是，$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n \in \mathscr{R}$ 和

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \geqslant \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)$$

这就蕴含着

$$\inf B \geqslant \inf A.$$

综合上述，得到 $\inf A = \inf B$. 即 μ^{**} 就是 §7.2 定义的外测度 μ^*. 由此，$\mu^{**} = \mu^*$ 应具有外测度的三条基本性质. 当然也可从 μ^{**} 定义直接推出.

7.2.3 设 $\mathscr{R}$ 为 X 的某些子集所成的环，μ 为 $\mathscr{R}$ 上的测度. 则 $H(\mathscr{R})$ 上的集函数

$$\mu_*(E) = \sup\{\mu(F) \mid E \supset F \in \mathscr{R}\}$$

（称 μ_* 为内测度）具有下列各性质：

(1°) 非负性：$\mu_*(E) \geqslant 0$，特别地 $\mu_*(\varnothing) = 0$；

(2°) 单调性：若 $E_1, E_2 \in H(\mathscr{R}), E_1 \subset E_2$，则 $\mu_*(E_1) \leqslant \mu_*(E_2)$；

(3°) 若 $E \in \mathscr{R}$，则 $\mu_*(E) = \mu(E)$；

(4°) 若 $E_n \in H(\mathscr{R}), E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$，则

$$\mu_*(\bigcup_{n=1}^{m}E_n) \geqslant \bigcup_{n=1}^{m}\mu_*(E_n).$$

进而，如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 环，则有

$$\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(E_n);$$

(5°) 对 $E \in \mathscr{R}, F \in H(\mathscr{R})$，有

$$\mu_*(F) = \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E);$$

(6°) 如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 环，则 $\mu_*(E) \leqslant \mu^*(E), E \in H(\mathscr{R})$.

证 根据 μ_*, μ^* 的定义和 μ 的性质，显然有(1°)、(2°)、(3°) 和(6°). 现证(4°)的后一情形（前一情形更简单）如下：如果有 $\mu_*(E_n) = +\infty$，则 $\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) = +\infty$，结论显然. 如果 $\mu_*(E_n) < +\infty$，$n = 1,2,\cdots$，则对 $E_i, E_j \in H(\mathscr{R}), E_i \cap E_j = \varnothing, i \neq j$ 和任何 $\varepsilon > 0$，取 F_n 使 $E_n \supset F_n \in \mathscr{R}$ 及

$$\mu_*(E_n) \leqslant \mu(F_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

于是，$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n \supset \bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，$F_i$ 彼此不相交和从 $\mathscr{R}$ 为 σ 环知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n \in \mathscr{R}$. 再从(2°)，就立即得到

$$\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) \geqslant \mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(E_n) - \varepsilon.$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，有

$$\mu_*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty}\mu_*(E_n).$$

最后证明(5°). 对 $E \in \mathscr{R}, F \in H(\mathscr{R})$，由于

$$F = (F \cap E) \cup (F - E)$$

且

$$(F \cap E) \cap (F - E) = \varnothing$$

和(4°)有

$$\mu_*(F) \geqslant \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E).$$

再证 $\mu_*(F) \leqslant \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E)$. 如果 $\mu_*(F \cap E) = +\infty$ 或 $\mu_*(F - E) = +\infty$，则不等式显然成立. 如果 $\mu_*(F \cap E) < +\infty, \mu_*(F - E) < +\infty$，则对任何 $\varepsilon > 0$，由 μ_* 定义，存在 $F_0 \in \mathscr{R}$，使 $F_0 \subset F$ 且 $\mu_*(F) \leqslant \mu(F_0) + \varepsilon$，又 $\mu(F_0) = \mu(F_0 \cap E) + \mu(F_0 - E)$，于是，

$$\begin{aligned}\mu_*(F) &\leqslant \mu(F_0) + \varepsilon \\ &= \mu(F_0 \cap E) + \mu(F_0 - E) + \varepsilon \\ &\leqslant \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E) + \varepsilon,\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得到

$$\mu_*(F) \leqslant \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E).$$

综合上述，有

$$\mu_*(F) = \mu_*(F \cap E) + \mu_*(F - E).$$

7.2.4 设 $\mathscr{R}$ 为 X 的某些子集所成的代数，μ 为 $\mathscr{R}$ 上的有限测度（即 $\mu(X) < +\infty$），定义

$$\mu_{**}(E) = \mu(X) - \mu^*(X - E), E \in H(\mathscr{R}).$$

证明 μ_{**} 满足题 7.2.3 中 μ_* 的条件(1°)、(2°)、(3°)、(5°)、(6°) 和(4°)中的第一个不等式；如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数，则 μ_{**} 也满足(4°)中第二式.

此外，$\mu_{**} \geqslant \mu_*$，并可举出 $\mu_{**} > \mu_*$ 的例子. 如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数，则 $\mu_{**} = \mu_*$.

证 (1°) $\mu_{**}(\varnothing) = \mu(X) - \mu^*(X - \varnothing) = \mu(X) - \mu(X) = 0$，由 $X - E \subset X$ 和 μ^* 的单调性得到

$$\mu_{**}(E) = \mu(X) - \mu^*(X - E) \geqslant 0.$$

(2°) 设 $E_1 \subset E_2$，则 $X - E_1 \supset X - E_2$. 再由 μ^* 的单调性得到

$$\begin{aligned}\mu_{**}(E_1) &= \mu(X) - \mu^*(X - E_1) \\ &\leqslant \mu(X) - \mu^*(X - E_2) = \mu_{**}(E_2).\end{aligned}$$

(3°) 对于 $E\in\mathscr{R}$，有

$$\mu_{**}(E)=\mu(X)-\mu^*(X-E)$$
$$=\mu(X)-\mu(X-E)=\mu(E).$$

(4°) 对任何两两不交的集合 $E_n\in H(\mathscr{R})$，$n=1,2,\cdots$，$E_n'=X-E_n\in H(\mathscr{R})$．对任何 $\varepsilon>0$，由题7.2.2，存在 $F_n\in\mathscr{R}$ 使 $E_n'\subset F_n$，

$$\mu(F_n)\leqslant\mu^*(E_n')+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

于是，$E_n\supset F_n'\in\mathscr{R}$，$F_n'$ 两两不相交，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n'\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$．

$$X-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n'\supset X-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

由此和 $\mathscr{R}$ 为 σ 环有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{**}(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}[\mu(X)-\mu^*(E_n')]$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}[\mu(X)-\mu(F_n)+\frac{\varepsilon}{2^n}]$$
$$=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(X-F_n)=\varepsilon+\sum_{n=1}^{\infty}\mu(F_n')$$
$$=\varepsilon+\mu(X)-[\mu(X)-\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n')]$$
$$=\varepsilon+\mu(X)-\mu(X-\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n')$$
$$\leqslant\varepsilon+\mu(X)-\mu^*(X-\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$$
$$=\varepsilon+\mu_{**}(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得到

$$\mu_{**}(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\mu_{**}(E_n).$$

值得注意的是对 $\mu_{**}(\bigcup\limits_{n=1}^{m}E_n)\geqslant\sum\limits_{n=1}^{m}\mu_{**}(E_n)$ 的类似上述证明，对 $\mathscr{R}$ 不必加 σ 代数．

(5°) 对 $E\in\mathscr{R}$，$F\in H(\mathscr{R})$，由 $(F\cap E)\cap(F-E)=\varnothing$ 和(4°)中第一不等式有

$$\mu_{**}(F)\geqslant\mu_{**}(F\cap E)+\mu_{**}(F-E).$$

另一方面，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $F_0\in\mathscr{R}$，$F_0\supset F'$(即 $F_0'\subset F$)使

$$\mu^*(F')\geqslant\mu(F_0)-\varepsilon.$$

显然 $F'\subset X-F_0\in\mathscr{R}$，$F_0'\cap E\subset F\cap E$，$F_0'-E\subset F-E$，于是，由(3°)和(2°)，有

$$\mu_{**}(F)=\mu(X)-\mu^*(X-F)$$
$$=\mu(X)-\mu^*(F')$$
$$\leqslant\mu(X)-(\mu(F_0)-\varepsilon)=\varepsilon+\mu(F_0')$$
$$=\varepsilon+\mu(F_0'\cap E)+\mu(F_0'-E)$$
$$=\varepsilon+\mu_{**}(F_0'\cap E)+\mu_{**}(F_0'-E)$$
$$\leqslant\varepsilon+\mu_{**}(F\cap E)+\mu_{**}(F-E).$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得到

$$\mu_{**}(F)\leqslant\mu_{**}(F\cap E)+\mu_{**}(F-E).$$

综合上述，有

$$\mu_{**}(F)=\mu_{**}(F\cap E)+\mu_{**}(F-E).$$

(6°) $\mu_{**}(E)=\mu(X)-\mu^*(X-E)$

$$=\mu^*(X)-\mu^*(X-E)$$
$$\leqslant\mu^*(X-E)+\mu^*(E)-\mu^*(X-E)$$
$$=\mu^*(E).$$

最后，有

$$\mu_{**}(E)=\mu(X)-\mu^*(X-E)$$
$$\geqslant\mu(X)-\inf\{\mu(F)\mid E'\subset F\in\mathscr{R}\}$$
$$=\sup\{\mu(X-F)\mid E'\subset F\in\mathscr{R}\}$$
$$=\sup\{\mu(F)\mid E\supset F\in\mathscr{R}\}=\mu_*(E).$$

如果 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数，则上面不等式成为等式，因而

$$\mu_{**}(E)=\mu_*(E).$$

此时若用这等式，由 μ_* 的6条性质立即得到 μ_{**} 相应的6条性质．

例：如果 $\mathscr{R}$ 为环但非 σ 环，例如 $\mathscr{R}=\mathscr{R}_0\cap[0,1]$，$E\subset[0,1]=X$ 是测度为 $\frac{1}{2}$ 的 Cantor 集，则

$$\mu_{**}(E)=\mu(X)-\mu^*(E')=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$
$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\mid E\supset F\in\mathscr{R}\}=0,$$

从而 $\mu_{**}(E)>\mu_*(E)$．

7.2.5 设 $\{\mu_n\}$ 为环 $\mathscr{R}$ 上的一列测度，证明：

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)$$

仍是环 $\mathscr{R}$ 上的测度．

如果对任何 $E\in\mathscr{R}$ 和任何自然数 n，都有 $\mu_n(E)\leqslant1$，则 $\mu(E)\leqslant1$．

证 显然由 $\mu_n(\varnothing)=0$ 和 $\mu_n(E)\geqslant0$ 知

$$\mu(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(\varnothing)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot0=0,$$
$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\geqslant0.$$

如果 $E_1\subset E_2$，$E_1,E_2\in\mathscr{R}$，则

$$\mu(E_1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_1)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_2)=\mu(E_2)$$

最后，如果 $E_i\in\mathscr{R}$，$E_i\cap E_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in\mathscr{R}$，则由 μ_n 具有可列可加性推出

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_i))$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E_i))=\sum_{i=1}^{\infty}\mu(E_i),$$

即 μ 也具有可列可加性．

综合上述得，μ 为 $\mathscr{R}$ 上的测度．

如果 $\mu_n(E)\leqslant1$，则

$$\mu(E)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\mu_n(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot 1=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1.$$

7.2.6 设$\mathscr{R}$为集 X 上的环(或 σ 环)，μ 为环$\mathscr{R}$上的测度．如果对一切 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)\leqslant 1$(或 $\mu(E)<+\infty$)，则 μ 的原子全体为至多可数集，其中"原子"指独点集$\{x\}\in\mathscr{R}$，且 $\mu(\{x\})>0$.

证 (反证) 假设 μ 的原子全体不为至多可数集，则 $E_n=\{x\in X\mid \{x\}\in\mathscr{R},\mu(\{x\})\geqslant\frac{1}{n}\}$，$n=1,2,\cdots$ 中必有不可数集，记 E_{n_0} 为不可数集．于是，$E=\{x_k\in E_{n_0}\mid k=1,\cdots,n_0+1\}$，$1<(n_0+1)\cdot\frac{1}{n_0}\leqslant\mu(E)\leqslant 1$(或 $E=\{x_k\in E_{n_0}\mid k=1,\cdots,n,\cdots\}$，$\mu(E)=+\infty$)，矛盾．

7.2.7 举例说明环$\mathscr{R}$上的测度 μ 按 Caratheodory 条件所得的扩张 $\mathscr{R}^*$，μ^* 并不一定是 $\mathscr{R}$，μ 的最大扩张．

解 例 1：设$\mathscr{R}$为不可数集 $X=\mathbf{R}^1$ 的一切有限子集所成的类，对任何 $E\in\mathscr{R}$，$\mu(E)=E$ 中的点数．

易见

$$\begin{aligned}S(\mathscr{R})&=\{E\mid E\subset X\text{ 为至多可数集}\}\\&=\{E\subset X\mid\text{存在 }E_i\in\mathscr{R},\text{使 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}\\&=H(\mathscr{R})\supset\mathscr{R}^*\supset S(\mathscr{R})\supset\mathscr{R},\end{aligned}$$

$$H(\mathscr{R})=\mathscr{R}^*=S(\mathscr{R}).$$

$$\mu^*(E)=\begin{cases}E\text{ 中点数},E\in\mathscr{R},\\+\infty,\quad E\text{ 为可数集}.\end{cases}$$

但$(\mathscr{R}^*,\mu^*)$不是$(\mathscr{R},\mu)$的最大延拓，因为例如，$(\mathscr{R},\mu)$可延拓到 X 的一切子集所成的类$\mathscr{A}$上，使

$$\tilde{\mu}(E)=\begin{cases}\mu(E),E\in\mathscr{R}(\text{即 }E\text{ 为有限集}),\\+\infty,E\in\mathscr{A}-\mathscr{R}(\text{即 E 为无限集}).\end{cases}$$

例 2：$X=\{x_1,x_2\}$，$\mathscr{R}=\{\varnothing,X\}$ 为 σ 代数．

$$\mu(\varnothing)=0,\mu(X)=1.$$

$$H(\mathscr{R})=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_2\},X\},$$

$$\mu^*(\{x_1\})=1=\mu^*(\{x_2\}).$$

因为

$$\begin{aligned}\mu^*(X)&=1\neq 1+1=\mu^*(\{x_1\})+\mu^*(\{x_2\})\\&=\mu^*(X\cap\{x_1\})+\mu^*(X-\{x_1\}),\end{aligned}$$

所以$\{x_1\}\overline{\in}\mathscr{R}^*$．同理$\{x_2\}\overline{\in}\mathscr{R}^*$．由此得到

$$\mathscr{R}=\{\varnothing,X\}=\mathscr{R}^*\subsetneq H(\mathscr{R}).$$

但$(\mathscr{R}^*,\mu^*)$不是$(\mathscr{R},\mu)$的最大延拓，因为例如$(\mathscr{R},\mu)$可延拓到 $H(\mathscr{R})$ 上使

$$\tilde{\mu}(E)=\begin{cases}0,E=\varnothing,\\\frac{1}{2},E=\{x_1\}\text{ 或}\{x_2\},\\1,E=X=\{x_1,x_2\}.\end{cases}$$

7.2.8 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$ 为可数集，$\mathscr{R}$为 X 中有限子集所成的环，对任何 $E\in\mathscr{R}$，令

$\mu_1(E)=E$ 中点的个数，

$\mu_2(E)=\alpha\mu_1(E)$ (α 为非负的常数).

证明：μ_1^* 和 μ_2^* 都是 $H(\mathscr{R})$ 上的测度．

证 显然 $H(\mathscr{R})=\{E\mid\text{存在 }E_i\in\mathscr{R},\text{使 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}=\{E\mid E\subset X\}$．对任何 $E\in H(\mathscr{R})$，

$$\begin{aligned}\mu_1^*(E)&=\inf\{\sum_{i=1}^{\infty}\mu_1(E_i)\mid E_i\in\mathscr{R},\text{使 }E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}\\&=\sum_{x_n\in E}\mu_1(\{x_n\})\\&=\begin{cases}+\infty,\text{当 }E\text{ 为可数集},\\\mu_1(E)(E\text{ 中点的个数}),\text{当 }E\text{ 为有限集}.\end{cases}\end{aligned}$$

由此立即推出，对 $E\in H(\mathscr{R})$ 和任何 $F\in H(\mathscr{R})$ 有

$$\mu_1^*(F)=\mu_1^*(F\cap E)+\mu_1^*(F-E)$$

(如果 F 为有限集，上述等式显然成立；如果 F 为可数集，则左边和右边也必为 $+\infty$，从而上述等式也成立)．这就说明了 E 为μ_1^* 可测集，即 $E\in\mathscr{R}_{\mu_1}^*$，所以 μ_1^* 为 $\mathscr{R}_{\mu_1}^*=H(\mathscr{R})$ 上的测度．

根据$\mu_2=\alpha\mu_1$，可以看出μ_2^* 也是$\mathscr{R}_{\mu_2}^*=H(\mathscr{R})$上的测度．

7.2.9 设 E 为 Lebesgue 可测集，如果对一切自然数 n，$m(\tau_{\frac{1}{n}}E\cap E)=0$，则 $m(E)=0$，其中，$\tau_{\frac{1}{n}}(x)=x+\frac{1}{n}$ 为平移．

证 (反证) 假设 $\beta=m(E)>0$，因为 E 为 Lebesgue 可测集，故存在开集 $G\supset E$，使 $m(G-E)<\frac{\beta}{8}$．显然，存在充分大的 n，使

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{2}&\leqslant\frac{m(G)}{2}<m(\tau_{\frac{1}{n}}G\cap G)\\&=m(\tau_{\frac{1}{n}}(E\cup(G-E))\cap(E\cup(G-E)))\\&=m((\tau_{\frac{1}{n}}E\cap E)\cup(\tau_{\frac{1}{n}}(G-E)\cap(G-E))\\&\quad\cup(\tau_{\frac{1}{n}}E\cap(G-E))\cup(\tau_{\frac{1}{n}}(G-E)\cap E))\\&\leqslant m(\tau_{\frac{1}{n}}E\cap E)+m(G-E)+m(G-E)\\&\quad+m(\tau_{\frac{1}{n}}(G-E))\\&=m(\tau_{\frac{1}{n}}E\cap E)+3m(G-E)\\&<0+\frac{3\beta}{8}=\frac{3}{8}\beta.\end{aligned}$$

矛盾．

7.2.10 设$\mathscr{R}$为 X 的某些子集所成的σ代数，μ 为$\mathscr{R}$上的有限测度，对 $E\in H(\mathscr{R})$，

$$\mu_*(E)=\sup\{\mu(F)\mid E\supset F\in\mathscr{R}\}.$$

证明：$\mu^*(E)=\mu_*(E)\Leftrightarrow E\in\mathscr{R}^*$(即 E 为μ^* 可测集)．

举例说明，如果删去条件"有限测度"，则

$$\mu^*(E)=\mu_*(E)\Rightarrow E\in \mathscr{R}^*.$$

证 ($\Rightarrow$) 设 $E\in H(\mathscr{R})$, $\mu^*(E)=\mu_*(E)$. 由于 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数, 存在 $F,G\in\mathscr{R}$, 使

$$F\subset E\subset G,$$

且

$$\mu(G)=\mu^*(E)=\mu_*(E)=\mu(F).$$

因为 $G-F\in\mathscr{R}$, 故

$$\mu(G)=\mu(G-F)+\mu(F),$$
$$\mu(G-F)=0.$$

于是

$$0\leqslant\mu^*(E-F)\leqslant\mu^*(G-F)$$
$$=\mu(G-F)=0,$$
$$\mu^*(E-F)=0,$$

即 $E-F$ 为 μ^* 零测集, 由 $E-F\in\mathscr{R}^*$ 得到 $E=(E-F)\cup F\in\mathscr{R}^*$, 也就是 E 为 μ^* 可测集.

($\Leftarrow$) 设 $E\in\mathscr{R}^*$, 则由本节开始论述知 $E=F\cup H$, 其中 $F\in S(\mathscr{R})=\mathscr{R}$, H 为 μ^* 零集. 因此

$$\mu(F)=\mu_*(F)\leqslant\mu_*(E)\leqslant\mu^*(E)$$
$$\leqslant\mu^*(F)+\mu^*(H)=\mu^*(F)=\mu(F),$$
$$\mu^*(E)=\mu_*(E)=\mu(F).$$

反例: 设 A 为 $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 中的 Lebesgue 不可测集 (见 7.2.32), $E=A\cup[1,+\infty)$, 则 $m_*(E)=m^*(E)=+\infty$, 但显然 E 为 Lebesgue 不可测集.

7.2.11 设 $\mathscr{R}$ 为集 X 的某些子集所成的 σ 环, μ 为 $\mathscr{R}$ 上的测度, $A,B\in H(\mathscr{R})$, 则

(1) $\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)\leqslant\mu^*(A)+\mu^*(B)$;

(2) 当 A 或 B 为 μ^* 可测集时,

$$\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)$$
$$=\mu^*(A)+\mu^*(B);$$

(3) 证明存在 $A,B\in H(\mathscr{R})$, 使

$$\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B)$$
$$<\mu^*(A)+\mu^*(B).$$

证 (1) 因 $\mathscr{R}$ 为 σ 环, $A,B\in H(\mathscr{R})$, 故存在 G_1, $G_2\in S(\mathscr{R})=\mathscr{R}$ 使 $G_1\supset A$, $G_2\supset B$, 于是

$$\mu(G_1)+\mu(G_2)$$
$$=\mu(G_1-G_2)+\mu(G_1\cap G_2)+\mu(G_2-G_1)$$
$$+\mu(G_1\cap G_2)$$
$$=\mu(G_1\cup G_2)+\mu(G_1\cap G_2)$$
$$\geqslant\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B),$$
$$\mu^*(A)+\mu^*(B)=\inf_{G_1\supset A}\mu(G_1)+\inf_{G_2\supset B}\mu(G_2)$$
$$\geqslant\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B).$$

(2) 不妨设 A 为 μ^* 可测集. 于是对 $B\in H(\mathscr{R})$ 有

$$\mu^*(B)=\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c),$$
$$\mu^*(A\cup B)$$
$$=\mu^*((A\cup B)\cap A)+\mu^*((A\cup B)\cap A^c)$$
$$=\mu^*(A)+\mu^*(B\cap A^c),$$
$$\mu^*(A)+\mu^*(B)$$
$$=\mu^*(A)+\mu^*(B\cap A)+\mu^*(B\cap A^c)$$
$$=\mu^*(A\cup B)+\mu^*(A\cap B).$$

(3) 反例: 设 $A\subset[0,1]$ 为 Lebesgue 不可测集, $B=[0,1]-A$, 则

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)$$
$$=m^*([0,1])+m^*(\varnothing)=1-0=1$$
$$=1+0<1+(m^*(A)-m_*(A))$$
$$=m^*(A)+[1-m_*(A)]$$
$$=m^*(A)+m^*(B).$$

或者用反证法证明: 假设对任何 $A,B\in\mathbf{R}^1$, 即 $A,B\in H(\mathscr{R}_0)$, 有

$$m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B)$$
$$=m^*(A)+m^*(B),$$

则

$$m^*(A)=m^*((A\cap B)\cup(A\cap B^c))$$
$$=m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c)$$
$$-m^*((A\cap B)\cap(A\cap B^c))$$
$$=m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c)-m^*(\varnothing)$$
$$=m^*(A\cap B)+m^*(A\cap B^c),$$

即 B 必为 Lebesgue 可测集, 但有例(见题 7.2.32) 知 B 可为 Lebesgue 不可测集, 矛盾.

7.2.12 设 X 为一集, $\mathscr{R}$ 为 X 的某些子集所成的环, μ 为 $S(\mathscr{R})$ 上的测度. μ 在 $\mathscr{R}$ 上是 σ 有限的, 则 μ 在 $S(\mathscr{R})$ 上也是 σ 有限的.

举例说明, 如果 μ 在 $S(\mathscr{R})$ 上是 σ 有限的, μ 限制到 $\mathscr{R}$ 上不必是 σ 有限的.

证 令 $\mathscr{A}=\{E\subset X\mid$ 存在 $E_i\in\mathscr{R}$, $\mu(E_i)<+\infty$, $E\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\}$, 因为 μ 在 $\mathscr{R}$ 上是 σ 有限的, 故 $\mathscr{R}\subset\mathscr{A}$. 下面将证 $\mathscr{A}$ 是 σ 环, 所以 $S(\mathscr{R})\subset\mathscr{A}$, 即 μ 在 $S(\mathscr{R})$ 上也是 σ 有限的.

余下的只须证明 $\mathscr{A}$ 是 σ 环. 事实上, 任何 $E_n\in\mathscr{A}$, $n=1,2,\cdots$, 存在 $E_n^i\in\mathscr{R}$, $\mu(E_n^i)<+\infty$, 使 $E_n\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_n^i$. 所以

$$E_1-E_2\subset E_1\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}E_1^i,$$
$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_n^i)=\bigcup_{i,n=1}^{\infty}E_n^i.$$

从而 $E_1-E_2\in\mathscr{A}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\in\mathscr{A}$.

反例1: $X=\mathbf{R}^1$, $\mathscr{R}=\mathscr{R}_0=\{\bigcup_{i=1}^{k}(a_i,b_i]\mid a_i\leqslant b_i,$

$i=1,2,\cdots\}$，$\mu(E)=E$ 中有理点个数，$E\in S(\mathscr{R})=S(\mathscr{R}_0)$，

$$E=(E\cap\mathbf{Q})\cup(E\cap(\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}))$$
$$=(\bigcup\{r_i\})\cup(E\cap(\mathbf{R}^1-\mathbf{Q})),$$
$$E\in S(\mathscr{R}),\{r_i\}\in S(\mathscr{R}),\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}\in S(\mathscr{R}),$$

其中 $\mu(\{r_i\})=1$，$\mu(E\cap(\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}))=0$. 所以，$\mu$ 在 $S(\mathscr{R})=S(\mathscr{R}_0)$ 上是 σ 有限的测度. 但由于 $\mu(\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i])=+\infty$，因此，$\mu$ 在 $\mathscr{R}_0$ 上不是 σ 有限的.

反例 2：设 $X=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ 为可数集，固定 $a\in X$，则 $\mathscr{R}=\{A\mid a\overline{\in}A,A$ 为有限集$\}\cup\{X-B\mid a\in X-B,B$ 为有限集$\}$ 为环，$S(\mathscr{R})=\{E\mid E\subset X\}$. 令

$$\mu(E)=\begin{cases}E\text{ 中点数},E\text{ 为有限集},\\+\infty,E\text{ 为无限集}.\end{cases}$$

显然，μ 在 $S(\mathscr{R})$ 上是 σ 有限的测度（$E\subset X=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a_n\}$）. 但 μ 在 $\mathscr{R}$ 上不是 σ 有限的. 事实上，如果 $X=X-\varnothing\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$，$E_n\in\mathscr{R}$，则存在 E_{n_0} 含 a，$E_{n_0}=X-B$ 为无限集，$\mu(E_{n_0})=+\infty$. 因此，μ 在 $\mathscr{R}$ 上不是 σ 有限的.

7.2.13　设 $\mathscr{R}$ 为集合 X 的某些子集所成的环，μ_1,μ_2 是 $S(\mathscr{R})$ 上两个测度，且对于任何 $E\in\mathscr{R}$ 有 $\mu_1(E)=\mu_2(E)$.

(1) 如果 μ_1,μ_2 在 $\mathscr{R}$ 上都是 σ 有限的，则在 $S(\mathscr{R})$ 上有 $\mu_1=\mu_2$；

(2) 如果 μ_1,μ_2 在 $S(\mathscr{R})$ 上都是 σ 有限的，举例说明在 $S(\mathscr{R})$ 上可以 $\mu_1\neq\mu_2$，即存在 $E\in S(\mathscr{R})$，使得 $\mu_1(E)\neq\mu_2(E)$.

证　(1) 设

$\mathscr{M}=\{E\in S(\mathscr{R})\mid$(i) 存在 $E_n\in\mathscr{R}$，使 $\mu_1(E_n)<+\infty$，$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$；(ii) 对任何 $A\in\mathscr{R}$，当 $\mu_1(A)<+\infty$ 时，$\mu_1(A\cap E)=\mu_2(A\cap E)\}$.

当 $E\in\mathscr{R}$ 时，由于 μ_1 在 $\mathscr{R}$ 上是 σ 有限的，所以 E 满足 (i). 又由于 μ_1,μ_2 在 $\mathscr{R}$ 上相等，所以 (ii) 也满足. 因此，$E\in\mathscr{M}$，$\mathscr{R}\subset\mathscr{M}$.

再证在 $\mathscr{M}$ 上 μ_1 与 μ_2 相等. 事实上，当 $E\in\mathscr{M}$ 时，由条件 (i)，存在 $E_n\in\mathscr{R}$，$\mu_1(E_n)<+\infty$，使 $E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$. 不失一般性，可设 E_n 彼此不相交（否则用 $E_1,E_2-E_1,E_3-(E_1\cup E_2),\cdots$ 代替 $E_1,E_2,E_3,\cdots$），由条件 (ii) 立即得到

$$\mu_1(E)=\mu_1(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap E))=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_1(E_n\cap E)$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_2(E_n\cap E)=\mu_2(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n\cap E))$$
$$=\mu_2(E).$$

最后证明 $\mathscr{M}$ 为单调类. 设 $\{F_n\}$ 为 $\mathscr{M}$ 中一列单调的集，由于 F_m 满足 (i)，所以存在 $E_n^{(m)}\in\mathscr{R}$ 使 $\mu(E_n^{(m)})<+\infty$，且 $F_m\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^{(m)}$. 因此，$\lim\limits_{m\to+\infty}F_m\subset\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^{(m)}$，从而 $\lim\limits_{m\to+\infty}F_m$ 满足条件 (i). 又由于当 $A\in\mathscr{R}$，$\mu(A)<+\infty$ 时，

$$\mu_1(A\cap F_m)=\mu_2(A\cap F_m),$$

根据题 7.2.1 以及 $\mu_1(A)<+\infty$，有

$$\mu_1(A\cap\lim_{m\to+\infty}F_m)=\mu_1(\lim_{m\to+\infty}(A\cap F_m))$$
$$=\lim_{m\to+\infty}\mu_1(A\cap F_m)=\lim_{m\to+\infty}\mu_2(A\cap F_m)$$
$$=\mu_2(\lim_{m\to+\infty}(A\cap F_m))=\mu_2(A\cap\lim_{m\to+\infty}F_m)$$

即 $\lim\limits_{m\to+\infty}F_m$ 满足条件 (ii)，从而 $\lim\limits_{m\to+\infty}F_m\in\mathscr{M}$，即 $\mathscr{M}$ 为单调类. 再由[1]第二章 §1 定理 4 可知 $\mathscr{M}\supset S(\mathscr{R})$，所以在 $S(\mathscr{R})$ 上 $\mu_1=\mu_2$.

(2) 反例 1：$\mathscr{R}=\mathscr{R}_0=\{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\mid a_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,n\}$ 为直线 $\mathbf{R}^1$ 上的环. 对任何 $E\in\mathscr{R}=\mathscr{R}_0$，令

$\mu_1(E)=E$ 中有理点的个数，

$\mu_2(E)=E$ 中含 $\sqrt{2}r(r\in\mathbf{Q})$ 的个数.

显然，在 $\mathscr{R}=\mathscr{R}_0$ 上，有

$$\mu_1(E)=\mu_2(E)=\begin{cases}0,E=\varnothing,\\+\infty,E=\bigcup_{i=1}^{n}(a_i,b_i].\end{cases}$$

但 $\mu_1(\{\sqrt{2}\})=0\neq1=\mu_2(\{\sqrt{2}\})$. 类似题 7.2.12，$\mu_1,\mu_2$ 在 $S(\mathscr{R}_0)$ 上是 σ 有限的测度，但在 $\mathscr{R}_0$ 上不是 σ 有限的.

反例 2：设 X 为可数集，固定 $a\in X$，

$\mathscr{R}=\{A\mid a\overline{\in}A,A$ 有限$\}\cup\{X-B\mid a\in X-B,B$ 有限$\}$ 为环（但非 σ 环），$S(\mathscr{R})=\{E\mid E\subset X\}$，

$$\mu_1(E)=\begin{cases}E\text{ 中元素个数},\text{当 }E\text{ 为有限集},\\+\infty,\text{当 }E\text{ 为无限集},\end{cases}$$
$$\mu_2(E)=\begin{cases}\mu_1(E),a\overline{\in}E,\\\mu_1(E)+1,a\in E.\end{cases}$$

类似题 7.2.12 反例 2，μ_1,μ_2 在 $S(\mathscr{R})$ 上 σ 有限，但在 $\mathscr{R}$ 上非 σ 有限，且在 $\mathscr{R}$ 上 $\mu_1=\mu_2$. 但

$$\mu_1(\{a\})=1\neq2=\mu_2(\{a\}),\{a\}\in S(\mathscr{R}).$$

7.2.14　设 μ 为 σ 环 $\mathscr{R}$ 上的测度，$A,B\in\mathscr{R}^*$（即为 μ^* 可测集），$A\cap B=\varnothing$. 则对任何 $E\in H(\mathscr{R})$ 有

$$\mu^*(E\cap(A\cup B))$$
$$=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B),$$
$$\mu_*(E\cap(A\cup B))$$
$$=\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap B).$$

证　由 $E\cap(A\cup B)=(E\cap A)\cup(E\cap B)$，$(E\cap A)\cap(E\cap B)=\varnothing$ 有

$$\mu^*(E\cap(A\cup B))$$
$$\leqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B),$$
$$\mu_*(E\cap(A\cup B))$$
$$\geqslant\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap B).$$

另一方面,(1) 对任何 $\varepsilon>0$,存在 μ 可测集 $U\supset E\cap(A\cup B)$,使
$$\mu(U)<\mu^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon.$$
由
$$U\supset U\cap(A\cup B)=(U\cap A)\cup(U\cap B),$$
$$(U\cap A)\cap(U\cap B)=U\cap(A\cap B)$$
$$=U\cap\varnothing=\varnothing,$$
$$U\cap A\supset E\cap A,U\cap B\supset E\cap B,$$
有
$$\mu^*(E\cap(A\cup B))+\varepsilon$$
$$>\mu(U)\geqslant\mu(U\cap(A\cup B))$$
$$=\mu(U\cap A)+\mu(U\cap B)$$
$$\geqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B).$$
令 $\varepsilon\to0^+$ 得到
$$\mu^*(E\cap(A\cup B))\geqslant\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B).$$

(2) 对任何 $\varepsilon>0$,存在 $F\in\mathscr{R}$,$F\subset E\cap(A\cup B)$,使
$$\mu(F)>\mu_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon.$$
由 $F=F\cap(A\cup B)=(F\cap A)\cup(F\cap B)$,$(F\cap A)\cap(F\cap B)=\varnothing$,$F\cap A\subset E\cap A$,$F\cap B\subset E\cap B$,有
$$\mu_*(E\cap(A\cup B))-\varepsilon<\mu(F)$$
$$=\mu(F\cap(A\cup B))$$
$$=\mu(F\cap A)+\mu(F\cap B)$$
$$\leqslant\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap B).$$
令 $\varepsilon\to0^+$ 得到 $\mu_*(E\cap(A\cup B))\leqslant\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap B)$.

综合上述,立即推出
$$\mu^*(E\cap(A\cup B))$$
$$=\mu^*(E\cap A)+\mu^*(E\cap B),$$
$$\mu_*(E\cap(A\cup B))$$
$$=\mu_*(E\cap A)+\mu_*(E\cap B).$$

7.2.15 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 是完全测度空间(参阅[1]122页),问 μ 按前面 μ^* 延拓的方法是否能延拓到更大的 σ 环上去?

解 (i) 若 μ 是 σ 有限的,则 $\mathscr{R}^*=\mathscr{R}$.

现证如下:由题设知(参阅[1]第三章§1,§2和第二章§3),$\mathscr{R}$ 是 σ 环和 μ 是 $\mathscr{R}$ 上完全测度.对任意 $E\in\mathscr{R}^*$ 满足 $\mu^*(E)=0$.由于 $\mu^*(E)=\inf\{\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(F_i)\mid F_i\in\mathscr{R},\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}F_i\supset E\}$,所以对 $i=1,2,\cdots$,有 $F_{ij}\in\mathscr{R}(j=1,2,\cdots)$ 使
$$\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij}\supset E,$$
且
$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\mu(F_{ij})<\frac{1}{i}.$$
令 $F=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}F_{ij}$,则 $F\supset E$,$F\in S(\mathscr{R})=\mathscr{R}$.由测度的单调性,对任何 $i=1,2,\cdots$,
$$\mu(F)\leqslant\mu(\bigcup_{j=1}^{\infty}F_{ij})\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\mu(F_{ij})<\frac{1}{i}.$$
令 $i\to\infty$,得 $\mu(F)=0$.再由 $E\subset F$ 和 μ 为 $\mathscr{R}$ 上的完全测度知 $E\in\mathscr{R}$,因此 μ^* 零集必属于 $\mathscr{R}$.而 μ 是 $\mathscr{R}$ 上 σ 有限测度,所以 μ^* 是 $\mathscr{R}^*$ 上 σ 有限测度,从而 $\mathscr{R}^*$ 中集都可表为 $S(\mathscr{R})=\mathscr{R}$ 中集与一 μ^* 零集的差集(参阅[1]第二章§3定理6),故 $\mathscr{R}^*\subset\mathscr{R}$.于是 $\mathscr{R}^*=\mathscr{R}$.

(ii) 若无 μ 是 σ 有限的条件,则可能 $\mathscr{R}^*\supsetneqq\mathscr{R}$.举例如下:

命 $X=[0,1]$,$\mathscr{R}=\{\varnothing,[0,1]\}$,则 $\mathscr{R}$ 是 σ 代数且 $X=\bigcup\limits_{E\in\mathscr{R}}E$.所以 $(X,\mathscr{R})$ 是可测空间.

定义 μ,使 $\mu(\varnothing)=0$,$\mu([0,1])=+\infty$.易见 μ 是 $\mathscr{R}$ 上的完全测度,$(X,\mathscr{R},\mu)$ 是完全测度空间,但显然
$$\mathscr{R}^*=H(\mathscr{R})=\{E\mid E\subset X\}\supsetneqq\mathscr{R}.$$

7.2.16 构造 Lebesgue 测度为零的 Cantor 疏集(无处稠密集) C.并证明它是完全集(无孤立点的闭集,即 $C'=C$)和势 $\overline{\overline{C}}=\aleph$.

解 将闭区间 $[0,1]$ 三等分,去掉中间的一个开区间 $I_1^1=(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,把剩下的两个闭区间 $[0,\frac{1}{3}]$,$[\frac{2}{3},1]$ 分别再三等分,各去掉中间的开区间
$$I_1^2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),\ I_2^2=(\frac{7}{9},\frac{8}{9}).$$
又分别把余下的四个闭区间
$$[0,\frac{1}{9}],[\frac{2}{9},\frac{3}{9}],[\frac{6}{9},\frac{7}{9}],[\frac{8}{9},1]$$
各三等分,再各去掉中间的开区间:
$$I_1^3=(\frac{1}{27},\frac{2}{27}),I_2^3=(\frac{7}{27},\frac{8}{27}),$$
$$I_3^3=(\frac{19}{27},\frac{20}{27}),I_4^3=(\frac{25}{27},\frac{26}{27}).$$
如此继续下去,第 n 次三等分去掉的开区间(称为第 n 级区间)是
$$I_1^n=(\frac{1}{3^n},\frac{2}{3^n}),I_2^n=(\frac{7}{3^n},\frac{8}{3^n}),\cdots,$$
$$I_{2^{n-1}}^n=(\frac{3^n-2}{3^n},\frac{3^n-1}{3^n}).$$
显然,$G_c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}}I_k^n$ 为开集,故 $C=[0,1]-G_c$

为闭集．称 C 为 Cantor 集．

根据 Cantor 集 C 的构造，在任何开区间 $(\alpha,\beta)\subset\mathbf{R}^1$ 中必有开区间 $I\subset(\mathbf{R}^1-C)\cap(\alpha,\beta)$，故 C 为疏集．此外，还可以看出，$C=[0,1]-\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=1}^{2^{n-1}}I_k^n$ 为闭集，从而 $C'\subset C$；反之，对任何 $x\in C$，在 $(x-\frac{1}{m},x+\frac{1}{m})$ 中必有 $I_{k(m)}^{n(m)}\subset(x-\frac{1}{m},x+\frac{1}{m})$ 且 $x\overline{\in}I_{k(m)}^{n(m)}$，因此．该区间的左端点 $\inf I_{k(m)}^{n(m)}\in C$．于是从 $|\inf I_{k(m)}^{n(m)}-x|<\frac{1}{m}$ 知，$\lim\limits_{m\to+\infty}\inf I_{k(m)}^{n(m)}=x$．这就证明了 $x\in C'$，即 $C\subset C'$．综上所述得到 $C'=C$，即 C 是完全集．

因为

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_k^n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{2^{n-1}}m(I_k^n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{3^n}=1,$$

所以

$$m(C)=m([0,1])-m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_k^n\Big)=1-1=0.$$

最后来证明 $\overline{\overline{C}}=\aleph$．为此，用 $[0,1]$ 中数的二进制和三进制小数表示法来证明．将 $[0,1]$ 先用三进位小数表示（三进位有理小数采用有限位小数表示．例如 $\frac{1}{3}$ 表示为 0.1，而不采用 0.02222…）．显然，

$$I_1^1=(0.1,0.2),$$

$$I_1^2=(0.01,0.02),\ I_2^2=(0.21,0.22),$$

$$\cdots$$

$$I_k^n=(0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}1,0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}2),$$

其中 $\alpha_i=0$ 或 2，$i=1,\cdots,n-1$，$k=1,2,\cdots,2^{n-1}$．因此，这个实数展成三进位小数必然形如

$$0.\alpha_1\cdots\alpha_{n-1}1\alpha_{n+1}\cdots,$$

即 $[0,1]-C$ 中的实数展成三进位小数时，其中至少有一位是 1．

记 $A=\{x=0.\alpha_1\cdots\alpha_n\cdots=\frac{\alpha_1}{3}+\frac{\alpha_2}{3^2}+\cdots+\frac{\alpha_n}{3^n}+\cdots\mid\alpha_n=0$ 或 $2,n=1,2,\cdots\}$，则 $A\cap([0,1]-C)=\varnothing$，从而 $A\subset C$．

令 B 为 $[0,1]$ 的二进位小数表示的全体（二进位有理小数也采用有限位小数表示）．作映射

$$\varphi:A\to B,$$

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{3^n}\mapsto\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n}{2}\cdot\frac{1}{2^n},\alpha_n=0\text{或}2,n=$$

$1,2,\cdots$．易见 φ 为一一映射，因此

$$\aleph=\overline{\overline{[0,1]}}\geqslant\overline{\overline{C}}\geqslant\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}=\aleph,\overline{\overline{C}}=\aleph$$

（也可应用题 7.1.60 的结果得到 $\overline{\overline{C}}=\aleph$）．

7.2.17　任给实数 α，$0\leqslant\alpha<1$，构造一个 Lebesgue 测度为 α 的完全疏集 C_α，其势 $\overline{\overline{C}}_\alpha=\aleph$．这里 $C_0=C$ 为题 7.2.16 中的 Cantor 完全疏集，而 $C_\alpha(0<\alpha<1)$ 称为具正 Lebesgue 测度的类 Cantor 集．

解　当 $0\leqslant\alpha<1$ 时，易见 $0<r=\frac{1-\alpha}{3-2\alpha}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{3-2\alpha})\leqslant\frac{1}{3}$．我们先从闭区间 $[0,1]$ 中取走中间长度为 r 的开区间，第二次从余下的两个闭区间中各取走中间长度为 r^2 的开区间，第三次又从余下的四个闭区间中各取走中间长度为 r^3 的开区间，如此继续下去，全部取走的开区间的总长度为

$$\sum_{n=1}^{\infty}2^{n-1}r^n=r\sum_{n=1}^{\infty}(2r)^{n-1}=\frac{r}{1-2r}$$

$$=\frac{(1-\alpha)/(3-2\alpha)}{1-2(1-\alpha)/(3-2\alpha)}=1-\alpha.$$

于是，余下之集 C_α 的 Lebesgue 测度为

$$m(C_\alpha)=1-(1-\alpha)=\alpha.$$

根据题 7.1.60 立即得到 $\overline{\overline{C}}_\alpha=\aleph$．

注　构造 Lebesgue 测度为 $\alpha(0\leqslant\alpha<1)$ 的 Cantor 疏集采用三等分挖去一段的方法，这是得到非空无内点的完全集的标准方法．值得注意的是，不要以为所得的 Cantor 疏集只是一些挖去的区间的端点组成（可数集），实际上它是一个势为 $\aleph$ 的集合，除了这种端点外，还有许多端点集的聚点．

在题 7.2.25 的证法 2 和证法 3 中，应用 Lebesgue 测度为 0 的 Cantor 疏集可以具体构造出 Lebesgue 可测集但不是 Borel 集的例子．

在题 7.3.43 中，应用 Lebesgue 测度为 0 的 Cantor 疏集，还成功地构造了 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x<f(b)-f(a)$ 的反例．

7.2.18　设 $\mathscr{R}$ 为 X 上的一个集类，证明对任何 $E\in S(\mathscr{R})$（含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ 环），必存在 $E_i\in\mathscr{R}$，使得 $E\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i$．

证　易见 $H(\mathscr{R})=\{F\mid\exists E_i\in\mathscr{R}$，使 $F\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\}$ 为 σ 环（由 $H(\mathscr{R})$ 和 σ 环的定义），又因 $S(\mathscr{R})$ 为含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ 环，所以 $S(\mathscr{R})\subset H(\mathscr{R})$．

7.2.19　设 $\mathscr{R}$ 为 X 的某些子集所成的环，$A\subset X$，$S(\mathscr{R})\cap A=\{E\cap A\mid E\in S(\mathscr{R})\}$，$\mathscr{R}\cap A=\{E\cap A\mid E\in\mathscr{R}\}$．证明：$S(\mathscr{R})\cap A=S(\mathscr{R}\cap A)$．当 $\mathscr{R}$ 为代数或 $A\in\mathscr{R}$ 时，$S(\mathscr{R})\cap A$ 为 A 上的 σ 代数．

证　设 $E_i\in S(\mathscr{R})$，$E_i\cap A\in S(\mathscr{R})\cap A$，则由 $S(\mathscr{R})$ 为 σ 环，有 $E_1-E_2\in S(\mathscr{R})$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i\in S(\mathscr{R})$ 和 $E_1\cap A-E_2\cap A=(E_1-E_2)\cap A\in S(\mathscr{R})\cap A$，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(E_i\cap A)=(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}E_i)\cap A\in S(\mathscr{R})\cap A$，从而 $S(\mathscr{R})\cap A$ 为 σ 环．因为 $\mathscr{R}\cap A\subset S(\mathscr{R})\cap A$，所以含 $\mathscr{R}\cap$

A 的最小 σ 环 $S(\mathscr{R}\cap A)\subset S(\mathscr{R})\cap A$.

令 $\mathscr{F}=\{F\in S(\mathscr{R})\mid F\cap A\in S(\mathscr{R}\cap A)\}$,显然 $\mathscr{F}$ 为 σ 环.由于 $\mathscr{R}\subset\mathscr{F}$,所以 $S(\mathscr{R})\subset\mathscr{F}$,从而 $S(\mathscr{R})\cap A\subset\mathscr{F}\cap A\subset S(\mathscr{R}\cap A)$ 和 $S(\mathscr{R})\cap A=S(\mathscr{R}\cap A)$.

如果 $\mathscr{R}$ 为代数或 $A\in\mathscr{R}$ 时,必有 $A\in\mathscr{R}\cap A\subset S(\mathscr{R})\cap A$,从而 $S(\mathscr{R})\cap A$ 为 σ 代数.

7.2.20　设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbf{R}^n$ 中某些子集的 σ 代数,$E\in\mathscr{A}$,$f:E\to\mathbf{R}^1$ 为实函数.则

$$\mathscr{I}=\{A\subset\mathbf{R}^1\mid f^{-1}(A)\in\mathscr{A}\}$$

也为 σ 代数.

证　因为 $f^{-1}(\mathbf{R}^1)=E\in\mathscr{A}$,所以 $\mathbf{R}^1\in\mathscr{I}$.此外,如果 $A,B\in\mathscr{I}$,则由 $f^{-1}(A-B)=f^{-1}(A)-f^{-1}(B)\in\mathscr{A}$ 可知 $A-B\in\mathscr{I}$.

设 $A_n\in\mathscr{I}$,即 $f^{-1}(A_n)\in\mathscr{A}$,由 $\mathscr{A}$ 为 σ 代数得到

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}f^{-1}(A_n)\in\mathscr{A}.$$

因此,$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathscr{I}$.综合上述,$\mathscr{I}$ 为 σ 代数.

7.2.21　设 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 为连续函数,若 $A\in S(\mathscr{R}_0)$(即 A 为 Borel 集),则 $f^{-1}(A)\in S(\mathscr{R}_0)$(即 $f^{-1}(A)$ 也为 Borel 集).

证　因为 $S(\mathscr{R}_0)$ 是 Borelσ 代数(含 $\mathscr{R}_0$ 的最小 σ 代数),如果 $G\subset\mathbf{R}^1$ 为开集,根据 f 连续知 $f^{-1}(G)\subset\mathbf{R}^1$ 也为开集.因此,若令

$$\mathscr{I}=\{A\subset\mathbf{R}^1\mid f^{-1}(A)\in S(\mathscr{R}_0)\},$$

由于 $f^{-1}(G)\in S(\mathscr{R}_0)$,从而 $G\in\mathscr{I}$.题7.2.20指出 $\mathscr{I}$ 是一个 σ 代数,由此知 $S(\mathscr{R}_0)\subset\mathscr{I}$.这说明了若 $A\in S(\mathscr{R}_0)$,则 $f^{-1}(A)\in S(\mathscr{R}_0)$.

7.2.22　证明 $\overline{\overline{L}}=\overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}}=2^{\aleph}$.

证　显然,

$$\overline{\overline{L}}=\overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}}\leqslant\overline{\overline{2^{\mathbf{R}^1}}}=2^{\aleph}.$$

另一方面,题7.2.16指出 $[0,1]$ 中的 Cantor 完全疏集 C,有 $m(C)=0$.因此,任何 $E\subset C$,必有 $m^*(E)=0$,$E\in\mathscr{R}_0^*$,于是,由于 C 为非空完全集,$\overline{\overline{C}}=\aleph$,有

$$\overline{\overline{L}}\geqslant\overline{\overline{\{E\mid E\subset C\}}}=\overline{\overline{2^C}}=2^{\aleph}.$$

综合上述得 $\overline{\overline{L}}=\overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}}=2^{\aleph}$.

7.2.23　设 $\mathscr{R}_0=\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}(a_i,b_i]\mid-\infty<a_i\leqslant b_i<+\infty\}$,则 $\overline{\overline{S(\mathscr{R}_0)}}=\aleph$.更一般地,设 $\mathscr{R}$ 为集类,其势 $\overline{\overline{\mathscr{R}}}=\aleph$,则包含 $\mathscr{R}$ 的最小 σ 环 $S(\mathscr{R})$ 的势为 $\overline{\overline{S(\mathscr{R})}}=\aleph$.

证　第一步,最小良序的构造.

由良序定理(参阅[2]下册),任何集合均可良序化.将实数集 $\mathbf{R}$ 良序化,仍记为 $\mathbf{R}$.令 $A=\{a\in\mathbf{R}\mid$ 至多可数个 $b\in\mathbf{R}$ 满足 $b\prec a\}$.设 $\mathbf{R}$ 的最小元为 a_0,则 $a_0\in A$,因此 $A\neq\varnothing$.下证 $\aleph_0<\overline{\overline{A}}\leqslant\aleph$.(反证)若 $\overline{\overline{A}}\leqslant\aleph_0$,则 $\mathbf{R}-A\neq\varnothing$.因 $\mathbf{R}$ 为良序集,故 $\mathbf{R}-A$ 中有最小元 a_1.显然,由 A 的定义知 $a_1\in A$,这与 $a_1\in\mathbf{R}-A$,$a_1\overline{\in}A$ 相矛盾.称 A 为最小良序集.

第二步,$S(\mathscr{R})$ 的结构.

利用超限归纳法构造集族 $\{\mathscr{R}_a\mid a\in A\}$.令 $\mathscr{R}_{a_0}=\mathscr{R}$.设对 $\lambda\in A$,$\mathscr{R}_\lambda$ 已定义,则对 λ 的后继元 $\lambda+1$,定义

$$\mathscr{R}_{\lambda+1}=\{\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i,E_1-E_2\mid E_i\in\mathscr{R}_\lambda,i=1,2,\cdots\}.$$

如此对每个 $a\in A$,$\mathscr{R}_a$ 均可定义好.下证 $\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$ 为 σ 环.

(i) 任取 $G_n\in\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$,则必有 $\mathscr{R}_{a_n}$ 使 $G_n\in\mathscr{R}_{a_n}$,$n=1,2,\cdots$.因 A 不可数,而 $\{c\in\mathbf{R}\mid$ 存在 n_0,使 $c\prec a_{n_0}\}$ 为可数集,故 $A-\{c\in\mathbf{R}\mid$ 存在 n_0,使 $c\prec a_{n_0}\}\neq\varnothing$,它必有最小元 $b\in A$,显然,$\mathscr{R}_{a_n}\subset\mathscr{R}_b$,$n=1,2,\cdots$,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n\in\mathscr{R}_{b+1}\subset\bigcup_{a\in A}\mathscr{R}_a(\text{注意 }b+1\in A).$$

(ii) 任取 $G_i,G_j\in\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$,$G_i\in\mathscr{R}_{a_i}$,$G_j\in\mathscr{R}_{a_j}$.不妨设 $a_i\prec a_j$.于是,$G_i,G_j\in\mathscr{R}_{a_j}$,故 $G_i-G_j\in\mathscr{R}_{a_j+1}\subset\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$.综上所述知道 $\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$ 为 σ 环.因此

$$S(\mathscr{R})\subset\bigcup_{a\in A}\mathscr{R}_a.$$

另一方面,从 $\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$ 的构造步骤立知 $\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a\subset S(\mathscr{R})$.所以

$$S(\mathscr{R})=\bigcup_{a\in A}\mathscr{R}_a.$$

第三步,$\overline{\overline{S(\mathscr{R})}}=\aleph$.

仍用超限归纳法可证,对任何 $a\in A$,$\overline{\overline{\mathscr{R}_a}}=\aleph$.事实上,显然有 $\overline{\overline{\mathscr{R}_{a_0}}}=\overline{\overline{\mathscr{R}}}=\aleph$.设对 $\lambda\in A$,有 $\overline{\overline{\mathscr{R}_\lambda}}=\aleph$,则根据第二步中从 $\mathscr{R}_\lambda$ 构造 $\mathscr{R}_{\lambda+1}$ 的过程可看出 $\overline{\overline{\mathscr{R}_{\lambda+1}}}=\aleph$.

因为 $\mathscr{R}\subset S(\mathscr{R})=\bigcup\limits_{a\in A}\mathscr{R}_a$,所以

$$\aleph=\overline{\overline{\mathscr{R}}}\leqslant\overline{\overline{S(\mathscr{R})}}=\overline{\overline{\bigcup_{a\in A}\mathscr{R}_a}}\leqslant\overline{\overline{A}}\cdot\aleph\leqslant\aleph\cdot\aleph=\aleph,$$

从而得到

$$\overline{\overline{S(\mathscr{R})}}=\overline{\overline{\bigcup_{a\in A}\mathscr{R}_a}}=\aleph.$$

注　容易看出,$\mathscr{R}_0\subset S(\mathscr{R}_0)$,开集 $G\in S(\mathscr{R}_0)$,闭集 $F\in S(\mathscr{R}_0)$,G_δ 型的集 $E(=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n,G_n$ 为开集$)\in S(\mathscr{R}_0)$,F_σ 型的集 $F(=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n,F_n$ 为闭集$)\in S(\mathscr{R}_0)$.特别地,至多可数集 $E\in S(\mathscr{R}_0)$.

7.2.24　设 $C\subset[0,1]$ 为 Cantor 完全疏集,$0\leqslant m(C)<1$.则存在一个同胚映射 $f:[0,1]\to[0,1]$,使 $m(f(C))=0$.

证　令

$$f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]-C))}{m([0,1]-C)},0\leqslant x\leqslant 1.$$

易见 $f(0)=0,f(1)=1$,且 $f:[0,1]\to[0,1]$ 为严格增的连续函数.因而它是一个同胚映射.

设$[0,1]-C=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n)$,其中$(\alpha_n,\beta_n)$,$n=1,2,\cdots$ 为$[0,1]-C$ 的构成区间.从而

$$m([0,1]-C)=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n).$$

又因

$$\begin{aligned}&f(\beta_n)-f(\alpha_n)\\&=\frac{m([0,\beta_n]\cap([0,1]-C))}{m([0,1]-C)}\\&\quad-\frac{m([0,\alpha_n]\cap([0,1]-C))}{m([0,1]-C)}\\&=\frac{\beta_n-\alpha_n}{m([0,1]-C)},\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}m(f([0,1]-C))&=\sum_{n=1}^{\infty}[f(\beta_n)-f(\alpha_n)]\\&=\frac{\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)}{m([0,1]-C)}=1,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&m(f(C))=m(f([0,1])-f([0,1]-C))\\&=m(f([0,1]))-m(f([0,1]-C))\\&=m([0,1])-1=1-1=0.\end{aligned}$$

注 易见 $f(C)$ 也是完全疏集.因而上述反例表明两个同胚的完全疏集,其中一个测度为零,而另一个的测度可以大于零.

7.2.25 证明非 Borel 集的 Lebesgue 可测集是存在的.

证法 1 由题 7.2.23 知 Borel 集的势$\overline{\overline{S(\mathscr{R}_0)}}=\aleph$,再由题 7.2.22 知 Lebesgue 可测集的势为 $\bar{\bar{L}}=\bar{\bar{\mathscr{R}}}_0^*=2^{\aleph}$,但 $2^{\aleph}>\aleph$,所以 Lebesgue 可测集比 Borel 可测集多得多!这就证明了非 Borel 集的 Lebesgue 可测集是一定存在的.

值得注意的是,证法 1 并没有具体给出非 Borel 集的 Lebesgue 可测集的例子.下面的证法 2 和证法 3 都具体构造了这样的例子.

证法 2 设区间$[0,1]\subset\mathbf{R}^1$,$\theta(x)$ 为$[0,1]$ 上的 Cantor 函数,它是单调增的连续函数(见题 7.3.43 证(2) 中的函数 $\theta(x)$).令

$$\psi(x)=\frac{1}{2}(x+\theta(x)),x\in[0,1],$$

显然,ψ 为$[0,1]$上的严格增函数.且 $\psi(0)=0,\psi(1)=1$.于是,易证 ψ^{-1} 也为严格增的连续函数.

现在取 Lebesgue 测度为零的 Cantor 集 $C\subset[0,1]$,并在构造 Cantor 集过程中每步取掉的中央开区间为 $I_{n,k}(n=1,2,\cdots,k=1,2,\cdots,2^{n-1})$.其长度为 $m(I_{n,k})$,则 $\psi(I_{n,k})$ 是长度为 $m(I_{n,k})/2$ 的开区间(由于 $\theta(x)$ 在 $I_{n,k}$ 上是常值),从而

$$m(\psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k}))=\frac{1}{2}.$$

如果令 $H=\psi(C)$,则

$$\begin{aligned}m(H)&=m(\psi(C))\\&=m([0,1]-\psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k}))\\&=m([0,1])-m(\psi(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{2^{n-1}}I_{n,k}))\\&=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

取 $W\subset H$为不可测集,并记 $I=\psi^{-1}(W)\subset C$,由于 $m(C)=0$,故 I 为 Lebesgue 可测集,但它不是 Borel 集(否则$(\psi^{-1})^{-1}(I)=\psi(I)=\psi(\psi^{-1}(W))=W$ 也为 Borel 集,从而为 Lebesgue 可测集,这就推出了矛盾).

证法 3 设 $C\subset[0,1]$ 为 Cantor 完全疏集,且 $m(C)>0$,$A\subset C$ 为不可测集(参阅题 7.2.32).根据题 7.2.24,

$$f:[0,1]\to[0,1],$$

$$x\mapsto f(x)=\frac{m([0,x]\cap([0,1]-C))}{m([0,1]-C)}$$

为同胚映射,且 $m(f(C))=0$.由于 $f(A)\subset f(C)$,故 $f(A)$ 为可测集,且 $m(f(A))=0$.但 $f(A)$ 决非 Borel 集.(反证)假设$f(A)$为Borel集,则由题7.2.21 知,A 也为 Borel 集,从而为可测集,这与 A 为不可测集相矛盾.

苏联学者 Н.Н.Лузин,Л.С.Апександров 以及不幸早逝的数学家 М.Я.Суслин(1894－1919) 等在深入研究 Borel集类(它与连续性有深刻联系)结构的基础上发现了比 Borel 集类广泛得多的 A 集类(它借助于 A 运算产生的)——也称为Суслин集类,而每个 A 集都是 Lebesgue 可测集.A 集类中包含着所有的 Borel 集,但还包含着其他的集.

7.2.26 举例说明:

(1) 同胚映射可将 Lebesgue 不可测集映为 Lebesgue 可测集;

(2) Borel 测度为零的集,可含非 Borel 可测集.

解 (1) 题 7.2.25 证法 3 表明同胚映射 f 将不可测集 A 映为可测集$f(A)$.反之,同胚映射f^{-1} 将可测集 $f(A)$ 映为不可测集 A.

(2) 题7.2.25证法3还表明 $f(A)\subset f(C)$ 为非 Borel 集,而 $m(f(C))=0$和 $f(C)$ 仍为 Borel 集(f 将$[0,1]$ 中的开区间仍映为开区间,于是,$f(C)$ 也是一个完全疏集,从而它是 Borel 集).即 $f(C)$ 为 Borel 测

度为零的集.

7.2.27　设 $E\subset\mathbf{R}^1$, $m(E)>0$, 则存在 $x_0,x_1\in E$, 使 x_0-x_1 为无理数.

证法 1　显然 E 不是至多可数集(否则 $m(E)=0$). 任取 $x_0\in E$, 令

$$G=\{x-x_0\mid x\in E\},$$

易见 $\bar{G}=\bar{E}$, G 也不是至多可数集. 因此 G 中数 $x-x_0$ 不可能都是有理数, 即至少存在 $x_1\in E$ 使 x_1-x_0 为无理数.

证法 2　先证 $\bar{E}=\aleph$.

显然 $\bar{E}\leqslant\mathbf{R}_1-\aleph$. 另一方面, 由可测集性质, 存在闭集 $F\subset E$, 使 $m(F)>\frac{1}{2}m(E)>0$. 于是闭集 F 不可数. 从而 $F=P\cup D$. 其中 P 为完全集, D 为至多可数集(参阅[2]第二章 §6 定理1和4). 显然 P 为非空完全集, 故 $\bar{P}=\aleph$. 再由 $P\subset E$ 知 $\bar{\bar{E}}\geqslant\bar{P}=\aleph$. 这就证明了 $\bar{E}=\aleph$.

任取 $x_0\in E$, 令

$$G=\{x-x_0\cdot x\in E\},$$

$\bar{G}=\bar{E}=\aleph$. 因而 G 中数 $x-x_0$ 不可能都是有理数, 即至少存在 $x_1\in E$ 使 x_1-x_0 为无理数.

7.2.28　设 $E\subset\mathbf{R}^1$, $m(E)>0$, 则存在 $x_0,y_0\in E$, 使 x_0-y_0 为有理数.

证法 1　定义 $x_1\sim x_2$, $x_1,x_2\in E\Leftrightarrow x_1-x_2\in\mathbf{Q}$, $x_1,x_2\in E$. 显然 $\sim$ 为 E 上的一个等价关系. 于是 E 中所有点在 $\sim$ 下划分为若干互不相交的等价类. 在每一类中任选定一个点作为代表, 组成集合 $F\subset E$. 可证 F 为不可测集(参阅题 7.2.32).

(反证) 假设任何 $x,y\in E$, $x-y$ 均不为有理数, 即 E 中任两点必属于不同类, 亦即每类 $K(x)$ 只含一个点, $K(x)=\{x\}$. 于是 $F=E$. 而 F 不可测, 这与 E 可测相矛盾.

证法 2　不失一般性, 设 $E\subset[-N,N]$, N 为自然数, 令

$$[-1,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}.$$

作 $\mathbf{R}^1$ 上的平移: $\varphi_n(x)=x+r_n$, 记 $\varphi_n(E)=E_n$, $n=1,2,\cdots$. 由可测性和测度对于平移的不变性得

$$m(E_n)=m(E)>0,\ n=1,2,\cdots$$

易知 $E_n\subset[-N-1,N+1]$, 从而

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\subset[-N-1,N+1].$$

假设对任何 $m,n(m\neq n)$ 均有 $E_m\cap E_n=\varnothing$, 从 $m(E)>0$ 得

$$2(N+1)\geqslant m(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)=\sum_{n=1}^{\infty}m(E)=+\infty.$$

矛盾. 故必有 $m_0\neq n_0$, 使 $E_{m_0}\cap E_{n_0}\neq\varnothing$. 设 $z\in E_{m_0}\cap E_{n_0}$, 则有 $x_0,y_0\in E$, 使

$$x_0+r_{m_0}=y_0+r_{n_0},$$

从而 $x_0-y_0=r_{n_0}-r_{m_0}\in\mathbf{Q}$.

7.2.29　设 $E\subset\mathbf{R}^1$ 是可测集, $D\subset\mathbf{R}^1$ 稠密, 且对任何 $x\in D$ 必有

$$m(E\Delta(E+x))$$
$$=m((E-(E+x))\cup((E+x)-E))=0,$$

则 $m(E)=0$ 或 $m(E^c)=0$.

证　先证引理: 若 $m(E)>0$, 则对任何 $\varepsilon>0$, 必有 (a,b) 使 $m(E\cap(a,b))>(b-a)(1-\varepsilon)$.

事实上, 不妨设 $m(E)<+\infty$. 易见有开集 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(a_n,b_n)\supset E$, 使

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}m((a_n,b_n)-E)<\varepsilon m(E).$$

所以, 存在 n, 使

$$m((a_n,b_n)-E)<\varepsilon(b_n-a_n)$$

(否则, $\varepsilon\cdot m(E)>\sum_{n=1}^{\infty}m((a_n,b_n)-E)\geqslant\varepsilon\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(b_n-a_n)\geqslant\varepsilon\cdot m(E)$), 于是

$$m(E\cap(a_n,b_n))>(b_n-a_n)(1-\varepsilon).$$

再用反证法证原命题. 假设命题不真, 则 $m(E)>0$, $m(E^c)>0$. 取 $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$, (a,b), (c,d) 使

$$m(E\cap(a,b))>(b-a)(1-\varepsilon),$$
$$m(E^c\cap(c,d))>(d-c)(1-\varepsilon).$$

不妨设 $d-c>b-a$(否则等分 (a,b)). 通过一次次等分 (c,d), 必可取到 $(c_1,d_1)\subset(c,d)$ 使

$$m(E^c\cap(c_1,d_1))>(d_1-c_1)(1-\varepsilon),$$
$$b-a<d_1-c_1\leqslant2(b-a).$$

因为 D 稠密, 故可取 $x\in D$ 使 $(a,b)+x\subset(c_1,d_1)$. 由于 $m(E\Delta(E+x))=0$, 所以

$$0=m((E+x)-E)=m((E+x)\cap E^c)$$
$$\geqslant m((E\cap(a,b)+x)\cap(E^c\cap(c_1,d_1))$$
$$\geqslant0,$$
$$m((E\cap(a,b)+x)\cap(E^c\cap(c_1,d_1))=0.$$

而　$E\cap(a,b)+x\subset(a,b)+x\subset(c_1,d_1)$, $E^c\cap(c_1,d_1)\subset(c_1,d_1)$, 故

$$d_1-c_1$$
$$\geqslant m(E\cap(a,b)+x)+m(E^c\cap(c_1,d_1))$$
$$\geqslant(b-a)(1-\varepsilon)+(d_1-c_1)(1-\varepsilon)$$
$$\geqslant\frac{1}{2}(d_1-c_1)(1-\varepsilon)+(d_1-c_1)(1-\varepsilon)$$
$$=\frac{3}{2}(d_1-c_1)(1-\varepsilon)>d_1-c_1.$$

矛盾.

7.2.30 设 $E\subset \mathbf{R}^1$, $m^*(E)=p>0$, 则对任何 $0\leqslant q<p$, 必有 $E_1\subset E$, 使 $m^*(E_1)=q$.

证 令

$$f(x)=m^*(E\cap(-x,x)),\quad x\in[0,+\infty).$$

易见 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m^*(E)=p$. 下证 f 是连续函数. 事实上, 对任何 $h>0$, 有

$$\begin{aligned}&|f(x+h)-f(x)|\\ &=|m^*(E\cap(-x-h,x+h))\\ &\quad -m^*(E\cap(-x,x))|\\ &\leqslant m^*((-x-h,-x))+m^*((x,x+h))\\ &\leqslant 2h,\end{aligned}$$

即 f 在 x 右连续. 同理, f 在 x 左连续. 于是 f 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续. 从 $f(0)=0\leqslant q<p=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和连续函数的介值定理, 存在 $\xi\in[0,+\infty)$ (并记 $E_1=E\cap(-\xi,\xi)\subset E$), 使得

$$q=f(\xi)=m^*(E\cap(-\xi,\xi))=m^*(E_1).$$

7.2.31 构造一个可测集 $E\subset[0,1]$, 使它对任意区间 $\Delta\subset[0,1]$, 有

$$m(\Delta\cap E)>0,\quad m(\Delta\cap E')>0.$$

解 首先证明在任一区间 (α,β) 中, 对任何给定的数 $r(0<r<1)$, 可以构造一个稠密开集 G, 使 $m(G)=r(\beta-\alpha)$.

先在 (α,β) 中取出一个以其中点为中心的长为 $\lambda(\beta-\alpha)(0<\lambda<\frac{1}{3})$ 的开区间 δ. 再在余下的两区间 Δ_0,Δ_1 中, 分别取出一个以其中点为中心的长为 $\lambda^2(\beta-\alpha)$ 的开区间 δ_0,δ_1; 再在余下的四个区间 $\Delta_{i_1i_2}(i_1=0,1;i_2=0,1)$ 中分别取出以其中点为中心的长为 $\lambda^3(\beta-\alpha)$ 的区间 $\delta_{i_1i_2}$; …, 如此继续下去. 令 G 为所有这些取出的区间之并:

$$G=\delta\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i_1,\cdots,i_n}\delta_{i_1\cdots i_n}.$$

显然 G 为开集, δ 以及所有 $\delta_{i_1\cdots i_n}$ 为其构成区间. 于是有

$$\begin{aligned}m(G)&=m(\delta)+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i_1,\cdots,i_n}m(\delta_{i_1\cdots i_n})\\ &=\lambda(\beta-\alpha)+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\lambda^{n+1}(\beta-\alpha)\\ &=\frac{\lambda}{1-2\lambda}(\beta-\alpha).\end{aligned}$$

取 $\lambda=\frac{r}{1+2r}$, 当 $0<r<1$ 时, $0<\lambda<\frac{1}{3}$, 就得 $m(G)=r(\beta-\alpha)$.

不难看出, $[\alpha,\beta]-G$ 为完全疏集, 从而 G 在 $[\alpha,\beta]$ 中稠密.

下面就来构造适合题意的 $[0,1]$ 中的可测集 E.

取 $r=\frac{3}{4}$, 按上述方法在 $[0,1]$ 中作相应的稠密开集 G_0, $m(G_0)=\frac{3}{4}$. 由 G_0 为开集, $G_0=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i^{(0)}$, $\delta_i^{(0)}$ 是 G_0 的构成区间. 对每个 $\delta_i^{(0)}$, 再按上述做法, 得一稠密开集 $G_i^{(0)}$, 使 $m(G_i^{(0)})=(1-\frac{1}{3^2})m(\delta_i^{(0)})$. 并令 $G_1=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i^{(0)}\subset G_0$, 则

$$\begin{aligned}m(G_1)&=\sum_{i=1}^{\infty}m(G_i^{(0)})\\ &=(1-\frac{1}{3^2})m(G_0)\\ &=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2}).\end{aligned}$$

由 G_1 为开集有 $G_1=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\delta_i^{(1)}$, $\delta_i^{(1)}$ 为 G_1 的构成区间. 再对每个 $\delta_i^{(1)}$ 施以上述方法, 造出相应的稠密开集 $G_i^{(1)}$, 使 $m(G_i^{(1)})=(1-\frac{1}{4^2})m\delta_i^{(1)}$. 再令 $G_2=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}G_i^{(1)}\subset G_1$, 于是又有

$$m(G_2)=(1-\frac{1}{2^2})(1-\frac{1}{3^2})(1-\frac{1}{4^2}).$$

如此继续下去, 得一单调降开集列

$$G_0\supset G_1\supset G_2\supset\cdots\supset G_n\supset\cdots,$$

且 $m(G_n)=\prod\limits_{k=0}^{n}(1-\frac{1}{(k+2)^2})$, $n=0,1,\cdots$

令 $E=\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}G_n$, 显然 E 可测, 且

$$\begin{aligned}m(E)&=\lim_{n\to\infty}m(G_n)\\ &=\prod_{k=0}^{\infty}(1-\frac{1}{(k+2)^2})=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

下证 E 适合题意.

任取开区间 $\Delta\subset[0,1]$, 由于 G_n 在 $[0,1]$ 中稠密, 故 $E\cap\Delta\neq\varnothing$. 设 $x_0\in E\cap\Delta$, 则在每个 G_n 中有它的一个构成区间 $\delta_{i_n}^{(n)}$ 含 x_0. 易知

$$m(\delta_{i_n}^{(n)})<\frac{1}{3^{n+1}}\to 0\ (n\to+\infty),$$

故存在充分大的 n_0, 使 $x_0\in\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\subset\Delta$. 而

$$\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E=\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap\bigcap_{k=n_0}^{\infty}G_k,$$

$$m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)=(\prod_{k=n_0}^{\infty}(1-\frac{1}{(k+2)^2}))m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)})$$

以及

$$\begin{aligned}1&>\prod_{k=n_0}^{\infty}(1-\frac{1}{(k+2)^2})\\ &=\frac{1}{2}[\prod_{k=0}^{n_0-1}(1-\frac{1}{(k+2)^2})]^{-1}>0\end{aligned}$$

可知 $m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)>0$，$m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E^c)=m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)})-m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)>0$. 从而

$$m(\Delta\cap E)\geqslant m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E)>0,$$

$$m(\Delta\cap E^c)\geqslant m(\delta_{i_{n_0}}^{(n_0)}\cap E^c)>0.$$

7.2.32 设 $E\subset\mathbf{R}^1$，$m(E)>0$，则存在 Lebesgue 不可测集 $A\subset E$.

证法1 因为 $m(E)>0$，所以存在 $a,b\in\mathbf{R}^1$，$a<b$，使 $m(E\cap[a,b])>0$. 不失一般性，可设 $E\subset[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，$m(E)>0$，将 E 中所有点作如下分类：

$$x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Q}.$$

并令 $x\in E$ 的等价类

$$K(x)=\{y\in E\mid y-x\in\mathbf{Q}\},$$

显然 $x\in K(x)\subset E$.

其次，若存在 $z\in K(x)\cap K(y)$，则必有 $r_x,r_y\in\mathbf{Q}$，使

$$z=x+r_x=y+r_y.$$

故得

$$y=x+(r_x-r_y).$$

如果 $t\in K(y)$，则存在 $r\in\mathbf{Q}$，使 $t=y+r=x+(r_x-r_y+r)\in K(x)$，故 $K(y)\subset K(x)$. 同理 $K(x)\subset K(y)$，从而 $K(x)=K(y)$. 这就证明了不同的两个等价类 $K(x)$，$K(y)$ 是不相交的.

E 中的点经上述分类后，在每一类中任选定一个点作为此类的代表元素. 这种点的全体组成集合 A.

设 $[-1,1]\cap\mathbf{Q}=\{r_0=0,r_1,r_2,\cdots\}$，而 A 经平移 $\varphi_k(x)=x+r_k$ 而得集合 A_k，即 $A_k=\{x+r_k\mid x\in A\}$. 显然 $A_0=A$.

如果 $x\in E\subset[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$，则必有 $x_0\in A$，使 $x\in K(x_0)$，以及 $x-x_0\in[-1,1]\cap\mathbf{Q}$. 记

$$x-x_0=r_k,$$

则 $x=x_0+r_k\in A_k$. 于是

$$E\subset\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k.$$

另一方面，当 $n\neq m$ 时，$A_n\cap A_m=\varnothing$. 事实上，若有 $z\in A_n\cap A_m$，则存在 $x_n,x_m\in A$，使

$$z=x_n+r_n=x_m+r_m,$$

即

$$x_n-x_m=r_m-r_n\neq 0.$$

$x_n\neq x_m$ 蕴涵着 $K(x_n)\neq K(x_m)$. 但从 $x_n-x_m=r_m-r_n\in\mathbf{Q}$ 知 x_n,x_m 属于同一等价类. 即 $K(x_n)=K(x_m)$，矛盾.

对任何 $k\in\mathbf{N}$，$A_k\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$，故有 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_k\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$.

下面证明 A 为不可测集.

（反证）假设 A 为可测集，显然 A_k 也为可测集，且 $m(A_k)=m(A)$（可测性和测度在平移下不变）. 再由 $A_k(k=0,1,2,\cdots)$ 彼此不相交，得

$$0<m(E)\leqslant m(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)=\sum_{k=0}^{\infty}m(A_k)=\sum_{k=0}^{\infty}m(A),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}m(A)=\sum_{k=0}^{\infty}m(A_k)=m(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)\leqslant m([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])=3.$$

从第一式推出 $m(A)>0$，而从第二式却推出 $m(A)=0$，矛盾. 这就证明了 A 为不可测集.

证法2 记 $m_*(A_k)=m_*(A)=\alpha$，$m^*(A_k)=m^*(A)=\beta$，$k=0,1,2,\cdots$，由 $E\subset\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_k$，有

$$0<m(E)=m^*(E)\leqslant m^*(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}m^*(A_k)=\beta+\beta+\cdots,$$

由此推出 $\beta>0$.

再由 A_n 彼此不相交和 $\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}A_k\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$ 得到

$$\alpha+\alpha+\cdots=\sum_{k=0}^{\infty}m_*(A_k)\leqslant m_*(\bigcup_{k=0}^{\infty}A_k)\leqslant m([-\frac{3}{2},\frac{3}{2}])=3,$$

由此推出 $\alpha=0$. 从

$$m_*(A)=\alpha=0<\beta=m^*(A)$$

立知 A 为 Lebesgue 不可测集.

注 将 $E\subset[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ 中的所有点按 $x\sim y\Leftrightarrow x-y\in\mathbf{Q}$ 划分等价类，且在每个等价类中取一个点为代表元素组成集合 A 得到一个 Lebesgue 不可测集的例子，这是一个很妙的方法.

7.2.33 $\mathbf{R}^1$ 上的 Lebesgue 外测度 m^* 不具有可数可加性. 即存在两两不相交的集列 $\{A_n\}$，使

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)<\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n).$$

证 由题7.2.32，对每个 $n\in\mathbf{N}$，有 $m^*(A_n)=\beta>0$，且 $A_n\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\subset[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]$. 由此得到

$$m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leqslant 3<+\infty=\sum_{n=1}^{\infty}\beta=\sum_{n=1}^{\infty}m^*(A_n).$$

7.2.34 设 $(X,\mathscr{R},\mu)$ 为完全测度空间，$\mathscr{R}$ 为 σ 代数，$\mu(X)=1$，E 为 μ^* 不可测集. 证明：存在 ε_0，$0<$

$\varepsilon_0 < 1$，使对 X 中的任一满足 $\mu(M) \geqslant \varepsilon_0$ 的可测集 M，$E \cap M$ 为不可测集．

证 （反证）假设题中的 ε_0 不存在，则对 ε_n，$0 < \varepsilon_n < 1$，ε_n 单调增趋于 1，有 μ^* 可测集 $M_n \subset X$，使 $\mu(M_n) \geqslant \varepsilon_n$，但 $E \cap M_n$ 为 μ^* 可测集．显然，$M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ 为 μ^* 可测集，且 $\varepsilon_n \leqslant \mu(M_n) \leqslant \mu(M) \leqslant \mu(X) = 1$．令 $n \to +\infty$ 得到 $1 \leqslant \mu(M) = 1$，$\mu(M) = 1$．因 $\mu([0,1] - M) = \mu(X) - \mu(M) = 1 - 1 = 0$，又 μ 为完全测度，故 $E \cap (X - M)$ 为 μ^* 零集，从而为 μ^* 可测集．又因为 $\mathscr{R}$ 为 σ 代数，所以 $\bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap M_n)$ 为 μ^* 可测集．于是

$$\begin{aligned} E &= (E \cap M) \cup (E \cap M^c) \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty}(E \cap M_n) \cup (E \cap M^c) \end{aligned}$$

为 μ^* 可测集，这与题设 E 为 μ^* 不可测集相矛盾．

7.2.35 设 $g(x)$ 为直线 $\mathbf{R}^1$ 上的一个单调增函数，$g(x) = g(x+0)$．记 $\mathscr{P} = \{(a,b] \mid 0 < a \leqslant b < +\infty\}$．作集函数 $m_g : \mathscr{P} \to \mathbf{R}$，$m_g((\alpha,\beta]) = g(\beta) - g(\alpha)$．证明集函数 m_g 可唯一延拓为含 $\mathscr{P}$ 的最小环 $\mathscr{R}_0 = R(\mathscr{P}) = \{\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] \mid -\infty < a_i \leqslant b_i < +\infty, i = 1, \cdots, n\}$ 上的测度．于是可以定义 $H(\mathscr{R}_0)$ 上的外测度 m_g^*，从而得到满足 Caratheodory 条件的 m_g^* 可测集全体 $L_g = \mathscr{R}_0^*(g) \subset H(\mathscr{R}_0)$．称 m_g^* 为（由 g 或 m_g 导出的）$Lg = \mathscr{R}_0^*(g)$ 上的 Lebesgue-Stielties(L-S) 测度，有时仍记为 m_g．

特别地，当 $g(x) = x$，$x \in \mathbf{R}$ 时，$m_g^* = m^*$ 为（由 $m_g = m$ 导出的）$L = L_g = \mathscr{R}_0^*(g) = \mathscr{R}_0^*$ 上的通常的 Lebesgue(L) 测度（它是区间长度的推广），有时仍记为 m．$L = \mathscr{R}_0^*$ 中的元素就是 Lebesgue 可测集．

证 对于 $E \in \mathscr{R}_0$，设 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$（$E_i = (a_i, b_i] \in \mathscr{P}$，$E_i$ 互不相交）为 E 的一个初等分解，令

$$m_g(E) = \sum_{i=1}^{n}(g(b_i) - g(a_i)).$$

先证明上述定义与 E 的初等分解的方式（不必唯一！）无关，即它由 E 完全确定．

对于 $E = (a,b] \in \mathscr{P}$，设

$$(a,b] = \bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i]$$

是 $(a,b]$ 的一个初等分解．不失一般性，可认为 $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$．因为 $(a_i, b_i]$，$i = 1, \cdots, n$ 是彼此不相交的，而且 $\bigcup_{i=1}^{n}(a_i, b_i] = [a,b]$，所以必有

$$\begin{aligned} a &= a_1 \leqslant b_1 = a_2 \leqslant b_2 = a_3 \leqslant b_3 = \cdots \\ &= a_n \leqslant b_n = b. \end{aligned}$$

由于 $g(x)$ 为单调增的右连续函数，故

$$\begin{aligned} g(a) &= g(a_1) \leqslant g(b_1) = g(a_2) \leqslant \cdots \\ &= g(a_n) \leqslant g(b_n) = g(b), \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^{n}[g(b_i) - g(a_i)] = g(b) - g(a).$$

由此可看出，当 $E \in \mathscr{P}$ 时，无论 E 选怎样的初等分解，$m_g(E)$ 具有确定的值 $g(b) - g(a)$．

对于一般的 $E \in \mathscr{R}_0$，设 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$E = \bigcup_{j=1}^{l} F_j$ 是 E 的两个初等分解．记 $G_{ij} = E_i \cap F_j$，$i = 1, \cdots, n$；$j = 1, \cdots, l$．则 $G_{ij} \in \mathscr{P}$．由于 $E_i = \bigcup_{j=1}^{l} G_{ij}$ 和 $F_j = \bigcup_{i=1}^{n} G_{ij}$ 分别是 $E_i \in \mathscr{P}$ 和 $F_j \in \mathscr{P}$ 的初等分解，所以

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} m_g(E_i) &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} m_g(G_{ij}) \\ &= \sum_{j=1}^{l} \sum_{i=1}^{n} m_g(G_{ij}) = \sum_{j=1}^{l} m_g(F_j). \end{aligned}$$

这就说明 $m_g(E)$ 与 E 的初等分解无关．于是 $m_g : \mathscr{P} \to R$ 延拓为 $m_g : \mathscr{R}_0 \to \mathbf{R}$．

再证明环 $\mathscr{R}_0$ 上的集函数 m_g 具有下列性质：

(i) m_g 具有有限可加性：

设 $E_1, \cdots, E_n \in \mathscr{R}_0$ 为彼此不相交的元素，令 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，$E_i$ 的初等分解为 $E_i = \bigcup_{j=1}^{l_i} F_{ij}$，$i = 1, \cdots, n$．由于 $E_1, \cdots, E_n$ 彼此不相交，因此 F_{ij} 也彼此不相交，从而

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{l_i} F_{ij}$$

为 E 的一个初等分解，由此得到

$$m_g(E) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l_i} m_g(F_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} m_g(E_i).$$

(ii) 如果 $E_1, \cdots, E_n$，$E \in \mathscr{R}_0$，$E_1, \cdots, E_n$ 彼此不相交且 $E \supset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$．令 $E_{n+1} = E - \bigcup_{i=1}^{n} E_i$，则 $E = \bigcup_{i=1}^{n+1} E_i$，$E_i$ 彼此不相交．由 (i) 和 m_g 的非负性得到

$$m_g(E) = \sum_{i=1}^{n+1} m_g(E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} m_g(E_i).$$

(iii) m_g 具有（有限）次可加性：如果 $E_1, \cdots, E_n$，$E \in \mathscr{R}_0$，而且 $E \subset \bigcup_{i=1}^{n} E_i$．记 $F_1 = E_1$，$F_j = E_j - \bigcup_{i=1}^{j-1} E_i \in \mathscr{R}_0$，于是 $E \cap F_j \in \mathscr{R}_0$，$j = 2, \cdots, n$，$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{n} F_j$，$E = E \cap \bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcup_{j=1}^{n}(E \cap F_j)$，且

$$\begin{aligned} m_g(E) &= \sum_{j=1}^{n} m_g(E \cap F_j) \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{n} m_g(F_j) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_g(E_i). \end{aligned}$$

特别当 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 时，有

$m_g(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m_g(E_i)$（$m_g$ 的有限次可加性）.

(iv) m_g 为 $\mathscr{R}_0$ 上的一个测度.

只须证 m_g 具有可数可加性.

设 $E_1,\cdots,E_n$ 为 $\mathscr{R}_0$ 中一列两两不相交的元素，而且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = E \in \mathscr{R}_0$，由 (ii) 有

$$\sum_{i=1}^{n} m_g(E_i) \leqslant m_g(E).$$

再令 $n \to +\infty$，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty} m_g(E_i) \leqslant m_g(E).$$

另一方面，设 $E = \bigcup_{j=1}^{l}(a_j, b_j]$ 为 E 的一个初等分解. 每个 E_i 也有初等分解，因为 $E_i (i = 1,2,\cdots)$ 为可数集，所以所有 E_i 分解得到的小区间全体也是可数集，记为 $(\alpha_n, \beta_n]$，$n = 1,2,\cdots$. 显然，

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) = \sum_{n=1}^{\infty} m_g((\alpha_n, \beta_n]) = \sum_{n=1}^{\infty}[g(\beta_n) - g(\alpha_n)].$$

由于 g 为右连续的单调增函数，故对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_0 > 0$，当 $0 < x - a_i \leqslant \delta_0 \leqslant b_i - a_i$ 时，

$$g(x) \leqslant g(a_i) + \frac{\varepsilon}{l}, i = 1,\cdots,l.$$

同样，对上述的 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta_n > 0$，当 $0 < x - \beta_n \leqslant \delta_n$ 时，

$$g(x) \leqslant g(\beta_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}, n = 1,2,\cdots$$

显然，开区间族 $\{(\alpha_n, \beta_n + \delta_n) \mid n = 1,2,\cdots\}$ 覆盖了 E，同时也覆盖了 $\bigcup_{i=1}^{l}[a_i + \delta_0, b_i]$. 根据 Borel 有限覆盖定理，存在有限个开区间覆盖这 l 个闭区间，记为 $\{(\alpha_{n_j} + \beta_{n_j} + \delta_{n_j}) \mid j = 1,2,\cdots,k\}$，即

$$\bigcup_{i=1}^{l}(a_i + \delta_0, b_i) \subset \bigcup_{i=1}^{n}(a_i + \delta_0, b_i] \subset \bigcup_{j=1}^{k}(\alpha_{n_j}, \beta_{n_j} + \delta_{n_j}) \subset \bigcup_{j=1}^{k}(\alpha_{n_j}, \beta_{n_j} + \delta_{n_j}].$$

于是，由 (i) 和 (iii) 及 g 为右连续增函数得到

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l}[g(b_i) - g(a_i)] - \varepsilon \\
\leqslant& \sum_{i=1}^{l}[g(b_i) - g(a_i) - \frac{\varepsilon}{l}] \\
\leqslant& \sum_{i=1}^{l}[g(b_i) - g(a_i + \delta_0)] \\
\leqslant& \sum_{j=1}^{\infty}[g(\beta_{n_j} + \delta_{n_j}) - g(\alpha_{n_j})] \\
\leqslant& \sum_{j=1}^{k}[g(\beta_{n_j}) + \frac{\varepsilon}{2^{n_j}} - g(\alpha_{n_j})] \\
\leqslant& \sum_{n=1}^{\infty}[g(\beta_n) - g(\alpha_n)] + \varepsilon.
\end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$，得

$$m_g(E) = \sum_{i=1}^{l}[g(b_i) - g(a_i)] \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}[g(\beta_n) - g(\alpha_n)] = \sum_{i=1}^{\infty} m_g(E_i).$$

类似题 7.2.35 可以有

7.2.36 （n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Lebesgue 测度）设 $\mathscr{P} = \{(a_1,\cdots,a_n; b_1,\cdots,b_n] = (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \mid -\infty < a_i \leqslant b_i < +\infty, i = 1,\cdots,n\}$，定义集函数 $m: \mathscr{P} \to R$，

$$m((a_1,\cdots,a_n; b_1,\cdots,b_n]) = \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i),$$

它为 n 维体积. 由 $\mathscr{P}$ 中有限个集的并集所成的集族仍记为 $\mathscr{R}_0$，可证它是一个环，且含 $\mathscr{P}$ 的最小环 $R(\mathscr{P}) = \mathscr{R}_0$. $\mathscr{R}_0$ 中元素可以分解成有限个两两不相交的 $\mathscr{P}$ 中集的并集，这种分解称为初等分解. 对于 $E \in \mathscr{R}_0$，如果 $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ 是 E 的初等分解（$E_i \in \mathscr{P}, i = 1,\cdots,m, E_1,\cdots,E_n$ 彼此不相交），则令

$$m(E) = \sum_{i=1}^{n} m(E_i).$$

类似题 7.2.35 相应部分的证明，$m(E)$ 的值与 E 的初等分解的方式无关，而由 E 完全决定. 这时，m 是环 $\mathscr{R}_0$ 上的测度. 由这个测度 m，可在 $H(\mathscr{R}_0)$ 上引进外测度 m^*，从而得到满足 Caratheodory 条件的 m^* 可测集的全体 $L = \mathscr{R}_0^* \subset H(\mathscr{R}_0)$. m^* 可测集称为（n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的）Lebesgue(L) 可测集. 称 m^* 为 $\mathscr{R}_0^*$ 上的 Lebesgue(L) 测度.

7.2.37 设 $E \subset \mathbf{R}^1$，如果对任何 $\varepsilon > 0$，必存在区间 $I_i, i = 1,\cdots,k$，使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$，$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{diam} I_i = \sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \varepsilon$，则称 E 为零长度集.

显然，有限点集是零长度集. 零长度集的子集，有限个零长度集的交、并仍为零长度集.

证明：(1) $\mathscr{R}_J = \{E \subset \mathbf{R}^1 \mid E = E^\circ \cup \partial E$ 的边界点集 ∂E 为零长度集$\}$ 为环（$\mathscr{R}_J$ 中的元素称为 Jordan 可测集），但不为 σ 环.

(2) 零长度集 E 及其任何子集必为 Jordan 可测集.

(3) $\mathscr{R}_0 \subsetneqq \mathscr{R}_J \subsetneqq \mathscr{R}_0^*$.

(4) 存在 $E \in \mathscr{R}_J - S(\mathscr{R}_0)$，即 E 为 Jordan 可测集但非 Borel 可测集. 于是，$S(\mathscr{R}_0) \subsetneqq S(\mathscr{R}_J)$.

(5) 对 $E \in \mathscr{R}_J$，定义

$$m_J(E) = m_J(E^\circ \cup \partial E) = m(E^\circ)$$
$$= m(E^\circ \cup \partial E) = m(E),$$
易见 m_J 为 $\mathscr{R}_J$ 上的一个测度.

(6) $\mathscr{R}_0^* = \mathscr{R}_J^*$, $\overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}} = \overline{\overline{\mathscr{R}_J^*}} = \overline{\overline{\mathscr{R}_J}} = 2^{\aleph}$.

特别当 E 为零长度集时, $m_J(E) = m(E) = 0$.

证 (1) 设 $A, B \in \mathscr{R}_J$, 则 $\partial A, \partial B$ 都为零长度集, 再由下面证得

$$\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B,$$
$$\partial(A - B) \subset \partial A \cup \partial B$$

推出 $\partial(A \cup B), \partial(A - B)$ 也为零长度集, 从而 $A \cup B \in \mathscr{R}_J$, $A - B \in \mathscr{R}_J$, 即 $\mathscr{R}_J$ 为环.

现证上面第一式. 如果 $p \overline{\in} \partial A \cup \partial B$, 则 (i) $p \in A^\circ \cap B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$; (ii) $p \in A^\circ \cap B^e \subset (A \cup B)^\circ$; (iii) $p \in A^e \cap B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$; (iv) $p \in A^e \cap B^e = (A \cup B)^e$, 其中 A° 和 A^e 分别表示 A 的内点集和外点集. 无论哪种情形都有 $p \overline{\in} \partial(A \cup B)$, 所以 $\partial(A \cup B) \subset \partial A \cup \partial B$.

再证第二式. 如果 $p \overline{\in} \partial A \cup \partial B$, 则 (i) $p \in A^\circ \cap B^\circ \subset (A - B)^e$; (ii) $p \in A^\circ \cap B^e \subset (A - B)^\circ$; (iii) $p \in A^e \cap B^\circ \subset (A - B)^e$; (iv) $p \in A^e \cap B^e \subset (A - B)^e$. 无论哪种情形都有 $p \overline{\in} \partial(A - B)$, 所以 $\partial(A - B) \subset \partial A \cup \partial B$.

设 $\mathbf{Q} \cap [0,1] = \{r_1, r_2, r_3, \cdots\}$. 显然, $\{r_n\} \in \mathscr{R}_J$, 但由 $\partial(\mathbf{Q} \cap [0,1]) = [0,1]$ 不是零长度集知 $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} = \mathbf{Q} \cap [0,1] \overline{\in} \mathscr{R}_J$, 从而 $\mathscr{R}_J$ 不是 σ 环.

(2) 因 E 为零长度集, 则对任何 $\varepsilon > 0$, 存在区间 $I_i, i = 1, \cdots, k$, 使 $E \subset \bigcup_{i=1}^{k} I_i$, $\sum_{i=1}^{k} m(I_i) < \varepsilon$ (由此推出 $m^*(E) = 0, E \in \mathscr{R}_0^*$),

$$\partial E \subset \overline{E} \subset \overline{\bigcup_{i=1}^{k} I_i} = \bigcup_{i=1}^{k} \overline{I}_i,$$

推得 ∂E 也为零长度集. 于是 $E \in \mathscr{R}_J$.

由于零长度集 E 的任何子集 E_1 亦为零长度集, 所以 E_1 亦是 Jordan 可测集, 即 $E_1 \in \mathscr{R}_J$.

(3) 因为 $\partial(\bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i])$ 为有限集, 故为零长度集, 从而 $\bigcup_{i=1}^{k} (a_i, b_i] \in \mathscr{R}_J$, $\mathscr{R}_0 \subset \mathscr{R}_J$, 但从 $\{0\} \in \mathscr{R}_J - \mathscr{R}_0$ 知 $\mathscr{R}_0 \neq \mathscr{R}_J$.

设 $E \in \mathscr{R}_J$, 记 $E = E^\circ \cup \partial E$. 显然 E 的内点集 E° 为开集, 边界集 ∂E 为零长度集, 且 $E^\circ \cap \partial E = \varnothing$. 因为零长度集 ∂E 必为 Lebesgue 零测集, 故 $\partial E \in \mathscr{R}_0^*$. 再由开集 $E^\circ \in \mathscr{R}_0^*$ 推得 $E = E^\circ \cup \partial E \in \mathscr{R}_0^*$, $\mathscr{R}_J \subset \mathscr{R}_0^*$. 因为 $\mathscr{R}_0^*$ 为 σ 环, 所以 $S(\mathscr{R}_J) \subset \mathscr{R}_0^*$. 从 $\mathbf{Q} \cap [0,1] \in \mathscr{R}_0^* - \mathscr{R}_J$ 知 $\mathscr{R}_J \neq \mathscr{R}_0^*$.

(4) 由题 7.2.16, 设 C 为 Lebesgue 测度为零的 Cantor 疏集, 易见它是零长度集. 根据题 7.2.25 证法 2, 存在子集 $E \subset C$ 不为 Borel 集 (但为 Lebesgue 零测集), 即 $E \overline{\in} S(\mathscr{R}_0)$. 再由 (2) 得到 $E \in \mathscr{R}_J - S(\mathscr{R}_0)$.

或由 (5) 得到 $\overline{\overline{\mathscr{R}_J}} = 2^{\aleph} > \aleph = \overline{\overline{S(\mathscr{R}_0)}}$ 推出上述结论.

(6) 不难看出 $H(\mathscr{R}_0) = H(\mathscr{R}_J) = \mathbf{R}^1$ 上所有子集的全体, 且 $m_J^* = m^*$. 因此, 当 $E \in H(\mathscr{R}_0) = H(\mathscr{R}_J)$ 时, 对任何 $F \in H(\mathscr{R}_0) = H(\mathscr{R}_J)$,

$$m_J^*(F) = m_J^*(F \cap E) + m^*(F - E)$$
$$\Leftrightarrow m^*(F) = m^*(F \cap E) + m^*(F - E),$$

即 $E \in \mathscr{R}_J^* \Leftrightarrow E \in \mathscr{R}_0^*$, 从而 $\mathscr{R}_0^* = \mathscr{R}_J^*$.

由题 7.2.21

$$2^{\aleph} = \overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}} = \overline{\overline{\mathscr{R}_J^*}} \geqslant \overline{\overline{\mathscr{R}_J}}$$
$$\geqslant \overline{\overline{\{E \mid E \subset C (\text{Lebesgue 测度为零的 Cantor 集})\}}}$$
$$= 2^{\aleph},$$

立即得到

$$\overline{\overline{\mathscr{R}_0^*}} = \overline{\overline{\mathscr{R}_J^*}} \geqslant \overline{\overline{\mathscr{R}_J}} = 2^{\aleph}.$$

7.2.38 根据题 7.2.36 中的 $\mathscr{R}_0^*, m, m^*$ 和题 7.2.37 中的方法可得到 $\mathbf{R}^n$ 中相应的 Jordan 可测集等概念以及相应的性质.

特别当 $n = 2$ 时, 由一条简单 Jordan 闭曲线围成的区域 E 为 Jordan 可测集 (有时称为可求积区域) 的充要条件是 ∂E 为零面积集.

近年来, Hausdorff 测度和 Hausdorff 维数有越来越广泛的应用, 下面就最简单的情形作一些介绍. Hausdorff 测度也是抽象测度的另一个重要的具体例子.

7.2.39 ($\mathbf{R}^1$ 上的一类 Hausdorff 测度) 对于固定的实数 $\alpha > 0$ 及任意 $E \subset \mathbf{R}^1$, $\delta > 0$, 定义

$$H_{\alpha,\delta}^*(E) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{m} |I_k|^\alpha \,\middle|\, I_k \text{为开区间}, |I_k| < \delta, E \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k, 1 \leqslant m \leqslant +\infty\right\},$$

其中 $|I_k| = \operatorname{diam} I_k = m(I_k)$ 为 I_k 的长度. 显然, 对于固定的 α 和 E, 在 δ 减小时, $H_{\alpha,\delta}^*(E)$ 只可能增大. 因此, $\lim_{\delta \to 0^+} H_{\alpha,\delta}^*(E)$ 是存在的 (这里允许极限值为 $+\infty$). 定义 E 的 α 维 Hausdorff 外测度为

$$H_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \to 0^+} H_{\alpha,\delta}^*(E).$$

由于区间的长度 (或直径, 或 L 测度) 具有平移不变性, 所以 Hausdorff 外测度也是平移不变的, 即对于任意 $a \in \mathbf{R}^1$, $E \subset \mathbf{R}^1$, 都有 $H_\alpha^*(E + a) = H_\alpha^*(E)$, 其中集合 $E + a = \{x + a \mid x \in E\}$.

容易看出, Hausdorff 外测度还有下述类似于 Lebesgue 外测度的性质.

命题 1 Hausdorff 外测度有下列基本性质:

(i) 非负性：$H_\alpha^*(E)\geqslant 0, H_\alpha^*(\varnothing)=0$；

(ii) 单调性：若 $E_1\subset E_2$，则 $H_\alpha^*(E_1)\leqslant H_\alpha^*(E_2)$；

(iii) 次可数可加性：$H_\alpha^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n)\leqslant \sum_{n=1}^{\infty}H_\alpha^*(E_n)$；

此外，还有重要性质：

(iv) 若 E 和 F 的距离 $\rho(E,F)=d>0$，则 $H_\alpha^*(E\cup F)=H_\alpha^*(E)+H_\alpha^*(F)$；

(v) $H_\alpha^*(\lambda E)=\lambda^\alpha H_\alpha^*(E), \lambda>0$，其中 $\lambda E=\{\lambda x\mid x\in E\}$.

证 (i)、(ii) 从 Hausdorff 外测度的定义立得.

(iii) 如果有某个 i 使 $H_\alpha^*(E_i)=+\infty$，则不等式显然成立. 如果 $H_\alpha^*(E_i)<+\infty, i\in\mathbf{N}$. 对任何 $\varepsilon>0,\delta>0$ 和 i，由 $H_{\alpha,\delta}^*$ 的定义，可取一列开区间 $I_{i,\delta}^j, j=1,2,\cdots$，使得 $E_i\subset\bigcup_{j=1}^{\infty}I_{i,\delta}^j$，且

$$\sum_j|I_{i,\delta}^j|^\alpha<H_{\alpha,\delta}^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}, i=1,2,\cdots.$$

于是

$$H_{\alpha,\delta}^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_{i,j}|I_{i,\delta}^j|^\alpha=\sum_i(\sum_j|I_{i,\delta}^j|^\alpha)$$
$$<\sum_i(H_{\alpha,\delta}^*(E_i)+\frac{\varepsilon}{2^i})=\sum_i H_{\alpha,\delta}^*(E_i)+\varepsilon.$$

令 $\delta\to 0^+$ 得到

$$H_\alpha^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_i H_\alpha^*(E_i)+\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$ 立得

$$H_\alpha^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_i H_\alpha^*(E_i).$$

(iv) 设 $0<\delta<\frac{d}{2}$，则任何一组覆盖 $E\cup F$ 的长度不超过 δ 的开区间都可自然地分成两组，分别覆盖 E 和 F. 所以，根据 $H_{\alpha,\delta}^*$ 的定义立知

$$H_{\alpha,\delta}^*(E\cup F)=H_{\alpha,\delta}^*(E)+H_{\alpha,\delta}^*(F).$$

令 $\delta\to 0^+$ 得到

$$H_\alpha^*(E\cup F)=H_\alpha^*(E)+H_\alpha^*(F).$$

(v) 从 $H_{\alpha,\delta}^*(E)$ 的定义立即有

$$H_{\alpha,\lambda\delta}^*(\lambda E)=\lambda^\alpha H_{\alpha,\delta}^*(E), \delta>0.$$

令 $\delta\to 0^+$ 得到

$$H_\alpha^*(\lambda E)=\lambda^\alpha H_\alpha^*(E).$$

命题 2 设 $\beta>\alpha$.

(1) 若 $H_\alpha^*(E)<+\infty$，则 $H_\beta^*(E)=0$；

(2) 若 $0<H_\beta^*(F)$，则 $H_\alpha^*(F)=+\infty$.

证 (1) 因为

$$0\leqslant H_{\beta,\delta}^*(E)=\inf\{\sum_{k=1}^{m}|I_k|^\beta\mid I_k \text{为开区间}, |I_k|\leqslant\delta, E\subset\bigcup_{k=1}^{m}I_k, m\leqslant+\infty\}$$
$$\leqslant\delta^{\beta-\alpha}\inf\{\sum_{k=1}^{m}|I_k|^\alpha: I_k \text{为开区间}, |I_k|\leqslant\delta, E\subset\bigcup_{k=1}^{m}I_k, m\leqslant+\infty\}$$
$$=\delta^{\beta-\alpha}H_{\alpha,\delta}^*(E)\leqslant\delta^{\beta-\alpha}H_\alpha^*(E),$$

令 $\delta\to 0^+$ 得到

$0\leqslant H_\beta^*(E)\leqslant 0$，故 $H_\beta^*(E)=0$.

(2) (反证) 假设 $H_\alpha^*(F)<+\infty$，由 (1) 得到 $H_\beta^*(F)=0$，这与题设 $0<H_\beta^*(F)$ 相矛盾.

命题 3 当 $\alpha=1$ 时，Hausdorff 外测度 H_α^* 就是 Lebesgue 外测度 m^*，即 $H_1^*(E)=m^*(E), E\subset\mathbf{R}^1$.

证 对任何 $\delta>0$，有

$$m^*(E)=\inf\{\sum_{k=1}^{m}|I_k|\mid I_k \text{为开区间}, E\subset\bigcup_{k=1}^{m}I_k, 1\leqslant m\leqslant+\infty\}$$
$$\leqslant\inf\{\sum_{k=1}^{m}|I_k|\mid I_k \text{为开区间}, |I_k|<\delta, E\subset\bigcup_{k=1}^{m}I_k, 1\leqslant m\leqslant+\infty\}$$
$$=H_1^*(E).$$

如果 $m^*(E)=+\infty$，则 $H_1^*(E)=+\infty=m^*(E)$；如果 $m^*(E)<+\infty$，则对任何 $\varepsilon>0$，必存在开区间序列 $\{I_n\}$，使

$$E\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n, m^*(E)>\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|-\varepsilon.$$

由于对每个开区间 I_n 及 $\delta>0$，都可以取开区间序列 $\{I_n^j\mid j=1,\cdots,m(n)\}$，使得

$$I_n\subset\bigcup_{j=1}^{m(n)}I_n^j, |I_n^j|\leqslant\delta, j=1,2,\cdots,m(n),$$
$$\sum_{j=1}^{m(n)}|I_n^j|<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n},$$
$$H_{1,\delta}^*(I_n)\leqslant\sum_{j=1}^{m(n)}|I_n^j|<|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

令 $\delta\to 0^+$ 得到

$$H_1^*(I_n)=\lim_{\delta\to 0^+}H_{1,\delta}^*(I_n)\leqslant|I_n|+\frac{\varepsilon}{2^n}.$$

于是，从 Hausdorff 外测度的基本性质，有

$$H_1^*(E)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}H_1^*(I_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}$$
$$<m^*(E)+2\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to 0^+$，就得

$$H_1^*(E)\leqslant m^*(E).$$

综合上述，就导出 $H_1^*(E)=m^*(E)$.

命题 4 设 I 为一非退化区间，则

$$H_\alpha^*(I)=\begin{cases}+\infty, 0<\alpha<1,\\ H_1^*(I)=|I|, \alpha=1,\\ 0, \alpha>1.\end{cases}$$

特别有

$$H_\alpha^*(\mathbf{R}^1)=\begin{cases}+\infty, & 0<\alpha\leqslant 1,\\ 0, & \alpha>1.\end{cases}$$

证 设 I 为有限区间时，由命题3知，$0<H_1^*(I)=|I|<+\infty$，再由命题2得到：当 $0<\alpha<1$ 时，$H_\alpha^*(I)=+\infty$（或由 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{|I|+1}{n})^\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty} n^{1-\alpha}(|I|+1)^\alpha=+\infty$）；当 $\alpha>1$ 时，$H_\alpha^*(I)=0$（或由 $\lim\limits_{n\to+\infty} n(\frac{|I|+1}{n})^\alpha=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(|I|+1)^\alpha}{n^{\alpha-1}}=0$）.

设 I 为无穷区间，将 I 分解为可数多个有限区间 I_i 的并，即可分别从命题1中的Hausdorff外测度的基本性质(ii)、(iii)和命题3得到：

当 $0<\alpha<1$ 时，$+\infty=H_\alpha^*(I_1)\leqslant H_\alpha^*(I)$，$H_\alpha^*(I)=+\infty$；

当 $\alpha>1$ 时，$0\leqslant H_\alpha^*(I)\leqslant\sum\limits_{i=1}^\infty H_\alpha^*(I_i)=\sum\limits_{i=1}^\infty 0=0$，$H_\alpha^*(I)=0$；

当 $\alpha=1$ 时，$H_1^*(I)=|I|=+\infty$.

注 虽然Hausdorff外测度与Lebesgue外测度有许多相同之处，但从命题4可以看到当 $\alpha>1$ 时，对任何 $E\subset\mathbf{R}^1$，有

$$0\leqslant H_\alpha^*(E)\leqslant H_\alpha^*(R^1)=0,$$
$$H_\alpha^*(E)=0.$$

因此，$\alpha>1$ 的情形是极其平凡的. 再由命题3知，$H_1^*=m^*$，我们只须研究 $0<\alpha<1$ 的情形. 此外，根据命题4，即使 E 是有界，也还可能有 $H^*(E)=+\infty$（如非退化区间），这展示了两种外测度的显著差别.

命题5 设 $\alpha>0$，证明

(1) $\mathscr{R}_\alpha^*=\{E\mid E\subset\mathbf{R}^1$ 满足Caratheodory条件：对任何 $F\subset\mathbf{R}^1$ 有 $H_\alpha^*(F)=H_\alpha^*(F\cap E)+H_\alpha^*(F-E)\}$ 为 σ 代数；

(2) $H_\alpha^*:\mathscr{R}_\alpha^*\to\mathbf{R}$ 具有可数可加性，从而是 $\mathscr{R}_\alpha^*$ 上的一个测度（称为 α 次Hausdorff测度）；

(3) Borel集全体 $S(\mathscr{R}_0)\subset\mathscr{R}_\alpha^*$.

证 (1) 设 $E_1,E_2,\cdots,E_i,\cdots$ 为 $\mathscr{R}_\alpha^*$ 中的任何元素，则对任何 $F\subset\mathbf{R}^1$ 有

$$\begin{aligned}H_\alpha^*(F)&=H_\alpha^*(F\cap E_1)+H_\alpha^*(F-E_1)\\&=H_\alpha^*(F\cap E_1)+H_\alpha^*((F-E_1)\cap E_2)\\&\quad+H_\alpha^*((F-E_1)-E_2)\\&=H_\alpha^*(((F\cap E_1)\cup((F-E_1)\cap E_2))\cap E_1)\\&\quad+H_\alpha^*(((F\cap E_1)\cup((F-E_1)\cap E_2))\cap E_1)\\&\quad+H_\alpha^*(F-E_1\cup E_2)\\&=H_\alpha^*((F\cap E_1)\cup((F-E_1)\cap E_2))\\&\quad+H_\alpha^*(F-E_1\cup E_2),\end{aligned}$$

即 $E_1\cup E_2\in\mathscr{R}_\alpha^*$.

此外，由于

$$F\cap E_1\cap E_2=(F-(E_1-E_2))\cap E_1,$$
$$F\cap E_1-E_2=F\cap(E_1-E_2),$$

故

$$\begin{aligned}H_\alpha^*(F)&=H_\alpha^*(F\cap E_1)+H_\alpha^*(F-E_1)\\&=H_\alpha^*(F\cap E_1\cap E_2)+H_\alpha^*(F\cap E_1-E_2)\\&\quad+H_\alpha^*(F-E_1)\\&=H_\alpha^*((F\cap(E_1-E_2))\cap E_1)\\&\quad+H_\alpha^*(F\cap(E_1-E_2))\\&\quad+H_\alpha^*((F-(E_1-E_2))-E_1)\\&=H_\alpha^*(F\cap(E_1-E_2))\\&\quad+H_\alpha^*(F-(E_1-E_2)),\end{aligned}$$

即 $E_1-E_2\in\mathscr{R}_\alpha^*$.

已证 $\mathscr{R}_\alpha^*$ 为环. 若 $E_n\in\mathscr{R}_\alpha^*$，则

$$F_n=E_n-\bigcup_{i=1}^{n-1}E_i\in\mathscr{R}_\alpha^*,\ n=1,2,\cdots$$

它们彼此不相交且 $\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n=\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n$. 为证 $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n\in\mathscr{R}_\alpha^*$，只须证 $\bigcup\limits_{n=1}^\infty F_n\in\mathscr{R}_\alpha^*$. 因此，不妨设 E_n 彼此不相交. 显然，对任何 $F\subset\mathbf{R}^1$，由命题1(iii)得到

$$H_\alpha^*(F)\leqslant H_\alpha^*(F\cap\bigcup_{n=1}^\infty E_n)+H_\alpha^*(F-\bigcup_{n=1}^\infty E_n).$$

如果再证

$$(*)\quad H_\alpha^*(F)\geqslant H_\alpha^*(F\cap\bigcup_{n=1}^\infty E_n)+H_\alpha^*(F-\bigcup_{n=1}^\infty E_n),$$

就有

$$H_\alpha^*(F)=H_\alpha^*(F\cap\bigcup_{n=1}^\infty E_n)+H_\alpha^*(F-\bigcup_{n=1}^\infty E_n),$$

即 $\bigcup\limits_{n=1}^\infty E_n\in\mathscr{R}_\alpha^*$. 从而 $\mathscr{R}_\alpha^*$ 为 σ 环.

余下的是证明(*)不等式. 因 $E_1\cap E_2=\varnothing$，$E_1,E_2\in\mathscr{R}_\alpha^*$，故

$$\begin{aligned}&H_\alpha^*(F\cap(E_1\cup E_2))\\&=H_\alpha^*((F\cap(E_1\cup E_2))\cap E_1)\\&\quad+H_\alpha^*((F\cap(E_1\cup E_2))-E_1)\\&=H_\alpha^*(F\cap E_1)+H_\alpha^*(F\cap E_2).\end{aligned}$$

利用归纳法立即可得

$$H_\alpha^*(F\cap(\bigcup_{n=1}^i E_n))=\sum_{n=1}^i H_\alpha^*(F\cap E_n).$$

所以

$$H_\alpha^*(F)=H_\alpha^*(F\cap(\bigcup_{n=1}^i E_n))+H_\alpha^*(F-\bigcup_{n=1}^i E_n)$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{i} H_\alpha^*(F\cap E_n) + H_\alpha^*(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

令 $i \to +\infty$ 和命题 1(iii) 得到

$$H_\alpha^*(F) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(F\cap E_n) + H_\alpha^*(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n).$$

(2) 设 $E_n \in \mathscr{R}_\alpha^*$, $n = 1,2,\cdots$, $E_i \cap E_j = \varnothing$, $i \neq j$. 由(1) 得到的不等式

$$H_\alpha^*(F) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(F\cap E_n) + H_\alpha^*(F - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n),$$

再将 $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ 代入上式推出

$$\begin{aligned} H_\alpha^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) &\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*((\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i)\cap E_n) \\ &\quad + H_\alpha^*(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i - \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(E_n) + H_\alpha^*(\varnothing) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(E_n). \end{aligned}$$

另一方面,根据命题 1 (iii) 有

$$H_\alpha^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(E_n).$$

因此

$H_\alpha^*(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} H_\alpha^*(E_n)$,即 H_α^* 具有可数可加性,从而是 $\mathscr{R}_\alpha^*$ 上的一个测度.

(3) 设 $F \subset \mathbf{R}^1$, $E = [a,b]$, $-\infty < a < b < +\infty$,由命题 1 (iii) 知

$$H_\alpha^*(F) \leqslant H_\alpha^*(F\cap E) + H_\alpha^*(F-E).$$

再证相反的不等式. 如果 $H_\alpha^*(F) = +\infty$,显然有

$$H_\alpha^*(E) = +\infty \geqslant H_\alpha^*(F\cap E) + H_\alpha^*(F-E);$$

如果 $\lim\limits_{\delta\to0^+} H_{\alpha,\delta}^*(F) = H_\alpha^*(F) < +\infty$,则对 $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$,根据 $H_{\alpha,\delta}^*(F)$ 的定义,必有开区间 I_k,使 $|I_k| < \delta$, $F \subset \bigcup_{k=1}^{m} I_k$, $1 \leqslant m \leqslant +\infty$,且

$$H_{\alpha,\delta}^*(F) + \varepsilon > \sum_{k=1}^{\infty} |I_k|^\alpha.$$

设 J_k 为对 I_k 增加右端点后的左开右闭区间,则 $F \subset \bigcup_{k=1}^{m} J_k$. 而且不妨设 J_i 不包含在其他若干 J_k 的并中(否则,删去 J_i). 由 $\{J_k\}$ 必可构造新的彼此不相交的左开右闭的区间 D_k,使 $|D_k| < \delta$ 和 $F \subset \bigcup_{k=1}^{m} D_k$. 再取开区间 $L_k \supset D_k$,使 $|L_k| < \delta$,且

$$\begin{aligned} H_{\alpha,\delta}^*(F) + \varepsilon &> \sum_{k=1}^{m} |I_k|^\alpha \geqslant \sum_{k=1}^{m} |D_k|^\alpha \\ &\geqslant \sum_{k=1}^{m} |D_k|^\alpha - \varepsilon \\ &\geqslant H_{\alpha,\delta}^*(F\cap E) + H_{\alpha,\delta}^*(F-E) - 2\delta - \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\delta \to 0^+$ 得到

$$H_\alpha^*(F) - \varepsilon \geqslant H_\alpha^*(F\cap E) + H_\alpha^*(F-E) - \varepsilon.$$

再令 $\varepsilon \to 0^+$,就有

$$H_\alpha^*(F) \geqslant H_\alpha^*(F\cap E) + H_\alpha^*(F-E).$$

综合上述,得到

$$H_\alpha^*(F) = H_\alpha^*(F\cap E) + H_\alpha^*(F-E).$$

这就证明了 $E \in \mathscr{R}_\alpha^*$. 再根据命题 5, $\mathscr{R}_\alpha^*$ 为 σ 环,于是, $S(\mathscr{R}_0) \subset \mathscr{R}_\alpha^*$.

7.2.40 设 $E \subset \mathbf{R}^1$,称

$$d_H(E) = \inf\{\alpha \mid H_\alpha^*(E) = 0, \alpha > 0\}$$

为 E 的 Hausdorff 维数.

(1) 如果对任何 $\alpha > 0$, $H_\alpha^*(E) = 0$(例如:E 为至多可数集),则 $d_H(E) = 0$.

(2) 如果存在 $\beta > 0$,使 $H_\beta^*(E) > 0$,则 $0 < \beta \leqslant 1$,且 $0 < d_H(E) \leqslant 1$ 和

$$H_\alpha^*(E) = \begin{cases} +\infty, \text{当 } 0 < \alpha < d_H(E), \\ 0, \text{当 } \alpha > d_H(E). \end{cases}$$

(3) 如果 E 的 Lebesgue 外测度 $m^*(E) > 0$,则 $d_H(E) = 1$. 特别,当 I 为非退化区间(包括 $I = \mathbf{R}^1$)时,

$$H_\alpha^*(I) = \begin{cases} +\infty, \text{当 } 0 < \alpha < 1, \\ |I|, \text{当 } \alpha = 1, \\ 0, \text{当 } \alpha > 1, \end{cases}$$

$d_H(I) = 1$.

(4) 如果 $d_H(E) < 1$,则 $m^*(E) = 0$.

(5) Lebesgue 测度为零的 Cantor 疏集 C 的 Hausdorff 维数 $d_H(C) = \log2/\log3$. 更一般地,对任何 $0 < d < 1$,令 $\xi = \exp(-\frac{1}{d}\log2)$, $0 < \xi < \frac{1}{2}$,构造 $C_\xi \subset \mathbf{R}^1$,使 $d_H(C_\xi) = d$,此时, $m^*(C_\xi) = 0$,而 $C_{\frac{1}{3}} = C$, $d_H(C_{\frac{1}{3}}) = d_H(C) = \log2/\log3$.

(6) 构造 $E \subset \mathbf{R}^1$,使 $d_H(E) = 1$, $m^*(E) = 0$.

证 (1) 因为对任何 $\alpha > 0$, $H_\alpha^*(E) = 0$,所以

$$d_H(E) = \inf\{\alpha \mid H_\alpha^*(E) = 0, \alpha > 0\} = 0.$$

此外,如果 E 为至多可数集,记 $E = \{a_1, a_2, \cdots\}$,对任何 $\alpha > 0$, $\delta > 0$,取开区间 $I_n = (a_n - \frac{1}{2}(\frac{\delta^\alpha}{2^n})^{\frac{1}{\alpha}}, a_n + \frac{1}{2}(\frac{\delta^\alpha}{2^n})^{\frac{1}{\alpha}})$,则 $|I_n| = (\frac{\delta^\alpha}{2^n})^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \delta$,且

$$\sum_n |I_n|^\alpha = \sum_n [(\frac{\delta^\alpha}{2^n})^{\frac{1}{\alpha}}]^\alpha = \sum_n \frac{\delta^\alpha}{2^n} \leqslant \delta^\alpha,$$

所以, $0 \leqslant H_{\alpha,\delta}^*(E) \leqslant \delta^\alpha$. 再令 $\delta \to 0^+$,就得到

$$H_\alpha^*(E) = \lim_{\delta\to0^+} H_{\alpha,\delta}^*(E) = 0.$$

(2) 根据题 7.2.39 命题 4 后的注,对任何 $\alpha > 1$,

有 $H_\alpha^*(E)=0$，所以 $d_H(E)\leqslant 1$. 由此得到，如果存在 $\beta>0$，使 $H_\beta^*(E)>0$，则必有 $0<\beta\leqslant 1$. 再由题 7.2.39 命题2(2)，对任何 $\alpha<\beta$ 有 $H_\alpha^*(E)=+\infty$. 故

$$0<\beta\leqslant d_H(E)\leqslant 1.$$

如果 $0<\alpha<d_H(E)$，取 α' 使 $\alpha<\alpha'<d_H(E)$，则根据 $d_H(E)$ 的定义有 $H_{\alpha'}^*(E)>0$，由题7.2.39命题2(2)，$H_\alpha^*(E)=+\infty$.

如果 $d_H(E)<\alpha$，必有 $H_\alpha^*(E)=0$.（反证）假设 $H_\alpha^*(E)>0$，则由 $d_H(E)$ 的定义和下确界的意义，有 α_1，使 $d_H(E)<\alpha_1<\alpha$，$H_{\alpha_1}^*(E)=0$；但从题7.2.39命题2(2)，应有 $H_{\alpha_1}^*(E)=+\infty$，矛盾. 综上所述，有

$$H_\alpha^*(E)=\begin{cases}+\infty, 0<\alpha<d_H(E),\\ 0, \quad \alpha>d_H(E).\end{cases}$$

(3) 由题 7.2.39 命题 3 知

$$H_1^*(E)=m^*(E)>0.$$

再由该题的命题2(2)，$H_\alpha^*(E)=+\infty, 0<\alpha<1$. 于是，根据该题命题 4 后的注有

$$H_\alpha^*(E)=\begin{cases}+\infty, 0<\alpha<1,\\ m^*(E)>0, \alpha=1,\\ 0, \alpha>1.\end{cases}$$

由此和 Hausdorff 维数的定义得出

$$d_H(E)=1.$$

(4)（反证）假设 $m^*(E)>0$，则由(3)得到 $d_H(E)=1$，与已知 $d_H(E)<1$ 相矛盾.

(5) 一般地，先从$[0,1]$挖去以$\frac{1}{2}$为中心，长为$1-2\xi$ 的开区间，再从余下的两个区间中各挖去一个以区间中点为中心，长为 $\xi(1-2\xi)$ 的开区间，再从余下的四个区间中，各挖去一个以区间中点为中心，长为 $\xi^2(1-2\xi)$ 的开区间，依次类推，最后得到的集合记为 C_ξ，这里 $0<\xi<\frac{1}{2}$. 显然，

$$m(C_\xi)=(1-2\xi)+\sum_{n=1}^{\infty}2^n\xi^n(1-2\xi)$$
$$=(1-2\xi)\sum_{n=0}^{\infty}(2\xi)^n=(1-2\xi)\frac{1}{1-2\xi}=1,$$

所以 $m(C_\xi)=0$，C_ξ 为Lebesgue零测集，易见 C_ξ 是完全疏集. 记

$$C_1=[0,\xi]\cap C_\xi,\ C_2=[1-\xi,1]\cap C_\xi,$$

则

$$C_1=\xi C_\xi, C_2=(1-\xi)+\xi C_\xi,$$
$$\rho(C_1,C_2)=1-2\xi>0.$$

所以，从 Hausdorff 外测度的平移不变性及题 7.2.39 命题 1(iv) 和 (v) 知，对任何 $\alpha>0$，都有

$$H_\alpha^*(C_1)=H_\alpha^*(C_2), H_\alpha^*(C_1)=\xi^\alpha H_\alpha^*(C_\xi),$$
$$H_\alpha^*(C_\xi)=H_\alpha^*(C_1)+H_\alpha^*(C_2)=2\xi^\alpha H_\alpha^*(C_\xi).$$

因此，或者 $H_\alpha^*(C_\xi)=0$；或者 $H_\alpha^*(C_\xi)=+\infty$；或者 $0<H_\alpha^*(C_\xi)<+\infty$，$\alpha=-\log 2/\log\xi$. 对 $\alpha_0=-\log 2/\log\xi$，下面将证明 $0<H_\alpha^*(C_\xi)<+\infty$. 于是由题 7.2.39 命题 2 得到

$$H_\alpha^*(C_\xi)=\begin{cases}+\infty, 0<\alpha<\alpha_0=-\log 2/\log\xi,\\ 0, \alpha>\alpha_0=-\log 2/\log\xi.\end{cases}$$

这就证明了 $d_H(C_\xi)=\alpha_0=-\log 2/\log\xi=\log 2/\log\exp(-\frac{1}{d}\log 2)=d$.

现在来证 $0<H_{\alpha_0}^*(C_\xi)<+\infty$.

设 $\delta>0$，开区间 $I_i(i=1,2,\cdots)$ 的长度 $|I_i|\leqslant\delta$，$C_\xi\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$. 令

$$I_i^1=\xi I_i, I_i^2=(1-\xi)+\xi I_i, i=1,2,\cdots,$$

则 $C_1\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^1$，$C_2\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i^2$，$|I_i^1|\leqslant\xi\delta$，$|I_i^2|\leqslant\xi\delta$，$i=1,2,\cdots$. 于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^1|^{\alpha_0}\geqslant H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_1),$$
$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^2|^{\alpha_0}\geqslant H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_2).$$

再由 $2\xi^{\alpha_0}=1$ 得

$$|I_i^1|^{\alpha_0}+|I_i^2|^{\alpha_0}=2\xi^{\alpha_0}|I_i|^{\alpha_0}$$
$$=|I_i|^{\alpha_0}, i=1,2,\cdots$$

和

$$\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|^{\alpha_0}=\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^1|^{\alpha_0}+\sum_{i=1}^{\infty}|I_i^2|^{\alpha_0}$$
$$\geqslant H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_1)+H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_2)$$
$$=2H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_1)=2\xi^{\alpha_0}H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi)$$
$$=H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi).$$

从而 $H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)\geqslant H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi)$. 但由 $H_{\alpha,\delta}^*$ 的定义，当 $\delta>0$ 减小时，它是 δ 的增函数，所以 $H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi)\geqslant H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)\geqslant H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi)$，从而 $H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)=H_{\alpha_0,\xi\delta}^*(C_\xi)$. 注意到 $\delta>0$ 是任意的，且 $H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)$ 作为 δ 的函数的单调性立知 $H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)$ 实际上与 δ 无关. 因此

$$H_{\alpha_0}^*(C_\xi)=\lim_{\delta\to 0^+}H_{\alpha_0,\delta}^*(C_\xi)=\lim_{\delta\to 0^+}H_{\alpha_0,2}^*(C_\xi)$$
$$=H_{\alpha_0,2}^*(C_\xi)\leqslant H_{\alpha_0,2}^*([0,1])\leqslant 1<+\infty.$$

为了证明 $H_{\alpha_0}^*(C_\xi)>0$，取 δ_0 使 $0<\delta_0<\xi$，设 $\{I_i\}$ 为 C_ξ 的任何至多可数的开区间覆盖，$|I_i|\leqslant\delta_0$，$i=1,2,\cdots$. 因为 C_ξ 为紧致集（有界闭集），由 Borel 有限覆盖定理，总可以从 $\{I_i\}$ 中选出有限多个开区间 $J_1,\cdots,J_m$，使 $C_\xi\subset\bigcup_{j=1}^{m}J_j$. 如果能证明 $\sum_{j=1}^{m}|J_j|^{\alpha_0}\geqslant$

ξ^{α_0}，则由定义知

$$\sum_i |I_i|^{\alpha_0} \geqslant \sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0} \geqslant \xi^{\alpha_0},$$

$$H_{\alpha_0}^*(C_\xi) \geqslant H_{\alpha_0,\delta_0}^*(C_\xi) \geqslant \xi^{\alpha_0} > 0.$$

下面就证明

$$\sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0} \geqslant \xi^{\alpha_0}.$$

令 $l_0 = \min\{|J_j| \mid j = 1,2,\cdots,m\}$，则 $0 < l_0 \leqslant \delta_0 < 1-2\xi$. 因为 $\rho(C_1,C_2) = 1-2\xi > \delta_0$，而 $|J_j| \leqslant \delta_0, j = 1,\cdots,m$，所以可把 $\{J_j\}_{j=1}^m$ 分成两组 $\{J_{i,1}\}_{i=1}^{m_1}$ 和 $\{J_{i,2}\}_{i=1}^{m_2}$，$m_1 + m_2 = m$，使它们分别覆盖 C_1 和 C_2. 此时，

$$\sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0} = \sum_{i=1}^{m_1} |J_{i,1}|^{\alpha_0} + \bigcup_{i=1}^{m_2} |J_{i,2}|^{\alpha_0}.$$

如果 $\sum_{i=1}^{m_1} |J_{i,1}|^{\alpha_0} \leqslant \bigcup_{i=1}^{m_2} |J_{i,2}|^{\alpha_0}$，则令

$$J_i' = \frac{1}{\xi}J_{i,1}, i = 1,2,\cdots,m', m' = m_1;$$

否则令

$$J_i' = \frac{1}{\xi}(J_{i,2} - (1-\xi)), i = 1,2,\cdots,m', m' = m_2$$

注意到 $C_1 = \xi C_\xi, C_2 = (1-\xi) + \xi C_\xi$，便知 $\{J_i'\}_{i=1}^{m'}$ 是 C_ξ 的一个新的开覆盖，并且由 $(\frac{1}{\xi})^{\alpha_0} = 2$ 得

$$\sum_{i=1}^{m'} |J_i'|^{\alpha_0} = (\frac{1}{\xi})^{\alpha_0} \sum_{i=1}^{m_1} |J_{i,1}|^{\alpha_0} \leqslant \sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0}$$

或

$$(\frac{1}{\xi})^{\alpha_0} \sum_{i=1}^{m_2} |J_{i,2}|^{\alpha_0} \leqslant \sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0}.$$

如果 $l_1 = \min\{|J_j'| \mid j = 1,2,\cdots,m'\} \geqslant \xi$，则 $\sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0} \geqslant \sum_{i=1}^{m'} |J_i'|^{\alpha_0} \geqslant \xi^{\alpha_0}$，证明已完成. 如果 $0 < l_1 < \xi$，则以 $\{J_i'\}_{i=1}^{m'}$ 代替原来的 $\{J_j\}_{j=1}^{m}$，重复同样的作法，得到 C_ξ 的一个新的有限开覆盖 $\{J_j''\}_{j=1}^{m''}$，使 $\sum_{j=1}^{m''} |J_j''|^{\alpha_0} \leqslant \sum_{i=1}^{m'} |J_i'|^{\alpha_0} \leqslant \sum_{j=1}^{m} |J_j|^{\alpha_0}$. 如果 $l_2 = \min\{|J_j''| \mid j = 1,2,\cdots,m''\} \geqslant \xi$，则证明已完成. 否则还可重复上述步骤. 因为 $l_1 \geqslant \frac{1}{\xi}l_0, l_2 \geqslant \frac{1}{\xi}l_1 \geqslant (\frac{1}{\xi})^2 l_0, \cdots$，所以上述作法在重复 n 次以后恰有 $l_n \geqslant (\frac{1}{\xi})^n l_0 \geqslant \xi$，从而证明了 $H_{\alpha_0}^*(C_\xi) > 0$.

(6) 根据(5)可构造 $E_n \subset [0,1]$，使 $d_H(E_n) = 1 - \frac{1}{n+1}, n = 1,2,\cdots$，此时，$m^*(E_n) = 0$. 令 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$，显然，$m^*(E) = 0$，且当 $0 < \alpha < 1$ 时，存在 $n \in \mathbf{N}$，使 $0 < \alpha < 1 - \frac{1}{n+1} = d_H(E_n)$，故

$$H_\alpha^*(E) \geqslant H_\alpha^*(E_n) = +\infty,$$

$$H_\alpha^*(E) = +\infty,$$

$$H_\alpha^*(E) = \begin{cases} +\infty, 0 < \alpha < 1, \\ 0, \quad \alpha > 1. \end{cases}$$

从而 $d_H(E) = 1$.

注 虽然都是 Lebesgue 零测集，但却可有不同的 Hausdorff 维数，所以可用 Hausdorff 维数来对 Lebesgue 零测集作进一步分类，从而常常使对几乎处处成立的现象的研究得以深化.

以上对 $\mathbf{R}^1$ 中子集的 Hausdorff 外测度和 Hausdorff 维数的讨论，可以推广到 $\mathbf{R}^n$ 中，只须对 $E \subset \mathbf{R}^n, \alpha > 0$，定义 E 的 α 维 Hausdorff 外测度为

$$H_\alpha^*(E) = \lim_{\delta \to 0^+} H_{\alpha,\delta}^*(E)$$

$$= \lim_{\delta \to 0^+} \inf\{\sum_{k=1}^{m} |B_k|^\alpha \mid B_k \text{ 为开球体 } \operatorname{diam}|B_k| \leqslant \delta,$$

$$E \subset \bigcup_{k=1}^{m} B_k, 1 \leqslant m \leqslant +\infty\},$$

其中 $|B_k| = \operatorname{vol}B_k$ 为开球 B_k 的 k 维体积. 这种高维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中的 Hausdorff 外测度对研究 $\mathbf{R}^n$ 中的低维子集常常是有用的.

§7.3 实函数的构造及其重要性质

$\mathbf{R}^1$ 上的连续函数全体记为 $C^0(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$；具有 r 阶连续导数的函数的全体记为 $C^r(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$；具有各阶连续导数的函数的全体记为 $C^\infty(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$；解析函数(在每一点的某开邻域中可展开为收敛的幂级数)的全体记为 $C^\omega(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$. 容易看出 $C^0(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1) \supset C^1(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1) \supset \cdots \supset C^\infty(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1) \supset C^\omega(\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^1)$. 也就是，在这一类函数中，以连续函数为最差而解析函数最佳. 值得注意的是，可以构造 C^r 函数但不是 C^{r+1} 的函数；是 C^∞ 函数但不是 C^ω 的函数. 以上所述的是一类极其重要的实函数.

众所周知，f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上有界且关于 Lebesgue 测度几乎处处连续. 此外，Riemann 可积的函数一定是 Lebesgue 可积的函数，且

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

还有一类重要的实函数. 大家知道，全(绝对)连续函数(对任何 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，当 $[a,b]$ 中任何有

限个两两不重叠的区间$(a_1,b_1),\cdots,(a_n,b_n)$，$\sum_{i=1}^{n}(b_i-a_i)<\delta$必有$\sum_{k=1}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$）一定是有界变差函数（$\bigvee_a^b(f)=\sup\{V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|\mid a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}<+\infty$），而有界变差函数等价于它可表示为两个单调增函数之差. 特别地，单调函数必为有界变差函数. 可以证明，$[a,b]$上的任何单调函数必(关于 Lebesgue 测度)是几乎处处可导的，其导数$f'(x)$是 Lebesgue 可测的，且

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a).$$

并可举出上述等号不成立的例子(参阅题 7.3.43).

此外，Newton-Leibniz 公式

$$\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t=f(x)-f(a)$$

成立的充分必要条件是f为全连续函数.

7.3.1 在区间$[0,1]$上定义函数$f(x)$如下：任取$x\in[0,1]$，x有小数表示$x=0.n_1n_2n_3\cdots$（0.2 不取 $0.1\dot{9}$ 表示，只用 0.2 表示），定义

$$f(x)=\begin{cases}\max\limits_{1\leqslant i<+\infty}n_i, & x=0.n_1n_2n_3\cdots,\\ 1, & x=1.\end{cases}$$

试证：$f(x)$为$[0,1]$上的 Lebesgue 可测函数.

证 因为

$$\begin{aligned}&m(\{x\in[0,1]\mid f(x)=9\})\\ &=\frac{1}{10}+9\cdot\frac{1}{10^2}+9^2\cdot\frac{1}{10^3}+\cdots\\ &=\frac{1}{10}\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\cdots\right]\\ &=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{9}{10}}=1,\end{aligned}$$

所以

$$m(\{x\in[0,1]\mid a\leqslant f(x)<b\})=\begin{cases}1, & 9\in[a,b),\\ 0, & 9\overline{\in}[a,b).\end{cases}$$

这就证明了$\{x\in[0,1]\mid a\leqslant f(x)<b\}$为 Lebesgue 可测集，$f$为 Lebesgue 可测函数.

7.3.2 设$E_1,\cdots,E_n$为$[0,1]$上的n个 Lebesgue 可测集. 如果$[0,1]$中的每个点至少属于上述n个集合中的q个集合，则$E_1,\cdots,E_n$中至少有一个集合具有测度大于等于$\frac{q}{n}$.

证 对任何$x\in[0,1]$，由于它至少属于q个E_k，则

$$\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)\geqslant q,$$

其中χ_{E_k}为E_k的特征函数. 从而

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}m(E_k)&=\sum_{k=1}^{n}\int_0^1\chi_{E_k}(x)\mathrm{d}x\\ &=\int_0^1\left[\sum_{k=1}^{n}\chi_{E_k}(x)\right]\mathrm{d}x\\ &\geqslant\int_0^1 q\mathrm{d}x=q.\end{aligned}$$

由此并应用反证法立即知，E_k中至少有一个测度大于等于$\frac{q}{n}$.

7.3.3 设f在$[a,b]$上为 Lebesgue 可积函数，$f(x)>0$，且对$0<q\leqslant b-a$，令

$$S=\{e\subset[a,b]\mid m(e)\geqslant q\}.$$

则$\inf\limits_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}>0$.

证法 1 因为$f(x)>0$，$x\in[a,b]$，则必有$\inf\limits_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}\geqslant 0$.（反证）如果$\inf\limits_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}=0$，则对任何$k\in\mathbf{Z}^+$（正整数集），存在$e_k\in S$使得

$$\int_{e_k}f(x)\mathrm{d}x<\frac{1}{2^k}.$$

令$E=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}e_k$，由$m(e_k)\geqslant q$可知$m\left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}e_k\right)\geqslant m(e_n)\geqslant q$，且

$$m(E)=\lim_{n\to+\infty}m\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}e_k\right)\geqslant q>0.$$

又对任何$n\in\mathbf{Z}^+$，有

$$\begin{aligned}0&\leqslant\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_{\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}e_k}f(x)\mathrm{d}x\\ &\leqslant\sum_{k=n}^{\infty}\int_{e_k}f(x)\mathrm{d}x<\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=0,\quad f(x)\underset{m}{=}0\ (\text{在 }E\text{ 上}),$$

这与f恒为正相矛盾. 因此就说明了

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\}>0.$$

证法 2 因为$f\in L[a,b]$，故f在$[a,b]$上为几乎处处有限的 Lebesgue 可测函数. 由 Лузин 定理，存在闭集$F\subset[a,b]$，使$m(F^c)=m([a,b]-F)<\frac{q}{2}$，$f$在$F$上连续. 由$F$为紧致集知，存在$x_0\in F$，使

$$f(x)\geqslant f(x_0)=\inf_{y\in F}f(y)>0,\quad x\in F.$$

所以，对任何$e\in S$，有

$$\begin{aligned}m(e\cap F)&=m(e)-m(e\cap F^c)\\ &\geqslant m(e)-m(F^c)>q-\frac{q}{2}=\frac{q}{2},\end{aligned}$$

$$\int_e f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{e\cap F} f(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_{e\cap F} f(x_0)\mathrm{d}x$$

$$= f(x_0)m(e\cap F) > f(x_0)\frac{a}{2}.$$

从而

$$\inf_{e\in S}\left\{\int_e f(x)\mathrm{d}x\right\} \geqslant f(x_0)\frac{a}{2} > 0.$$

7.3.4　设 $f(t)$ 是在 $E=[a,b]$ 上所定义的几乎处处有限的 Lebesgue 可测函数. 则 $[a,b]$ 上有如下单调减函数 $g(t)$, 关系 $m(E(g>x)) = m(E(f>x))$ 对于任何实数 x 成立.

证　令 $F(x) = m(E(f(t)>x))$, 则 $F(x)$ 具有下述性质:

(1) $F(-\infty) = b-a, F(+\infty) = 0, 0\leqslant F(x) \leqslant b-a$;

(2) $F(x)$ 为单调减函数;

(3) $F(x)$ 是右连续的.

(1)、(2) 显然. 现验证(3). 对任何 $x_0\in\mathbf{R}$ 及实数列 $x_n > x_0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$, 就有

$$E(f(t)>x_0)$$
$$= E(f(t)>x_n)\cup E(x_n\geqslant f(t)>x_0),$$

但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E(x_n\geqslant f(t)>x_0) = \varnothing$, 所以

$$\lim_{n\to+\infty}[F(x_n) - F(x_0)]$$
$$= \lim_{n\to+\infty} m(E(x_n\geqslant f(t)>x_0)) = 0,$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty} F(x_n) - F(x_0)$, 这就证明了 $F(x)$ 是右连续的.

$$a\leqslant F(x)+a\leqslant (b-a)+a = b,$$
$$x\in(-\infty,+\infty),$$

且 $F(x)+a$ 为单调减和右连续的函数. 令

$$g(t) = \sup\{x \mid F(x)+a>t\}, a\leqslant t\leqslant b.$$

设 $t\in(a,b)$, 由 $\lim\limits_{n\to-\infty}(F(x)+a) = b, b-t>0$, 所以, 存在 x_0, 当 $x<x_0$ 时, 有

$$b-(F(x)+a) < b-t,$$

即 $F(x)+a>t$, 于是 $\{x\mid F(x)+a>t\}\neq\varnothing$.

其次, 由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}(F(x)+a) = 0+a = a, t-a > 0$, 所以存在 x_1, 当 $x>x_1$ 时,

$$F(x)+a-a < t-a,\ F(x)+a<t.$$

由此可知, 若 $F(x)+a>t$, 必有 $x\leqslant x_1$. 于是 $g(t)$ 定义确切, 且

$$g(t) = \sup\{x\mid F(x)+a>t\}\leqslant x_1 < +\infty.$$

再证 $g(t)$ 为单调减的函数. 事实上, 如果 $t_1 < t_2$, 则

$$\{x\mid F(x)+a>t_1\}\supset\{x\mid F(x)+a>t_2\},$$
$$g(t_1) = \sup\{x\mid F(x)+a>t_1\}$$
$$\geqslant \sup\{x\mid F(x)+a>t_2\} = g(t_2).$$

最后可证 $\{t\mid g(t)>x\} = [a, F(x)+a]$, 于是

$$m(g>x) = m(t\mid\{g(t)>x\})$$
$$= m([a,F(x)+a]) = F(x)$$
$$= m(E(f(t)>x)).$$

事实上, 若 $t_0\in[a,F(x)+a)$, 则 $t_0<F(x)+a$. 由 $F(x)$ 是右连续的, 所以必有 $x_1>x$, 使得 $F(x_1)+a>t_0$,

$$g(t_0) = \sup\{x\mid F(x)+a>t_0\}\geqslant x_1 > x,$$

这就证明了 $t_0\in\{t\mid g(t)>x\}$ 和 $[a,F(x)+a)\subset\{t\mid g(t)>x\}$.

反之, 若 $t_0\in\{t\mid g(t)>x\}$, 则

$$\sup\{x'\mid F(x')+a>t_0\} = g(t_0) > x.$$

从而存在 $x_1, x<x_1<g(t_0)$, 使得

$$F(x_1)+a>t_0.$$

但由 $F(x)$ 单调减和 $x<x_1$, 就有

$$a\leqslant t_0 < F(x_1)+a\leqslant F(x)+a,$$

即 $t_0\in[a,F(x)+a)$. 由此得到 $\{t\mid g(t)>x\}\subset[a,F(x)+a)$, $\{t\mid g(t)>x\} = [a,F(x)+a)$.

7.3.5　设 f 为 E 上的非负函数, μ 为 E 上的测度, 则

(1) f 关于测度 μ 为可积函数 $\Leftrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\mu(E(n\leqslant f<n+1)) < +\infty$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\mu(E(f\geqslant n)) < +\infty \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\cdot\mu(E(n\leqslant f<n+1)) < +\infty$.

但反之不真.

证　(1) 因为 $E(n\leqslant f<n+1), n = 0,1,2,\cdots$ 互不相交, 且

$$n\mu(E(n\leqslant f<n+1))\leqslant\int_{E(n\leqslant f<n+1)} f\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant (n+1)\mu(E(n\leqslant f<n+1)),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E(n\leqslant f<n+1))\leqslant\int_E f\mathrm{d}\mu$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E(n\leqslant f<n+1)) + \mu(E).$$

这就蕴涵着 $\int_E f\mathrm{d}\mu < +\infty$ (即 f 关于 μ 可积) $\Leftrightarrow$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu(E(n\leqslant f<n+1)) < +\infty$.

(2) $(\Rightarrow)$ $+\infty > \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mu(E(f\geqslant n))$

$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(E(n\leqslant f<n+1)).$$

反例: 设 $E = (0,1], \mu = m$ (Lebesgue 测度),

$$f(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x = 0.\end{cases}$$

易知 f 非负和 Lebesgue 可测，且由

$$[f(x)]_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, \frac{1}{n^2} \leqslant x < 1, \\ n, \quad 0 < x < \frac{1}{n^2}, \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 [f(x)]_n \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\int_0^{\frac{1}{n^2}} n\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{1}{n^2}\cdot n + 2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right] = 2 < +\infty.$$

所以 f 在$(0,1]$ 上 Lebesgue 可积，但

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot m(E(f \geqslant n)) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = +\infty.$$

7.3.6　设 f 在$[a,b+\delta](\delta>0)$ 上 Lebesgue 可积，则

$$\lim_{h\to0^+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

证　对任何 $\varepsilon>0$，因 $f\in L[a,b+\varepsilon]$，则由 Лузин 定理，存在 $\varphi\in C^{0}[a,b+\delta]$，使

$$\int_a^{b+\delta} |f(x)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{3}.$$

又由 φ 在$[a,b+\delta]$上一致连续知，存在 $0<\eta\leqslant\delta$，当 $0<h<\eta$ 时，对一切 $x\in[a,b]$，恒有

$$|\varphi(x+h)-\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{3(b-a)}.$$

所以

$$0\leqslant\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\int_a^b |f(x+h)-\varphi(x+h)|\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$+\int_a^b |\varphi(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

$$\lim_{h\to0^+}\int_a^b |f(x+h)-f(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$$

7.3.7　设 $f(x)$ 是在$[a,b]$上定义的 Lebesgue 可积函数，即 $f\in L[a,b]$. 如果对任何 $c\in[a,b]$ 有 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f\sim0$，即 $f \underset{m}{=} 0$.

证法 1　根据题设，对任何$(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，恒有 $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x = \int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x - \int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x = 0-0=0.$ 因 $f\in L[a,b]$，由积分的绝对连续性，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对任何 $e\subset[a,b]$，当 $me<\delta$ 时，有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

对任何可测集 $A\subset(a,b)$，存在开集 G，使 $A\subset G\subset(a,b)$，且 $m(G-A)<\delta$. 从而

$$\left|\int_{G-A} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

设 $G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)$，其中$(\alpha_i,\beta_i)$为开集 G 的构成区间. 则

$$\int_G f(x)\mathrm{d}x = \sum_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i} f(x)\mathrm{d}x = \sum_i 0 = 0.$$

于是

$$\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_G f(x)\mathrm{d}x - \int_{G-A} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$= \left|0-\int_{G-A} f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_{G-A} f(x)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$，得到

$$\int_A f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

特别地，对 E 为$[a,b]$中的 Lebesgue 可测集 $E(f>0)$ 和 $E(f<0)$ 有 $\int_{E(f>0)} f(x)\mathrm{d}x = 0 = \int_{E(f<0)} f(x)\mathrm{d}x$. 于是

$$m(E(f>0))$$

$$= m(E(f>1)) + \sum_{n=1}^{\infty} m\left(E\left(\frac{1}{n+1}<f\leqslant\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= 0+\sum_{n=1}^{\infty}0 = 0.$$

同理 $m(E(f<0))=0$. 由此得到

$$m(E(f\neq0))$$

$$= m(E(f>0)) + m(E(f<0)) = 0+0=0.$$

即 $f\sim0$.

证法 2　由题 7.3.44 得到

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t \underset{m}{=} f(x).$$

7.3.8　设 $f(x)$ 为$[a,b]$上定义的 Lebesgue 可积函数，又 α 为满足 $0<\alpha<b-a$ 的实常数. 如果对于每个测度为 α 的集合 e，有 $\int_e f(x)\mathrm{d}x = 0$，则 $f(x)\sim 0$.

证　记 $E=[a,b]$，$E_+=E(f>0)$，$E_-=E(f<0)$，易见，$f\sim0 \Leftrightarrow m(E_+)=m(E_-)=0$.

（反证）假设 $f\nsim0$，即 $m(E_+)\neq0$ 或 $m(E_-)\neq0$. 现分三种情形讨论：

(1) $m(E_+)>0$，$m(E_-)=0$，即 f 在 E 上几乎处处非负. 由 $0<\alpha<b-a$，存在 $n\in\mathbf{N}$，使

$$n\alpha < b-a \leqslant (n+1)\alpha.$$

于是，由题设得到

$$0 \leqslant \int_{E_+} f(x)\mathrm{d}x = \int_F f(x)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\int_{a+(k-1)\alpha}^{a+k\alpha} f(x)\mathrm{d}x + \int_{b-\alpha}^{b} f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \sum_{k=1}^{n} 0 + 0 = 0,$$
$$\int_{E_+} f(x)\mathrm{d}x = 0.$$

类似题 7.3.7 的证法，立即有

$$m(E_+) = m(E(f>0)) = 0,$$

这与 $m(E_+) > 0$ 相矛盾.

(2) $m(E_+) = 0, m(E_-) > 0$，即 f 在 E 上几乎处处非正. 考虑 $-f(x)$，并应用(1) 的结果立知此情形也得出矛盾.

(3) $m(E_+) > 0, m(E_-) > 0$.

取正数 μ 满足：

$$0 < \mu < \min\{m(E_+), m(E_-), \alpha, (b-a)-\alpha\}.$$

根据题7.2.30，存在 $E_1 \subset E_+, E_2 \subset E_-$ 使 $m(E_1) = m(E_2) = \mu$. 又由

$$m(E - E_1 - E_2) = (b-a) - \mu - \mu$$
$$> \alpha - \mu > 0$$

可知存在集 $E_3 \subset E - E_1 - E_2$，使 $m(E_3) = \alpha - \mu$. 从而

$$m(E_i \cup E_3) = m(E_i) + m(E_3)$$
$$= \mu + (\alpha - \mu) = \alpha.$$

由题设 $\int_{E_i} f(x)\mathrm{d}x + \int_{E_3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_i\cup E_3} f(x)\mathrm{d}x = 0, i = 1,2$. 由此推出

$$\int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x.$$

再类似于题 7.3.7 的证法得到

$$0 < \int_{E_1} f(x)\mathrm{d}x = \int_{E_2} f(x)\mathrm{d}x > 0.$$

矛盾.

7.3.9 (Baire) 设 $E, E_m \in \mathbf{R}^n, E = \bigcup_{m\in\Gamma} E_m$，其中 Γ 为至多可数集，E_m 的内点集 $\mathring{E}_m = \varnothing$，$E_m$ 为闭集，$m \in \Gamma$，则 $\mathring{E} = \varnothing$.

因此，$\mathbf{R}^n$ 中任何含内点的集合都不能表示成至多可数个无内点的闭集的并.

证 (反证) 假设 $x_0 \in \mathring{E}$，则存在 $\delta_0 > 0$，使闭球 $\overline{B_{x_0}(\delta_0)} \subset E$. 因 $\mathring{E}_1 = \varnothing$，故存在 $x_1 \in B_{x_0}(\delta_0) - E_1$. 又 E_1 为闭集，所以可取 $0 < \delta_1 < 1$，使 $\overline{B_{x_1}(\delta_1)} \cap E_1 = \varnothing, \overline{B_{x_1}(\delta_1)} \subset B_{x_0}(\delta_0)$. 再从 $B_{x_1}(\delta_1)$ 出发，以类似的推理应用于 E_2，则可得

$$\overline{B_{x_2}(\delta_2)} \cap E_2 = \varnothing, \overline{B_2(\delta_2)} \subset B_{x_1}(\delta_1),$$
$$0 < \delta_2 < \frac{1}{2}.$$

如法炮制可得到闭球套，

$$\overline{B_{x_1}(\delta_1)} \supset \overline{B_{x_2}(\delta_2)} \supset \cdots, 0 < \delta_m < \frac{1}{m}.$$

根据闭球套原理，存在唯一的 $\xi \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{B_{x_m}(\delta_m)} \subset E$. 这与造法显然有 $\xi \overline{\in} \bigcup_{m=1}^{\infty} E_m = E$ 相矛盾(如果 Γ 为有限集，其元素个数为 k，则 $E_m = \varnothing, m > k$).

7.3.10 有理数集 $\mathbf{Q}$ 不是 G_δ 集.

证 (反证) 令 $\mathbf{Q} = \{r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots\}$. 假设

$$\mathbf{Q} = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n,$$

其中 G_n 为开集. 则

$$\mathbf{R}^1 = (\mathbf{R}^1 - \mathbf{Q}) \cup \mathbf{Q} = (\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n)^c \cup \mathbf{Q}$$
$$= (\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n^c) \cup (\bigcap_{n=1}^{\infty} r_n).$$

这里独点集 $\{r_n\}$ 与 G_n^c 皆为闭集. 而且从 $\overline{G}_n = \mathbf{R}^1$ 可知 G_n^c 都无内点. 于是，$\mathbf{R}^1$ 为可数个无内点之闭集的并集. 从而，由 Baire 定理(题 7.3.9)，$\mathbf{R}^1$ 也无内点，这与 $\mathbf{R}^1$ 显然全为内点相矛盾. 这就证明了 $\mathbf{Q}$ 不是 G_δ 集.

7.3.11 称 $R:[0,1] \to \mathbf{R}$，

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x = \frac{m}{n}, m \text{ 和 } n \text{ 无大于 1 的公因子}, \\ 1, x = 0, \\ 0, x \in [0,1] - \mathbf{Q} \end{cases}$$

为 Riemann 函数. 证明：

(1) $R(x)$ 在所有有理点处不连续，而在所有无理点处连续；

(2) $R(x)$ 在$[0,1]$上是 Riemann 可积的.

证 (1) 设 $x_0 \in [0,1] \cap \mathbf{Q}$，取 $x_n \in [0,1] - \mathbf{Q}$，使 $\lim_{n\to+\infty} x_n = x_0$，则

$$\lim_{n\to+\infty} R(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0 \neq R(x_0),$$

从而 R 在 x_0 不连续. 若 $x_0 \in [0,1] - \mathbf{Q}$，则对任何 $\varepsilon > 0$，取 $0 < \delta < \min\{|\frac{n}{m} - x_0| \mid m = 1,2,\cdots,[\frac{1}{\varepsilon}] + 1, n \text{ 和 } m \text{ 无大于 1 的公因子}\}$，则当 $|x - x_0| < \delta$ 时，有

$$|R(x) - R(x_0)| = |R(x) - 0| = R(x)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{m}, x = \frac{n}{m}, \\ 0, x \in [0,1] - \mathbf{Q} \end{cases} < \frac{1}{[\frac{1}{\varepsilon}] + 1} < \varepsilon.$$

所以，$\lim_{x\to x_0} R(x) = R(x_0)$，即 R 在 x_0 连续.

(2) 对任何 $\varepsilon > 0$，取自然数 $N > \frac{2}{\varepsilon}$，并记 l 为

$\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\cdots,\frac{1}{N},\frac{2}{N},\cdots,\frac{N-1}{N}\}$ 的个数. 取 $0<\delta<\frac{\varepsilon}{2l}$, 则对 $[0,1]$ 的分割: $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=1$, $\max\limits_{1\le i\le n}\Delta x_i<\delta$ 和任何 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i)\Delta x_i-0\right|=\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i)\Delta x_i$$

$$=\sum_{R(\xi_i)<\frac{1}{N}}R(\xi_i)\Delta x_i+\sum_{R(\xi_i)\ge\frac{1}{N}}R(\xi_i)\Delta x_i$$

$$<\frac{1}{N}\cdot 1+1\cdot l\delta=\frac{1}{N}+l\delta<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以, $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上是 Riemann 可积的, 且其 Riemann 积分为 $\int_0^1 R(x)\mathrm{d}x=0$.

7.3.12 证明不存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在所有的有理点连续, 而在所有的无理点不连续.

证法 1 (反证) 假设存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在所有的有理点连续, 而在所有的无理点不连续. 令

$$E_n=\{x\in\mathbf{R}\mid f\text{ 在 }x\text{ 的振幅 }\omega_f(x)\ge\frac{1}{n}\}$$

显然, E_n 为闭集且 $E_n\subset\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 无内点. 另一方面, 设可数集 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$, 则独点集 $\{r_n\}$ 也是无内点的闭集. 于是

$$\mathbf{R}=\mathbf{Q}\cup(\mathbf{R}-\mathbf{Q})=(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\})\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n).$$

根据 Baire 定理(题 7.3.9), $\mathbf{R}$ 无内点. 但显然 $\mathbf{R}$ 中任一点都是内点, 矛盾.

证法 2 (反证) 假设存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在所有的有理点连续, 而在所有的无理点不连续. 设 $\mathbf{Q}=\{r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots\}$; 取 $r_1^*\in\mathbf{Q}-\{r_1\}$, 因 f 在 r_1^* 连续, 故存在 $\delta_1>0$, 使得 $r_1\overline{\in}[r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1]$, $2\delta_1<\frac{1}{2}$, 且有

$$|f(x)-f(r_1^*)|<\frac{1}{2},x\in[r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1].$$

再取 $r_2^*\in(r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1)\cap(\mathbf{Q}-\{r_1,r_2,r_1^*\})$. 由 f 在 r_2^* 连续, 存在 $\delta_2>0$, 使 $r_1,r_2,r_1^*\overline{\in}[r_2^*-\delta_2,r_2^*+\delta_2]\subset(r_1^*-\delta_1,r_1^*+\delta_1)$, $2\delta_2<\frac{1}{2^2}$, 且有

$$|f(x)-f(r_2^*)|<\frac{1}{2^2},x\in[r_2^*-\delta_2,r_2^*+\delta_2].$$

如此继续下去, 可取

$$r_n^*\in(r_{n-1}^*-\delta_{n-1},r_{n-1}^*+\delta_{n-1})\cap(\mathbf{Q}-\{r_1,\cdots,r_n,r_1^*,\cdots,r_{n-1}^*\}).$$

再由 f 在 r_n^* 连续, 存在 $\delta_n>0$, 使得

$$r_1,\cdots,r_n,r_1^*,\cdots,r_{n-1}^*\overline{\in}[r_n^*-\delta_n,r_n^*+\delta_n]\subset(r_{n-1}^*-\delta_{n-1},r_{n-1}^*+\delta_{n-1}),2\delta_n<\frac{1}{2^n},$$

且有

$$|f(x)-f(r_n^*)|<\frac{1}{2^n},x\in[r_n^*-\delta_n,r_n^*+\delta_n].$$

根据闭区间套原理, 存在唯一的 $x_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[r_n^*-\delta_n,r_n^*+\delta_n]$. 易证 x_0 为无理点, $\omega_f(x_0)=0$, 即 f 在无理点 x_0 连续. 这与假设矛盾.

证法 3 (反证) 假设存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 在所有有理点连续, 而在所有无理点不连续. 任取无理数 r, 令

$$g(x)=f(x+r),\ r\in\mathbf{R}.$$

先选 $r_1\in\mathbf{Q}$, 由 f 在 r_1 连续, 存在 $0<\delta_1<1$, 使 f 在开区间 $(r_1-\delta_1,r_1+\delta_1)$ 上的振幅 $\omega_f(r_1,\delta_1)<1$; 选 $y_1\in(r_1+r-\delta_1,r_1+r+\delta_1)\cap\mathbf{Q}$, 即 $x_1=y_1-r\in(r_1-\delta_1,r_1+\delta_1)$, 且 $g(x)=f(x+r)$ 在 x_1(即 f 在 $y_1=x_1+r_1$) 连续, 故存在 $0<\eta_1<1$, 使得 $[a_1,b_1]=[x_1-\eta_1,x_1+\eta_1]\subset(r_1-\delta_1,r_1+\delta_1)$. 当然 $\omega_g(x_1,\eta_1)<1$. 再选 $r_2\in(a_1,b_1)\cap\mathbf{Q}$, 由 f 在 r_2 连续, 存在 $0<\delta_2<\frac{1}{2}$, 使 f 在开区间 $(r_2-\delta_2,r_2+\delta_2)$ 上的振幅 $\omega_f(r_2,\delta_2)<\frac{1}{2}$. 再选 $y_2\in(r_2+r-\delta_2,r_2+r+\delta_2)\cap\mathbf{Q}$, 即 $x_2=y_2-r\in(r_2-\delta_2,r_2+\delta_2)$, 且 $g(x)=f(x+r)$ 在 x_2(即 f 在 $y_2=x_2+r$) 连续, 故存在 $0<\eta_2<\frac{1}{2}$, 使得 $[a_2,b_2]=[x_2-\eta_2,x_2+\eta_2]\subset(r_2-\delta_2,r_2+\delta_2)$. 当然, $\omega_g(x_2,\eta_2)<\frac{1}{2}$. 依次类推得到一个递降的闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

$$b_n-a_n=2\eta_n<\frac{1}{2^{n-2}},\lim_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0.$$

根据闭区间套原理, 存在唯一的 $\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$. 显然, $\omega_f(\xi)=0$, $\omega_g(\xi)=0$, 即 ξ 为 f 和 g 的公共连续点. 因此, f 在 ξ 和 $\xi+r$ 都连续. 但显然 ξ 和 $\xi+r$ 中至少有一个为无理点. 这与 f 在无理点处不连续相矛盾.

7.3.13 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为实函数, $x_0\in[a,b]$, $\delta>0$,

$$m_\delta(x_0)=\inf\{f(x)\mid x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]\},$$

$$M_\delta(x_0)=\sup\{f(x)\mid x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\cap[a,b]\}.$$

显然, 当 $\delta\to0^+$ 时, $m_\delta(x_0)$ 不减, $M_\delta(x_0)$ 不增, 因此有如下的极限

$$m(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}m_\delta(x_0),M(x_0)=\lim_{\delta\to0^+}M_\delta(x_0)$$

(分别称为 Baire 下函数和 Baire 上函数), 且

$$m_\delta(x_0)\le m(x_0)\le f(x_0)\le M(x_0)\le M_\delta(x_0).$$

(1) (Baire) f 在 x_0 连续 $\Leftrightarrow m(x_0)=M(x_0)$.

(2) 设 $\pi_i: a=x_0^i<x_1^i<\cdots<x_{n_i}^i=b, i=1,2,\cdots$ 为 $[a,b]$ 的一系列分割，且

$$\lim_{i\to+\infty}\|\pi_i\|=\lim_{i\to+\infty}\max_{0\leqslant k\leqslant n_i-1}|x_{k+1}^{(i)}-x_k^{(i)}|=0.$$

作函数

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}m_k^{(i)}=\inf f([x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}]), & x\in(x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}),\\ 0, & x=x_0^{(i)},x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}.\end{cases}$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases}M_k^{(i)}=\sup f([x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}]), & x\in(x_k^{(i)},x_{k+1}^{(i)}),\\ 0, & x=x_0^{(i)},x_1^{(i)},\cdots,x_{n_i}^{(i)}.\end{cases}$$

如果 $x_0\neq x_k^{(i)}, i=1,2,\cdots,k=0,1,2,\cdots,n_i$，则

$$\lim_{i\to+\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0),\quad \lim_{i\to+\infty}\psi_i(x_0)=M(x_0).$$

(3) Baire 函数 $m(x)$ 和 $M(x)$ 是 Lebesgue 可测函数.

(4) 如果 f 是有界的，则

$$\lim_{i\to+\infty}(\mathrm{L})\int_a^b\varphi_i(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b m(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{i\to+\infty}(\mathrm{L})\int_a^b\psi_i(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b M(x)\mathrm{d}x.$$

证 (1) ($\Rightarrow$) 设 f 在 x_0 连续，则对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，即

$$f(x_0)-\varepsilon<f(x)<f(x_0)+\varepsilon.$$

因此

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m_\delta(x_0)\leqslant M_\delta(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

令 $\delta\to0^+$ 得到

$$f(x_0)-\varepsilon\leqslant m(x_0)\leqslant M(x_0)\leqslant f(x_0)+\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$ 立得

$$m(x_0)=M(x_0)=f(x_0).$$

($\Leftarrow$) 如果 $m(x_0)=M(x_0)$，则由 $m(x_0)\leqslant f(x_0)\leqslant M(x_0)$ 知

$$m(x_0)=M(x_0)=f(x_0).$$

对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 $x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 有

$$f(x_0)-\varepsilon=m(x_0)-\varepsilon<m_\delta(x_0)\leqslant f(x)$$
$$\leqslant M_\delta(x_0)<M_\delta(x_0)+\varepsilon=f(x_0)+\varepsilon,$$

即 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

因此，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，$f$ 在 x_0 连续.

(2) 固定 i，设包含 x_0 的小线节为 $[x_{k_i}^{(i)},x_{k_i+1}^{(i)}]$. 由于 x_0 不是分点，所以

$$x_{k_i}^{(i)}<x_0<x_{k_i+1}^{(i)}.$$

因此，可取充分小的正数 δ，使

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)\subset[x_{k_i}^{(i)},x_{k_i+1}^{(i)}].$$

从而

$$\varphi_i(x_0)=m_{k_i}^{(i)}\leqslant m_\delta(x_0),$$

$$\varphi_i(x_0)\leqslant\lim_{\delta\to0^+}m_\delta(x_0)=m(x_0).$$

如果 $m(x_0)=-\infty$，则 $\varphi_i(x_0)=-\infty$，从而 $\lim\limits_{i\to+\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0)$；如果 $m(x_0)>-\infty$，则取 $h<m(x_0)$，则存在 $\delta>0$，使 $m_\delta(x_0)>h$. 固定 δ，由于 $\lim\limits_{i\to+\infty}\lambda_i=0$，取 i_0 充分大，使当 $i>i_0$ 时，x_0 的区间

$$[x_{k_i}^{(i)},x_{k_i+1}^{(i)}]\subset(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

此时，$m(x_0)\geqslant\varphi_i(x_0)=m_{k_i}^{(i)}\geqslant m_\delta(x_0)>h$. 这就证明了 $\lim\limits_{i\to+\infty}\varphi_i(x_0)=m(x_0)$.

(3) 因为 $\varphi_i(x)$ 为阶梯函数，所以它是 Lebesgue 可测的. 由于分点 $\{x_k^{(i)}\}$ 的全体是一个可数集，其 Lebesgue 测度为 0. 再由(2)知，$\varphi_i(x)$ 关于 Lebesgue 测度几乎处处收敛于 $m(x)$，从而它是 Lebesgue 可测的.

同样，$M(x)$ 也是 Lebesgue 可测的.

(4) 当 $|f(x)|<K, x\in[a,b]$ 时，显然有

$$|\varphi_i(x)|\leqslant K,\ |\psi_i(x)|\leqslant K,$$
$$|m(x)|\leqslant K,\ |M(x)|\leqslant K.$$

因此，$\varphi_i(x),\psi_i(x),m(x)$ 与 $M(x)$ 都是(L)可积函数. 应用 Lebesgue 控制收敛定理就得

$$\lim_{i\to+\infty}(\mathrm{L})\int_a^b\varphi_i(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b m(x)\mathrm{d}x,$$

$$\lim_{i\to+\infty}(\mathrm{L})\int_a^b\psi_i(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b M(x)\mathrm{d}x.$$

7.3.14 (Lebesgue) 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为有界函数，则 f 为(R)可积(Riemann 可积) $\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上关于 Lebesgue 测度是几乎处处连续的.

证法 1 有界函数 f 为(R)可积

$$\Leftrightarrow(\mathrm{L})\int_a^b[M(x)-m(x)]\mathrm{d}x=\lim_{i\to+\infty}(S_i-s_i)=0$$

$\Leftrightarrow$ 非负函数 $M(x)-m(x)\underset{m}{\doteq}0$

$\Leftrightarrow M(x)\underset{m}{\doteq}m(x)$

$\Leftrightarrow f$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续.

证法 2 ($\Rightarrow$) 设 $\omega_\delta(x)=M_\delta(x)-m_\delta(x),\omega(x)=\lim\limits_{\delta\to0^+}\omega_\delta(x),D_\delta=\{x\in[a,b]\mid\omega(x)\geqslant\delta\}$. 则 f 在 $[a,b]$ 上的不连续点的全体为

$$D_{\text{不}}=\bigcup_{n=1}^{\infty}D_{\frac{1}{n}}.$$

如果 f 在 $[a,b]$ 上(R)可积，下面证明 $D_{\frac{1}{n}}$ 为零长度集，从而 $D_{\text{不}}$ 为 Lebesgue 零测集.

考虑 $D_\delta,\delta>0$，对任何 $\varepsilon>0$，因 f 在 $[a,b]$ 上

(R) 可积,故存在$[a,b]$的分割$\pi=\{I_1,\cdots,I_k\}$,其中I_i为小区间,使

$$\sum_{i=1}^{k}[\sup f(I_i)-\inf f(I_i)]m(I_i)<\varepsilon\cdot\frac{\delta}{2}.$$

如果有$x\in D_\delta\cap I_i^\circ$,则

$$\sup f(I_i)-\inf f(I_i)\geqslant\omega(x)\geqslant\delta.$$

因此

$$\sum_{D_\delta\cap I_i^\circ\neq\emptyset}m(I_i)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面,由于I_i的边界点集∂I_i的并集$\bigcup_{i=1}^{k}\partial I_i$为有限集,从而存在闭区间$J_1,\cdots,J_s$,使

$$\bigcup_{i=1}^{k}\partial I_i\subset\bigcup_{j=1}^{s}J_j,\ \sum_{j=1}^{s}m(J_j)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

于是

$$D_\delta\subset\Big(\sum_{D_\delta\cap I_i^\circ\neq\emptyset}I_i\Big)\cup\Big(\bigcup_{j=1}^{s}J_j\Big),$$

且

$$\sum_{D_\delta\cap I_i^\circ\neq\emptyset}m(I_i)+\sum_{j=1}^{s}m(J_j)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

所以,D_δ为零长度集.

($\Leftarrow$) 设$|f(x)|<K$,$x\in[a,b]$.因为$D_{不}$为Lebesgue零测集,故对任何$\varepsilon>0$,存在开区间$\{J_j\mid j=1,2,\cdots\}$,使$D_{不}\subset\bigcup_j J_j$,且$\sum_j m(J_j)<\varepsilon$.

对任何$x\in[a,b]-\bigcup_j J_j$,因f在x连续,故存在含x的开区间S_x,使得当$t\in[a,b]\cap S_x$时,

$$|f(t)-f(x)|<\varepsilon.$$

显然,$\{J_i,S_x\mid i=1,2,\cdots;x\in I-\bigcup_j J_j\}$为紧致集$[a,b]$的一个开覆盖,故存在有限的子覆盖$\{J_1^*,\cdots,J_n^*,S_1,\cdots,S_m\}$.于是,根据Lebesgue数定理,取$[a,b]$的分割$\pi=\{I_1,\cdots,I_k\}$,使得任何$I_i$,有$I_i\subset J_l^*$,$l=1,\cdots,n$或$I_i\subset S_l$,$l=1,\cdots,m$.所以

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}[\sup f(I_i)-\inf f(I_i)]m(I_i)\\ \leqslant&\sum_{I_i\subset J_l^*}[\sup f(I_i)-\inf f(I_i)]m(I_i)\\ &+\sum_{I_i\subset S_l}[\sup f(I_i)-\inf f(I_i)]m(I_i)\\ \leqslant&2K\sum_j m(J_j)+2\varepsilon(b-a)\\ =&[2K+2(b-a)]\varepsilon.\end{aligned}$$

由此立知,f在$[a,b]$上(R)可积.

注 这是判断$[a,b]$上的函数是否Riemann可积的既简单又有效的方法.Riemann可积的其他各种等价条件可参阅第1篇题1.12.3.

7.3.15 f在$[a,b]$上(R)可积$\Rightarrow f$在$[a,b]$上(L)可积.

但反之不真.

如果f在$[a,b]$上(R)可积,则

$$(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证 ($\Rightarrow$)设f在$[a,b]$上(R)可积,则f必有界,且几乎处处连续,即$M(x)\doteq_m m(x)$.又从

$$m(x)\leqslant_m f(x)\leqslant_m M(x)$$

知$f(x)\doteq_m m(x)$,所以,$f(x)$是Lebesgue可测的,从而有界可测函数$f(x)$是(L)可积的.

根据(R)可积的性质、题7.3.13以及$f(x)\doteq_m m(x)$立即得到

$$\begin{aligned}(\mathrm{R})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&=\lim_{i\to+\infty}s_i\\ &=(\mathrm{L})\int_a^b m(x)\mathrm{d}x=(\mathrm{L})\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

反例:Dirichlet函数

$$D(x)=\begin{cases}1,x\in\mathbf{Q},\\0,x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}\end{cases}$$

是一个对等于0的函数,即$D(x)\doteq_m 0$,所以,它是(L)可积的.但由数学分析熟知的结果,$D(x)$在$[0,1]$上不是(R)可积的.

7.3.16 设$E\subset\mathbf{R}^n$为Lebesgue可测集,且$m(E)>0$,$0<\lambda<1$,则存在长方体I,使得

$$\lambda|I|<m(I\cap E).$$

证 不失一般性,设$m(E)<+\infty$.对于$0<\varepsilon<(\lambda^{-1}-1)m(E)$,作$E$的长方体覆盖$\{I_k\}$使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)<m(E)+\varepsilon<\lambda^{-1}m(E).$$

从而必有k_0,使得$\lambda_m(I_{k_0})<m(I_{k_0}\cap E)$.(反证)假设对一切$k$,有

$$\lambda m(I_k)\geqslant m(I_k\cap E),$$

则可得

$$\begin{aligned}m(E)&\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k\cap E)\\ &\leqslant\lambda\sum_{k=1}^{\infty}m(I_k)<\lambda\cdot\lambda^{-1}m(E)=m(E).\end{aligned}$$

矛盾.

7.3.17 设$E\subset\mathbf{R}^n$为Lebesgue可测集且$m(E)>0$.作(向量差)点集

$$E-E=\{x-y\mid x,y\in E\},$$

则存在$\delta>0$,使得

$$E-E\supset B_0(\delta)=\{x\in\mathbf{R}^n\mid\|x\|<\delta\}.$$

证 取λ满足$1-2^{-(n+1)}<\lambda<1$,由题7.3.16

可知,存在长方体 I,使得

$$\lambda m(I) < m(I \cap E).$$

现记 I 的最短边长为 2δ,并作开长方体

$$J = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : |x_i| < \delta, i = 1, \cdots, n\}.$$

从而只须证明 $E - E \supset J \supset B_0(\delta)$ 即可,即对任何 $x_0 \in J$,点集 $I \cap E$ 必与点集 $(I \cap E) + \{x_0\}$ 相交,此时有 $y, z \in I \cap E$,使得 $x_0 = y - z \in E - E$,从而 $J \subset E - E$.

因为 J 是以原点为中心、边长为 2δ 的开长方体,所以 I 的平移长方体 $I + \{x_0\}$ 仍含有 I 的中心.从而知

$$m(I \cap (I + \{x_0\})) > 2^{-n} m(I).$$

由此可得

$$\begin{aligned} & m(I \cup (I + \{x_0\})) \\ &= m(I) + m(I + \{x_0\}) - m(I \cap (I + \{x_0\})) \\ &< 2m(I) - 2^{-n} m(I) = 2(1 - 2^{-(n+1)}) m(I) \\ &< 2\lambda m(I). \end{aligned}$$

但由于 $I \cap E$ 与 $(I \cap E) + \{x_0\}$ 有相同的测度并且都大于 $\lambda m(I)$,同时又都含于 $I \cup (I + \{x_0\})$ 之中,故它们必定相交.否则其并集测度要大于 $2\lambda m(I)$,从而导致矛盾.

7.3.18 (1) 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的实值 Lebesgue 可测函数,且对任何 $x, y \in \mathbf{R}^1$,有

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

则 $f(x)$ 为连续函数,从而 $f(x) = xf(1)$;

(2) 举例说明(1)中删去条件"f 为 $\mathbf{R}^1$ 上的实值 Lebesgue 可测函数",则结论不成立.

证 (1) 因为 $f(0) = f(0) + f(0)$,故 $f(0) = 0$.再由 $f(x + h) - f(x) = f(h)$,只须证 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续即可.根据 Лузин 定理,可作有界闭集 E,使 $m(E) > 0$,f 在 E 上一致连续,即对任何 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta_1 > 0$,有

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad |x - y| < \delta_1, x, y \in E.$$

再根据题 7.3.17,存在 $\delta_2 > 0$,使得

$$E - E \supset [-\delta_2, \delta_2].$$

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$,当 $z \in [-\delta, \delta]$ 时,由于存在 $x, y \in E$,使 $z = x - y$,故可得

$$\begin{aligned} & |f(z) - f(0)| = |f(z) - 0| \\ &= |f(z)| = |f(x - y)| \\ &= |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

这就证明了 $f(x)$ 在 0 处连续.

最后,易见

$$f(nx) = f[(n-1)x] + f(x) = \cdots = nf(x)$$

$$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = nf(\frac{1}{n}).$$

从而 $f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n} f(1)$ 及 $f(\frac{m}{n}) = mf(\frac{1}{n}) = \frac{m}{n} f(1)$,即

$$f(x) = xf(1), x \in \mathbf{Q}.$$

如果 $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q}$,则可取 $x_n \in \mathbf{Q}$,使 $x_n \to x (n \to +\infty)$,于是,根据 f 的连续性立即可得

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n f(1) = xf(1).$$

综上所述,对一切 $x \in \mathbf{R}$ 有 $f(x) = xf(1)$.

(2) 反例:设 H 为实数域 $\mathbf{R}$ 视作有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间的一组线性基,任给 $x \in \mathbf{R}^1$,则 x 可唯一表示为

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n, x_i \in \mathbf{Q}, e_i \in H, i = 1, \cdots, n.$$

定义

$$f(x) = x_1 \in \mathbf{Q}.$$

易见,$f(x + y) = f(x) + f(y)$.但由反证法、介值定理可推出 f 不连续,当然 $f(x) \neq xf(1)$.

7.3.19 设 $\{f_n(x)\}$ 为定义在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列,且有

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = f(x), x \in \mathbf{R}^1,$$

则

(1) 若 $G \subset \mathbf{R}^1$ 为开集,则 $f^{-1}(G)$ 为 F_σ 集;

(2) $f(x)$ 的连续点集是 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密集.

证 (1) 由于 $\mathbf{R}^1$ 中的开集 G 为至多可数个构成区间的并,故不妨设 G 为开区间 (a, b).从

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbf{R}^1 : f(x) > a\} \\ &= \bigcup_{\substack{\varepsilon \in \mathbf{Q} \\ \varepsilon > 0}} \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} \{x : f_n(x) \geqslant a + \varepsilon\} \end{aligned}$$

可知 $\{x \in \mathbf{R}^1 : f(x) > a\}$ 为 F_σ 集.同理可证 $\{x \in \mathbf{R}^1 : f(x) < b\}$ 也是 F_σ 集.从而它们的交集 $f^{-1}((a, b))$ 也为 F_σ 集.

(2) 设 x_0 为 $f(x)$ 的不连续点,则存在 $p, q \in \mathbf{Q}$,$p < q$,使得 $f(x_0) \in (p, q)$,而且有点列 x_n,满足

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0, f(x_n) \overline{\in} (p, q), n = 1, 2, \cdots.$$

于是,f 的不连续点集

$$D = \bigcup_{\substack{p, q \in \mathbf{Q} \\ p < q}} [\overline{f^{-1}(A_{pq})} - f^{-1}(A_{pq})],$$

其中 $A_{pq} = \mathbf{R}^1 - (p, q)$.

由(1)知,$f^{-1}(A_{pq}) = f^{-1}(\mathbf{R}^1 - (p, q)) = f^{-1}((p, q))^c$ 为 G_δ 集,从而由 de Morgan 公式得到

$$\begin{aligned} \overline{f^{-1}(A_{pq})} - f^{-1}(A_{pq}) &= \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} - \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n \\ &= \bigcup_{n=1}^{\infty} [\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} - G_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty} [(\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n}) \cap G_n^c] \end{aligned}$$

为 F_σ 集.易知,它无内点,根据 Baire 定理,D 也无内点.这就说明了 f 的连续点集在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密.

注 $\mathbf{R}^1$ 上连续函数列 $f_n(x)$ 的极限函数 $f(x)$ 的

连续点是 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密集，这是一个重要的结论. 如果函数 f 不具有这种性质(例如题 7.3.22 中的 Dirichlet 函数 $D(x)$)，就可立即断定，它不是连续函数列的极限. 此外，由该结论，在题 7.3.21 中就得到"$\mathbf{R}^1$ 上可导函数的导函数 $f'(x)$ 的连续点集是 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密集"这一意想不到的结果.

7.3.20 (连续函数可导点集的结构) 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数，则 f 的可导点集为 $F_{\sigma\delta}$ 集(可数个 F_σ 集的交).

证 根据 de Morgan 公式，我们只须证明 f 的不可导点集为 $A\cup B\cup C$，其中

$$\begin{aligned}A &= \{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\}\\ &= \bigcup_{\substack{r,R\in\mathbf{Q}\\ r<R}}\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant r \leqslant R\leqslant \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\}\\ &= \bigcup_{\substack{r,R\in\mathbf{Q}\\ r<R}}(\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant r\} \cap \{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant R\}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B &= \{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty\}\\ &= \bigcap_{r\in\mathbf{Q}}\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant r\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C &= \{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty\}\\ &= \bigcap_{r\in\mathbf{Q}}\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant r\}.\end{aligned}$$

最后，我们只须证明对任何 $t\in\mathbf{R}^1$，

$$\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant t\}$$

为 G_δ 集；同理可证

$$\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varliminf_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant t\}$$

也为 G_δ 集.

由于 f 连续，显然对每个自然数 n,k，集合

$G_{n,k}=\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid$ 存在满足 $0<|x-x_0|<\frac{1}{n}$ 的 x 使得 $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>t-\frac{1}{k}\}$ 为开集. 于是

$$\{x_0\in\mathbf{R}^1 \mid \varlimsup_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant t\}=\bigcap_{n,k=1}^{\infty}G_{n,k}.$$

7.3.21 设 f 在 $\mathbf{R}^1$ 上可导，则 $f'(x)$ 的连续点集是 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密集.

证 因为 f 在 $\mathbf{R}^1$ 上可导，所以

$$f_n(x)=\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

为 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数. 于是，根据题 7.3.19，

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}f_n(x)$$

的连续点集是 $\mathbf{R}^1$ 中的稠密集.

7.3.22 证明：不存在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 收敛于 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, x\in\mathbf{Q},\\ 0, x\in\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

证法 1 根据题 7.3.19，如果存在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 收敛于 Dirichlet 函数 $D(x)$，则 D 的连续点集必在 $\mathbf{R}^1$ 中稠密. 这与 $D(x)$ 的连续点集为空集相矛盾.

证法 2 根据题 7.3.19(1)，如果存在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列 $\{f_n\}$ 收敛于 Dirichlet 函数 $D(x)$，则 $\mathbf{R}^1-\mathbf{Q}=D^{-1}((-\frac{1}{2},\frac{1}{2}))$ 为 F_σ 集，记为 $\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n$，其中 F_n 为闭集. 于是，$\mathbf{R}^1=(\mathbf{R}^1-\mathbf{Q})\cup\mathbf{Q}=(\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n)\cup(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{r_n\})$ 也为 F_σ 集，且 $F_n,\{r_n\}$ 都无内点. 根据题 7.3.9(Baire 定理)，$\mathbf{R}^1$ 无内点，这与 $\mathbf{R}^1$ 显然全由内点组成相矛盾.

证法 3 (反证) 假设存在 $\mathbf{R}^1$ 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$ 收敛于 $D(x)$，即 $\lim_{n\to+\infty}f_n(x)=D(x)$，$x\in\mathbf{R}^1$. 取无理数 s_1，由 $\lim_{n\to+\infty}f_n(s_1)=D(s_1)=0$，存在 $N_1\in\mathbf{N}$，使得 $|f_{N_1}(s_1)|<\frac{1}{2}$，再由 f_{N_1} 的连续性知必有以 s_1 为内点的闭区间 $[a_1,b_1]$，使 $|f_{N_1}(x)|<\frac{1}{2}$，$x\in[a_1,b_1]$. 取有理数 $r_1\in(a_1,b_1)$，由 $\lim_{n\to+\infty}f_n(r_1)=D(r_1)=1$，存在 $N_2>N_1$，使 $|f_{N_2}(r_1)-1|<\frac{1}{2}$，再由 f_{N_2} 的连续性，存在以 r_1 为内点的闭区间 $[a_2,b_2]\subset[a_1,b_1]$，使 $|f_{N_2}(x)-1|<\frac{1}{2}$，$x\in[a_2,b_2]$. 取无理数 $s_2\in(a_2,b_2)$，同理可得 $N_3>N_2$ 及 $[a_3,b_3]\subset[a_2,b_2]$，使 $|f_{N_3}(x)|<\frac{1}{2^2}$，$x\in[a_3,b_3]$，取有理数 $r_2\in(a_3,b_3)$，必有 $N_4>N_3$ 及 $[a_4,b_4]\subset[a_3,b_3]$，使 $|f_{N_4}(x)-1|<\frac{1}{2^2}$，$x\in[a_4,b_4]$. 如此得到 $N_1<N_2<\cdots<N_{2k-1}<N_{2k}<\cdots$ 及 $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset[a_3,b_3]\supset\cdots$，使

$$(*)\begin{cases}|f_{N_{2k-1}}(x)|<\frac{1}{2^k}, x\in[a_{2k-1},b_{2k-1}],\\ |f_{N_{2k}}(x)-1|<\frac{1}{2^k}, x\in[a_{2k},b_{2k}].\end{cases}$$

显然，$\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]\neq\varnothing$. 取 $x_0\in\bigcap_{i=1}^{\infty}[a_i,b_i]$，则从（*）式知

$$(**)\begin{cases}|f_{N_{2k-1}}(x_0)|<\dfrac{1}{2^k},\\ |f_{N_{2k}}(x_0)-1|<\dfrac{1}{2^k},k\in\mathbf{N}.\end{cases}$$

令 $k\to+\infty$，并由 $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x_0)=D(x_0)$ 知

$$(***)\begin{cases}|D(x_0)|\leqslant 0,\\ |D(x_0)-1|\leqslant 0.\end{cases}$$

于是，一方面 $D(x_0)=0$，另一方面 $D(x_0)=1$，矛盾.

注 证法 3 虽然繁而且难，但它是直接应用反证法、区间套原理等数学分析的功夫论证的，这是数学工作者必备的基本功.

7.3.23 设 $k,r\in\{0,1,2,\cdots,\infty,\omega\}$，$k<r$. 则存在 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 是 C^k 类的，但不是 C^r 类的，其中 C^∞ 类函数表示具有各阶连续导数的函数，C^ω 类表示实解析的函数，且 $0<1<2<\cdots<\infty<\omega$.

更进一步，可构造一个处处连续，但处处不可导的函数；也可构造一个处处 C^∞ 但无处解析的函数.

证 如果 $0\leqslant k<\infty$，则

$$f(x)=\begin{cases}x^{2k+1}\sin\dfrac{1}{x},x\neq 0,\\ 0,\quad x=0\end{cases}$$

为所求函数. 如果 $k=\infty$，$r=\omega$，则

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}},x>0,\\ 0,\quad x\leqslant 0\end{cases}$$

为所求函数. 事实上，由归纳法和 L'Hospital（洛必塔）法则可知

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}P_n\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},x>0,\\ 0,\quad x\leqslant 0,\end{cases}$$

其中 $P_n(u)$ 为 u 的多项式，这就证明了 f 是 C^∞ 类的. 但它不是 C^ω 的.（反证）事实上，如果 f 是 C^ω 类的，则存在 $\delta>0$，使 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=0$，$x\in(-\delta,\delta)$，这与 $f(x)=e^{-\frac{1}{x}}>0$，$x\in(0,\delta)$ 相矛盾.

下面来构造一个处处 C^∞ 但无处解析的函数. 为此，令

$$\varphi(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x}},x>0,\\ 0,\quad x\leqslant 0,\end{cases}$$

$$\psi_n(x)=\varphi(x)\varphi\left(\frac{1}{2^n}-x\right),n\in\mathbf{N}.$$

显然，在 $x=0,\dfrac{1}{2^n}$ 处，$\psi_n(x)$ 的各阶导数为 0. 以 $\dfrac{1}{2^n}$ 为周期将 $\psi_n|_{[0,\frac{1}{2^n}]}$ 延拓到整个 $\mathbf{R}$ 上得 $\varphi_n(x)$. 易见，$\varphi_n(x)$ 为 C^∞ 函数，且当 $x\neq\dfrac{k}{2^n}$（$k\in$ 整数集 $\mathbf{Z}$）时解析. 再令 $0<a_n<\dfrac{1}{2^n}\left(\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}\{|\varphi_n(x)|,|\varphi_n'(x)|,\cdots,|\varphi_n^{(n)}(x)|\}\right)^{-1}$ 和

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi_n(x).$$

由 a_n 的取法易知 f 是 C^∞ 类的，但 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{k}{2^m}$（$k\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{Z}$）处不解析. 事实上，不妨设 k 为奇数（否则约分），则 $\varphi_l(x)$ 在 $\dfrac{k}{2^m}$ 处解析（$l=0,1,\cdots,m-1$）. 但当 $n\geqslant m$ 时，$\varphi_n^{(s)}\left(\dfrac{k}{2^m}\right)=\psi_n^{(s)}\left(\dfrac{k}{2^n}\right)$，$s=0,1,2,\cdots$，故 $\sum\limits_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$ 在 $\dfrac{k}{2^m}$ 处各阶导数为 0，但在 $\dfrac{k}{2^m}$ 附近非恒为 0，故不解析. 这就证明了

$$f(x)=\sum_{n=0}^{m-1}a_n\varphi_n(x)+\sum_{n=m}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$$

在 $\dfrac{k}{2^m}$ 处不解析. 但 $\left\{\dfrac{k}{2^m}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z},m\in\mathbf{N}\right\}$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上稠密，故 $f(x)$ 无处解析.

最后，介绍由 Van der Waerden 给出的处处连续而处处不可导的例子. 这个例子比 Weierstrass 的更简单，但基本想法和 Weierstrass 是一样的.

先在 $\mathbf{R}^1$ 定义一个以 1 为周期的锯齿形函数 $u_0(x)$，使得

$$u_0(x)=|x|,x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],$$

然后利用 $u_0(x)$ 定义一串函数如下：

$$u_k(x)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx),k=1,2,\cdots.$$

容易知道，

$$u_k\left(x+\frac{1}{4^k}\right)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx+1)=\frac{1}{4^k}u_0(4^kx)=u_k(x),$$

故 $u_k(x)$ 为以 $\dfrac{1}{4^k}$ 为周期的函数. 又因为 $u_0(x)$ 在 $\left[\dfrac{s}{2},\dfrac{s+1}{2}\right]$ 上是线性的（这里 s 是任意整数），所以 $u_k(x)$ 在区间 $\left[\dfrac{s}{2\cdot 4^k},\dfrac{s+1}{2\cdot 4^k}\right]$ 上是线性的. 由此可知，$u_k(x)$ 也是锯齿形的函数，只是随着 k 的增大，锯齿越来越细.

现在定义

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}u_k(x),-\infty<x<+\infty.$$

则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续但却处处不可导. 事实上，

因为

$$0 \leqslant u_k(x) = \frac{1}{4^k}u_0(4^k x) \leqslant \frac{1}{4^k}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

所以级数 $\sum_{k=0}^{\infty} u_k(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上是一致收敛的，故 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上处处连续.

为了证明 $f(x)$ 处处不可导．任取 $x_0 \in (-\infty, +\infty)$，记 $[2 \cdot 4^n x_0] = s_n$，则 $\frac{s_n}{2 \cdot 4^n} \leqslant x_0 < \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}$．又取 $x_n \in [\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}]$，使得 $|x_n - x_0| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4^n} = \frac{1}{4^{n+1}}$．显然，$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0$，然而，可以证明极限

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

不存在，从而 $f(x)$ 在 x_0 处不可导．下面就证明这一结论.

固定 n，当 $k > n$ 时，由于 $u_n(x)$ 的周期为 $\frac{1}{4^k}$，所以

$$u_k(x_n) = u_k(x_0 \pm \frac{1}{4^{n+1}})$$
$$= u_k(x_0 \pm \frac{1}{4^k}4^{k-(n+1)}) = u_k(x_0);$$

而当 $k \leqslant n$ 时，不难证明

$$[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}] \subset [\frac{s_k}{2 \cdot 4^k}, \frac{s_k + 1}{2 \cdot 4^k}].$$

已知 $u_k(x)$ 在 $[\frac{s_k}{2 \cdot 4^k}, \frac{s_k + 1}{2 \cdot 4^k}]$ 上是线性的，因而在 $[\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}]$ 上也是线性的．$x_n, x_0 \in [\frac{s_n}{2 \cdot 4^n}, \frac{s_n + 1}{2 \cdot 4^n}]$．所以

$$\frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \pm 1.$$

由此，并按 $f(x)$ 的定义得到

$$\frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0}$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{u_k(x_n) - u_k(x_0)}{x_n - x_0} = \sum_{k=0}^{n}(\pm 1).$$

容易知道，如果 n 为奇数，则 $\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)$ 为偶数；如果 n 为偶数，则 $\sum_{k=0}^{n}(\pm 1)$ 为奇数．从而推得 $\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$ 不存在．再由 x_0 的任取性得 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^1$ 上是处处不可导的.

注 熟悉各种不同光滑程度的函数及其构造方法是非常有益的.

7.3.24 构造 $[0,1]$ 上的一个可导函数 $f(x)$，使其导函数 $f'(x)$ 在无理点连续而在有理点不连续.

解 定义

$$\varphi(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

则

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$\varphi'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处连续，而在 $x = 0$ 处不连续.

设 $\{r_n\}$ 为 $[0,1]$ 中的全体有理数，令

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi(x - r_n).$$

显然，由 $|\frac{1}{2^n}\varphi'(x - r_n)| \leqslant \frac{5}{2^n}$ 知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi'(x - r_n)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛，因而不难证明

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\varphi'(x - r_n), \ 0 \leqslant x \leqslant 1.$$

于是 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中的任一无理点连续，而在任一有理点不连续.

7.3.25 构造 $\mathbf{R}^1$ 上的一个严格单调的有界可导函数 f，使 $\lim_{x \to +\infty} f'(x) \neq 0$.

解 令 $f: \mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$，使得

(1) $f(n) = 1 - 2^{-n}, n = 0,1,2,\cdots$;

(2) $f(n + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}[f(n) + f(n+1)]$;

(3) f 在 $[n, n + \frac{1}{2}]$ 和 $[n + \frac{1}{2}, n+1]$ 上的图形是椭圆的弧段；且

(4) $f'(n) = f'(n+1) = 0, f'(n + \frac{1}{2}) = 1$.

再令 $f(-x) = -f(x)$ 使 f 延拓为 $\mathbf{R}^1$ 上的可导函数．显然，f 是 $\mathbf{R}^1$ 上以 1 为界的严格单调函数且 $\lim_{x \to +\infty} f'(x) \neq 0$.

事实上，在任何闭单位区间上，$f'(x)$ 恒能达到 0 和 1 之间的一切值．从而 $\lim_{x \to +\infty} f'(x)$ 不存在.

7.3.26 设 $f(x,t)$ 是矩形 $\{(x,t) \mid a \leqslant x \leqslant b, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} = [a,b] \times [\alpha,\beta]$ 上的二元函数，固定 $t \in [\alpha,\beta]$，$f(x,t)$ 是 x 的 Lebesgue 可积函数．如果关于 Lebesgue 测度 m 对几乎所有的 x，函数 $f(x,t)$ 对 t 有偏导数，并且存在 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可积函数 $F(x)$，使得

$$\left| \frac{f(x, t+h) - f(x,t)}{h} \right| \underset{m}{\leqslant} F(x),$$

则 $I(t) = \int_a^b f(x,t) \mathrm{d}t$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有导函数，且

$$I'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

证 取 $h_n\to 0(h_n\neq 0)$，使 $t+h_n\in[\alpha,\beta]$. 则由题设，对$[a,b]$中几乎所有的 x，有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}=\frac{\partial}{\partial t}f(x,t).$$

由[1]178 页定理 1′，$\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)$ 为$[a,b]$上的 Lebesgue 可测函数.

由题设，存在$[a,b]$上的 Lebesgue 可测函数 $F(x)$，使得

$$\left|\frac{f(x,t+h_n)-f(x,t)}{h_n}\right|\underset{n}{\leqslant}F(x)$$

以及[1]222 页定理 1′(Lebesgue 控制收敛定理)便知

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b\frac{1}{h_n}[f(x,t+h_n)-f(x,t)]\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x=\int_a^b\frac{\partial}{\partial t}f(x,t)\mathrm{d}x.$$

7.3.27 设 f 是$(-\infty,+\infty)$上的 Lebesgue 可测函数，且在任何有限区间$[a,b]$上 Lebesgue 可积. 而 $\theta(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上有 n 阶连续导函数，在$[-\Delta,\Delta]$外恒为 0. 证明 f 与 θ 的卷积函数

$$(\theta*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\theta(x)\mathrm{d}x$$

是 t 的具有 n 阶导数的函数，且

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\theta*f)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\theta(x-t)\mathrm{d}x.$$

证 由测度的平移不变性

$$(\theta*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\theta(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\theta(x-t)\mathrm{d}x.$$

据题设，$\theta(x-t)$，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\theta(x-t)$，$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\theta(x-t)$，…，$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\theta(x-t)$ 都是有界连续函数. 于是

$$\left|\frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}t^i}f(x)\theta(x-t)\right|\leqslant|f(x)|\cdot M\in L[a,b],$$
$$i=1,2,\cdots,n.$$

再根据中值定理和题 7.3.26 知 $(\theta*f)(t)$ 是 t 的具有 n 阶导数的函数，且

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(\theta*f)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\theta(x-t)\mathrm{d}x.$$

注 将光滑程度低的函数 f 通过卷积

$$(\theta*f)(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x+t)\theta(x)\mathrm{d}x$$

就能得到光滑程度较高的函数 $\theta*f$. 在微分拓扑中，这对映射和流形的光滑化起着很关键的作用.

从 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$ 自然想到用导函数 $f'(x)$ 来刻画点集 E 在 f 下的象集 $f(E)$ 的测度 $m(f(E))$(或外测度 $m^*(f(E))$) 和 E 的测度 $m(E)$(或外测度 $m^*(E)$) 之间的关系. 下面的题 7.3.28 ~ 7.3.32 就是详细叙述这方面的内容的.

7.3.28 设 $E\subset[a,b]$，$f:[a,b]\to\mathbf{R}^1$ 为实函数. 如果 $f'(x)$ 在 E 上存在有限，且 $|f'(x)|\leqslant M$(常数)，则

(1) 对任何 $\varepsilon>0$，任何 $n\in\mathbf{N}$，有

$$m^*(f(E_n))\leqslant(M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon),$$

其中 $E_n=\{x\in E\mid$ 当 $y\in[a,b]$，且 $|y-x|\leqslant\frac{1}{n}$ 时，有 $|f(y)-f(x)|\leqslant(M+\varepsilon)|y-x|\}$.

(2) $m^*(f(E))\leqslant Mm^*(E)$.

证 (1) 在$[a,b]$中取覆盖 E_n 的区间 $\{I_{n,k}\mid k=1,2,\cdots\}$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty}m(I_{n,k})<m^*(E_n)+\varepsilon,$$

直径 $\mathrm{diam}(I_{n,k})<\frac{1}{n}$，$k=1,2,\cdots$

显然，若 $s,t\in E_n\cap I_{n,k}$，则有

$$|f(s)-f(t)|\leqslant(M+\varepsilon)\mathrm{diam}(I_{n,k}).$$

于是

$$m^*(f(E_n))=m^*(f(E_n\cap\bigcup_{k=1}^{\infty}I_{n,k}))$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(f(E_n\cap I_{n,k}))$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(f(E_n\cap I_{n,k}))$$
$$\leqslant(M+\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(I_{n,k})$$
$$\leqslant(M+\varepsilon)(m^*(E_n)+\varepsilon).$$

(2) 显然 $E_n\subset E_{n+1}\subset E$，$f(E_n)\subset f(E_{n+1})$，以及 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，$f(E)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}f(E_n)$. 事实上，对任何固定的 $x\in E$，存在 $n\in\mathbf{N}$，使当 $|y-x|\leqslant\frac{1}{n}$ 时，

$$f'(x)-\varepsilon\leqslant\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant f'(x)+\varepsilon,$$
$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|\leqslant|f'(x)|+\varepsilon\leqslant M+\varepsilon,$$
$$|f(y)-f(x)|\leqslant(M+\varepsilon)|y-x|,$$

$x\in E_n$，从而 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$. 此外，显然有 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\subset E$，故 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$.

根据题 7.2.1(3)，$\lim\limits_{n\to+\infty}m^*(E_n)=m^*(E)$，

$\lim_{n\to+\infty} m^*(f(E_n)) = m^*(f(E))$.再由(1)知

$$m^*(f(E)) = \lim_{n\to+\infty} m^*(f(E_n))$$
$$\leqslant (M+\varepsilon)(m^*(E)+\varepsilon).$$

令 $\varepsilon \to 0^+$ 得到

$$m^*(f(E)) \leqslant Mm^*(E).$$

7.3.29 (1) 设 $f:\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^1$ 为 C^1 映射,E 为 Lebesgue 可测集,且 $m(E)=0$,则 $m(f(E))=0$.

(2) 进一步,即使 $f:\mathbf{R}^1\to\mathbf{R}^1$ 只是可导函数,上述结论仍成立.

证 (1) 令 $E_n = E\cap[-n,n]$,$M_n = \max_{x\in[-2n,2n]}\{|f'(x)|\}$.因为 $m(E)=0$,所以 $m(E_n)=0$.

对任何 $\varepsilon>0$,存在开集 $G=\bigcup_i(a_i,b_i)\supset E_n$,使 $m(G)<\varepsilon$,其中$\{(a_i,b_i)\}$为 G 的构成区间,$(a_i,b_i)\subset[-2n,2n]$,则当 $x\in(a_i,b_i)$ 时,根据中值定理,存在 $\xi\in(a_i,x)$,使

$$|f(x)-f(a_i)| = |f'(\xi)(x-a_i)|$$
$$\leqslant M_n|x-a_i| \leqslant M_n|b_i-a_i|.$$

所以

$$m(f(G)) \leqslant M_n\sum_i(b_i-a_i) = M_n m(G),$$
$$0\leqslant m(f(E_n))\leqslant m(f(G))\leqslant M_n m(G) < M_n\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$,得到 $m(f(E_n))=0$.

再由

$$0\leqslant m(f(E))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m(f(E_n)) = \sum_{n=0}^{\infty}0 = 0,$$

有

$$m(f(E))=0.$$

(2) 令 $E_n=\{x\in E\mid |f'(x)|\leqslant n\}$,则 $E_n\subset E_{n+1}\subset E$,且

$$0\leqslant m^*(E_n)\leqslant m^*(E)=0,\ m^*(E_n)=0$$

和

$$E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n.$$

根据题7.3.28(2)知

$$0\leqslant m^*(f(E_n))\leqslant nm^*(E_n) = n\cdot 0 = 0,$$
$$m^*(f(E_n))=0,$$
$$0\leqslant m^*(f(E)) = m^*(f(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n))$$
$$= m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(E_n))$$
$$\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n)) = \sum_{n=1}^{\infty}0 = 0,$$
$$m^*(f(E))=0.$$

7.3.30 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 在 $E\subset[a,b]$ 上每一点处可导,则在 E 上几乎处处导数为零,即 $f' \overset{\cdot}{\underset{m}{=}} 0 \Leftrightarrow m(f(E))=0$.

证 ($\Rightarrow$) 设 $E_0=\{x\in E\mid f'(x)=0\}$,$E_n=\{x\in E\mid n-1<|f'(x)|\leqslant n\}$,$n=1,2,\cdots$,由 $f'\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}0$ 知,$m^*(E_n)=m(E_n)=0$.再由题7.3.28和7.3.29得到

$$0\leqslant m^*(f(E)) = m^*(f(\bigcup_{n=0}^{\infty}E_n))$$
$$= m^*(\bigcup_{n=0}^{\infty}f(E_n))\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))$$
$$= m^*(f(E_0))+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot m^*(E_n)$$
$$= 0+\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot 0 = 0.$$

于是,$m^*(f(E))=0$,$m(f(E))=0$.

($\Leftarrow$) 作点集

$$A_n=\{x\in E\mid 当\ |y-x|\leqslant\frac{1}{n}\ 时,|f(y)-f(x)|\geqslant\frac{1}{n}|y-x|\},$$

显然

$$A=\{x\in E\mid |f'(x)|>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n.$$

易见 $f'\overset{\cdot}{\underset{m}{=}}0\Leftrightarrow m(A)=0\Leftrightarrow m(A_n)=0,n=1,2,\cdots$.

现证 $m(A_n)=0,n=1,2,\cdots$.对任何区间 I,$\mathrm{diam}I\leqslant\frac{1}{n}$,因为

$$0\leqslant m^*(f(I\cap A_n))\leqslant m^*(f(A))$$
$$\leqslant m^*(f(E)) = m(f(E)) = 0,$$

所以 $m^*(f(I\cap A_n))=0$,$m(f(I\cap A_n))=0$.于是,对任何 $\varepsilon>0$,存在区间列$\{J_k\}$使得

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k\supset f(I\cap A_n),\ \sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}J_k<\varepsilon.$$

令 $B_k=(I\cap A_n)\cap f^{-1}(J_k)$,则

$$B_k\subset I\cap A_n,\ f(B_k)\subset J_k,\ I\cap A_n=\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k.$$

于是有

$$0\leqslant m^*(I\cap A_n)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}m^*(B_k)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}(B_k)$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}n\,\mathrm{diam}(f(B_k))\leqslant n\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{diam}J_k<n\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$,得到

$$m^*(I\cap A_n)=0,\ m(I\cap A_n)=0.$$

由此得到

$$m(A_k)=0.$$

7.3.31 (特殊Sard定理)设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 的临界点集为 $E=\{x\in[a,b]\mid f'(x)=0\}$.则 f 的临界值集 $f(E)$ 为(Lebesgue)零测集,即

$$m(f(E))=0.$$

证 由题 7.3.28 得到

$$0\leqslant m^*(f(E))\leqslant 0\cdot m^*(E)=0,$$

$$m^*(f(E))=0,$$

$$m(f(E))=0.$$

7.3.32 设 f 为 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可测函数，$E\subset[a,b]$ 为 Lebesgue 可测集，且 f 在 E 上每一点导数存在有限，则

$$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 因为 f 是 $[a,b]$ 上的 Lebesgue 可测函数，所以 $f(x+\frac{1}{n}),f(x),\dfrac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$ 为 $[a,b]$ 上，从而为 E 上的 Lebesgue 可测函数. 于是，

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}$$

是 E 上的 Lebesgue 可测函数，作集合序列

$$E_n=\{x\in E\mid(n-1)\varepsilon\leqslant|f'(x)|<n\varepsilon\},$$
$$n=1,2,\cdots,$$

则 $E=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n,E_i\cap E_j=\varnothing,i\neq j$. 由题 7.3.28 有

$$\begin{aligned}m^*(f(E_n))&\leqslant n\varepsilon m(E_n)\\&=(n-1)\varepsilon m(E_n)+\varepsilon m(E_n)\\&\leqslant\int_{E_n}|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\varepsilon m(E_n).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}m^*(f(E))&=m^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}f(E_n))\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}m^*(f(E_n))\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int_{E_n}|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}m(E_n)\\&\leqslant\int_E|f'(x)|\,\mathrm{d}x+\varepsilon m(E).\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得到

$$m^*(f(E))\leqslant\int_E|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

凸函数也是一类很重要的函数. 第 1 篇中题 1.7.1 ~ 1.7.7 和下面的题 7.3.33 ~ 7.3.38 给出了凸函数的各种充分条件、必要条件以及充分必要条件.

7.3.33 设 $f(x)$ 在区间 I 上的任一闭子区间上有上界且满足

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},x_1\in I,x_2\in I.$$

则 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数.

证法 1 （反证）假设结论不真. 则存在 $x_1\in I,x_2\in I,0<t<\frac{1}{2}$，使得

$$f[tx_1+(1-t)x_2]-tf(x_1)-(1-t)f(x_2)$$
$$=\alpha>0.$$

作函数

$$F(x)=f(x)-f(x_1)-\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

显然在 I 的任一闭子区间中 $F(x)$ 与 $f(x)$ 同时有界或无界，并可直接验证

$$F(\frac{u_1+u_2}{2})\leqslant\frac{F(u_1)+F(u_2)}{2},u_1,u_2\in I$$

且满足

$$F(x_1)=F(x_2)=0,$$
$$\begin{aligned}&F[tx_1+(1-t)x_2]\\&=f[tx_1+(1-t)x_2]-tf(x_1)-(1-t)f(x_2)\\&=\alpha>0.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}2\alpha&=2F[tx_1+(1-t)x_2]\\&=2F[\frac{2tx_1+(1-2t)x_2+x_2}{2}]\\&\leqslant F[2tx_1+(1-2t)x_2]+F(x_2)\\&=F[2tx_1+(1-2t)x_2].\end{aligned}$$

令 $t'=2t$，有

$$F[t'x_1+(1-t')x_2]=2\alpha>0.$$

若 $t'<\frac{1}{2}$，则重复上面手续；若 $t'>\frac{1}{2}$，令 $t_1'=1-t',x_1'=x_2,x_2'=x_1$ 就得

$$F[t_1'x_1'+(1-t_1')x_2']=2\alpha>0.$$

然后再重复上面的手续. 因此，存在 $t'',t''',\cdots,t^{(n)}$，使得

$$F[t^{(n)}x_1+(1-t^{(n)})x_2]=2^n\alpha.$$

由题设，$F(x)$ 应在 x_1 和 x_2 之间有界，这与上面的 $2^n\alpha$ 无界相矛盾. 故 $f(x)$ 在区间 I 上为凸函数.

证法 2 参阅[4]249 页题 181.

注 题中条件能否进一步减弱？如果将"f 在区间 I 上的任一闭子区间上有界"改为"f 在 (a,b) 上 Lebesgue 可测"，则结论仍然成立（题 7.3.34）. 进一步自然会问：能否删去这种条件，而只保留条件：

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},x,y\in(a,b),$$

仍能推出 f 在 (a,b) 上为凸函数？回答是否定的（题 7.3.35）！

7.3.34 设 $f(x)$ 为 (a,b) 上的实值 Lebesgue 可测函数且满足

$$f(\frac{x+y}{2})\leqslant\frac{f(x)+f(y)}{2},x,y\in(a,b).$$

证明 f 为(a,b)上的凸函数.

证 不失一般性,对(a,b)为$(-1,1)$的情形加以证明.根据题7.3.33,要证 $f(x)$ 为凸函数,只需证 f 在$(-1,1)$的任一闭子区间上有上界.因而由 Heine-Borel 有限覆盖定理,只须证在每一点的一个开邻域内有界.为方便起见,只对 $x=0$ 证明.

(反证)假设 f 在 $x=0$ 的任一开邻域内无界,则存在 $t_n\to 0$,使 $|f(t_n)|\to+\infty$,不妨设 $f(t_n)\to+\infty(n\to+\infty)$.

由 Лузин 定理,存在闭集 $E\subset(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, $m(E)>\frac{4}{5}$,f 在 E 上连续,因而有上界 $M>0$.

取 $t_0\in(-\frac{1}{4},\frac{1}{4})$,使 $f(t_0)>M$.不妨设 $t_0>0$.令

$$\tilde{E}=\{y=2t_0-x\mid x\in E\},$$

则 $\tilde{E}\subset(-\frac{1}{2},1)$,$E\cup\tilde{E}\subset(-\frac{1}{2},1)$.又由于对任何 $y\in\tilde{E}$(即 $x=2t_0-y\in E$),从题中不等式得到

$$f(y)\geqslant 2f(t_0)-f(2t_0-y)>2M-M=M.$$

所以,$E\cap\tilde{E}=\varnothing$,故 $m(E\cup\tilde{E})=m(E)+m(\tilde{E})=2m(E)$.由此推出

$$\frac{4}{5}<m(E)=\frac{1}{2}m(E\cup\tilde{E})\leqslant\frac{1}{2}m((-\frac{1}{2},1))=\frac{3}{4},$$

矛盾.

7.3.35 如果题7.3.34中的条件"f 在(a,b)上为实值 Lebesgue 可测函数"删去,其结论不真.即对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$,

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

不能断言 f 为凸函数.

解 举反例如下:

设 H 为实数域 $\mathbf{R}$ 视作有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的线性空间的一组线性基,任给 $x\in\mathbf{R}$,则 x 可唯一表示为

$x=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,x_i\in\mathbf{Q},e_i\in H,i=1,\cdots,n.$

定义

$$f(x)=x_1\in\mathbf{Q}.$$

如果 $y=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne_n$(有必要可增加有限个 e_i!),则

$$\frac{x+y}{2}=\frac{x_1+y_1}{2}e_1+\frac{x_2+y_2}{2}e_2+\cdots+\frac{x_n+y_n}{2}e_n,$$

$$f(\frac{x+y}{2})=\frac{x_1+y_1}{2}=\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

但是 $f(\mathbf{R})\subset\mathbf{Q}$ 且至少有两个 $r_1,r_2\in f(\mathbf{R})\subset\mathbf{Q}$,$r_1<r_2$.显然 f 非凸.(反证)假设 f 为凸函数,根据题7.3.36知 f 在 $\mathbf{R}$ 上连续.再由介值定理,f 的值域 $f(\mathbf{R})\supset[r_1,r_2]$,从而必含无理数,矛盾.

如果令 $g(x)=f(x)+x^2$,则

$$g(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{g(x_1)+g(x_2)}{2},x_1<x_2,$$

但 g 非凸.

由题7.3.34立即推出 f,g 不是 Lebesgue 可测函数.

7.3.36 设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义并在 I 内连续,且对任意的 $x_1\in I,x_2\in I$,恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

试证:$f(x)$ 为区间 I 上的凸函数.

证法1 由题设,对任意的 $x_1\in I,x_2\in I$,恒有

$$f(\frac{x_1+x_2}{2})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

又因 f 在区间 I 内连续,故在 I 的任一闭子区间上有上界.根据题7.3.33知 f 为 I 上的凸函数.

证法2 首先证明,对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_{2^n}\in I$,有

$$f(\frac{x_1+\cdots+x_{2^n}}{2^n})\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^n})}{2^n}.$$

事实上,当 $n=1$ 时,由题设显然有

$$f(\frac{x_1+x_{2^1}}{2^1})\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_{2^1})}{2^1}.$$

假设 $n=k$ 时,

$$f(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k})\leqslant\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k},$$

则当 $n=k+1$ 时,根据归纳假设得到

$$\begin{aligned}&f(\frac{x_1+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^{k+1}})\\=&f(\frac{\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k}+\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k}}{2})\\\leqslant&\frac{1}{2}[f(\frac{x_1+\cdots+x_{2^k}}{2^k})\\&+f(\frac{x_{2^k+1}+\cdots+x_{2^{k+1}}}{2^k})]\\\leqslant&\frac{1}{2}\cdot[\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^k})}{2^k}\\&+\frac{f(x_{2^k+1})+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^k}]\\=&\frac{f(x_1)+\cdots+f(x_{2^{k+1}})}{2^{k+1}}.\end{aligned}$$

由此,对任意的 $x_1\in I,x_2\in I$ 和 $\lambda=\frac{k}{2^n}\in(0,1)$,$k,n$ 为自然数,可推出

$$f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]=f(\frac{kx_1+(2^n-k)x_2}{2^n})$$

$$\leqslant \frac{kf(x_1)+(2^n-k)f(x_2)}{2^n}$$
$$=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

最后再证 $f(x)$ 对 $\lambda\in(0,1)$ 为实数时也有上述不等式. 为此,取形如上述的二等分有限小数 $\lambda_n\in(0,1)$,使 $\lambda_n\to\lambda(n\to+\infty)$. 由题设,$f(x)$ 在 I 上连续,因此

$$\begin{aligned}&f[\lambda x_1+(1-\lambda)x_2]\\&=f[\lim_{n\to+\infty}(\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2]\\&=\lim_{n\to+\infty}f[\lambda_n x_1+(1-\lambda_n)x_2]\\&\leqslant\lim_{n\to+\infty}[\lambda_n f(x_1)+(1-\lambda_n)f(x_2)]\\&=\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).\end{aligned}$$

从而,由定义知 $f(x)$ 在 I 上为凸函数.

7.3.37 设 f 在区间 I 上为凸函数,则

(1) 对任意 $x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$,有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2};$$

(2) 在 $\mathring{I}$ 上存在单调增的左、右导函数 f_-',f_+',且 $f_-'(x)\leqslant f_+'(x),x\in\mathring{I}$;

(3) 若 $[a,b]\subset\mathring{I}$,则 f 在 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件:当 $x_1,x_2\in[a,b]$ 时有

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|,$$

其中 M 为常数. 从而 f 在 $\mathring{I}$ 上连续,在 I 的闭子区间 $[a,b]$ 上有界.

证 (1) 设 f 在区间 I 上为凸函数,则对 $x_1,x_2,x_3\in I,x_1<x_2<x_3$ 有

$$f(x_2)\leqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$
$$\Leftrightarrow f(x_3)-f(x_2)\geqslant\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_3)-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}\geqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

另一方面,第一个不等式

$$\Leftrightarrow f(x_2)-f(x_1)\leqslant\frac{x_1-x_2}{x_3-x_1}f(x_1)+\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}f(x_3)$$
$$=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}[f(x_3)-f(x_1)]$$
$$\Leftrightarrow\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}.$$

因此,对凸函数 f 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1}\leqslant\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}.$$

(2) 对任何 $x_0\in\mathring{I}$,令

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

如果 $x_1<x_2<x_0,x_1,x_2\in I$,则由 f 为凸函数知

$$\varphi(x_1)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_0)}{x_2-x_0}=\varphi(x_2).$$

即 $\varphi(x)$ 为增函数. 取 $x<x_0<B,x,B\in I$,有

$$\varphi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant\frac{f(B)-f(x_0)}{B-x_0}=\varphi(B),$$

所以

$$\lim_{x\to x_0^-}\varphi(x)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f_-'(x_0)$$

存在有限.

再证 f_-' 单调增,对任何 $x_1,x_2\in\mathring{I},x<x_1<y<x_2$,

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\leqslant\frac{f(y)-f(x_1)}{y-x_1}\leqslant\frac{f(y)-f(x_2)}{y-x_2}$$

令 $x\to x_1^-,y\to x_2^-$,得到 $f_-'(x_1)\leqslant f_-'(x_2)$,即 f_-' 单调增.

同理可证对任何 $x\in\mathring{I}$,$f_+'(x)$ 存在有限,且为增函数.

此外,如果 $y<x<z$,则在不等式

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\leqslant\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

中令 $y\to x^-,z\to x^+$,就得到

$$f_-'(x)\leqslant f_+'(x).$$

(3) 取 $x_1,x_2\in[a,b]\subset(A,B)\subset[A,B]\subset\mathring{I},x_1<x_2$,则由(1)知

$$\frac{f(A)-f(a)}{A-a}\leqslant\frac{f(x_1)-f(a)}{x_1-a}\leqslant\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leqslant\frac{f(b)-f(x_2)}{b-x_2}\leqslant\frac{f(B)-f(b)}{B-b},$$

所以

$$\left|\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\right|\leqslant M=\max\left\{\left|\frac{f(A)-f(a)}{A-a}\right|,\left|\frac{f(B)-f(b)}{B-b}\right|\right\}$$

即

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant M|x_2-x_1|,\quad x_1,x_2\in[a,b].$$

结合题 7.3.33,7.3.37(3) 得到

7.3.38 f 在开区间 I 上为凸函数 $\Leftrightarrow$

(1) 对任意的 $x_1\in I,x_2\in I$,有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\leqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

(2) f 在 I 内连续或 f 在 I 的任一闭子区间上有上界.

我们知道，一个实值函数 $f(x)$ 在点 x_0 不一定有极限，但总存在 $x_n\to x_0$ 使 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x_n)$ 存在. 研究 f 沿趋于 x_0 的点列 x_n 的极限和这种极限值的最小值(下极限) $\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和最大值(上极限) $\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$ 对研究函数的极限是非常重要的. 众所周知，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在 $\Leftrightarrow\varliminf\limits_{x\to x_0}f(x)=\varlimsup\limits_{x\to x_0}f(x)$. 用类比的方法，我们也可用研究导出数

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$

(如果当 $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$ 时此极限存在) 来刻画 f 在 x_0 的可导性.

7.3.39 设 $A\subset\mathbf{R}$, $f:A\to\mathbf{R}$, $x_0\in A$, 如果 $h_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$, $x_0+h_n\in A$, 且

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=\lambda$$

存在(有限数或无限数)，则称 λ 为 $f(x)$ 在 x_0 的一个导出数，记作 $\lambda=Df(x_0)$.

如果 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ 存在，则称此极限(有限或 $+\infty$，或 $-\infty$) 为 f 在 x_0 的导数，记作 $f'(x_0)$. 如果 $f'(x_0)$ 为有限值，则称 f 在 x_0 是可导的.

(1) 如果 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$，则对任何 $x_0\in[a,b]$ 都有导出数；

(2) $f(x)$ 在 $x_0\in[a,b]$ 存在导数 $\Leftrightarrow f$ 在 x_0 的一切导出数都相等.

证 (1) 设 $h_n\neq0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$, 且 $x_0+h_n\in[a,b]$, 如果

$$\sigma_n=\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}$$ 为一有界数列，则由 Weierstrass 定理必有收敛子列

$$\sigma_{n_i}=\frac{f(x_0+h_{n_i})-f(x_0)}{h_{n_i}}.$$

其极限 λ 就是 $f(x)$ 在 x_0 的一个导出数；如果 σ_n 为无界数列，例如无上界，则必有子列 $\sigma_{n_i}\to+\infty$. 此时，$+\infty$ 为 f 在 x_0 的一个导出数.

(2) ($\Rightarrow$) 因为 f 在 x_0 存在导数 $f'(x_0)=\lim\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$，则对 $f'(x_0)$ 的任何开邻域 U，必存在 $\delta>0$，当 $|h|<\delta$ 时，

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\in U.$$

对于任何 $h_n\neq0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，$|h_n|<\delta$，从而

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\in U.$$

于是

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+h_n)-f(x_0)}{h_n}=f'(x_0).$$

即 f 在 x_0 的一切导出数都为 $f'(x_0)$.

($\Leftarrow$) 如果 f 在 x_0 的一切导出数都为 λ，则

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lambda.$$

(反证) 假设 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\neq\lambda$，则存在 λ 的开邻域 U_0，不存在相应的 $\delta>0$，因而对任何自然数 n，存在 h_n，使 $|h_n|<\dfrac{1}{n}$，但

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}\overline{\in}U_0.$$

显然，必有子列 n_i 使 $\lim\limits_{i\to+\infty}n_i=+\infty$，且

$$\lim_{i\to+\infty}\frac{f(x_0+h_{n_i})-f(x_0)}{h_{n_i}}=\mu\neq\lambda.$$

这与题设一切导出数都相等矛盾.

注 引进导出数就能使我们像题 7.3.28 ~ 7.3.32 那样，用导出数(代替导数) 来刻画 E 在 f 下的象集 $f(E)$ 的测度 $m(f(E))$(或外测度 $m^*(f(E))$) 和 E 的测度 $m(E)$(或外测度 $m^*(E)$) 之间的关系. 下面的题 7.3.40 ~ 7.3.42 就是叙述这个内容的.

7.3.40 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为严格增函数.

(1) 如果对任何 $x\in E\subset[a,b]$，至少有一个导出数 $Df(x)\leqslant p(0\leqslant p<+\infty)$，则

$$m^*(f(E))\leqslant p\cdot m^*(E);$$

(2) 如果对任何 $x\in E\subset[a,b]$，至少有一个导出数 $Df(x)\geqslant q(q\geqslant0)$，则

$$m^*(f(E))\geqslant q\cdot m^*(E).$$

证 (1) 对任何 $\varepsilon>0$，选有界开集 G，使得

$$E\subset G, m(G)<m^*(E)+\varepsilon.$$

如果 $x_0\in E$，则必有收敛于 0 的数列 $\{h_n\}$，使

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}=Df(x_0)\leqslant p.$$

取 $p_0>p$，当 n 充分大时，可使 $[x_0,x_0+h_n]\subset G$(不妨设 $h_n>0$，而 $h_n<0$ 时，取 $[x_0+h_n,x_0]$)，且

$$\frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n}<p_0.$$

不失一般性，可以假定上面的不等式对一切自然数 n 成立(否则取其子列代替). 现在来讨论线节

$$d_n=[x_0,x_0+h_n],$$

$$\Delta_n(x_0)=[f(x_0),f(x_0+h_n)].$$

因为 $f(x)$ 为增函数，所以

$$f(d_n(x_0))\subset\Delta_n(x_0).$$

又因

$$m(d_n(x_0)) = |h_n|,$$
$$m(\Delta_n(x_0)) = |f(x_0 + h_n) - f(x_0)|,$$

所以

$$m(\Delta_n(x_0)) < p_0 m(d_n(x_0)).$$

由于 $h_n \to 0$,必有 $\Delta_n(x_0)$,其长度可以任意小,又因 $f(E) = \{f(x_0) \mid x_0 \in E\}$,而 $f(x_0) \in \Delta_n(x_0)$,所以 $f(E)$ 按 Vitali 意义被 $\{\Delta_n(x) \mid x \in E\}$ 所覆盖(注意,这里用到 $f(x)$ 为严格增函数,否则 $\Delta_n(x)$ 可能退缩为一点,就不能用 Vitali 定理).于是,可以取其中两两不相交的线节列 $\{\Delta_{n_i}(x_i) \mid i = 1,2,\cdots,\}$ 使

$$m([f(E) - \bigcup_{i=1}^{\infty}\Delta_{n_i}(x_i)]) = 0.$$

显然(由 $\Delta_{n_i}(x_i)$ 两两不交推出 $d_{n_i}(x_i)$ 也两两不交),

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &\leqslant \sum_{i=1}^{n} m(\Delta_{n_i}(x_i)) \\ &< p_0 \sum_{i=1}^{\infty} m(d_{n_i}(x_i)) \\ &= p_0 m(\bigcup_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)) < p_0 m(G) \\ &< p_0(m^*(E) + \varepsilon). \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, $p_0 \to p$ 得到

$$m^*(f(E)) \leqslant pm^*(E).$$

(2) 当 $q = 0$ 时,定理显然成立.

当 $q > 0$ 时,设 $q > q_0 > 0$.对任何 $\varepsilon > 0$,取有界开集 G,使

$$f(E) \subset G, m(G) < m^*(f(E)) + \varepsilon.$$

设 S 为 f 在 E 中连续点的全体.因为单调函数的不连续点的全体为至多可数集,所以 $E - S$ 为至多可数集.

设 $x_0 \in E$,则必有 $h_n \to 0$,使得

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} = Df(x_0) \geqslant q.$$

不妨设对所有的自然数 n,有

$$\frac{f(x_0 + h_n) - f(x_0)}{h_n} > q_0.$$

记(不妨设 $h_n > 0$)

$$d_n(x_0) = [x_0, x_0 + h_n],$$
$$\Delta_n(x_0) = [f(x_0), f(x_0 + h_n)],$$

则 $m(\Delta_n(x_0)) > q_0 m(d_n(x_0))$.

如果 $x_0 \in S$,则当 n 充分大时,线节

$$[f(x_0), f(x_0 + h_n)] \subset G.$$

不妨设对所有的 n, $[f(x_0), f(x_0 + h_n)] \subset G$.

点集 S 依 Vitali 意义完全被线节 $\{d_n(x) \mid x \in S\}$ 所覆盖,因此,可在这些线节中选取两两不相交的线节列 $\{d_{n_i}(x_i)\}$,使

$$m(S - \bigcup_{i=1}^{\infty} d_{n_i}(x_i)) = 0.$$

所以

$$m^*(S) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(d_{n_i}(x_i)) < \frac{1}{q_0} \sum_{i=1}^{\infty} m(\Delta_{n_i}(x_i)).$$

但因 $d_{n_i}(x_i)$ 两两不相交和 $f(x)$ 是严格增知,$\Delta_{n_i}(x_i)$ 也是两两不相交的,所以

$$\begin{aligned} q_0 m^*(S) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} m(\Delta_{n_i}(x_i)) = m(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Delta_{n_i}(x_i)) \\ &\leqslant m(G) < m^*(f(E)) + \varepsilon. \end{aligned}$$

令 $\varepsilon \to 0^+$, $q_0 \to q$,有

$$m^*(f(E)) \geqslant qm^*(S).$$

再由

$$m^*(E) \leqslant m^*(S) + m^*(E - S) = m^*(S).$$

立即推出

$$m^*(f(E)) \geqslant qm^*(E).$$

7.3.41 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 为增函数.

(1) 如果 f 具有性质 (N):对任何 $e \subset [a,b]$, $m(e) = 0$,必有 $m(f(e)) = 0$,且对任何 $x \in E \subset [a,b]$,至少有一个导出数 $Df(x) \leqslant p$ $(0 \leqslant p < +\infty)$,则

$$m^*(f(E)) \leqslant pm^*(E).$$

(2) 如果对任何 $x \in E \subset [a,b]$,至少有一个导出数 $Df(x) \geqslant q$ $(q \geqslant 0)$,则

$$m^*(f(E)) \geqslant qm^*(E).$$

证 (1) 根据下面题 7.3.43,f 在 $[a,b]$ 上(关于 Lebesgue 测度)几乎处处可导,记 A 为 f 在 $[a,b]$ 中可导点的全体,显然,$m^*(E \cap A) = m^*(E)$,且

$$f'(x) \leqslant p, x \in E \cap A.$$

由于 f 具有性质 (N),故 $m(f(E - A)) = m^*(f(E - A)) = 0$.再由题 7.3.28(2),

$$\begin{aligned} m^*(f(E)) &= m^*(f[(E \cap A) \cup (E - A)]) \\ &= m^*(f(E \cap A)) \leqslant pm^*(E \cap A) \\ &= pm^*(E). \end{aligned}$$

(2) 当 $q = 0$ 时,显然.

当 $q > 0$ 时,类似题 7.3.40(2) 的证明,只须将"但因 $d_{n_i}(x_i)$ 两两不相交和 f 是严格增知,$\Delta_{n_i}(x_i)$ 也是两两不相交的"改为"但因 $d_{n_i}(x_i)$ 两两不相交和 f 是单调增知,$\Delta_{n_i}(x_i)$ 是两两无公共内点的".其他证明完全相同.

读者可以思考:在题 7.3.41(1) 中,如果将条件"f 具有性质(N)"删去,结论是否仍然正确?

7.3.42 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 为增函数,则

(1) f 的一切导出数都是非负的;

(2) $m(E_\infty)=0$,其中 $E_\infty=\{x\in[a,b]\mid f$ 在 x 至少有一个导出数为 $+\infty$ 或 $-\infty\}$;

(3) $m(E_{p,q})=0$,其中 $p<q$,

$E_{p,q}=\{x\in[a,b]\mid x$ 点有两个导出数满足 $D_1f(x)<p<q<D_2f(x)\}$.

证 (1) 因为 f 为增函数,故对任何 $h_n\neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}h_n=0$ 有

$$\frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\geqslant 0,$$

从而 $Df(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}\geqslant 0$.

(2) 先假定 $f(x)$ 是严格增函数.(反证)假设 $m^*(E_{+\infty})>0$,其中 $E_{+\infty}=\{x\in[a,b]\mid$ 在 x 至少有一个导出数 $Df(x)=+\infty\}$,则由题 7.3.40(2) 知 $m^*(f(E_{+\infty}))=+\infty$,但由 f 单调增得到 $f(E)\subset[f(a),f(b)]$ 和 $m^*(f(E_{+\infty}))\leqslant f(b)-f(a)<+\infty$,这就推出了矛盾.所以

$$m^*(E_{+\infty})=0.$$

如果 f 为增函数,则 $g(x)=f(x)+x$ 为严格增函数.由于

$$\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+1,$$

所以 $Df(x)=+\infty\Leftrightarrow Dg(x)=+\infty$,从而 $m(E_{+\infty})=m(E_{+\infty}(f))=m(E_{+\infty}(g))=0$.

同理 $m(E_{-\infty})=0$.因此,$m(E_\infty)=m(E_{+\infty}\cup E_{-\infty})=0$.

(3) 先假定 f 为严格增函数,应用题 7.3.40 得到

$$qm^*(E_{p,q})\leqslant m^*(f(E_{p,q}))\leqslant pm^*(E_{p,q}),$$
$$0\leqslant(p-q)m^*(E_{p,q})\leqslant 0,$$
$$m^*(E_{p,q})=0.$$

如果 f 不是严格增函数,则 $g(x)=f(x)+x$ 是严格增函数.则

$m(E_{p,q})=m(E_{p,q}(f))$

$=m(\{x\in[a,b]\mid x$ 点有两个导出数满足 $D_1f(x)<p<q<D_2f(x)\})$

$=m(\{x\in[a,b]\mid x$ 点有两个导出数满足 $D_1g(x)<p+1<q+1<D_2g(x)\})$

$=m(E_{p+1,q+1}(g))=0$.

增函数、有界变差函数和全连续函数是另一类重要的实值函数.

7.3.43 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为增函数,则

(1) f 在 $[a,b]$ 中(关于 Lebesgue 测度)几乎所有的 x 存在着有限的导数 $f'(x)$;

(2) $f(x)$ 的导函数(如果 $f'(x)$ 在 x 不存在,则补充定义为 0) $f'(x)$ 是 Lebesgue 可测的,且

$$\int_a^b f'(x)dx\leqslant f(b)-f(a).$$

此式表示 $f'(x)$ 是 Lebesgue 可积的.举出上述等号不成立的例子.

证 (1) 容易看出

$$E=\{x\in[a,b]\mid f'(x)\text{ 在 }x\text{ 不存在}\}=E_\infty\cup\Big(\bigcup_{\substack{p,q\in\mathbf{Q}\cap[a,b]\\ p<q}}E_{p,q}\Big)$$

(其中 $E_\infty,E_{p,q}$ 如题 7.3.42 所述),故

$$0\leqslant m(E)\leqslant m(E_\infty)+\sum_{\substack{p,q\in\mathbf{Q}\cap[a,b]\\ p<q}}m(E_{p,q})$$
$$=0+\sum_{\substack{p,q\in\mathbf{Q}\cap[a,b]\\ p<q}}0=0,$$
$$m(E)=0.$$

(2) 先将 $f(x)$ 的定义延拓到 $[a,b+1]$,使

$$f(x)=f(b),x\in(b,b+1].$$

于是(可能除 $x=b$ 外,$f'(b)$ 原来可能只是左导数),对于 $f(x)$ 存在导数 $f'(x)$ 的点 x,成立着

$$f'(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}.$$

因此,$f'(x)$(关于 Lebesgue 测度)作为几乎处处收敛的可测函数列的极限函数是可测的.又因 $f'(x)\geqslant 0$,所以 Lebesgue 积分

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$$

是有意义的,根据 Fatou 定理,

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant\sup\left\{\int_a^b\frac{f(x+\frac{1}{n})-f(x)}{\frac{1}{n}}\mathrm{d}x\right\}$$
$$=\sup\left\{n\Big[\int_{a+\frac{1}{n}}^{b+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\Big]\right\}$$
$$=\sup\left\{n\Big[\int_b^{b+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{a+\frac{1}{n}}f(x)\mathrm{d}x\Big]\right\}$$
$$=n\left\{\frac{1}{n}f(b)-\frac{1}{n}f(a)\right\}=f(b)-f(a).$$

上述不等式等号不成立的例子:

设 $C\subset[0,1]$ 为题 7.2.16 中的 Lebesgue 测度为零的 Cantor 疏集.将它的余区间集分成下列类别,并定义 Cantor 函数 $\theta(x)$ 如下:第一类是区间 $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$,令 $\theta(x)=\frac{1}{2},x\in(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$;第二类区间是 $(\frac{1}{9},\frac{2}{9}),(\frac{7}{9},\frac{8}{9})$,令

$$\theta(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2^2},x\in(\dfrac{1}{9},\dfrac{2}{9}),\\[2mm] \dfrac{3}{2^2},x\in(\dfrac{7}{9},\dfrac{8}{9}),\end{cases}$$

第 n 类区间中，$\theta(x)$ 依次取值为 $\frac{1}{2^n},\frac{3}{2^n},\frac{5}{2^n},\cdots,\frac{2^n-1}{2^n}$，于是，$\theta(x)$ 在 C 的余集 $[0,1]-C$ 上有了意义，它在 $[0,1]-C$ 的每个构成区间上是常值. 显然，$\theta(x)$ 为 $[0,1]-C$ 上的增函数. 在 C 上补充 $\theta(x)$ 的定义如下：

$$\theta(0)=0,\qquad \theta(1)=1,$$

而对于 $x_0\in C\cap(0,1)$，则令

$$\theta(x_0)=\sup\{\theta(x)\mid x\in[0,x_0)-C\}.$$

容易看出，$\theta(x)$ 为整个 $[0,1]$ 上的增函数.

此外，还可以证明 $\theta(x)$ 为一个连续函数.（反证）假设 $\theta(x)$ 在 x_0 不连续，则 $(f(x_0-0),f(x_0))$ 或 $(f(x_0),f(x_0+0))$ 的一切数就不是 $\theta(x)$ 的函数值. 但是由于 $\theta(x)$ 在 $[0,1]-C$ 上的值在 $[0,1]$ 中处处稠密，因而 $(f(x_0-0),f(x_0))$ 和 $(f(x_0),f(x_0+0))$ 中都有 $\theta(x)$ 的函数值，矛盾.

因为 $\theta'(x)\underset{m}{\doteq}0$（在 $[0,1]-C$ 中每一点有 $\theta'(x)=0$），所以

$$\int_0^1\theta'(x)\mathrm{d}x=0<1=\theta(1)-\theta(0).$$

7.3.44 设 $f\in L[a,b]$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\underset{m}{\doteq}f(x).$$

证 设 $g\in L[a,b]$，记 $g=g^+-g^-$，因 $\int_a^x g^+(t)\mathrm{d}t,\int_a^x g^-(t)\mathrm{d}t$ 是两个单调增函数，所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\underset{m}{\doteq}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g^+(t)\mathrm{d}t-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g^-(t)\mathrm{d}t,$$

而且是有限的. 根据题 7.3.43，这三个导函数不仅可积，而且

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g^+(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x+\int_a^b\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x g^-(t)\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b g^+(t)\mathrm{d}t+\int_a^b g^-(t)\mathrm{d}t=\int_a^b|g(t)|\mathrm{d}t.\quad(*)$$

对任何 $\varepsilon>0$，由[1]183页 Лузин 定理的系，存在 $[a,b]$ 上的连续函数 φ，使得

$$\int_a^b|f-\varphi|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

对连续函数 φ，显然 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x\varphi(t)\mathrm{d}t=\varphi(x)$. 因此，对 $g(x)=f(x)-\varphi(x)$，应用上面的 $(*)$ 式得到

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x[f(t)-\varphi(t)]\mathrm{d}t+\varphi(x)-f(x)\right|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x[f(t)-\varphi(t)]\mathrm{d}t\right|\mathrm{d}x$$
$$+\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant2\int_a^b|f(x)-\varphi(x)|\mathrm{d}x<2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得到

$$\int_a^b\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\right|\mathrm{d}x=0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)\underset{m}{\doteq}0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\underset{m}{\doteq}f(x).$$

7.3.45 设 $f\in L[a,b]$，则

(1) 在 $[a,b]$ 上（关于 Lebesgue 测度）几乎所有的点是 f 的 Lebesgue 点；

(2) 如果 x_0 为 f 的 Lebesgue 点，必有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\ \Big|_{x=x_0}=f(x_0).$$

证 (1) 设 $r\in\mathbf{Q}$，显然 $|f(x)-r|\in L[a,b]$. 记

$$E_r=\left\{x\in\mathbf{R}\,\Big|\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x|f(t)-r|\mathrm{d}t=|f(x)-r|\right\}.$$

由题 7.3.44，$m(E_r)=b-a$. 记 $E=\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}E_r$，显然，

$$0\leqslant m([a,b]-E)=m([a,b]-\bigcap_{r\in\mathbf{Q}}E_r)$$
$$=m(\bigcup_{r\in\mathbf{Q}}([a,b]-E_r))$$
$$\leqslant\sum_{r\in\mathbf{Q}}m([a,b]-E_r)=\sum_{r\in\mathbf{Q}}0=0,$$
$$m(E)=m([a,b])-m([a,b]-E)$$
$$=(b-a)-0=b-a.$$

设 $x_0\in E$，对任何 $\varepsilon>0$，取 $r_0\in\mathbf{Q}$ 使 $|f(x_0)-r_0|<\frac{\varepsilon}{2}$. 因此，当任何 $h_1\geqslant0,h_2\geqslant0,h=h_1+h_2>0$ 时，有

$$\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}[|f(x)-r_0|+|f(x_0)-r_0|]\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-r_0|\mathrm{d}x+|f(x_0)-r_0|.$$

令 $h\to0^+$ 得到

$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x$$
$$\leqslant\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-r_0|\mathrm{d}x+|f(x_0)-r_0|$$
$$=|f(x_0)-r_0|+|f(x_0)-r_0|<2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$，得

$$\overline{\lim_{h\to0^+}}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0.$$

所以 $\lim\limits_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(x)-f(x_0)|\mathrm{d}x=0$，即 x_0 为 f 的 Lebesgue 点.

(2) 设 x_0 为 f 的 Lebesgue 点，则

$$\left|\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}f(t)\mathrm{d}t-f(x_0)\right|$$

$$=\frac{1}{h_1+h_2}\left|\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}[f(t)-f(x_0)]\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{h_1+h_2}\int_{x_0-h_1}^{x_0+h_2}|f(t)-f(x_0)|\mathrm{d}t\to0$$

$$(h=h_1+h_2\to0).$$

特别，当 $h_1=0,h_2>0$ 时，

$$\lim_{h_2\to0^+}\frac{1}{h_2}\int_{x_0}^{x_0+h_2}f(t)\mathrm{d}t=f(x_0);$$

当 $h_2=0,h_1>0$ 时，

$$\lim_{h_1\to0^+}\frac{1}{h_1}\int_{x_0-h_1}^{x_0}f(t)\mathrm{d}t=f(x_0),$$

所以

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\Big|_{x=x_0}=\lim_{h\to0^+}\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\mathrm{d}t=f(x_0).$$

7.3.46 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 如果 $x=x_0$ 为 f 的连续点，则 $x=x_0$ 也是

$$\pi(x)=\bigvee_a^x(f)$$

的连续点.

证 设 $x_0<b$. 先证 $\pi(x)$ 在 x_0 是右连续的，对任何 $\varepsilon>0$，在 $[x_0,b]$ 中作如下的分点：

$$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,$$

使 $V_f=\sum\limits_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|>\bigvee\limits_{x_0}^b(f)-\varepsilon.\quad(1)$

因为加入新分点决不减少 V_f，所以不妨假定

$$|f(x_1)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由(1)

$$\bigvee_{x_0}^b(f)<\varepsilon+\sum_{i=0}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

$$<2\varepsilon+\sum_{i=1}^{n-1}|f(x_{i+1})-f(x_i)|$$

$$\leqslant2\varepsilon+\bigvee_{x_1}^b(f),$$

所以

$$\pi(x_1)-\pi(x_0)=\bigvee_{x_0}^{x_1}(f)<2\varepsilon.$$

令 $x_1\to x_0^+$ 得到

$$0\leqslant\pi(x_0+0)-\pi(x_0)<2\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$，立即推出 $\pi(x_0+0)=\pi(x_0)$.

设 $x_0>a$，同理可证 $\pi(x_0-0)=\pi(x_0)$，即 $\pi(x)$ 在 x_0 左连续.

综上所述，如果 $x=x_0$ 是 f 的连续点，则 $x=x_0$ 也是 $\pi(x)=\bigvee\limits_a^x(f)$ 的连续点.

7.3.47 (1) f 在 $[a,b]$ 上为有界变差函数 $\Leftrightarrow f$ 为两个增函数之差；

(2) f 在 $[a,b]$ 上为连续的有界变差函数 $\Leftrightarrow f$ 为两个连续的增函数之差.

证 (1) ($\Leftarrow$) 由有界变差函数的定义立知：增函数为有界变差函数. 因此，如果 f 为两个增函数之差，即 $f=\pi-\nu$. 再一次根据有界变差的定义和

$$\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^n|[\pi(x_i)-\nu(x_i)]-[\pi(x_{i-1})-\nu(x_{i-1})]|$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^n|\pi(x_i)-\pi(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^n|\nu(x_i)-\nu(x_{i-1})|$$

$$<\bigvee_a^b(\pi)+\bigvee_a^b(\nu)<+\infty$$

得到 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

($\Rightarrow$) 令 $\pi(x)=\bigvee\limits_a^x(f),\nu(x)=\pi(x)-f(x)$.

显然，当 $a\leqslant x<y\leqslant b$ 时，有

$$\pi(y)=\bigvee_a^y(f)=\bigvee_a^x(f)+\bigvee_x^y(f)\geqslant\bigvee_a^x(f)=\pi(x),$$

即 π 为增函数. 此外，由全变差定义，有

$$\nu(y)-\nu(x)$$

$$=[\pi(y)-f(y)]-[\pi(x)-f(x)]$$

$$=[\pi(y)-\pi(x)]-[f(y)-f(x)]$$

$$=\bigvee_x^y(f)-[f(y)-f(x)]\geqslant0,$$

即 ν 也为增函数.

(2) ($\Leftarrow$) 显然.

($\Rightarrow$) 由(1)必要性的证明及题 7.3.45 可知结论成立.

7.3.48 设 f 为 $[a,b]$ 上的连续函数，对 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

令

$$V(\pi)=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|,$$

$$\Omega(\pi)=\sum_{k=0}^{n-1}\omega_k,\omega_k=M_k-m_k=\max f([x_k,$$

$x_{k+1}])-\min f([x_k,x_{k+1}]),\lambda=\max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1}(x_{k+1}-x_k)$，则

$$\lim_{\lambda\to0^+}V(\pi)=\lim_{\lambda\to0^+}\Omega(\pi)=\bigvee_a^b(f).$$

证 取数 $A<\bigvee\limits_a^b(f)$，则必有 $[a,b]$ 的分割

$$\pi^*:a=x_0^*<x_1^*<\cdots<x_m^*=b,$$

使得

$$\Lambda < V(\pi^*) \leqslant \bigvee_a^b(f).$$

取 $\delta > 0$ 充分小，使当 $|x'' - x'| < \delta$ 时，

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{V^* - \Lambda}{4m}.$$

则当 $\lambda < \delta$ 时，$V(\pi \cup \pi^*) \geqslant V(\pi^*)$，其中 $\pi \cup \pi^*$ 为由 π 和 π^* 的分点确定的 $[a,b]$ 的分割. 由此得到

$$V(\pi \cup \pi^*) - V(\pi) < \frac{V(\pi^*) - \Lambda}{2m} \cdot m = \frac{V(\pi^*) - \Lambda}{2},$$

$$\bigvee_a^b(f) \geqslant V(\pi) > V(\pi \cup \pi^*) - \frac{V(\pi^*) - \Lambda}{2} \geqslant V(\pi^*) - \frac{V(\pi^*) - \Lambda}{2} = \frac{V(\pi^*) + \Lambda}{2} > \frac{\Lambda + \Lambda}{2} = \Lambda.$$

这就证明了

$$\lim_{\lambda \to 0^+} V(\pi) = \bigvee_a^b(f).$$

设 $f(y_k) = m_k = \min f([x_k, x_{k+1}])$，

$f(z_k) = M_k = \max f([x_k, x_{k+1}])$，

并记 $\pi' = \pi \cup \{y_k, z_k \mid k = 0,1,\cdots,n-1\}$，则

$$V(\pi) \leqslant \Omega(\pi) \leqslant V(\pi') \leqslant \bigvee_a^b(f).$$

由此立即推出

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \Omega(\pi) = \bigvee_a^b(f).$$

7.3.49 (S. Banach) 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 为连续函数，Banach 指示函数 $N(y)$ 为方程 $f(x) = y$ 的根的个数（如果根有无穷个，则定义 $N(y) = +\infty$），其中 $y \in [m, M] = [\min f([a,b]), \max f([a,b])]$. 则 $N(y)$ 在 $[m,M]$ 上是可测的，且

$$\int_m^M N(y)\mathrm{d}y = \bigvee_a^b(f).$$

证 将 $[a,b]2^n$ 等分，$D_1 = \left[a, a + \frac{b-a}{2^n}\right]$，$D_k = \left[a + (k-1)\frac{b-a}{2^n}, a + k\frac{b-a}{2^n}\right]$，$k = 2,3,\cdots,2^n$.

定义函数 $L_k(y)(k = 1,\cdots,2^n)$ 如下，如果在集合 D_k 中 $f(x) = y$ 至少有一根，则 $L_k(y) = 1$；如果在集合 D_k 中，$f(x) = y$ 无根，则 $L_k(y) = 0$. 设

$$m_k = \inf f(D_k),\ M_k = \sup f(D_k),$$

则由介值定理知

$$L_k(y) = \begin{cases} 1, & y \in (m_k, M_k), \\ 0, & y \in \mathbf{R}^1 - [m_k, M_k]. \end{cases}$$

$L_k(y)$ 至多有两个不连续点（m_k 及 M_k），从而 $L_k(y)$ 为可测函数，且

$$\int_m^M L_k(y)\mathrm{d}y = M_k - m_k = \omega_k,$$

ω_k 表示 $f(x)$ 在 D_k 上的振幅.

显然，$N_n(y) = L_1(y) + \cdots + L_{2^n}(y)$ 刚好表示含 $f(x) = y$ 根的 D_k 的个数，且为一个 Lebesgue 可测函数，并且

$$\int_m^M N_n(y)\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{2^n}\omega_k.$$

再由题 7.3.48，有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_m^M N_n(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\omega_k = \bigvee_a^b(f).$$

因为 $N_1(y) \leqslant N_2(y) \leqslant N_3(y) \leqslant \cdots$，所以 $N^*(y) = \lim\limits_{n\to+\infty} N_n(y)$ 存在（有限或无限）且为 Lebesgue 可测函数. 根据 Levi 定理（参阅[2]158 页定理 10），

$$\int_m^M N^*(y)\mathrm{d}y = \lim_{n\to+\infty}\int_m^M N_n(y)\mathrm{d}y = \bigvee_a^b(f).$$

余下的只须证明 $N^*(y) = N(y)$.

从 $N_n(y) \leqslant N(y)$ 立即得到

$$N^*(y) = \lim_{n\to+\infty} N_n(y) \leqslant N(y).$$

另一方面，对任何自然数 $q \leqslant N(y)$，则存在 $f(x) = y$ 的 q 个两两相异的根：

$$x_1 < x_2 < \cdots < x_q.$$

取充分大的 n 使 $0 < \frac{b-a}{2^n} < \min\{x_{k+1} - x_k \mid k = 1, 2, \cdots, q\}$，则 q 个根在不同的 D_k 中. 因此

$$N^*(y) \geqslant N_n(y) \geqslant q.$$

如果 $N(y) = +\infty$，则可取 q 任意大，从而 $N^*(y) = +\infty$；如果 $N(y) < +\infty$，则可取 $q = N(y)$，因此

$$N^*(y) \geqslant q = N(y).$$

综合上述得 $N^*(y) = N(y)$.

7.3.50 设 $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ 为连续函数，$m = \min f([a,b])$，$M = \max f([a,b])$，则 f 为有界变差函数 $\Leftrightarrow f$ 的 Banach 指示函数 $N(y)$ 在 $[m,M]$ 上是 Lebesgue 可积的.

证 根据题 7.3.49 知，

$$\int_m^M N(y)\mathrm{d}y = \bigvee_a^b(f).$$

因此，f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，即 $\bigvee_a^b(f) < +\infty \Leftrightarrow \int_m^M N(y)\mathrm{d}y < +\infty$，即 Banach 指示函数 $N(y)$ 是 $[m,M]$ 上的 Lebesgue 可积函数.

7.3.51 设 f 在 $[a,b]$ 上为连续的有界变差函数，$m = \min f([a,b])$，$M = \max f([a,b])$，$N(y)$ 为 f 的 Banach 指示函数，则

$$m(\{y\in[m,M]\mid N(y)=+\infty\})=0.$$

证 因 f 在 $[a,b]$ 上为连续有界变差函数，故由题 7.3.50 知 $N(y)$ 在 $[m,M]$ 上是 Lebesgue 可积的，从而它几乎处处有限，即

$$m(\{y\in[m,M]\mid N(y)=+\infty\})=0.$$

7.3.52 (1) $[a,b]$ 上的全连续函数必是连续的；

(2) 两个全连续函数的线性组合、乘积仍是全连续函数；

(3) $[a,b]$ 上的全连续函数必是有界变差函数；

(4) $[a,b]$ 上的全连续函数关于 Lebesgue 测度几乎处处可导，且导函数是 Lebesgue 可积的.

证 (1)、(2) 由全连续定义立知.

(3) 设 f 为 $[a,b]$ 上的全连续函数，则对 $\varepsilon=1$，存在 $\delta>0$，对任何有限个互不相交的开区间 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$，只要 $\sum\limits_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$，必有

$$\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon=1.$$

取自然数 N，使得 $\frac{b-a}{N}<\delta$. 将 $[a,b]N$ 等分，得到分点组

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

对 $[x_{i-1},x_i]$ 上任一组分点

$$x_{i-1}=z_0<z_1<\cdots<z_k=x_i,$$

由于 $\sum\limits_k(z_k-z_{k-1})=x_i-x_{i-1}<\delta$，故

$$V_f(z_0,\cdots,z_k)\leqslant 1.$$

从而 $\bigvee\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant 1$ 和 $\bigvee\limits_a^b(f)=\sum\limits_{i=1}^N\bigvee\limits_{x_{i-1}}^{x_i}(f)\leqslant N$. 这就证明了 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数.

(4) 由题 7.3.43 和 (3) 得到 f 关于 Lebesgue 测度几乎处处可导，且 f' 是可积的.

7.3.53 设 f 为 $[a,b]$ 上的全连续函数，而且 $f'(x)\underset{m}{=}0$（f' 关于 Lebesgue 测度几乎处处为零，即 f' 除一个 Lebesgue 零测集外处处为零），则 $f=$ 常数.

证 先证 $f(b)=f(a)$. 对任何 $\varepsilon>0$，由 $f(x)$ 的全连续性，存在 $\delta>0$，当 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$ 是有限个总长度小于 δ 的互不相交的开区间时，

$$\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|<\varepsilon.$$

记 $E_0=\{x\mid f'(x)=0,x\in(a,b)\}$，由题设 $m([a,b]-E_0)=0$. 所以，存在开集 $G\supset[a,b]-E_0$，使 $m(G)<\delta$. 设 $\{(a_\nu,b_\nu)\}$ 为 G 的构成区间集.

另一方面，当 $y_0\in[a,b]-G\subset E_0$ 时，$f'(y_0)=0$. 所以存在正数 $h(y_0,\varepsilon)$，使得当 $y\in(y_0-h,y_0+h)$ 时，

$$\left|\frac{f(y)-f(y_0)}{y-y_0}\right|<\varepsilon.$$

根据 Borel 覆盖定理，$[a,b]$ 的开覆盖 $\{(a_\nu,b_\nu)\mid\nu=1,2,\cdots\}\cup\{(y_0-h(y_0,\varepsilon),y_0+h(y_0,\varepsilon))\mid y_0\in[a,b]-G\}$ 必有有限子覆盖

$$\{(a_{\nu_1},b_{\nu_1}),\cdots,(a_{\nu_m},b_{\nu_m}),(y_1-h_1,y_1+h_1),\cdots,(y_l-h_l,y_l+h_l)\}.$$

显然，可以在 $\{a_{\nu_i},b_{\nu_i},y_j,i=1,\cdots,m;j=1,\cdots,l\}$ 中再加入适当分点，使其全体构成 $[a,b]$ 上的一个分点组：

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b.$$

并且使得任何 (x_{k-1},x_k) 或者 (i) 包含在某个 (a_{ν_i},b_{ν_i}) 中；或者 (ii) $x_{k-1}=y_j$，且 $(x_{k-1},x_k)\subset(y_j,y_j+h_j)$；或者 (iii) $x_k=y_j$，且 $(x_{k-1},x_k)\subset(y_j-h_j,y_j)$. 用 $\sum'$ 表示对 (i) 形式 (x_{k-1},x_k) 求和，用 $\sum''$ 表示对 (ii)、(iii) 形式 (x_{k-1},x_k) 求和，于是，

$$\begin{aligned}|f(b)-f(a)|&\leqslant\sum_{k=1}^n|f(x_k)-f(x_{k-1})|\\&=\sum{}'|f(x_k)-f(x_{k-1})|+\sum{}''|f(x_k)-f(x_{k-1})|\\&<\varepsilon+\varepsilon\sum{}''(x_k-x_{k-1})\\&\leqslant\varepsilon+\varepsilon(b-a)=\varepsilon[(b-a)+1].\end{aligned}$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得到 $f(b)=f(a)$. 对任何 $x\in[a,b]$，用 $[a,x]$ 代替 $[a,b]$ 便有

$$f(x)=f(a)=\text{常数}.$$

7.3.54 Newton-Leibniz 公式

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$$

成立 $\Leftrightarrow f$ 为全连续函数.

证 ($\Rightarrow$) 因为 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$，所以由积分的全连续性，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $[a,b]$ 中任何有限个（或可数个）互不相交的区间 (a_ν,b_ν)，$\nu=1,2,\cdots$，当 $m(\bigcup\limits_\nu(a_\nu,b_\nu))=\sum\limits_\nu(b_\nu-a_\nu)<\delta$ 时有

$$\begin{aligned}\sum_\nu|f(b_\nu)-f(a_\nu)|&=\sum_\nu\left|\int_{a_\nu}^{b_\nu}f'(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\sum_\nu\int_{a_\nu}^{b_\nu}|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_{\bigcup\limits_\nu(a_\nu,b_\nu)}|f'(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.\end{aligned}$$

所以，f 为全连续函数.

($\Leftarrow$) 因为 f 为全连续函数，故由题 7.3.51(4) 知 $f'(x)$ 是 Lebesgue 可积的. 由必要性证明知 $\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 是全连续的. 所以，两个全连续函数的差 $f(x)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 也是全连续的. 根据

$$0=f'(x)-f'(x)\underset{m}{=}\left(f(x)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t\right)'$$

和题 7.3.53, $f(x)-\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t \equiv$ 常数 $=f(a)-\int_a^a f'(t)\mathrm{d}t=f(a)$, 即 $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.

7.3.55 设 f 在 $[a,b]$ 上处处可导,且 f' 在 $[a,b]$ 上 Lebesgue 可积(记作 $f'\in L[a,b]$),则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

证 因为 $f'\in L[a,b]$,故 $|f'|\in L[a,b]$. 由积分的全连续性可知,对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,当 $e\subset[a,b]$ 且 $m(e)<\delta$ 时,有

$$\int_e |f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

从而,对于长度总和小于 δ 的任意互不相交的区间 $(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_n)$,根据连续函数的介值定理和题 7.3.28,有

$$\sum_{i=1}^n |f(y_i)-f(x_i)|\leqslant\sum_{i=1}^n m(f([x_i,y_i]))$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n\int_{[x_i,y_i]}|f'(x)|\mathrm{d}x$$
$$=\int_{\bigcup_{i=1}^n[x_i,y_i]}|f'(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

所以,f 在 $[a,b]$ 上为全连续函数. 再由题 7.3.54 得到

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a).$$

注 题 7.3.43(2) 指出:增函数 f 有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x\leqslant f(b)-f(a)$,且有等号不成立的例子. 问题是:什么条件下,微积分的基本公式,即 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$ 成立?题 7.3.54 给出了 Newton-Leibniz 公式成立的充要条件是 f 为全连续函数. 因而引进全连续函数的概念就可以彻底解决 Newton-Leibniz 公式成立的问题. 题 7.3.55 说明,只要满足很弱的条件(充分条件):$f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上为 Lebesgue 可积函数,就有 $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x=f(b)-f(a)$. 这样弱的条件,在数学分析中是得不出的.

7.3.56 设 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为连续函数,则 f 具有性质(N):对任何 $e\subset[a,b]$, $m(e)=0$, 必有 $m(f(e))=0\Leftrightarrow$ 任何 Lebesgue 可测集 E 的象 $f(E)$ 仍是 Lebesgue 可测集.

证 ($\Rightarrow$) 设 f 具有性质(N),$E\subset[a,b]$ 为 Lebesgue 可测集,则 $E=A\cup e$,其中 A 为 F_σ 型的集,而 $m(e)=0$. 于是 $m(f(e))=0$. 由于 $[a,b]$ 中的闭子集等价于紧致子集,而紧致集在连续映射 f 下的象仍为紧致集,从而闭集在连续映射 f 下仍为闭集. 由此推出 $f(A)$ 仍为 F_σ 型的集和 $f(E)=f(A)\cup f(e)$ 为 Lebesgue 可测集.

($\Leftarrow$)(反证)假设 f 不具有性质(N),则必有 $e_0\subset[a,b]$,使 $m(e_0)=0$,但 $m^*(f(e_0))>0$.

今在 $f(e_0)$ 上取一个 Lebesgue 不可测子集 B(如果 $f(e_0)$ 为 Lebesgue 不可测集,则取 $B=f(e_0)$;如果 $f(e_0)$ 为 Lebesgue 可测集,则 $m(f(e_0))=m^*(f(e_0))>0$,则根据题 7.2.32,必可取 Lebesgue 不可测集 $B\subset f(e_0)$),显然,$A=f^{-1}(B)=\{x\in e_0\mid f(x)\in B\}\subset e_0$,因此

$$0\leqslant m^*(A)\leqslant m(e_0)=0,$$
$$m(A)=m^*(A)=0$$

和 A 为 Lebesgue 可测集. 但是 $B=f(A)$ 为 Lebesgue 不可测集,这与 $f(A)$ 是 Lebesgue 可测集相矛盾.

全连续函数既然这么重要,有必要仔细地研究它. 题 7.3.57 给出了 f 为全连续函数的充要条件:f 为具有性质(N)的连续有界变差函数;以及全连续函数 f 的全变差 $\bigvee_a^b(f)$ 满足:

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

7.3.57 $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ 为全连续函数 $\Leftrightarrow f$ 为 $[a,b]$ 上的连续有界变差函数,且具有性质(N).

证 ($\Rightarrow$) 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的全连续函数,由题 7.3.52(3) 知,f 为连续的有界变差函数. 再证 f 具有性质(N).

设 $m(E)=0$. 首先假定 $E\subset(a,b)$,对任何 $\varepsilon>0$,取 $\delta>0$,当至多可数个不相重叠的区间 $\{(a_k,b_k)\}$ 的全长小于 δ 时,

$$\sum_k(M_k-m_k)<\varepsilon,$$

其中 $m_k=\min f([a_k,b_k])$, $M_k=\max f([a_k,b_k])$.

因 $m(E)=0$,所以存在有界开集 G,使

$$E\subset G,\ m(G)<\delta.$$

由于 $E\subset(a,b)$,不妨设 $G\subset(a,b)$,记 G 的构成区间为 $\{(a_k,b_k)\}$,于是

$$\sum_k(b_k-a_k)<\delta,$$

且 $f(E)\subset f(G)=\bigcup_k f((a_k,b_k))\subset\bigcup_k f([a_k,b_k])$,

$$0\leqslant m^*(f(E))\leqslant\sum_k m^*(f([a_k,b_k]))$$
$$=\sum_k m^*([m_k,M_k])=\sum_k(M_k,m_k)<\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$,得到 $m^*(f(E))=0$, $m(f(E))=0$.

至于一般情形,即 a,b 可能属于 E,则

$$m(f(E))$$
$$=m(f(E-\{a,b\}))+m(\{f(a),f(b)\})$$
$$=0+0=0.$$

($\Leftarrow$)(反证) 假设 f 不是全连续的,则必有 $\varepsilon_0>0$,不存在 $\delta>0$,使当任何互不重叠的区间组 $\{(a_k,b_k)\}$,$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta$,有不等式

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)<\varepsilon_0.$$

现取收敛的正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty}\delta_i$,对于每个 δ_i,取一互不相重叠的区间组 $(a_k^{(i)},b_k^{(i)})$, $k=1,\cdots,n_i$,使得

$$\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^{(i)}-a_k^{(i)})<\delta_i,\ \sum_{k=1}^{n_i}(M_k^{(i)}-m_k^{(i)})\geqslant\varepsilon_0,$$

其中 $m_k^{(i)}=\min(f([a_k^{(i)},b_k^{(i)}]))$,

$M_k^{(i)}=\max(f([a_k^{(i)},b_k^{(i)}]))$.

令

$$E_i=\bigcup_{k=1}^{n_i}(a_k^{(i)},b_k^{(i)}),\ A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i.$$

由于

$$0\leqslant m(A)\leqslant m(\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i)\leqslant\sum_{i=n}^{\infty}m(E_i)$$

$$=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{k=1}^{n_i}(b_k^{(i)}-a_k^{(i)})<\sum_{i=n}^{\infty}\delta_i,$$

令 $n\to\infty$,得到

$$0\leqslant m(A)\leqslant 0,\ m(A)=0.$$

因此,由 f 具有性质(N) 知, $m(f(A))=0$.

现构造函数 $L_k^{(i)}(y)$ 为

$$L_k^{(i)}(y)=\begin{cases}1, & f(x)=y\text{ 在}(a_k^{(i)},b_k^{(i)})\text{ 中至少有一根},\\ 0, & f(x)=y\text{ 在}(a_k^{(i)},b_k^{(i)})\text{ 中无根}\end{cases}$$

于是, $L_k^{(i)}(y)$ 当 $y\in(m_k^{(i)},M_k^{(i)})$ 时为1,而当 $y\in\mathbf{R}-[m_k^{(i)},M_k^{(i)}]$ 时为0,所以

$$\int_m^M L_k^{(i)}(y)\mathrm{d}y=M_k^{(i)}-m_k^{(i)}.$$

显然, $N_i(y)=\sum_{k=1}^{n_i}L_k^{(i)}(y)$ 为

$$\{(a_k^{(i)},b_k^{(i)})\mid f(x)=y\text{ 在}(a_k^{(i)},b_k^{(i)})\text{ 中至少有一根}\}$$

中的个数. 由题 7.3.50, $f(x)$ 的 Banach 指示函数 $N(y)$ 是 $[m,M]$ 上的 Lebesgue 可积函数,再由 $N_i(y)\leqslant N(y)$ 得到 $N_i(y)$ 在 $[m,M]$ 上也是 Lebesgue 可积的,且

$$\int_m^M N_i(y)\mathrm{d}y=\sum_{k=1}^{n_i}\int_m^M L_k^{(i)}(y)\mathrm{d}y$$

$$=\sum_{k=1}^{n_i}(M_k^{(i)}-m_k^{(i)})\geqslant\varepsilon_0.$$

可以证明:在 $[m,M]$ 中,

$$\lim_{i\to+\infty}N_i(y)\overset{m}{=}0.$$

利用此结果及 $N(y)$ 在 $[m,M]$ 上 Lebesgue 可积,由[1]222 页定理1′ 可得到

$$0<\varepsilon_0\leqslant\varlimsup_{i\to+\infty}\int_m^M N_i(y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_m^M\varlimsup_{i\to+\infty}N_i(y)\mathrm{d}y=\int_m^M 0\mathrm{d}y=0,$$

矛盾. 于是定理就证毕.

最后来证明在 $[m,M]$ 中 $\lim_{i\to+\infty}N_i(y)\overset{m}{=}0$.

设 $B=\{y\in[m,M]\mid\varlimsup_{i\to+\infty}N_i(y)\neq0\}$, $C=\{y\in[m,M]\mid N(y)=+\infty\}$. 因为 $N(y)$ 是 Lebesgue 可积的,所以 $m(C)=0$.

设 $y_0\in B-C$,则 $\varlimsup_{i\to+\infty}N_i(y_0)\neq0$,从而存在 $\{i_r\}$ 使(注意 $N_i(y_0)$ 为非负整数)

$$N_{i_r}(y_0)\geqslant1,\ r=1,2,\cdots.$$

故对每个 r,存在 x_{i_r},使

$$f(x_{i_r})=y_0,\ x_{i_r}\in E_{i_r}=\bigcup_{k=1}^{n_{i_r}}(a_k^{(i_r)},b_k^{(i_r)}).$$

但由 $N(y_0)<+\infty$ 知 x_{i_r} 中相异的点只有有限个,因此在其中至少有一个(记作 x_0) 在 $\{x_{i_r}\}$ 中出现无限次. 于是, x_0 属于无限多个 E_i,且 $f(x_0)=y_0$. 此时,必有 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{i=n}^{\infty}E_i=A$, $y_0=f(x_0)\in f(A)$,从而 $B-C\subset f(A)$ 和

$$0\leqslant m(B)\leqslant m(B-C)+m(C)$$

$$\leqslant m(A)+m(C)=0+0=0.$$

故 $m(B)=0$,即 $\lim_{i\to+\infty}N_i(y)\overset{m}{=}0$.

7.3.58 全连续函数 f 将 Lebesgue 可测集映成 Lebesgue 可测集.

证 由题7.3.57,全连续函数 f 具有性质(N),再从题7.3.56知, f 将 Lebesgue 可测集变为 Lebesgue 可测集.

7.3.59 设 f 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数,则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\overset{m}{=}|f'(x)|.$$

证 因为 $\bigvee_a^x$ 为单调增函数,故有 $E\subset[a,b]$, $m(E)=b-a$,使对 $x\in E$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)$, $f'(x)$ 都存在有限.

显然,当 $x_0\in E$ 时,因

$$\frac{1}{x-x_0}\left[\bigvee_a^x(f)-\bigvee_a^{x_0}(f)\right]$$

$$=\frac{1}{x-x_0}\bigvee_{x_0}^x(f)\geqslant\frac{1}{x-x_0}|f(x)-f(x_0)|,$$

所以有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\Big|_{x=x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0^+}\frac{1}{x-x_0}\Big[\bigvee_a^x(f)-\bigvee_a^{x_0}(f)\Big]$$

$$\geqslant\left|\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|=|f'(x_0)|.$$

(反证) 假设命题不真,则有 $E_1\subset E$ 及 $\delta>0$,使 $m(E_1)>0$,并且对 $x\in E_1$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)>|f'(x)|+\delta.$$

取 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}\delta m(E_1)>0$,有 $[a,b]$ 的分割

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$$

使

$$0\leqslant\bigvee_a^b(f)-\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|<\varepsilon_0.$$

命 $\widetilde{E_1}=E_1-\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,对任何 $\xi\in\widetilde{E_1}$,有 $\eta(\xi)>0$,使当 $0<r=r(\xi)<\eta(\xi)$ 时,

$$\{x_0,\cdots,x_n\}\cap[\xi,\xi+r]=\varnothing,$$

且

$$\frac{1}{r}\bigvee_\xi^{\xi+r}(f)>\left|\frac{f(\xi+r)-f(\xi)}{r}\right|+\delta.$$

作 $\mathscr{A}=\{I_{\xi,r}=[\xi,\xi+r]\mid\xi\in\widetilde{E_1},0<r=r(\xi)<\eta(\xi)\}$,则易见 $\mathscr{A}$ 在 Vitali 意义下覆盖 $\widetilde{E_1}$,从而有 $I_{\xi_1,r_1},\cdots,I_{\xi_l,r_l}\in\mathscr{A}$,它们两两不相交,且

$$m\Big(\widetilde{E_1}-\bigcup_{j=1}^l I_{\xi_j,r_j}\Big)<\frac{m(\widetilde{E_1})}{2}=\frac{m(E_1)}{2},$$

所以

$$\sum_{j=1}^l r_j=m\Big(\bigcup_{j=1}^l I_{\xi_j,r_j}\Big)$$

$$>m(\widetilde{E_1})-\frac{m(\widetilde{E_1})}{2}=\frac{m(\widetilde{E_1})}{2}.$$

由 $I_{\xi_j,r_j}\in\mathscr{A}$,故

$$\frac{1}{r_j}\bigvee_{\xi_j}^{\xi_j+r_j}(f)>\frac{|f(\xi_j+r_j)-f(\xi_j)|}{r_j}+\delta,$$

$$\sum_{j=1}^l\bigvee_{\xi_j}^{\xi_j+r_j}(f)>\sum_{j=1}^l|f(\xi_j+r_j)-f(\xi_j)|+\delta\sum_{j=1}^l r_j$$

$$>\sum_{j=1}^l|f(\xi_j+r_j)-f(\xi_j)|+\frac{1}{2}\delta m(\widetilde{E_1}),$$

而

$$\sum_{\text{其余}}\bigvee_{\eta_i}^{\eta_i'}(f)\geqslant\sum_{\text{其余}}|f(\eta_i')-f(\eta_i)|.$$

将上面两式相加,便知

$$\bigvee_a^b(f)=\sum_{j=1}^l\bigvee_{\xi_j}^{\xi_j+r_j}(f)+\sum_{\text{其余}}\bigvee_{\eta_i}^{\eta_i'}(f)$$

$$>\sum_{j=1}^l|f(\xi_j+r_j)-f(\xi_j)|$$

$$+\sum_{\text{其余}}|f(\eta_i')-f(\eta_i)|+\frac{1}{2}\delta m(\widetilde{E_1})$$

$$\geqslant\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\frac{1}{2}\delta m(\widetilde{E_1})$$

$$>\bigvee_a^b(f)-\varepsilon_0+\frac{1}{2}\delta m(\widetilde{E_1})$$

$$=\bigvee_a^b(f)+\frac{1}{4}\delta m(\widetilde{E_1}).$$

矛盾.

7.3.60 设 f 为 $[a,b]$ 上的全连续函数,则

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

证法 1 (1) 如果 $f'(t)$(因而 $|f'(t)|$)为 $[a,b]$ 上的连续函数,则由 Riemann 可积的定义,对任何 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对 $[a,b]$ 的分割

$$\pi:a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

当 $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1})<\delta$ 时,根据中值定理有

$$\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t-\varepsilon$$

$$<\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^n|f'(\xi_i)|(x_i-x_{i-1})$$

$$<\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon.$$

于是

$$\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t-\varepsilon<\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

$$\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

令 $\varepsilon\to0^+$,得到

$$\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

另一方面,对上述 $\varepsilon>0$ 和 $\delta>0$,存在 $[a,b]$ 的分割

$$\pi_1:a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b,$$

$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta y_i<\delta$,根据中值定理得

$$\bigvee_a^b(f)-\varepsilon<\sum_{i=1}^m|f(y_i)-f(y_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^m|f'(\eta_i)|(y_i-y_{i-1})$$

$$<\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t+\varepsilon.$$

再令 $\varepsilon\to0^+$,得到

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\int_a^b|f'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

综上所述，$\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t = \bigvee_a^b(f)$.

(2) 如果 f 为$[a,b]$上的全连续函数，不失一般性，设 $f(a)=0$，则由题 7.3.52(4) 知 f' 为$[a,b]$上的 Lebesgue 可积函数．因此，对任何 $\varepsilon>0$，由 Лузин 定理，必有$[a,b]$上的连续函数 φ_ε 使得

$$\int_a^b |f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon.$$

令 $f_{\varphi_\varepsilon}(x)=\int_a^x \varphi_\varepsilon(t)\mathrm{d}t$，由微积分基本公式，$f'_{\varphi_\varepsilon}(x)=\left(\int_a^x \varphi_\varepsilon(t)\mathrm{d}t\right)'=\varphi_\varepsilon(x)$，且从(1)得到

$$\int_a^b |f'_{\varphi_\varepsilon}(t)|\mathrm{d}t=\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon}).$$

不难看出，

$$\left|\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t-\int_a^b |f'_{\varphi_\varepsilon}(t)|\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_a^b |f'(t)-f'_{\varphi_\varepsilon}(t)|\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b |f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t<\varepsilon,$$

$$|f(x_i)-f(x_{i-1})|-|f_{\varphi_\varepsilon}(x_i)-f_{\varphi_\varepsilon}(x_{i-1})|$$
$$\leqslant|[f(x_i)-f_{\varphi_\varepsilon}(x_i)]-[f(x_{i-1})-f_{\varphi_\varepsilon}(x_{i-1})]|$$
$$=\left|\int_a^{x_i}[f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)]\mathrm{d}t-\int_a^{x_{i-1}}[f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)]\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t,$$

所以

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^n |f_{\varphi_\varepsilon}(x_i)-f_{\varphi_\varepsilon}(x_{i-1})|+\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})+\int_a^b|f'(t)-\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t\leqslant\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})+\varepsilon,$$

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})+\varepsilon.$$

同理

$$\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})\leqslant\bigvee_a^b(f)+\varepsilon.$$

从而

$$\left|\bigvee_a^b(f)-\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})\right|<\varepsilon.$$

由上可推出

$$\left|\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_a^b(f)\right|$$
$$\leqslant\left|\int_a^b |f'(t)|\mathrm{d}t-\int_a^b|f'_{\varphi_\varepsilon}(t)|\mathrm{d}t\right|+\left|\int_a^b|f'\varphi_\varepsilon(t)|\mathrm{d}t-\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})\right|+\left|\bigvee_a^b(f_{\varphi_\varepsilon})-\bigvee_a^b(f)\right|$$
$$\leqslant\left|\int_a^b|f'(t)-\varphi(t)|\mathrm{d}t\right|+0+\varepsilon$$
$$<2\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to0^+$ 得

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t.$$

证法 2 先证 $\bigvee_a^x(f)$ 为$[a,b]$上的全连续函数．因为 f 为$[a,b]$上的全连续函数，故对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当任何一列两两不相交的开区间$\{(a_n,b_n)\}$只要 $\sum_n(b_n-a_n)<\delta$，就有

$$\sum_n |f(b_n)-f(a_n)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

固定(a_n,b_n)，存在(a_n,b_n)的一个分点组：

$$a_n=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<\cdots<x_{n_k}^{(n)}=b_n.$$

使

$$0\leqslant\bigvee_{a_n}^{b_n}(f)-\sum_{i=1}^{n_k}|f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})|<\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

因为

$$\sum_n\sum_i(x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)})=\sum_n(b_n-a_n)<\delta,$$

所以

$$\sum_n\sum_i|f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

此时

$$\sum_n\left|\bigvee_a^{b_n}(f)-\bigvee_a^{a_n}(f)\right|=\sum_n\bigvee_{a_n}^{b_n}(f)$$
$$\leqslant\sum_n\left|\bigvee_{a_n}^{b_n}(f)-\sum_i|f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})|\right|+\sum_n\sum_i|f(x_i^{(n)})-f(x_{i-1}^{(n)})|$$
$$<\sum_n\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}+\frac{\varepsilon}{2}=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即 $\bigvee_a^x(f)$ 为$[a,b]$上的全连续函数．根据题 7.3.54，

$$\int_a^b\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\right]\mathrm{d}x=\bigvee_a^b(f)-\bigvee_a^a(f)=\bigvee_a^b(f).$$

再由题 7.3.59，当 f 是有界变差时(由题 7.3.52(3)知 f 为全连续函数必为有界变差函数)，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\underset{m}{=}|f'(x)|,$$

所以

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\bigvee_a^x(f)\right]\mathrm{d}x=\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证法 3 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，因为 f 为$[a,b]$上的全连续函数，故由题 7.3.54，有

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(t)dt\right|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f'(t)|dt = \int_a^b|f'(t)|dt,$$

从而

$$\bigvee_a^b(f)\leqslant\int_a^b|f'(t)|dt.$$

再证相反的不等式 $\bigvee_a^b(f)\geqslant\int_a^b|f'(t)|dt$，从而有

$$\bigvee_a^b(f)=\int_a^b|f'(t)|dt.$$

由题 7.3.52(4) 知，全连续函数 f 的导函数 f' 是 Lebesgue 可积的函数．从积分的绝对连续性，对任何 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 Lebesgue 可测集 $e\subset[a,b]$，$m(e)<\delta$，成立不等式

$$\int_e|f'(t)|dt<\varepsilon.$$

设 $E_+=E(f'\geqslant 0)$，$E_-=E(f'<0)$，而 F_+,F_- 分别是含在 E_+,E_- 中的闭集，且满足

$$m(E_+-F_+)<\delta,\ m(E_--F_-)<\delta,$$

则

$$\int_a^b|f'(t)|dt=\int_{E_+}f'(t)dt-\int_{E_-}f'(t)dt$$

$$=\int_{F_+}f'(t)dt+\int_{E_+-F_+}f'(t)dt$$

$$-\int_{F_-}f'(t)dt-\int_{E_--F_-}f'(t)dt$$

$$<\int_{F_+}f'(t)dt-\int_{F_-}f'(t)dt+2\varepsilon.$$

令 $A_+=\{x\in E\mid\rho(x,E_+)<\frac{1}{2}\rho(F_+,F_-)\}$，$A_-=\{x\in E\mid\rho(x,E_-)<\frac{1}{2}\rho(F_+,F_-)\}$．显然，$A_+,A_-$ 为开集，且 $F_+\subset A_+\subset E,F_-\subset A_-\subset E$，$A_+\cap A_-=\varnothing$．又取有界开集 B_+,B_- 使

$F_+\subset B_+,F_-\subset B_-$；$m(B_+-F_+)<\delta,m(B_--F_-)<\delta$．记 $G_+=A_+\cap B_+,G_-=A_-\cap B_-$．于是 G_+,G_- 为开集，且 $F_+\subset G_+\subset E,F_-\subset B_-\subset E$，$G_+\cap G_-=\varnothing$．

$$m(G_+-F_+)<\delta,m(G_--F_-)<\delta.$$

因此

$$\int_a^b|f'(t)|dt<\int_{G_+}f'(t)dt-\int_{G_-}f'(t)dt+4\varepsilon.$$

在 G_+ 的构成区间中取足够多的有限个区间，并作其并集 $C_+=\bigcup_{i=1}^{n}(\lambda_i,\mu_i)$，且可使

$$m(G_+-C_+)<\delta.$$

因此，由题 7.3.54 得到

$$\int_{G_+}f'(t)dt=\int_{C_+}f'(t)dt-\int_{G_+-C_+}f'(t)dt$$

$$<\int_{C_+}f'(t)dt+\varepsilon$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\lambda_i}^{\mu_i}f'(t)dt+\varepsilon$$

$$=\sum_{i=1}^{n}[f(\mu_i)-f(\lambda_i)]-\varepsilon.$$

同样，从 G_- 的构成区间中取足够多的有限个区间 $(\sigma_1,\tau_1),\cdots,(\sigma_m,\tau_m)$，并作其并集 $C_-=\bigcup_{i=1}^{m}(\sigma_i,\tau_i)$，且可使

$$m(G_--C_-)<\delta.$$

因此，由题 7.3.54 得到

$$\int_{G_-}f'(t)dt=\int_{C_-}f'(t)dt+\int_{G_--C_-}f'(t)dt$$

$$>\int_{C_-}f'(t)dt-\varepsilon$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\int_{\sigma_i}^{\tau_i}f'(t)dt-\varepsilon$$

$$=\sum_{i=1}^{m}[f(\tau_i)-f(\sigma_i)]-\varepsilon.$$

于是有

$$\int_a^b|f'(t)|dt<\int_{G_+}f'(t)dt-\int_{G_-}f'(t)dt+4\varepsilon$$

$$<\sum_{i=1}^{n}[f(\mu_i)-f(\lambda_i)]-\sum_{i=1}^{m}[f(\tau_i)-f(\sigma_i)]+6\varepsilon$$

$$<\sum_{i=1}^{n}|f(\mu_i)-f(\lambda_i)|+\sum_{i=1}^{m}|f(\tau_i)-f(\sigma_i)|+6\varepsilon$$

$$\leqslant\bigvee_a^b(f)+6\varepsilon.$$

令 $\varepsilon\to 0^+$ 得到

$$\int_a^b|f'(t)|dt\leqslant\bigvee_a^b(f).$$

7.3.61　设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界变差函数，则 $F(x)=\int_a^x f(x)dg(x)$ 为有界变差函数，且此函数在 $g(x)$ 的连续点 x_0 处也连续．

证　因为 f 是 $[a,b]$ 上的连续函数，$g(x)$ 为有界变差函数，故 Lebesgue-Stieltjes 积分（参阅[1]210 页）

$$F(x)=\int_a^x f(x)dg(x)$$

有意义．可设 $|f(x)|\leqslant M,x\in[a,b]$，其中 M 为正常数．故

$$\sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})|$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left|\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)dg(x)\right|$$

$$\leqslant M\sum_{i=1}^{n}|g(x_i)-g(x_{i-1})|\leqslant M\bigvee_a^b(g).$$

从而 $F(x)$ 也为$[a,b]$上的有界变差函数.

因为 g 为$[a,b]$上的有界变差函数,且 $x=x_0$ 是 $g(x)$ 的连续点,则由题 7.3.46 知,x_0 也为 $\pi(x)=\bigvee_a^x(g)$ 的连续点. 再由

$$\begin{aligned}&|F(x+h)-F(x)|\\&=\left|\int_a^{x+h}f(x)\mathrm{d}g(x)-\int_a^x f(x)\mathrm{d}g(x)\right|\\&=\left|\int_x^{x+h}f(x)\mathrm{d}g(x)\right|\\&\leqslant M\bigvee_x^{x+h}(g)=M[\pi(x+h)-\pi(x)],h>0\end{aligned}$$

知 F 在 x_0 右连续,同理可证 F 在 x_0 左连续. 从而 F 在 x_0 连续.

§7.4 函数序列的各种收敛性

设$\{f_n\}$为Lebesgue可测集 $E\subset\mathbf{R}^1$ 上的 $p(1\leqslant p<+\infty)$ 次幂 Lebesgue 可测函数序列. 可以考虑 f_n 按下面七种不同意义收敛于 f:

(1) 一致收敛. 任给 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时,$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ 对所有 $x\in E$ 成立,记作 $f_n\rightrightarrows f$.

(2) 近一致收敛. 任给 $\delta>0$,存在 Lebesgue 可测集 $E_\delta\subset E$,使 $m(E-E_\delta)<\delta$,且$\{f_n\}$在 E_δ 上一致收敛于 f.

(3) 处处收敛. 对任何 $x\in E$,$\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$.

(4) 几乎处处收敛. $\lim\limits_{n\to+\infty}f_n(x)=f(x)$ 关于 Lebesgue 测度对几乎所有的 $x\in E$ 成立.

(5) 测度(度量)收敛. 任给 $\sigma>0$,$\lim\limits_{n\to+\infty}m(\{x\in E\mid|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})=0$. 换言之,任给 $\varepsilon>0$,$\sigma>0$,存在自然数 N,当 $n>N$ 时有

$$m(\{x\in E\mid|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})<\varepsilon.$$

我们简记为 $f_n\underset{m}{\to}f$ 或 $f_n\Rightarrow f$

(6) p 次平均收敛.

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\|f_n-f\|_p\\&=\lim_{n\to+\infty}\left[\int_E|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}=0.\end{aligned}$$

或

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E|f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x=0.$$

(7) 弱收敛. 设 $1<p<+\infty$,$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 如果对任何 $g\in L_q(E)$(E 上 q 次幂 Lebesgue 可积函数的全体),有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $p=1$ 时,对任何 $g\in L_\infty(E)$(E 上本性有界的函数(除 E 的某个零测集外,在它的余集上是有界的)的全体),有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

首先,我们将讨论各种收敛之间的蕴涵关系以及列举不蕴涵的反例. 无疑,这对研究与收敛有关的问题是很有益的.

其次,叙述各种收敛有关的重要定理,并举出反例说明如果不具有定理中某个条件,则相应的定理就不成立.

Lebesgue控制收敛定理 1([1],220 页):设$\{f_n\}$为μ(测度)可测集 E 上的一列可测函数,F 是它的一个可积的控制函数(即在 E 上,$|f_n|\underset{m}{\dot\leqslant}F$,$n=1,2,\cdots$,而 F 在 E 上可积). 如果$\{f_n\}$依测度收敛于可测函数 f,则 f 在 E 上也是可积的,且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu,$$

Lebesgue控制收敛定理 2([1],222 页):设$\{f_n\}$为 μ 可测集 E 上的一列可测函数,F 是它的一个可积的控制函数. 如果$\{f_n\}$几乎处处收敛于可测函数 f,则 f 在 E 上必是可积的,且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

Lebesgue有界收敛定理([1],222 页):设 E 为 μ 可测集,$\mu(E)<+\infty$,$\{f_n\}$为 E 上的一列可测函数,且存在常数 K,使 $|f_n|\underset{m}{\dot\leqslant}K$,$n=1,2,\cdots$. 如果$\{f_n\}$在 E 上几乎处处收敛(或依测度收敛)于可测函数 f,则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu=\int_E f\mathrm{d}\mu.$$

Vitali 定理([2],170 页):设$\{f_n\}$为 μ 可测集 E 上测度收敛于 $f(x)$ 的可积函数列. 如果$\{f_n\}$在 E 上有等度的绝对连续积分,$m(E)<+\infty$,则 f 在 E 上也是可积的,且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x.$$

Fatou 引理([1],228 页):设$\{f_n\}$为 μ 可测集 E 上的一列可积函数,如果有 E 上的可积函数 h,使 $f_n\underset{m}{\dot\geqslant}h$,$n=1,2,\cdots$,且

$$\varliminf_{n\to+\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu<+\infty,$$

则 $\varliminf\limits_{n\to+\infty}f_n$ 为 E 上的可积函数,且

$$\int_E \varliminf_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leqslant \varliminf_{n\to+\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu.$$

Levi 引理([1],226 页):设$\{f_n\}$为μ可测集E上的可积函数的单调增序列.如果它的积分序列有上界,则$\{f_n\}$必几乎处处收敛于可积函数f,且

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E f\mathrm{d}\mu.$$

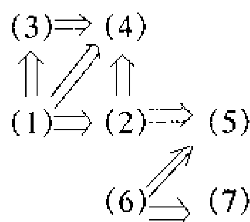
Levi 定理([1],232 页):设$\{f_n\}$为μ可测集E上的一列可积函数,且$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$(或$f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n\geqslant\cdots$),而$f_1$是$E$上积分有限的函数(即$\int_E f_1\mathrm{d}\mu$为有限值),则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n \mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\mu.$$

上面叙述了各种收敛概念.题 7.4.1 和 7.4.2 中的联络图一目了然地显示了它们之间的关系.直接应用定义推导它们的蕴涵关系(例如(3)⇒(4)表示在(3)的条件下推得(4)成立),可使读者更深刻地了解各种收敛的涵义及它们之间的差别.

举出蕴涵关系不成立的反例也是数学中的一种基本功.例如要说明题 7.4.1 中(3)⇏(5),举反例的原则就是找满足条件(3)但肯定不满足(5)的例子.通常,我们先从熟悉的实例中去找,尤其是简单的例子.如果这样的例子不是垂手可得,就按照上述原则,通过一定的思考再举出反例来.当然,有时这样的反例的构造是十分困难的.甚至有时既不能证明从(A)推出(B)(即(A)⇒(B)),又举不出反例说明(A)推不出(B)(即(A)⇏(B)).这是一种无奈.

7.4.1 证明各种收敛之间有如下的关系:



证 (1)⇒(2),(3),(4),显然.

(3)⇒(4) 显然.

(2)⇒(4) 对任何自然数k,由(2)知,存在 Lebesgue 可测集$E_{\frac{1}{k}}\subset E$,使$m(E-E_{\frac{1}{k}})<\frac{1}{k}$,且$\{f_n\}$在$E_{\frac{1}{k}}$上一致收敛于$f$,当然对任何$x\in E_{\frac{1}{k}}$,$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$.于是对任何$x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_{\frac{1}{k}}$,$\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=f(x)$,且

$$0\leqslant m(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{\frac{1}{k}})$$
$$\leqslant m(E-E_{\frac{1}{k}})\leqslant\frac{1}{k}\to 0\ (k\to+\infty),$$

$$m(E-\bigcup_{k=1}^{\infty}E_{\frac{1}{k}})=0.$$

这就证明了$\{f_n\}$在E上几乎处处收敛,即满足(4).

(2)⇒(5) 任给$\varepsilon>0,\sigma>0$,由(2)知,存在 Lebesgue 可测集$E_\varepsilon\subset E$,使$m(E-E_\varepsilon)<\varepsilon$,且$\{f_n\}$在$E_\varepsilon$上一致收敛于$f$.因此,存在自然数$N$,当$n>N$时,有

$$|f_n(x)-f(x)|<\sigma, x\in E_\varepsilon.$$

由此得到

$$m\{x\in E\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\}$$
$$\leqslant m(E-E_\varepsilon)<\varepsilon.$$

这就证明了$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f,即满足(5).

(6)⇒(5) 对任何$\varepsilon>0,\sigma>0$,由(6),存在自然数N,当$n>N$时,

$$\left[\int_E |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}<\sigma\varepsilon.$$

再由

$$\left[\int_E |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\geqslant\sigma\cdot m(\{x\in E\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})$$

得到

$$m(\{x\in E\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})$$
$$\leqslant\frac{1}{\sigma}\left[\int_E |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$<\frac{1}{\sigma}\cdot\sigma\varepsilon=\varepsilon.$$

从而

$$\lim_{n\to+\infty} m(\{x\in E\mid |f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma\})=0.$$

这就证明了$\{f_n\}$在E上依测度收敛于f,即满足(5).

(6)⇒(7) 如果$1<p<+\infty$,则由

$$\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$=\left|\int_E [f_n(x)-f(x)]g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant\left[\int_E |f_n(x)-f(x)|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}$$
$$\cdot\left[\int_E |g(x)|^q\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\to 0\ (n\to+\infty)$$

立即得到

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

如果$p=1$,因为$g\in L_\infty(E)$,故存在 Lebesgue 零测度集E_0使

$$|g(x)|\leqslant M, x\in E-E_0.$$

从而

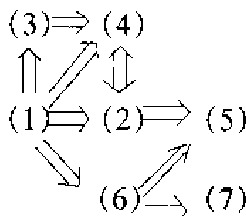
$$\left|\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x-\int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x\right|$$
$$\leqslant M\int_{E-E_0} |f_n(x)-f(x)|\mathrm{d}x$$

$$= M\int_E |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \to 0\ (n \to +\infty).$$

即 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)g(x)\mathrm{d}x = \int_E f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

这就证明了 $f_n(x)$ 在 E 上弱收敛于 $f(x)$.

7.4.2 如果 $m(E) < +\infty$,则各种收敛之间的关系进一步为:



证 只须证明下面各种情形.

(1)⇒(6) 对任何 $\varepsilon > 0$,因为 f_n 在 E 上一致收敛于 f,故存在自然数 N,当 $n > N$ 时,

$$|f_n(x) - f(x)| < \left[\frac{\varepsilon}{m(E)+1}\right]^{\frac{1}{p}}, x \in E.$$

于是

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \frac{\varepsilon}{m(E)+1}\cdot m(E) < \varepsilon,$$

即 f_n 在 E 上平均收敛于 f.

(4)⇒(2)(Егоров) 根据[1]165页定理2,存在 Lebesgue 零测集 E_0,使 f_n 在 $E_1 = E - E_0$ 上收敛于 f,且 f 为 Lebesgue 可测函数.记

$$E_{m,k} = E_1\left(|f_m - f| \leqslant \frac{1}{k}\right),$$

作

$$B_{n,k} = \bigcap_{m=n}^{\infty} E_{m,k}$$

$$= E_1\left(|f_m - f| \leqslant \frac{1}{k}, m = n, n+1, \cdots\right).$$

对于任何一列趋于 $+\infty$ 的自然数列 $\{n_k\}$,令

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k,k}$$

$$= E_1\left(|f_m - f| \leqslant \frac{1}{k}, m \geqslant n_k, k = 1, 2, \cdots\right),$$

则对任何 $\varepsilon > 0$,只要取 $k_0 > \frac{1}{\varepsilon}$,当 $m \geqslant n_{k_0}$ 时,对一切 $x \in F \subset B_{n_{k_0},k_0}$,就有

$$|f_m(x) - f(x)| \leqslant \frac{1}{k_0} < \varepsilon,$$

即 $\{f_n\}$ 在 F 上一致收敛于 f.

容易看出,对固定的 k,从 $B_{1,k} \subset B_{2,k} \subset \cdots$ 知

$$\lim_{n\to+\infty} B_{n,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_{n,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty} E_{m,k} = E_1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} m(B_{n,k}) = m(E_1) = m(E).$$

因为 $m(E) < +\infty$,所以对任何 $\delta > 0$,可以取充分大的 n_k,使得

$$m(E - B_{n_k,k}) = m(E) - m(B_{n_k,k}) < \frac{\delta}{2^k},$$

而且可依次取 $n_k > n_{k-1}$,以此子列 $\{n_k\}$ 按上述步骤作集合 F.于是

$$m(E - F) = m\left(E - \bigcap_{k=1}^{\infty} B_{n_k,k}\right)$$

$$= m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}(E - B_{n_k,k})\right) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(E - B_{n_k,k})$$

$$< \delta\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k} = \delta.$$

7.4.3 一种收敛不蕴涵另一种收敛的反例.

例1 处处收敛(当然几乎处处收敛),而非一致收敛.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - nx, 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, x = 0, \\ 0, x \in (0, 1]. \end{cases}$$

例2 几乎处处收敛,而非处处收敛.

$$f_n(x) = \begin{cases} (-1)^n, x \in \mathbf{Q} \cap [0,1], \\ 0, x \in \mathbf{Q}^c \cap [0,1], \end{cases}$$

$$f(x) = 0, x \in [0,1].$$

例3 p 次平均收敛(当然测度收敛),而无处收敛(当然也不近一致收敛).

对每个自然数 k,在 $[0,1)$ 上定义:

$$\varphi_i^k(x) = \begin{cases} 1, x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), \\ 0, x \overline{\in}\left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right), i = 1, 2, \cdots, k. \end{cases}$$

将这些函数排列为

$f_1(x) = \varphi_1^1(x), f_2(x) = \varphi_1^2(x), f_3(x) = \varphi_2^2(x), f_4(x) = \varphi_1^3(x), \cdots,$

则 $\{f_n\}$ 在 $E = [0,1)$ 上依测度收敛于 $f(x) \equiv 0$.事实上,对任何 $\sigma > 0$,如果 $f_n(x) = f_i^k(x)$,则 $n \to +\infty \Leftrightarrow k \to +\infty$,且

$$E(|f_n - f| \geqslant \sigma) = E(|f_n| \geqslant \sigma) \subset \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right)$$

故

$$0 \leqslant m(E(|f_n - f| \geqslant \sigma))$$

$$\leqslant \frac{1}{k} \to 0\ (k \to +\infty \text{ 或 } n \to +\infty),$$

即 $\{f_n\}$ 在 $[0,1)$ 上依测度收敛于 $f \equiv 0$.

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\int_0^1 |\varphi_i^k(x)|^p \mathrm{d}x = \lim_{k\to+\infty}\int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k} = 0,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 E 上 p 次平均收敛于 $f \equiv 0$.

但对任何 $x_0 \in [0,1)$,固定 k,必有 i 和 j 使

$x_0 \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}), x_0 \overline{\in} [\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k})$,

即 $\varphi_i^k(x_0) = 1, \varphi_j^k(x_0) = 0$,从而 $f_n(x_0)$ 不收敛.这就证明了 $\{f_n\}$ 无处收敛.

例 4 处处收敛,而非测度收敛.

设 $E = (0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, x \in (0, n], \\ 1, x \in (n, +\infty), n = 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

显然,$f_n(x)$ 在 E 上处处收敛于 $f(x) \equiv 0$,但当 $0 < \sigma < 1$ 时,

$m(E(|f_n - f| \geqslant \sigma)) = m((n, +\infty)) = +\infty$.

所以 $\{f_n\}$ 不依测度收敛于 $f \equiv 0$.

例 5 几乎处处收敛和测度收敛,而非近一致收敛.

设 $E = [0, +\infty)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, x \in [n, n + \frac{1}{n}], \\ 0, x \in E - [n, n + \frac{1}{n}]. \end{cases}$$

显然,$\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛和测度收敛于 $f \equiv 0$,但它在 E 上不近一致收敛于 $f \equiv 0$.(反证)假设 $\{f_n\}$ 在 E 上近一致收敛于 $f \equiv 0$,即对任何 $\delta > 0$,存在 Lebesgue 可测集 $E_\delta \subset E$,使 $m(E - E_\delta) < \delta$,且 $\{f_n\}$ 在 E_δ 上一致收敛于 $f \equiv 0$.于是,存在自然数 N,当 $n \geqslant N$ 时,有

$$|f_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < 1, x \in E_\delta.$$

由于当 $x \in [n, \frac{1}{n}]$ 时,$f(x) = 1$,所以

$$E_\delta \cap (\bigcup_{k=N}^{\infty} [k, k + \frac{1}{k}]) = \varnothing.$$

由此得 $\bigcup_{k=N}^{\infty} [k, k + \frac{1}{k}] \subset E - E_\delta$,因而

$$m(E - E_\delta) \geqslant \sum_{k=N}^{\infty} m([k, k + \frac{1}{k}]) = \sum_{k=N}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty,$$

这与 $m(E - E_\delta) < \delta$ 相矛盾.

例 6 一致收敛,而非弱收敛(当然,也非 p 次平均收敛).

设 $E = (-\infty, +\infty), p \geqslant 1, \{f_n\} \subset L_p(E)$,

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, x \in [0, e^n], \\ 0, x \overline{\in} [0, e^n], n = 1, 2, \cdots \end{cases}$$

因为 $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$,所以 $\{f_n\}$ 在 E 上一致收敛于 $f = 0$.

对任何 $p \geqslant 1$,显然 $f_n \in L_p(E)$.令

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, x \geqslant 1, \\ 0, x < 1. \end{cases}$$

则 g 为 E 上的有界可测函数,且 $g \in L_q(E)$,其中 $p > 1$ 时,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,而当 $p = 1$ 时,$q = +\infty$.因为

$$\int_E f_n(x) g(x) \mathrm{d}x = \int_1^{e^n} \frac{\mathrm{d}x}{nx} = \frac{1}{n} \ln x \Big|_1^{e^n} = 1,$$

所以

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) g(x) \mathrm{d}x = 1 \neq 0$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

即 $\{f_n\}$ 不弱收敛于 $f \equiv 0$.从

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^{e^n} (\frac{1}{n})^p \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n^p} \neq 0$$

可知 $\{f_n\}$ 在 E 上非 p 次平均收敛于 $f \equiv 0$.

例 7 处处收敛,而非 $p(1 \leqslant p < +\infty)$ 次平均收敛.

设 $E = [0, 1]$,

$$f_n(x) = \begin{cases} n, 0 < x \leqslant \frac{1}{n}, \\ 0, x = 0 \text{或} \frac{1}{n} < x \leqslant 1. \end{cases}$$

显然 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 $f \equiv 0$.但

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n^p \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} n^{p-1} \neq 0,$$

所以 $\{f_n\}$ 在 E 上非 p 次平均收敛于 $f \equiv 0$.

例 8 可测集 E 上处处收敛的函数列 $\{f_n\}$,使对任何 $p \geqslant 1$,$\{f_n\} \subset L_p(E)$,而非弱收敛,当然也非平均收敛.

设 $E = [0, 1]$,

$$f_n(x) = n\chi_{(0, \frac{1}{n}]}(x) = \begin{cases} n, x \in (0, \frac{1}{n}], \\ 0, x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

显然,$f_n(x) \in L_p(E)$,且对每个 $x_0 \in E = (0, 1]$,都有

$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x_0) = 0 = f(x_0),$$

即 $\{f_n\}$ 在 E 上处处收敛于 $f \equiv 0$.但是,$\{f_n\}$ 非弱收敛于 $f \equiv 0$.事实上,对 $g \equiv 1 \in L_q(E)$(其中 $p > 1$ 时,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$;当 $p = 1$ 时,$q = +\infty$),有

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f_n(x) g(x) \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} n \mathrm{d}x$$

$$= 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x) g(x) \mathrm{d}x,$$

即 $\{f_n\}$ 在 E 上不弱收敛于 $f \equiv 0$.由题 7.4.1,它当然也不平均收敛于 $f \equiv 0$.

例 9 可测集 E 上依测度收敛的函数列,使对任何

$p \geqslant 1$，$\{f_n\} \subset L_p(E)$，而$\{f_n\}$非弱收敛，当然也不平均收敛.

设 $E=[0,1]$，

$$f_n(x)=n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}(x)=\begin{cases} n, x\in[0,\frac{1}{n}], \\ 0, x\in(\frac{1}{n},1]. \end{cases}$$

对任意的 n 和 p，都有

$$\int_0^1 |f_n(x)|^p \mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{n}} n^p \mathrm{d}x=n^{p-1},$$

所以 $f_n\in L_p(E)$. 对任何 $\sigma>0$，有

$$E(|f_n|\geqslant\sigma)$$

$$=E(\{x\in E \mid |f_n(x)|\geqslant\sigma\})\subset[0,\frac{1}{n}],$$

因而 $m(E(|f_n|\geqslant\sigma))\leqslant\frac{1}{n}$，即$\{f_n\}$在 E 上依测度收敛于 $f=0$. 但对 $g=1$，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{1}{n}} n\mathrm{d}x=1$$

$$\neq 0=\int_0^1 f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

所以，$\{f_n\}$在 E 上不弱收敛于 f，由题 7.4.1，当然也不平均收敛.

例 10 可测集 E 上的函数列$\{f_n\}$，使对任何 $p\geqslant 1$，$\{f_n\}\subset L_p(E)$ 且弱收敛，但非测度收敛和非平均收敛.

设 $E=[0,2\pi]$，$f_n(x)=1+\sin nx$，$f(x)\equiv 1$，则对每个 n，$f_n\in L_p(E)$，$f\in L_p(E)(p\geqslant 1)$，且对任何 $g\in L_q(E)$，其中当 $p>1$ 时，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，而当 $p=1$ 时，$q=+\infty$，都有

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} f_n(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x+\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

故$\{f_n\}$在 $E=[0,2\pi]$ 上弱收敛于 f. 因为对 $0<\sigma<1$，

$$\lim_{n\to+\infty} m(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))$$

$$=\lim_{n\to+\infty} m(E(|\sin nx|\geqslant\sigma))$$

$$=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{1}{n}[(\pi-\arcsin\sigma)-\arcsin\sigma]$$

$$=\pi-2\arcsin\sigma\neq 0,$$

所以$\{f_n\}$在 $E=[0,2\pi]$ 上并不测度收敛于 $f=1$. 再根据题 7.4.1，$\{f_n\}$也非平均收敛.

7.4.4 Lebesgue 有界收敛定理中，$m(E)<+\infty$ 的条件不可删去.

解 设 $E=(-\infty,+\infty)$，

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & |x|\leqslant n^2, \\ 0, & |x|>n^2,\end{cases}$$

则$\{f_n\}$是在$(-\infty,+\infty)$上一致有界的 Lebesgue 可积函数列，且一致收敛于 $f\equiv 0$. 但

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}2n=+\infty\neq 0$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

7.4.5 Lebesgue 有界收敛定理中函数序列一致有界的条件不可删去.

解 设 $E=[0,1]$，

$$f_n(x)=\begin{cases} n, 0<x<\frac{1}{n}, \\ 0, x=0 \text{ 或 } \frac{1}{n}\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

显然，$\{f_n\}$在$[0,1]$上处处收敛于 $f\equiv 0$. 但是

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.$$

7.4.6 Lebesgue 控制收敛定理 2 中，控制函数的可积性条件不可删去.

解 设 $E=[0,+\infty)$，

$$f_n(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant n, \\ 0, n<x<+\infty, n=1,2,\cdots\end{cases}$$

显然，控制$\{f_n(x)\}$的函数 $F(x)$ 必须在$[0,+\infty)$上几乎处处有 $F(x)\geqslant 1$，即 $F(x)\underset{m}{\dot{\geqslant}}1$. 此时，控制函数 $F(x)$ 在$[0,+\infty)$上不是 Lebesgue 可积的，$\{f_n\}$在$[0,+\infty)$上处处收敛于 $f\equiv 1$，但是 f 在$[0,+\infty)$上不是 Lebesgue 可积的.

7.4.7 Vitali 定理中 $m(E)<+\infty$ 的条件不可删去.

解 设 $E=[0,+\infty)$，

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, 0\leqslant x<n, \\ 0, n\leqslant x<+\infty.\end{cases}$$

则$\{f_n\}$在 E 上为 Lebesgue 可积函数列.

因为对任何 $\varepsilon>0$，取 $0<\delta\leqslant\varepsilon$，则当 $A\subset E$、$m(A)<\delta$ 时，有

$$\left|\int_A f_n(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{n}m(A)\leqslant m(A)<\delta\leqslant\varepsilon,$$

故 f_n 在 E 上有等度的绝对连续积分. 此外，对任何 $\sigma>0$，当 $n>\frac{1}{\sigma}$ 时，

$$E(|f_n-f|\geqslant\sigma)=\varnothing,$$

$$m(E(|f_n-f|\geqslant\sigma))=0,$$

即$\{f_n\}$在 E 上测度收敛于 $f\equiv 0$. 于是 Vitali 定理中除条件 $m(E)<+\infty$ 外，其他条件都满足，但是，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x=1\neq 0=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x.$$

7.4.8 Fautou引理中等号不成立的函数序列.

解 设 $E=[0,1]$,

$$f_n(x)=nxe^{-nx^2},n=1,2,\cdots,$$

则 $\{f_n\}$ 为 E 上的非负可测函数序列,且

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E nxe^{-nx^2}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-nx^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(1-e^{-n}).$$

于是,

$$\int_E \varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E 0\mathrm{d}x=0$$

$$<\frac{1}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}(1-e^{-n})=\varliminf_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

7.4.9 变号的收敛可测函数序列,使Fautou引理不成立.

解 设 $E=(0,1)$,

$$f_n(x)=\begin{cases}1,\dfrac{1}{n+1}<x<1,\\-n,0<x\leqslant\dfrac{1}{n+1},\end{cases}$$

$$f(x)\equiv 1,x\in(0,1),$$

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{n+1}}(-n)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{n+1}}^1\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+1}=0,$$

于是得到

$$\int_E \varliminf_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\mathrm{d}x=\int_E\mathrm{d}x=1$$

$$>0=\lim_{n\to+\infty}0=\varliminf_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $f_n\underset{m}{\geqslant}h,n=1,2,\cdots$,则 $-n\geqslant h(x),\dfrac{1}{n+2}<x\leqslant\dfrac{1}{n+1}$,所以

$$\int_0^{\frac{1}{2}}h(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(-n)\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$$

$$=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)(n+2)}=-\infty.$$

由此可知,不存在Lebesgue可积函数 $h(x)$,使 $f_n\underset{m}{\geqslant}h,n=1,2,\cdots$.

7.4.10 Levi 引理中 $\{f_n\}$ 的积分序列 $\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right\}$ 有上界的条件不可删去.

解 设

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|}{x},x\in\left[\dfrac{1}{n},1\right],\\0,x\in\left[0,\dfrac{1}{n}\right).\end{cases}$$

显然,$\{f_n\}$ 是可积的单调增序列,而 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=+\infty$,$\{f_n\}$ 处处收敛于

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|}{x},x\in(0,1],\\0,x=0.\end{cases}$$

这是熟知的Lebesgue不可积的函数.

7.4.11 Levi定理中,$\int_E f_1\mathrm{d}\mu$ 是有限的不可删去.

解 设 $E=(-\infty,\infty)$,

$$f_n(x)=\begin{cases}-1,x\in(-\infty,-n)\cup(n,+\infty),\\0,x\in[-n,n],n=1,2,\cdots.\end{cases}$$

显然,$f_1\leqslant f_2\leqslant\cdots\leqslant f_n\leqslant\cdots$,$\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=-\infty$.

然而

$$\lim_{n\to+\infty}f_n=f,f(x)\equiv 0,x\in(-\infty,+\infty).$$

因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}0\mathrm{d}x$$

$$=0\neq-\infty=\lim_{n\to+\infty}(-\infty)=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f_n(x)\mathrm{d}x.$$

7.4.12 设 $(X,\mathcal{R},\mu)$ 为测度空间,$E\in\mathcal{R}$ 是 σ 有限的(即存在 $E_n\in\mathcal{R}$,使 $\mu(E_n)<+\infty$,且 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$),$f_n$ 为 E 上关于 μ 的可积函数,$n=1,2,\cdots$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k(x)|\mathrm{d}x<+\infty$,则存在 E 上关于 μ 的可积函数 $f(x)$ 使得

$$f(x)\underset{\mu}{=}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x),\int_E f\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu,$$

$$\lim_{k\to+\infty}f_k(x)\underset{\mu}{=}0.$$

证 令 $g_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}|f_k(x)|$,则 $g_n(x)$ 关于 n 是单调增的,且

$$0\leqslant\int_E g_n\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{n}\int_E|f_k|\mathrm{d}\mu$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k|\mathrm{d}\mu<+\infty.$$

由Levi引理(参阅[1],226页).

$$\lim_{n\to+\infty}g_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k(x)|=g(x)$$

在 E 上几乎处处成立且关于 μ 可积.另外

$$\int_E g\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to+\infty}\int_E g_n\mathrm{d}\mu$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E|f_k|\mathrm{d}\mu=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E|f_k|\mathrm{d}\mu.$$

由

$$\sum_{k=1}^{\infty}f_k^-\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}(f_k^++f_k^-)=\sum_{k=1}^{\infty}|f_k|\underset{\mu}{<}+\infty,$$

推得 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^+$ 几乎处处收敛于 f^+，$\sum_{k=1}^{\infty} f_k = \sum_{k=1}^{\infty}(f_k^+ - f_k^-)$ 几乎处处收敛于 $f^+ - f^- = f$. 而 $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ 几乎处处收敛于 $f^+ + f^- = |f|$. 由此知 f_k 几乎处处收敛于 0，即

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \overset{\mu}{=} 0.$$

令 $\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$，则

$$|\Phi_n(x)| = \left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right|$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} |f_k(x)| \leqslant g(x),\ n = 1,2,\cdots.$$

由控制收敛定理 2(参阅[1],222 页)，$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\Phi_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ 在 E 上关于 μ 是可积的，且

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E \Phi_n\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to+\infty}\int_E \sum_{k=1}^{n} f_k\mathrm{d}\mu$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E f_k\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k\mathrm{d}\mu.$$

7.4.13 设 $f_n(x) \geqslant 0$ 且 $\int_E f_n(x)\mathrm{d}x \to 0\ (n \to +\infty)$，则关于 Lebesgue 测度必有 $f_n \Rightarrow 0$，但 $f_n(x)$ 不一定几乎处处收敛于 0.

证 对任何 $\sigma > 0$，有

$$0 \leqslant \sigma \cdot m(E(f_n \geqslant \sigma))$$

$$\leqslant \int_{E(f_n\geqslant\sigma)} f_n(x)\mathrm{d}x + \int_{E(f_n<\sigma)} f_n(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_E f_n(x)\mathrm{d}x \to 0\ (n \to +\infty),$$

所以

$$\lim_{n\to+\infty} m(E(f_n \geqslant \sigma)) = 0，即\ f_n \Rightarrow 0.$$

反例. 令 $f_i^{(k)}: [0,1] \to \mathbf{R}$,

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, x \in [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}), \\ 0, x \overline{\in} [\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}). \end{cases}$$

并记 $f_n(x) = f_i^{(k)}(x)$，$n = \frac{k(k-1)}{2} + i$，$k = 1,2,\cdots$，$i = 1,2,\cdots,k$，则 $f_n(x) \geqslant 0$，$0 < x < 1$ 且当 $n \to +\infty$ 时必有 $k \to +\infty$. 所以

$$\int_E f_n(x)\mathrm{d}x = \int_{\frac{i-1}{k}}^{\frac{i}{k}} 1\mathrm{d}x = \frac{1}{k} \to 0\ (n \to +\infty),$$

从而 $f_n \Rightarrow 0$，但显然 $f_n \overset{m}{\nrightarrow} 0$.

7.4.14 如果对任意固定的 n，当 $k \to +\infty$ 时，$f_k^n(x) \Rightarrow f^n(x)$，而当 $n \to +\infty$ 时，$f^{(n)}(x) \Rightarrow f(x)$，则在 $\{f_k^n(x)\}$ 中可选出函数列度量收敛于 $f(x)$.

证 任取两个单调减趋于零的正数列 $\{\sigma_n\}$，$\{\varepsilon_n\}$. 对于每个 n，由于 $f_k^{(n)} \Rightarrow f^{(n)}(k \to +\infty)$，必有 k_n，使得

$$m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma_n}{2})) < \frac{\varepsilon_n}{2}.$$

下面证明函数列 $f_{k_n}^{(n)} \Rightarrow f(n \to +\infty)$. 事实上，对任何 $\varepsilon > 0$，任何 $\sigma > 0$，存在 $N_1 \in \mathbf{N}$，当 $n > N_1$ 时，$\sigma_n < \sigma$，$\varepsilon_n < \varepsilon$，且

$$m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma}{2}))$$

$$\leqslant m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma_n}{2})) < \frac{\varepsilon_n}{2} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

又由 $f^{(n)} \Rightarrow f(n \to +\infty)$ 知存在 N_2，当 $n \geqslant N_2$ 时，

$$m(E(|f^{(n)} - f| \geqslant \frac{\sigma}{2})) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，当 $n \geqslant N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，有

$$m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f| \geqslant \sigma)) \leqslant m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f^n| \geqslant \frac{\sigma}{2})$$

$$\cup E(|f^{(n)} - f| \geqslant \frac{\sigma}{2}))$$

$$\leqslant m(E(|f_{k_n}^{(n)} - f^{(n)}| \geqslant \frac{\sigma}{2}))$$

$$+ m(E(|f^{(n)} - f| \geqslant \frac{\sigma}{2})) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

这就证明了 $f_{k_n}^{(n)} \Rightarrow f$.

7.4.15 设 $\{\omega_k(x) \mid k = 1,2,\cdots,n\}$ 为一个规范正交系，又设 $f \in L_2$，对于线性组合 $\sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k(x)$，作范数

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k(x) \right\|,$$

则此范数当 $a_k = \langle f, \omega_k\rangle$，$k = 1,\cdots,n$ 时取最小值.

证 记 $c_k = \langle f, \omega_k\rangle$，$S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k$，$R_n = \sum_{k=1}^{n}(c_k - a_k)\omega_k$，则

$$f - \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k = f - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k + \sum_{k=1}^{n}(c_k - a_k)\omega_k$$

$$= f - S_n + R_n,$$

$$\langle f - S_n, \omega_k\rangle = \langle f, \omega_k\rangle - \sum_{j=1}^{n} c_j\langle\omega_j, \omega_k\rangle$$

$$= \langle f, \omega_k\rangle - c_k = 0,$$

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k \right\|^2 = \langle f - S_n + R_n, f - S_n + R_n\rangle$$

$$= \langle f - S_n, f - S_n\rangle + 2\langle f - S_n, R_n\rangle + \langle R_n, R_n\rangle$$

$$= \| f - S_n\|^2 + \| R_n\|^2,$$

从而 $\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k \right\| \geqslant \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k \right\|$，即当 $a_k = c_k = \langle f, \omega_k\rangle$，$k = 1,\cdots,n$ 时，$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} a_k\omega_k \right\|$ 取最

小值 $\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k \|$.

7.4.16 设$\{\omega_k(x)\}$是一完全的规范正交系.假如$\{\varphi_k(x)\}$是L_2中满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b[\omega_k(x)-\varphi_k(x)]^2\mathrm{d}x < 1$$

的一系列函数.则$\{\varphi_k(x)\}$也是完全的.

证 (反证)假设$\{\varphi_k(x)\}$不是完全的,则存在$\varphi \not\sim 0, \varphi \in L_2$且$\langle \varphi, \varphi_k\rangle = 0, k = 1,2,\cdots$.由$\langle\varphi,\omega_k\rangle = \langle\varphi,\varphi_k\rangle + \langle\varphi,\omega_k - \varphi_k\rangle = \langle\varphi,\omega_k - \varphi_k\rangle$和Schwarz不等式以及$\{\omega_k\}$为完全系等价于封闭系,

$$|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2 = |\langle\varphi,\omega_k-\varphi_k\rangle|^2$$
$$\leqslant \|\varphi\|^2 \cdot \|\omega_k - \varphi_k\|^2,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2 \leqslant \|\varphi\|^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty}\|\omega_k - \varphi_k\|^2$$
$$< \|\varphi\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|\langle\varphi,\omega_k\rangle|^2,$$

矛盾.

7.4.17 设$\{\omega_n\}$为完全规范正交系,$\{\varphi_n\}$为另一规范正交系.则$\{\varphi_n\}$是完全的$\Leftrightarrow$对任何$\omega_i \in \{\omega_n\}$,有

$$\|\omega_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2.$$

证 ($\Rightarrow$)设$\{\varphi_n\}$为完全的规范正交系.则它亦为封闭系,从而对任何$\omega_i \in L_2$,封闭公式

$$\|\omega_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2$$

成立.

($\Leftarrow$)设对任何$\omega_i \in \{\omega_n\}$,均有

$$\|\omega_i\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2, i = 1,2,\cdots.$$

从而有

$$\Big\|\sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle\varphi_n - \omega_i\Big\|^2$$
$$= \Big\|\sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle\varphi_n\Big\|^2 - 2\sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2 + \|\omega_i\|^2$$
$$= \sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2 - 2\sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2 + \|\omega_i\|^2$$
$$= \|\omega_i\|^2 - \sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle^2 \to 0\ (m\to+\infty), i = 1,2,\cdots.$$

如果$f \in L_2$与$\{\varphi_n\}$正交,即$\langle f,\varphi_n\rangle = 0, n = 1,2,\cdots$,则有

$$\langle f, \sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle\varphi_n\rangle = 0.$$

于是,由Schwarz不等式得到

$$0 \leqslant \langle f,\omega_i\rangle^2 = \langle f,\omega_i - \sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle\varphi_n\rangle^2$$
$$\leqslant \|f\|^2 \cdot \Big\|\omega_i - \sum_{n=1}^{m}\langle\omega_i,\varphi_n\rangle\varphi_n\Big\|^2$$
$$\to 0\ (m \to +\infty)$$

及$\langle f,\omega_i\rangle = 0, i = 1,2,\cdots$,即$f$与$\{\omega_n\}$亦正交,而$\{\omega_n\}$为完全规范正交系,便有$f \underset{m}{=} 0$.这就证明了$\{\varphi_n\}$亦为完全规范正交系.

7.4.18 设$\{\omega_k(x)\}$为$[a,b]$上的封闭规范正交系,则在$[a,b]$上关系式$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) = +\infty$几乎处处成立.

证 (反证)假设$\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) = +\infty$不是几乎处处成立的,则有

$$m(E(\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) < +\infty)) > 0.$$

于是必有$M > 0$,使

$$m(E\{x \mid \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) < M\}) > 0.$$

记$H = E\{x \mid \sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x) < M\}$,取其Lebesgue可测子集$H^* \subset H$,使$0 < mH^* < \frac{1}{2M}$,定义函数

$$f(x) = \begin{cases} A, x \in H^*, \\ 0, x \overline{\in} H^*. \end{cases}$$

则$f \in L_2[a,b]$.再由Schwarz不等式得

$$a_k^2 = [\int_a^b f(x)\omega_k(x)\mathrm{d}x]^2 = [\int_{H^*}A\omega_k(x)\mathrm{d}x]^2$$
$$= A^2[\int_{H^*}\omega_k(x)\mathrm{d}x]^2 \leqslant A^2 m(H^*)\int_{H^*}\omega_k^2(x)\mathrm{d}x,$$
$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 \leqslant A^2 m(H^*)\sum_{k=1}^{\infty}\int_{H^*}\omega_k^2(x)\mathrm{d}x$$
$$= A^2 m(H^*)\int_{H^*}\sum_{k=1}^{\infty}\omega_k^2(x)\mathrm{d}x$$
$$< A^2 \cdot m(H^*) \cdot M \cdot m(H^*)$$
$$< \frac{1}{2}A^2 m(H^*).$$

由此和$\{\omega_k(x)\}$为$[a,b]$上封闭的规范正交系,有

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2 = \|f\|^2$$
$$= \int_a^b f^2(x)dx = A^2 \cdot m(H^*)$$
$$> \frac{1}{2}A^2 m(H^*) > \sum_{k=1}^{\infty}a_k^2,$$

矛盾.

7.4.19 $L_2[a,b]$中的规范正交系是至多可数的.

证 由[2]190页知有理系数多项式类为 $L_2[a,b]$ 中可数稠密子集，记为 $\Sigma=\{f_1,f_2,\cdots\}$. 设 $\Omega=\{\omega_\alpha,\alpha\in\Gamma\}$ 为 $L_2[a,b]$ 中的任一规范正交系，则当 $\alpha\neq\beta$ 时有

$$\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|^2=\|\omega_\alpha\|^2+\|\omega_\beta\|^2=2,$$

$$\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|=\sqrt{2}.$$

对任何 $\omega_\alpha,\alpha\in\Gamma$，由于 Σ 在 $L_2[a,b]$ 中稠密，故必有 $f_{n_\alpha}\in\Sigma$，使 $\|f_{n_\alpha}-\omega_\alpha\|<\frac{\sqrt{2}}{4}$. 此时，当 $\alpha\neq\beta$ 时有

$$\|f_{n_\alpha}-f_{n_\beta}\|\geqslant\|\omega_\alpha-\omega_\beta\|-\|\omega_\alpha-f_{n_\alpha}\|$$

$$-\|\omega_\beta-f_{n_\beta}\|>\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}>0,$$

所以 $f_{n_\alpha}\neq f_{n_\beta}$，即不同的 ω_α 对应于不同的 f_{n_α}，从而 $\Omega=\{\omega_\alpha\mid\alpha\in\Gamma\}$ 与 $\Sigma=\{f_1,f_2,\cdots\}$ 的一个子集对等，则 Ω 至多是可数的.

7.4.20 在 $L_2[-\pi,\pi]$ 中，弱收敛于 $f(x)$ 的函数列 $\{f_n(x)\}$ 未必是测度收敛的.

证 显然，

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\cdots,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\right.$$

$$\left.\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\cdots\right\}$$

为 $L_2[-\pi,\pi]$ 中的完全规范正交系，从而对任何 $f\in L_2[-\pi,\pi]$ 有

$$\|f\|^2=a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2),$$

其中，

$$a_0=\langle f,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f\mathrm{d}x,$$

$$a_n=\langle f,\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\rangle=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\langle f,\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\rangle$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,n=1,2,\cdots.$$

且有 $a_n\to0,b_n\to0\ (n\to+\infty)$. 即对任何 $f\in L_2[-\pi,\pi]$ 有

$$\langle f,\cos nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x\to0\ (n\to+\infty),$$

$$\langle f,\sin nx\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\to0\ (n\to+\infty),$$

这说明 $\cos nx$ 和 $\sin nx$ 均弱收敛于 0. 但 $\cos nx\not\Rightarrow0$，$\sin nx\not\Rightarrow0$.（反证）假设 $\cos nx\Rightarrow0$，则 $\cos^2nx\Rightarrow0$，又 $|\cos^2nx|\leqslant1$，应用 Lebesgue 控制收敛定理 1（参阅[2]，167 页或[1]，220 页）得到

$$\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2nx\mathrm{d}x\to\int_{-\pi}^{\pi}0\mathrm{d}x=0.$$

矛盾. 所以 $\cos nx\not\Rightarrow0$. 同理可证 $\sin nx\not\Rightarrow0$.

7.4.21 设 $\{f_n(x)\}$ 为 $L_2=L_2(E),E=[a,b]$ 中度量收敛于 $f(x)$ 的函数列. 如果 $\|f_n\|\leqslant K$，则 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$（Ф. рисс，F. Riesz）.

证 由 $f_n\Rightarrow f$ 知 $f_n^2\Rightarrow f^2$，应用 Fatou 引理（参阅[2]，156 页）有

$$\int_Ef^2\mathrm{d}x\leqslant\sup_n\left\{\int_Ef_n^2\mathrm{d}x\right\}\leqslant K^2.$$

及 $\|f\|\leqslant K$，即 $f\in L_2$.

对任何 $g\in L_2$，$\{f_ng\}$ 在 E 上具有等度绝对连续的积分. 事实上，对任何 Lebesgue 可测集 $e\subset E$ 和 Schwarz 不等式

$$\left|\int_ef_ng\mathrm{d}x\right|\leqslant\sqrt{\int_ef_n^2\mathrm{d}x}\cdot\sqrt{\int_eg^2\mathrm{d}x}$$

$$\leqslant\|f_n\|\sqrt{\int_eg^2\mathrm{d}x}\leqslant K\sqrt{\int_eg^2\mathrm{d}x}.$$

由于 g^2 在 E 上的积分具有绝对连续性，而 K 为与 n 无关的有限常数，故 $\{f_ng\}$ 在 E 上具有等度绝对连续的积分.

因为 $\{f_ng\}$ 为可积函数列，$f_ng\Rightarrow fg$，$\{f_ng\}$ 在 E 上具有等度绝对连续的积分，应用 Vitali 定理（参阅[2]，170 页），

$$\lim_{n\to+\infty}\int_Ef_ng\mathrm{d}x=\int_Efg\mathrm{d}x.$$

这就证明了 $\{f_n(x)\}$ 是弱收敛于 $f(x)$ 的.

7.4.22 设 $\{f_n\}$ 为 $L_p=L_p(E),E=[a,b]\ (p>1)$ 中的函数列，$f_n\Rightarrow f$. 如果 $\|f_n\|_p\leqslant K$，则 $\{f_n\}$ 弱收敛于 f（ф рисс，F. Riesz）.

证 由 $f_n\Rightarrow f$，必有 $f_{n_i}\xrightarrow{m}f$，$f_{n_i}^p\xrightarrow{m}f^p$，$|f_{n_i}|^p\to|f|^p$. 由 Faton 引理（参阅[2]，156 页），

$$\int_E|f|^p\mathrm{d}x\leqslant\sup_{n_i}\left\{\int_E|f_{n_i}|^p\mathrm{d}x\right\}\leqslant K^p$$

和 $\|f\|_p\leqslant K$，即 $f\in L_p$.

对任何 $g\in L_q$，$\{f_ng\}$ 在 E 上具有等度绝对连续的积分. 事实上，对任何 Lebesgue 可测集 $e\subset E$ 和 Schwarz 不等式

$$\left|\int_ef_ng\mathrm{d}x\right|\leqslant\left[\int_e|f_n|^p\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{p}}\cdot\left[\int_e|g|^q\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}$$

$$\leqslant\|f_n\|_p\left[\int_e|g|^q\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant K\left[\int_e|g|^q\mathrm{d}x\right]^{\frac{1}{q}}.$$

由 $|g|^q$ 在 E 上的积分具有绝对连续性便知 $\{f_ng\}$ 在 E 上的积分具有等度绝对连续性. 又因为 $\{f_ng\}$ 为可积函数列，$f_ng\Rightarrow fg$，应用 Vitali 定理（[2]，170 页）得

$$\lim_{n\to+\infty}\int_Ef_ng\mathrm{d}x=\int_Efg\mathrm{d}x.$$

这就证明了$\{f_n(x)\}$是弱收敛于$f(x)$的.

7.4.23 如果$\{f_n(x)\}$在$L_2[a,b]$中弱收敛于$f(x)$,且$\|f_n(x)\|\to\|f\|$,则$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$.

如果删去条件"弱收敛",结论如何?

证 因为$f_n(x)$在$L_2[a,b]$中弱收敛于$f(x)$,且$\|f_n\|\to\|f\|$,故

$$\|f_n-f\|^2=\int_a^b(f_n-f)^2dx$$
$$=\int_a^b f_n^2dx-2\int_a^b f_nfdx+\int_a^b f^2dx$$
$$=\|f_n\|^2-2\int_a^b f_nfdx+\|f\|^2$$
$$\to\|f\|^2-2\int_a^b f^2dx+\|f\|^2=0\ (n\to+\infty).$$

于是,$\|f_n-f\|\to0\ (n\to+\infty)$,即$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$.

如果删去条件"弱收敛",结果不真.举反例如下:令$f_n(x)=1+\frac{1}{n}$,$x\in[0,1]$,

$$f(x)=\begin{cases}1,x\in[0,\frac{1}{2}],\\-1,x\in(\frac{1}{2},1],\end{cases}$$

则$f_n,f\in L_2[0,1]$,且有

$$\|f_n\|^2=\int_0^1 f_n^2dx=\int_0^1(1+\frac{1}{n})^2dx$$
$$=(1+\frac{1}{n})^2\to1=\int_0^1 f^2(x)dx=\|f\|^2,$$

即$\|f_n\|\to\|f\|$.

但$\int_0^1(f_n-f)^2dx=\int_0^{\frac{1}{2}}(1+\frac{1}{n}-1)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(1+\frac{1}{n}+1)^2dx\to2$,即$\|f_n-f\|\not\to0$.

7.4.24 设$\{f_n(x)\}$在$L_p[a,b]$中弱收敛于$f(x)$,且$\|f_n\|_p\to\|f\|_p(n\to+\infty)$,则$\{f_n(x)\}$在$L_p$中平均收敛于$f(x)$(Ф. рисс, F. Riesz).

证 应用数学分析中的方法,有

(Ⅰ) $p\geqslant2$时,存在$0<c<1$,使

$$|1+z|^p\geqslant1+pz+c|z|^p.$$

(Ⅱ) $1<p<2$时,存在$0<c<1$,使

$$|1+z|^p\geqslant1+pz+c|z|^p,\ |z|\geqslant1,$$
$$|1+z|^p\geqslant1+pz+c|z|^2,\ |z|\leqslant1.$$

如果$p\geqslant2$,令$z=(f_n-f)/f$代入(Ⅰ)$(f\neq0)$得到

$$\left|1+\frac{f_n-f}{f}\right|^p\geqslant1+p\frac{f_n-f}{f}+c\left|\frac{f_n-f}{f}\right|^p,$$

其中$0<c<1$.所以

$$|f_n|^p\geqslant|f|^p+p|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)$$
$$+c|f_n-f|^p$$

(显然,当$f=0$时,不等式也成立),

$$\int_a^b|f_n|^pdx\geqslant\int_a^b|f|^pdx$$
$$+p\int_a^b|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)dx$$
$$+c\int_a^b|f_n-f|^pdx.$$

因为

$$||f|^{p-1}\mathrm{sgn}f|^q=[|f|^{p-1}]^q=[|f|^{\frac{p}{q}}]^q=|f|^p,$$
$$\int_a^b||f|^{p-1}\mathrm{sgn}f|^qdx=\int_a^b|f|^pdx<+\infty,$$
$$|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\in L_q,\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

和$\{f_n\}$在L_p中弱收敛于f,有

$$\int_a^b|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)dx\to0\ (n\to+\infty).$$

从而

$$0\leqslant\int_a^b|f_n-f|^pdx$$
$$\leqslant\frac{1}{c}[\int_a^b|f_n|^pdx-\int_a^b|f|^pdx$$
$$-p\int_a^b|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)dx]$$
$$\to\frac{1}{c}[\int_a^b|f|^pdx-\int_a^b|f|^pdx-p\cdot0]$$
$$=0\ (n\to+\infty),$$
$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b|f_n-f|^pdx=0,$$

即$\{f_n\}$平均收敛于f.

如果$1<p<2$,由(Ⅱ),当$f\neq0$,$|(f_n-f)/f|\leqslant1$时,有

$$|f_n-f|\leqslant|f|,\ |f_n-f|^p\leqslant|f|^{p-1}|f_n-f|.$$

当$f=0$或$|(f_n-f)/f|>1$时,有

$$|f_n|^p\geqslant|f|^p+|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)$$
$$+c|f_n-f|^p.$$

令$E_n=\{x\in[a,b]\mid f(x)=0$或$|[f_n(x)-f(x)]/f(x)|>1\}$,则

$$\int_{E_n}|f_n|^pdx$$
$$\geqslant\int_{E_n}|f|^pdx+p\int_{E_n}|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f(f_n-f)dx$$
$$-c\int_{E_n}|f_n-f|^pdx,$$
$$\int_{[a,b]-E_n}|f_n|^pdx\geqslant\int_{[a,b]-E_n}|f|^pdx$$
$$+p\int_{[a,b]-E_n}|f|^{p-1}\mathrm{sgn}f\cdot(f_n-f)dx$$
$$+c\int_{[a,b]-E_n}|f|^{p-2}|f_n-f|^2dx,$$

两式相加得到

$$\int_a^b |f_n|^p dx \geqslant \int_a^b |f|^p dx$$
$$+ p\int_a^b |f|^{p-1}\mathrm{sgn} f \cdot (f_n - f) dx$$
$$+ c\Big[\int_{E_n} |f_n - f|^p dx$$
$$+ \int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-2} \cdot |f_n - f|^2 dx\Big],$$

所以

$$0 \leqslant \int_{E_n} |f_n - f|^p dx$$
$$+ \int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-2} |f_n - f|^2 dx$$
$$\leqslant \frac{1}{c}\Big[\int_a^b |f_n|^p dx - \int_a^b |f|^p dx$$
$$- p\int_a^b |f|^{p-1}\mathrm{sgn} f \cdot (f_n - f) dx\Big]$$
$$\to 0 \ (n \to +\infty),$$

$$\int_{E_n} |f_n - f|^p dx + \int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-2} |f_n - f|^2 dx$$
$$\to 0 (n \to +\infty).$$

此外，应用 Schwarz 不等式，得到

$$0 \leqslant \int_{[a,b]-E_n} |f_n - f|^p dx$$
$$\leqslant \int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-1} |f_n - f| dx$$
$$= \int_{[a,b]-E_n} |f|^{\frac{p}{2}} |f|^{\frac{p}{2}-1} |f_n - f| dx$$
$$\leqslant \Big[\int_{[a,b]-E_n} |f|^p dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot \Big[\int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-2} |f_n - f|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$\leqslant \Big[\int_a^b |f|^p dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$\cdot \Big[\int_{[a,b]-E_n} |f|^{p-2} |f_n - f|^2 dx\Big]^{\frac{1}{2}}$$
$$\to 0 \ (n \to +\infty),$$

所以

$$\int_{[a,b]-E_n} |f_n - f|^p dx \to 0 \ (n \to +\infty),$$
$$\int_a^b |f_n - f|^p dx = \int_{E_n} |f_n - f|^p dx$$
$$+ \int_{[a,b]-E_n} |f_n - f|^p dx$$
$$\to 0 + 0 = 0 \ (n \to +\infty).$$

即 $\{f_n\}$ 在 L_p 中平均收敛于 f.

参考文献

[1] 夏道行等，实变函数论与泛函分析(上册)，高等教育出版社，1987 年.

[2] И.П. 那汤松，实变函数论(上册)，人民教育出版社，1955 年.

[3] 江泽涵，拓扑学引论，上海科学技术出版社，1978 年.

[4] 孙本旺，汪浩等，数学分析中的典型例题和解题方法，湖南科学技术出版社，1981 年.

第 8 篇　泛函分析

§8.1　距离空间概念及有关问题

设 X 是一个非空集合，$\rho: X\times X\to \mathbf{R}^1$，若 ρ 满足：

1° $\rho(x,y)\geqslant 0$；$x=y\Leftrightarrow\rho(x,y)=0$.

2° $\rho(x,y)=\rho(y,x)$　（对称性）.

3° $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$　（三角形不等式）.

则称 ρ 是 X 上的一个距离，此时称 (X,ρ) 为距离空间，也简称 X 为距离空间. 性质 1°、2°、3° 称为距离公理.

今后在所论及的实例中，我们一律用 (x_n) 表 X 中的元素列（点列）：$x_1,x_2,x_3,\cdots$，而用 $\{x_n\}$ 表点列 (x_n) 的取值集合，如点列 $(x_n)=1,2,1,2,\cdots$，则 $\{x_n\}$ 表 1,2 两个元素组成的集合 $\{1,2\}$.

8.1.1　设 S 表一切实数列（或复数列）的全体，对任何数列 $x=(\xi_i)$，$y=(\eta_i)\in S$（此处第 i 项 ξ_i 称为 x 的第 i 个坐标）. 定义

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}.$$

证明：

(1) ρ 是 S 上的距离.

(2) S 中的收敛等价于按坐标收敛.

证　(1) ρ 有意义且显然满足公理 1° 和 2°，为证 ρ 满足公理 3°，只需证对每个 $z=(\zeta_i)\in S$，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}.$$

又只需证对每个 i 有

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}.$$

为此考察函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}$ $(t\geqslant 0)$，注意 $f(t)\geqslant 0$ 及当 $0<t_1<t_2<+\infty$ 时，$\dfrac{f(t_2)}{f(t_1)}=\dfrac{t_2(1+t_1)}{t_1(1+t_2)}>1$，故 f 严格增，故有

$$\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|+|\zeta_i-\eta_i|}$$

$$\leqslant\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|}+\frac{|\zeta_i-\eta_i|}{1+|\zeta_i-\eta_i|}\ (i=1,2,\cdots).$$

所以 ρ 是 S 上的距离.

(2) 当 $x_n\to x$，即 $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}\to 0$ $(n\to\infty)$ 时（此处 $x_n=(\xi_i^{(n)})\in S$），往证 x_n 的每个坐标 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i(n\to\infty,i=1,2,\cdots)$. 若有 i_0 使得 $\xi_{i_0}^{(n)}\not\to\xi_{i_0}(n\to\infty)$，此时有 $(\xi_{i_0}^{(n)})$ 的子列 $(\xi_{i_0}^{(n_k)})$ 使 $|(\xi_{i_0}^{(n_k)})-\xi_{i_0}|\geqslant\delta>0$，从而有

$$\frac{|\xi_{i_0}^{(n_k)}-\xi_{i_0}|}{1+|\xi_{i_0}^{(n_k)}-\xi_{i_0}|}\geqslant\frac{\delta}{1+\delta}>0,$$

所以有

$$\rho(x_{n_k},x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i_0}}\frac{|\xi_i^{(n_k)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n_k)}-\xi_i|}$$

$$\geqslant\frac{1}{2^{i_0}}\frac{\delta}{1+\delta}>0\ (k=1,2,\cdots).$$

这与 $x_n\to x$ 相矛盾. 所以有 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i(n\to\infty,i=1,2,\cdots)$，即 (x_n) 按坐标收敛至 x.

反之，若对每个 $i(i=1,2,\cdots)$，有 $\xi_i^{(n)}\to\xi_i(n\to\infty)$，注意对一切 n，有

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<+\infty,$$

故对任何 $\varepsilon>0$，存在 $I\in\mathbf{N}$，使得

$$\sum_{i=I}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}\leqslant\sum_{i=I}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\varepsilon.$$

于是，$\displaystyle\rho(x_n,x)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}$

$$<\sum_{i=1}^{I-1}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}+\varepsilon.$$

所以，$0\leqslant\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\rho(x_n,x)\leqslant\varepsilon$，因 $\varepsilon>0$ 任意，所以有 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.

注　上面在验证 ρ 满足公理 3° 时，较巧妙地引用了函数 $f(t)=\dfrac{t}{1+t}(t\geqslant 0)$ 的单增性，在证明 (x_n) 按坐标收敛时采用了反证法. 其关键则在于准确理解“不按坐标收敛”之含义；在证明与它相反的命题时，首先采用数学分析中的控制级数

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}$$

技巧，然后用通常的极限运算得到结论. 下面几题将利用定义、重要不等式、有关定理，采用综合法、反证法等来导出一些结论.

8.1.2 设 $L^p(E,M)$ 表可测集 E 上 p 次可积函数的全体($p \geqslant 1$),对 $f,g \in L^p(E,M)$,定义

$$\rho(f,g) = \left(\int_E |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{\frac{1}{p}}.$$

试证明:

(1) ρ 是 $L^p(E,M)$ 上的拟距离(ρ 满足公理 1° $\rho(x,y) \geqslant 0, x = y \Rightarrow \rho(x,y) = 0$;及距离公理 2° 和 3°).

(2) $L^p(E,M)$ 中,"$f_n \to f$" 蕴含 (f_n) 有子列 (f_{n_k}) 使 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e}} f$ ($k \to \infty$,a.e 表几乎处处).

证 (1) ρ 显然满足题设中的公理 1° 及距离公理 2°,距离公理 3°. 由 Minkowski 不等式

$$\left(\int_E |f(x) - g(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{1/p}$$
$$\leqslant \left(\int_E |f(x) - h(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{1/p} + \left(\int_E |h(x) - g(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{1/p}$$

得到保证,所以 ρ 是 $L^p(E,M)$ 上的拟距离.

(2) 设 $f_n \to f$,即

$$\rho(f_n,f) = \left(\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}m\right)^{1/p} \to 0 \ (n \to \infty),$$

对任何 $\sigma > 0$,令 $E_n(\sigma) = E(x \mid |f_n(x) - f(x)| \geqslant \sigma)$,注意

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}m \geqslant \int_{E_n(\sigma)} |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}m \geqslant \sigma^p mE_n(\sigma),$$

所以

$$mE_n(\sigma) \leqslant \frac{1}{\sigma^p}\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \mathrm{d}m \to 0 \ (n \to \infty),$$

故 $f_n \Rightarrow f$($\Rightarrow$ 表依测度收敛),再由 Riesz 定理知 (f_n) 有子列 (f_{n_k}) 使 $f_{n_k} \xrightarrow{\text{a.e}} f$ ($k \to \infty$).

8.1.3 设 $B \subseteq [a,b], \alpha > 0, C_{[a,b]}$ 中的距离 $\rho(x,y) = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|$,证明

B 为闭集 $\Leftrightarrow \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时 $x(t) < \alpha\}$ 为开集.

证 $\Rightarrow$: $\forall x_0(t) \in \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$,因 $x_0(t)$ 在 B 连续,B 为有界闭集,故有 $\gamma = \max\limits_{t \in B} x_0(t) < \alpha$. 令 $\delta = \alpha - \gamma$,显然 $\delta > 0$,于是当 $x(t) \in \delta(x_0)$ 即 $\max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - x_0(t)| < \delta$ 时,有 $x(t) < x_0(t) + \delta$ ($t \in [a,b]$). 所以 $\max\limits_{t \in B} x(t) < \max\limits_{t \in B} x_0(t) + \delta = \gamma + \delta = \alpha$. 所以当 $t \in B$ 时,有 $x(t) < \alpha$,即 $x(t) \in \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$. 此表明 $\delta(x_0) \subseteq \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$. 所以 $\{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in \alpha$ 时, $x(t) < \alpha\}$ 为开集.

$\Leftarrow$: 设 $t_n \in B, t_n \to t_0 (n \to \infty)$,往证 $t_0 \in B$ 即可. 因 $\{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$ 为开集,故对每个 $x_0(t) \in \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$, $\exists \delta > 0$,使 $\delta(x_0) \subseteq \{x(t) \in C_{[a,b]} \mid$ 当 $t \in B$ 时, $x(t) < \alpha\}$. 注意 $x_0(t) + \delta/2 \in \delta(x_0)$. 所以 $x_0(t) + \delta/2 < \alpha$ ($t \in B$),即 $x_0(t) < \alpha - \delta/2$ ($t \in B$),所以 $x_0(t_0) = \lim\limits_{t_n \to t_0} x_0(t_n) \leqslant \alpha - \delta/2 < \alpha$. 所以 $t_0 \in B$.

8.1.4 设 E 为距离空间,f 是定义在 E 上的实函数,试证明

f 在 E 上连续 $\Leftrightarrow \forall c \in \mathbf{R}^1$,集合 $E(x \mid f(x) \geqslant c)$ 及 $E(x \mid f(x) \leqslant c)$ 都为闭集.

证 $\Rightarrow$: 设 $x_n \in E(x \mid f(x) \geqslant c), x_n \to x_0 (n \to \infty)$. 往证 $x_0 \in E(x \mid f(x) \geqslant c)$ 即可. 因 f 连续,故有 $f(x_n) \to f(x_0)$ ($n \to \infty$). 又 $f(x_n) \geqslant c$. 所以 $f(x_0) \geqslant c$,所以 $x_0 \in E(x \mid f(x) \geqslant c)$. 所以 $E(x \mid f(x) \geqslant c)$ 为闭集. 同样可证 $E(x \mid f(x) \leqslant c)$ 也为闭集.

$\Leftarrow$: 任取 $x_0 \in E, \forall \varepsilon > 0$,易知,$E(x \mid f(x) < f(x_0) + \varepsilon)$ 与 $E(x \mid f(x) > f(x_0) - \varepsilon)$ 均为开集,所以它们的交集 $E(x \mid f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon)$ 也为开集. 显然,

$$x_0 \in E(x \mid f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon),$$

故存在 $\delta > 0$,使

$$\delta(x_0) \subseteq E(x \mid f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon),$$

即当 $x \in X, \rho(x_0,x) < \delta$ 时,有 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$,此表明 f 在 x_0 连续. 因 $x_0 \in E$ 任意,所以 f 在 E 上连续.

8.1.5 设 X 为距离空间,$E_1, E_2 \subseteq X$,且

$$d(E_1,E_2) = \inf_{\substack{x \in E_1 \\ y \in E_2}} \rho(x,y) > 0.$$

证明存在 X 上的连续函数 f,使得 $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$,且

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in E_1, \\ 1, & x \in E_2. \end{cases}$$

证 先证对每个 $x \in X$,有

$$\inf_{y \in E_1} \rho(x,y) + \inf_{y \in E_2} \rho(x,y) > 0.$$

否则有 $x_0 \in X$,使

$$\inf_{y \in E_1} \rho(x_0,y) = 0, \ \inf_{y \in E_2} \rho(x_0,y) = 0.$$

于是对任何 $\varepsilon > 0$,有 $y_1 \in E_1, y_2 \in E_2$,使 $\rho(x_0,y_1) < \varepsilon/2, \rho(x_0,y_2) < \varepsilon/2$,从而 $\rho(y_1,y_2) < \varepsilon$,这导致

$\inf\limits_{x\in E_1, y\in E_2}\rho(x,y)\leqslant\rho(y_1,y_2)<\varepsilon$，因 $\varepsilon>0$ 任意，故 $\inf\limits_{x\in E_1, y\in E_2}\rho(x,y)=0$，与题设矛盾．故结论成立．令

$$f(x)=\frac{\inf\limits_{y\in E_1}\rho(x,y)}{\inf\limits_{y\in E_1}\rho(x,y)+\inf\limits_{y\in E_2}\rho(x,y)}\ (x\in X).$$

易知 f 是 X 上的连续函数，$0\leqslant f(x)\leqslant 1$，且

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\in E_1,\\ 1, & x\in E_2.\end{cases}$$

8.1.6　设 (X,ρ) 为距离空间，$E\subseteq X$，令

$\partial E_0=\{x\in X\mid \forall\delta>0,\delta(x)$ 中有 E 与补集 E^c 的点$\}$；

$E^0=\{x\in E\mid \exists\delta>0$ 使 $\delta(x)\subseteq E\}$；

$\overline{E}=E^0\cup\partial E$.

(∂E 称为 E 的边界，E^0 称为 E 的内核，$\overline{E}$ 称为 E 的闭包)，试证明：

(1) E^0 为开集；

(2) $X=E^0\cup\partial E\cup(E^c)^0,\partial E=\partial E$；

(3) $\partial E,\overline{E}$ 为闭集；

(4) E^0 是包含于 E 的最大开集，$\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集．

证　(1) 若 $E^0=\varnothing$，显然是开集．若 $E^0\neq\varnothing$，$\forall x\in E^0$，则有 $\delta>0$，使 $\delta(x)\subseteq E$，注意对每个 $x'\in\delta(x)$，$\rho(x,x')<\delta$，令 $\delta'=\delta-\rho(x,x')$．显然 $\delta'>0$，易验证 $\delta'(x')\subseteq\delta(x)$，故 $\delta'(x')\subseteq E$，即 $x'\in E^0$，此表明 $\delta(x)\subseteq E^0$，所以 E^0 为开集．

(2) 由定义即得．

(3) 由(2)知 $(\partial E)^c=E^0\cup(E^c)^0$，$\overline{E}^c=(E^c)^0$ 均为开集，所以 $\partial E,\overline{E}$ 为闭集．

(4) 若有非空开集 $G\subseteq E$，则对 $\forall x\in G$，存在 $\delta>0$，使 $\delta(x)\subseteq G\subseteq E$，此已表明 $x\in E^0$，从而有 $G\subseteq E^0$，故 E^0 是包含于 E 的最大开集．又易验证 $E\subseteq\overline{E}$，若有闭集 F 使 $E\subseteq F$，则对每个 $x\in\overline{E}$，当 $x\in E_0$ 时，自然 $x\in E$，故 $x\in F$．而当 $x\overline{\in}E^0$ 时，则由 $x\in\partial E$ 知，或者 $x\in E$，从而 $x\in F$，或者 $x\overline{\in}E$，但有 $x_n\in E\subseteq F$ 使 $x_n\to x$，此表明 x 是 F 的极限点．因 F 闭，故也有 $x\in F$．总之，由 $x\in\overline{E}$ 可推出 $x\in F$，此即 $\overline{E}\subseteq F$．所以 $\overline{E}$ 是包含 E 的最小闭集．

注　此题结论表明，距离空间保留有欧氏空间(是一种特殊的距离空间)的很多熟知的性质．下面两个论题，将通过构造一些实例来表明，它还具有若干欧氏空间不具有的性质．

8.1.7　举例说明，距离空间中，大半径的球，可成为小半经球的真子集．

解　设 $X=\{1,2,3,4,5\}$，$\rho(x,y)=|x-y|$，易知此 (X,ρ) 是距离空间．取 $\delta_1=4,x_1=1\in X,\delta_2=2.5,x_2=3\in X$，则大半径开球

$\delta_1(x_1)=\{x\in X\mid\rho(x_1,x)<4\}=\{1,2,3,4\}$

是小半径开球

$$\delta_2(x_2)=\{x\in X\mid\rho(x_2,x)<2.5\}=\{1,2,3,4,5\}$$

的真子集．

8.1.8　举例说明：距离空间的有限集可成为开集；距离空间中，可以有既开又闭的非空真子集．

解　设 (X,ρ) 同 8.1.7，取有限集 $E=\{1,3\}\subseteq X$，下证 E 为开集．只需证 E 的每个点都是 E 的内点，如 $x=1\in E$ 时，$\exists\delta=\frac{1}{2}>0$，使 $\delta(x)=\{x'\in X\mid\rho(x,x')<\frac{1}{2}\}=\{1\}\subseteq E$，即 1 是 E 的内点．同样可证 3 也是 E 的内点，所以有限集 $\{1,3\}$ 成为 X 中的开集；又注意 E 的补集 $E^c=\{2,4,5\}$ 也是开集，所以上述 E 也成为 X 中的闭集．所以 X 中有既开又闭的非空真子集 E 存在．事实上，此 (X,ρ) 的每个子集都是既开又闭的．

注　8.1.7 与 8.1.8 的结论，往往使初学者感到"惊奇"，究其原因，乃因他们把在欧氏空间中形成的一些习惯认识(如对"内点""开球"的习惯理解)不适当地引进一般的距离空间来了所致．为了克服这些毛病，关键在于正确理解这里的开球只是所论空间的一个子集．如 $\delta(x_1)=\{x\in X\mid\rho(x_1,x)<\delta\}$ 只是指 X 中满足 $\rho(x,x)<\delta$ 的那些 x 所成的子集，并未要求它像"球的样子"．实际上，由于所论空间及其距离的不同，这种开球的"样子"是千差万别的．下面再举一些利用构造法与反证法来解题的例子．

8.1.9　设 X 为距离空间，$A,B\subseteq X$，若对任何 $x\in B$，任何 $\delta>0$，$\delta(x)$ 中总有 A 的点，则称 A 关于 B 稠密．试证：

A 关于 B 稠密 $\Leftrightarrow\forall\delta>0$，有 $\bigcup\limits_{x\in A}\delta(x)\supseteq B$.

证　$\Rightarrow$：否则，$\exists\delta_0>0$ 及 $x_0\in B$，使 $x_0\overline{\in}\bigcup\limits_{x\in A}\delta_0(x)$，即对一切 $x\in A$，$\rho(x_0,x)\geqslant\delta_0$，即 $\delta_0(x_0)\cap A=\varnothing$，这与 A 关于 B 稠密相矛盾．故结论成立．

$\Leftarrow$：否则，有 $x_0\in B$ 及 $\delta_0>0$ 使 $\delta_0(x_0)$ 中无 A 的点，即对一切 $x\in A$，有 $\rho(x_0,x)\geqslant\delta_0$，此表明对一切 $x\in A$，$x_0\overline{\in}\delta_0(x)$，故 $x_0\overline{\in}\bigcup\limits_{x\in A}\delta_0(x)$，这与 $\forall\delta>0$，有 $\bigcup\limits_{x\in A}\delta(x)\supseteq B$ 相矛盾．故结论成立．

8.1.10　设 $B\subseteq X$，若有 X 的有限或可数子集 A 关于 B 稠密，则称 B 为可分集．试证：

B 可分 $\Leftrightarrow B$ 有有限或可数的稠密子集．

证　$\Leftarrow$：显然．

$\rightarrow$:设可数集 $A=\{x_1,x_2,\cdots\}$ 关于 B 稠密,对每个自然数 k,取 $\delta_k=\frac{1}{k}>0$,由 8.1.9 结论知 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_k(x_n)\supseteq B\ (k=1,2,\cdots)$.若 $\delta_k(x_n)\cap B=\varnothing$,则不管.若 $\delta_k(x_n)\cap B\neq\varnothing$,则取 $z_{nk}\in\delta_k(x_n)\cap B$ $(n,k=1,2,\cdots)$,易知 $\{z_{nk}\}$ 是 B 的有限或可数子集.只需证 $\{z_{nk}\}$ 关于 B 稠密即可.为此任给 $\delta>0$,往证 $\bigcup_{(n,k)}\delta(z_{nk})\supseteq B$ 即可.否则,有 $\delta_0>0$ 及 $x_0\in B$ 使 $x_0\overline{\in}\bigcup_{(n,k)}\delta_0(z_{nk})$,即对一切 $z_{nk}\in\{z_{nk}\}$,$\rho(x_0,z_{nk})\geqslant\delta_0$.注意:$x_0\in B$ 及 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta_k(x_n)\supseteq B(k=1,2,\cdots)$.故当 $\delta_{k_0}=\frac{1}{k_0}<\delta_0/2$ 时,有 n_0 使 $x_0\in\delta_{k_0}(x_{n_0})$,此时 $\delta_{k_0}(x_{n_0})\cap B\neq\varnothing$,故有 $z_{n_0k_0}\in\delta_{k_0}(x_{n_0})\cap B$,从而 $\rho(x_0,z_{n_0k_0})<\delta_{k_0}<\delta_0$.与 $\rho(x_0,z_{nk})\geqslant\delta_0$ 矛盾.所以 $\{z_{nk}\}$ 是 B 的稠密子集.

8.1.11 证明 $L^p[a,b](p\geqslant1)$ 按距离

$$\rho(f,g)=\left(\int_a^b|f(x)-g(x)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}$$

成为可分空间.

证 对每个 $f\in L^p[a,b]$,令

$$f_{(n)}(x)=\begin{cases}f(x), & |f(x)|\leqslant n\\ 0, & |f(x)|>n\end{cases}\quad(n=1,2,\cdots).$$

易知 $f_{(n)}$ 有界、可测,$f_{(n)}\in L^p[a,b]$,且由积分的绝对连续性,有

$$\rho(f,f_{(n)})=\left(\int_a^b|f(x)-f_{(n)}(x)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}\to0\ (n\to\infty).$$

故 $[a,b]$ 上有界可测函数全体 $M[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 中稠密.又对每个有界可测函数 g,当 $|g|\leqslant m$ 时,由鲁金定理,有 $[a,b]$ 上的连续函数 $h_n(|h_n|\leqslant m)$,使 $m\{x\mid x\in[a,b],h_n(x)\neq g(x)\}\to0\ (n\to\infty)$.故有

$$\rho(g,h_n)=\left(\int_a^b|g(x)-h_n(x)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}\to0\ (n\to\infty).$$

此表明 $C[a,b]$ 在 $M[a,b]$ 中稠密.又由 Weierstrass 逼近定理知,对每个 $h(x)\in C_{[a,b]}$,有多项式 $p_n(x)$ 使 $p_n\xrightarrow{一致}h$(于$[a,b]$),从而也有

$$\rho(h,p_n)=\left(\int_a^b|h(x)-p_n(x)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}\to0\ (n\to\infty).$$

此表明,多项式全体 $P[a,b]$ 在 $C[a,b]$ 稠密.又对每个多项式 $p(x)$,有有理系数多项式 $q_n(x)$,使

$$\rho(p,q_n)=\left(\int_a^b|p(x)-q_n(x)|^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}\to0\ (n\to\infty).$$

故有理系数多项式全体 $Q[a,b]$ 在 $P[a,b]$ 稠密.从而 $Q[a,b]$ 在 $L^p[a,b]$ 稠密.而 $Q[a,b]$ 为可数集,所以 $L^p[a,b]$ 可分.

8.1.12 设

$$\widetilde{C}_{(-\infty,\infty)}=\{x(t)\mid x(t)\in C_{(-\infty,\infty)};\lim_{t\to\pm\infty}x(t)\in\mathbf{R}^1\},$$

$$\rho(x,y)=\sup_{(t)}|x(t)-y(t)|,$$

证明:$(\widetilde{C},\rho)$ 为可分空间.

证 对每个 $x(t)\in\widetilde{C}$,令

$$x_{(n)}(t)=\begin{cases}x(-n) & -\infty<t<-n,\\ x(t) & -n\leqslant t\leqslant n,\\ x(n) & n<t<+\infty.\end{cases}$$

易知 $x_{(n)}\xrightarrow{一致}x\ (n\to\infty)$ 在$(-\infty,+\infty)$成立,故 $\widetilde{C}_N=\{x_{(n)}(t)\mid x(t)\in\widetilde{C},n=1,2,\cdots\}$ 在 $\widetilde{C}$ 中稠密.对每个有理系数多项式 $q(t)$,令

$$q_{(n)}(t)=\begin{cases}q(-n) & -\infty<t<-n,\\ q(t) & -n\leqslant t\leqslant n,\\ q(n) & n<t<+\infty.\end{cases}$$

易知 $\widetilde{Q}_N=\{q_{(n)}(t)\mid q(t)$ 为有理系数多项式;$n=1,2,\cdots\}$ 在 $\widetilde{C}_N$ 中稠密,$\widetilde{Q}_N$ 显然可数,所以 $\widetilde{C}$ 可分.

8.1.13 设 $M(-\infty,+\infty)=\{x(t)\mid x(t)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有界$\}$,$\rho(x,y)=\sup_{(t)}|x(t)-y(t)|$,证明:$(M,\rho)$ 为不可分空间.

证 对每个 $\alpha\in\mathbf{R}^1$,作函数 $x_\alpha(t)=\begin{cases}1 & t=\alpha,\\ 0 & t\neq\alpha.\end{cases}$ 易知 $x_\alpha(t)\in M(-\infty,+\infty)$,$\{x_\alpha(t)\mid\alpha\in\mathbf{R}^1\}$ 为 $M(-\infty,+\infty)$ 的不可数子集,当 $\alpha_1\neq\alpha_2$ 时,有 $\rho(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2})=2$.若$(M,\rho)$可分,则应有 $x_n(t)\in M\ (n=1,2,\cdots)$ 使 $\{x_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 在 M 中稠密,从而由 8.1.9 知对 $\delta=\frac{1}{2}>0$,应有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}\delta(x_n)\supseteq M\supseteq\{x_\alpha(t)\mid\alpha\in\mathbf{R}^1\}$,注意每个 $\delta(x_n)$ 中最多只有一个 $x_{(\alpha)}$(若 $x_{\alpha_1}\in\delta(x_{n_0})$,$\alpha_1\neq\alpha_2$ 且 $x_{\alpha_2}\in\delta(x_{n_0})$,则 $2=\rho(x_{\alpha_1},x_{\alpha_2})\leqslant\rho(x_{\alpha_1},x_{n_0})+\rho(x_{n_0},x_{\alpha_2})<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$,这是不可能的).这导致 $\{x_\alpha(t)\mid\alpha\in\mathbf{R}^1\}$ 为可数集,这是矛盾,所以(M,ρ)不可分.

8.1.14 证明:① 完备的距离空间(X,ρ)的闭子空间(X_1,ρ)亦完备;② 任何距离空间(X_1,ρ)的完备子空间(X_1,ρ)都是闭子空间.

证 ① 任取 X_1 中的一个基本列(x_n),则(x_n)也有 X 中的基本列,因 X 完备,故有 $x\in X$,使 $x_n\to x\ (n\to\infty)$.由于 $\{x_n\}\subseteq X_1$,若有 n 使 $x=x_n$,则 $x\in X_1$,否则 x 是 X_1 的一个极限点.因 X_1 闭,也有 $x\in X_1$,所以我们证明了 X_1 中每个基本列(x_n)都在 X_1

中收敛.所以(X_1,ρ)完备.

② 设(x_n)是X_1中的一个点列,且$x_n\to x(n\to\infty)$,易知此(x_n)是X_1中的基本列.由(X_1,ρ)完备,又有$x'\in X_1$使$x_n\to x'\ (n\to\infty)$,再由(X,ρ)中极限的唯一性得到$x=x'\in X_1$,所以X_1是X的闭子集,即(X_1,ρ)是(X,ρ)的闭子空间.

8.1.15 设X是完备的距离空间,$\{O_n\ \ n=1,2,\cdots\}$是X中一列稠密的开集,证明$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$在$X$中稠密.

证 $\forall x_1\in X,\forall\delta_1>0$,往证$\delta_1(x_1)$中有$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$中的点即可.因$O_1$在$X$稠密,故有$x_2\in\delta_1(x_1)\cap O_1$,注意$\delta_1(x_1)\cap O_1$为开集,故有$\delta_2>0$,使闭球$\overline{\delta}_2(x_2)\subseteq\delta_1(x_1)\cap O_1$.因$O_2$在$X$稠密,$x_2\in X$,故有$x_3\in\delta_2(x_2)\cap O_2$.又$\delta_2(x_2)\cap O_2$为开集,故有$\delta_3>0$使闭球$\overline{\delta}_3(x_3)\subseteq\delta_2(x_2)\cap O_2,\cdots$如此,得到一列闭球$\overline{\delta}_2(x_2)\supseteq\overline{\delta}_1(x_1)\supseteq\overline{\delta}_3(x_3)\supseteq\cdots$.不妨设$\delta_n\to 0\ (n\to\infty)$,由$X$的完备性知有$X$中唯一的$\bar{x}\in\bigcap\limits_{n=2}^{\infty}\overline{\delta}_n(x_n)$,又$\overline{\delta}_n(x_n)\subset O_{n-1}(n=2,3,\cdots)$,故$\bar{x}\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$.注意$\bar{x}\in\overline{\delta}_2(x_2)\subseteq\delta_1(x_1)$,即我们已证明了有$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}O_n$的$\bar{x}\in\delta_1(x_1)$.

8.1.16 证明8.1.2中的$L^p(E,M)$完备.

证 设(f_n)是$L^p(E,M)$中的一个基本列,$\forall\sigma>0$,令$E_{n,m}(\sigma)=E(x\mid f_n(x)-f_m(x)\mid\geqslant\sigma)$,注意

$$\begin{aligned}&\int_E\mid f_n(x)-f_m(x)\mid^p\mathrm{d}n\\&\geqslant\int_{E_{n,m}(\sigma)}\mid f_n(x)-f_m(x)\mid^p\mathrm{d}m\\&\geqslant\sigma^p\mu(E_{n,m}(\sigma))\end{aligned}$$

及(f_n)为$L^p(E,M)$中的基本列.故

$$\mu E_{n,m}(\sigma)\to 0\ (n,m\to\infty).$$

此表明,(f_n)是依测度收敛意义下的基本列.由[1]中P172定理7知存在可测函数f,使$f_n\Rightarrow f$.又由Riesz定理知有(f_n)的子列(f_{n_k})使$f_{n_k}\xrightarrow{\text{a.e.}}f\ (n\to\infty)$.因$(f_n)$是$L^p(E,M)$中的基本列,故$\forall\epsilon>0$,存在$N$,当$n,k\geqslant N$时,有

$$\left|\int_E\mid f_n(x)-f_{n_k}(x)\mid^p\mathrm{d}m\right|<\epsilon^p.$$

由Fatou引理有

$$\begin{aligned}&\int_E\lim_{k\to\infty}\mid f_n(x)-f_{n_k}(x)\mid^p\mathrm{d}m\\&\leqslant\varliminf_{k\to\infty}\int_E\left|f_n(x)-f_{n_k}(x)\right|^p\mathrm{d}m\leqslant\epsilon^p\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\rho(f_n,f)&=\left(\int_E\mid f_n(x)-f(x)\mid^p\mathrm{d}m\right)^{1/p}\\&\leqslant\epsilon\ (n\geqslant N).\end{aligned}$$

此表明$\rho(f_n,f)\to 0$即$f_n\to f\ (n\to\infty)$,所以$L^p(E,M)$完备.

8.1.17 设X为距离空间,$E\subseteq X$,证明:

E的每个无限子集有极限点$\Leftrightarrow E$中每个点列有收敛子列.

证 $\Rightarrow$:设(x_n)是E中一个点列.若$\{x_n\}$为有限集,则(x_n)有常驻子列(x_{n_k}),此(x_{n_k})自然收敛.若$\{x_n\}$为无限集,则$\{x_n\}$有极限点x,从而易知有(x_n)的子序列(x_{n_k})使$x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$.

$\Leftarrow$:设A是E的某个无限子集,从A中取一可列子集排成点列(x_n).由假设(x_n)有子列(x_{n_k})使$x_{n_k}\to x\ (k\to\infty)$.由于$(x_{n_k})$各项互不相同,故$x\neq x_{n_k}(k=1,2,\cdots)$,所以$x$是$A$的一个极限点.

8.1.18 设E为距离空间X中的致密集(即E的每个无限子集有极限点).证明E必为有界集.

证 否则,E必为无限集,取$x_1\in E$,再取$x_2\in E$,使$\rho(x_1,x_2)>1$(此x_2必存在,否则E为有界集),再取$x_3\in E$,使$\rho(x_3,x_1)>1,\rho(x_3,x_2)>1$(此$x_3$必存在,否则$E$为有界集),再取$x_4\in E,\cdots$如此,得到$E$中一个点列$(x_n)$满足$\rho(x_n,x_m)>1(n\neq m)$,显然此$(x_n)$无基本子列,更无收敛子列.与$E$为致密集相矛盾(注意8.1.17),所以$E$为有界集.

8.1.19 设R^m为m维欧氏空间,

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{m}\mid\xi_i-\eta_i\mid^2\right)^{1/2},A\subseteq R^m,$$

证明:A致密$\Leftrightarrow A$有界.

证 $\Rightarrow$:同8.1.18之证.

$\Leftarrow$:设(x_n)是A中的一个点列,往证它有收敛子列即可:

设$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_m^{(n)})\ (n=1,2,\cdots)$.

注意$\mid\xi_i^{(n)}\mid\leqslant\left(\sum\limits_{i=1}^{m}\mid\xi_i^{(n)}\mid^2\right)^{1/2}\leqslant M(i=1,2,\cdots,m;n=1,2,\cdots)$.

因$(\xi_1^{(n)})$为有界数列,故由实数完备性知它有收敛子数列$(\xi_1^{(1,n)})$,又$(\xi_2^{(1,n)})$为有界数列,故有收敛子数列$(\xi_2^{(2,n)})$.又$(\xi_3^{(2,n)})$为有界数列,故有收敛子数列$(\xi_3^{(3,n)}),\cdots$,最后$(\xi_m^{(m-1,n)})$有收敛子数列$(\xi_m^{(m,n)})$,所以,(x_n)有子列(x_{mn});$x_{mn}=(\xi_1^{(m,n)},\xi_2^{(m,n)},\cdots,\xi_m^{(m,n)})$,使当$n\to\infty$,每个$(\xi_i^{mn})$都收敛$(i=1,2,\cdots,m)$.所以$(x_{mn})$为$(x_n)$的收敛子列.

8.1.20 设(S,ρ)同8.1.1.$E\subseteq S$,证明:

E致密$\Leftrightarrow$存在$m_i\geqslant 0$,使对一切$x=(\xi_i)\in E$,有$\mid\xi_i\mid\leqslant m_i(i=1,2,\cdots)$.

证 $\Rightarrow$:否则,有i_0使$\{\xi_{i_0}\mid x=(\xi_i)\in E\}$无界,

从而同 8.1.18 之证知有 $x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots) \in E$ $(n = 1,2,\cdots)$，使 $(\xi_{i_0}^{(n)})$ 无收敛子列. 因 S 中的收敛等价于按坐标收敛(见 8.1.1)，故 (x_n) 无收敛子列. 这与 E 致密相矛盾. 所以结论成立.

$\Leftarrow$：设 (x_n) 是 E 中的一个子列，往证它有收敛子列即可.

因 $|\xi_1^{(n)}| \leqslant m_1$，故有 (x_n) 的一个子列 $(x_n^{(1)})$：$x_n^{(1)} = (\xi_1^{(1,n)}, \xi_2^{(1,n)}, \cdots)$ $(n = 1,2,\cdots)$ 使得 $(\xi_1^{(1,n)})$ 收敛. 又 $|\xi_2^{(1,n)}| \leqslant m_2$，故有 $(x_n^{(1)})$ 的一个子列 $(x_n^{(2)})$：$x_n^{(2)} = (\xi_1^{(2,n)}, \xi_2^{(2,n)}, \cdots)$ $(n = 1,2,\cdots)$，使得 $(\xi_2^{(2,n)})$ 收敛. 又 $|\xi_3^{(2,n)}| \leqslant m_3$，又有 $(x_n^{(2)})$ 的一个子列 $(x_n^{(3)})$：$x_n^{(3)} = (\xi_1^{(3,n)}, \xi_2^{(3,n)}, \cdots)$ $(n = 1,2,\cdots)$，使得 $(\xi_3^{(3,n)})$ 收敛，… 取 (x_n) 的子列 $(x_n^{(n)})$：$x_n^{(n)} = (\xi_1^{(1,n)}, \xi_2^{(2,n)}, \cdots)$，易知 $(x_n^{(n)})$ 的每个坐标 $(\xi_k^{(k,n)})$ 收敛 $(n \to \infty, k = 1,2,\cdots)$. 再由 8.1.1 结论，所以 (x_n) 有收敛子列 $(x_n^{(n)})$.

注 一般距离空间中的有界集未必是致密集，如 (S,ρ) 中的集合 S，便是一个有界集，但由本论题结论易知 S 并不是致密的.

8.1.21 设 K 是距离空间 X 中的紧集(致密且闭的集). 证明：①K 上的连续函数必有最大值、最小值存在；②K 上的连续函数必一致连续.

证 ① 设 f 是 X 上的连续函数，令 $M = \sup\limits_{x \in K} f(x)$. 由 sup 的定义知存在 $x_n \in K$，使 $f(x_n) \to M$ $(n \to \infty)$. 因 $\{x_n\} \subseteq K$ 及 K 致密，故有子列 (x_{n_k}) 及 x，使 $x_{n_k} \to x$ $(k \to \infty)$. 由于 K 是闭的，故 $x \in K$. 又 f 连续，所以 $f(x_{n_k}) \to f(x)$ $(k \to \infty)$. 注意 $f(x_{n_k}) \to M$ 及极限的唯一性，故有 $f(x) = M < +\infty$，即 f 在 x 达到最大值 $f(x) = M$. 同样可证 f 在 K 上有最小值存在.

② 若 f 在 K 上非一致连续，则存在 $\varepsilon_0 > 0$，使对任何 $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$，有 $x_n, y_n \in K$，使 $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n}$，$|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0$ $(n = 1,2,\cdots)$，注意 (x_n) 有子列 (x_{n_k}) 收敛，(y_{n_k}) 又有子列 $(y_{n_{k_l}})$ 收敛，所以 $(x_{n_{k_l}})$，$(y_{n_{k_l}})$ 都收敛. 不妨设 (x_n)，(y_n) 都收敛，如 $x_n \to x \in K$，$y_n \to y \in K$，注意 $\rho(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \to 0$ $(n \to \infty)$，故 $x = y$. 又 f 在 x 连续，又有 $f(x_n) \to f(x)$，$f(y_n) \to f(x)$，所以 $|f(x_n) - f(y_n)| \to 0$ $(n \to \infty)$. 这与 $|f(x_n) - f(y_n)| \geqslant \varepsilon_0 > 0$ $(n = 1,2,\cdots)$ 矛盾. 所以 f 在 K 上一致连续.

8.1.22 设 X 为距离空间，(F_n) 是 X 中一列非空紧集且 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$，证明：① $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing$；② 当把上述 (F_n) 改为一列闭集时，结论是否还成立？

解 ① 取 $x_n \in F_n$ $(n = 1,2,\cdots)$，则 (x_n) 是 F_1 中的一个点列，因紧，故有 (x_n) 的子列 (x_{n_k}) 使 $x_{n_k} \to x \in F_1$；注意对每个自然数 m，当 $n_k \geqslant m$ 时，$x_{n_k} \in F_m$ 及 $x_{n_k} \to x$. 所以 $x \in F_m$，所以 $x \in \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m$，即 $\bigcap\limits_{m=1}^{\infty} F_m \neq \varnothing$.

② 将 F_n 改为闭集时结论未必成立. 如在 $\mathbf{R}^1$ $(\rho(x,y) = |x - y|)$ 中，取闭集列 $F_n = [n, +\infty)$ $(n = 1,2,\cdots)$，则 $F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots$，但 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \varnothing$ (显然).

8.1.23 在 $\mathbf{R}^1$ 上添上无穷远点 $+\infty$ 与 $-\infty$，得到的集合记为 $\widetilde{\mathbf{R}}^1$，在 $\widetilde{\mathbf{R}}^1$ 上定义适当的距离 ρ，使 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 成为紧距离空间.

解 对 $x, y \in \widetilde{\mathbf{R}}^1$ 时，定义 $\rho(x,y) = |\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y|$ (其中 $\operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$，$\operatorname{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2}$)，易验证 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 是距离空间. 下证 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 为紧的. 只需证 $\widetilde{\mathbf{R}}^1$ 中每个点列 (x_n) 有收敛子列. 若 (x_n) 是 $\mathbf{R}^1$ 中的有界点列，由实数完备性知，(x_n) 有收敛子列 (x_{n_k}). 设 $x_{n_k} \to x$ (即 $|x_{n_k} - x| \to 0$)，易知 $\rho(x_{n_k}, x) = |\operatorname{arctg} x_{n_k} - \operatorname{arctg} x| \to 0$ $(k \to \infty)$，所以 (x_n) 在 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 中也有收敛子列 (x_{n_k}). 若 (x_n) 是 $\mathbf{R}^1$ 中的无界点列，此时，不妨设有 (x_n) 的子列 (x_{n_k})，使 $x_{n_k} \to +\infty$ $(k \to \infty)$，此时有 $\rho(x_{n_k}, +\infty) = |\operatorname{arctg} x_{n_k} - \operatorname{arctg} +\infty| = |\operatorname{arctg} x_{n_k} - \pi/2| \to 0$，即 (x_{n_k}) 在 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 中收敛，总之，$\widetilde{\mathbf{R}}^1$ 中每个点列 (x_n) 有子列 (x_{n_k}) 在 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 中收敛，所以致密，所以 $(\widetilde{\mathbf{R}}^1, \rho)$ 为紧距离空间.

8.1.24 设 X 为距离空间，$E \subseteq X$，则

E 中每个点列有基本子列 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，$E$ 有有限的 ε- 网存在(即有 X 中的有限集 A，使 $\bigcup\limits_{x \in A} \varepsilon(x) \supseteq E$).

证 $\Rightarrow$：否则，存在 $\varepsilon_0 > 0$，使 E 无有限 ε_0- 网存在，此时 E 必为无限集. 取 $x_1 \in E$，再取 $x_2 \in E$，使 $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon_0$(此 x_2 必存在，否则 $\{x_1\}$ 便是 E 的有限 ε_0- 网)，再取 $x_3 \in E$，使 $\rho(x_3, x_1) \geqslant \varepsilon_0$，$\rho(x_3, x_2) \geqslant \varepsilon_0$(此 x_3 必存在，否则 $\{x_1, x_2\}$ 便是 E 的有限 ε_0- 网)，再取 $x_4 \in E$，…，如此，有 E 中一个点列 (x_n) 满足 $\rho(x_n, x_m) \geqslant \varepsilon_0 > 0$ ($n \neq m$ 时)，即 (x_n) 无基本子列. 这是矛盾，所以命题成立.

$\Leftarrow$:设(x_n)是E中一个点列,往证它有基本子列即可:给出$\epsilon_k=\frac{1}{k}>0$,则E有有限的ϵ_k-网A_k存在$(k=1,2,\cdots)$,以A_1的各点为中心,以ϵ_1为半经作开球(有限个),则这些开球之并包含了E,又$E\supseteq\{x_n\}$,故其中至少有一个开球包含了(x_n)的一个子列$(x_n^{(1)})$,再以A_2的各点为中心,以ϵ_2为半径作开球(有限个),则这些开球之并包含了E,又$E\supseteq\{x_n^{(1)}\}$,故其中至少有一个开球包含了$(x_n^{(1)})$的一个子列$(x_n^{(2)})$,再以A_3的各点为中心,以ϵ_3为半径…如此,我们得到一个点列之列:

$$\left.\begin{array}{l}(x_n^{(1)})=x_1^{(1)},x_2^{(1)},x_3^{(1)},\cdots\\(x_n^{(2)})=x_1^{(2)},x_2^{(2)},x_3^{(2)},\cdots\\(x_n^{(3)})=x_1^{(3)},x_2^{(3)},x_3^{(3)},\cdots\\\cdots\cdots\end{array}\right\}\begin{array}{l}(x_n^{(i)})\text{是}(x_n^{(i-1)})\text{的子}\\\text{列},(x_n^{(i)})\text{包含于一个}\\\text{以}\frac{1}{i}\text{为半径的球中}\\(i=2,3,\cdots)\end{array}$$

易知,对角线子列$(x_n^{(n)})=x_1^{(1)},x_2^{(2)},x_3^{(3)},\cdots$是$(x_n)$的子列.又当$n,m\geqslant k$时,$x_n^{(n)},x_m^{(m)}$都包含于一个以$\frac{1}{k}$为半径的球中,且$\rho(x_n^{(n)},x_m^{(m)})<\frac{2}{k}(k=1,2,\cdots)$.故$(x_n^{(n)})$是$(x_n)$的基本子列,所以结论真.

8.1.25　设$C_{[a,b]}$中的距离

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,A\subseteq C_{[a,b]},$$

证明:

A致密$\Leftrightarrow$① 存在M,使对一切$x(t)\in A$,一切$t\in[a,b]$,$|x(t)|\leqslant M$(A中的函数一致有界);② $\forall\epsilon>0$,存在$\delta>0$,当$t_1,t_2\in[a,b]$,$|t_1-t_2|<\delta$时对一切$x(t)\in A$,有$|x(t_1)-x(t_2)|<\epsilon$(A中的函数等度一致连续).

证　$\Rightarrow$:① 因A致密,故A有界,所以存在$\delta>0$,使$A\subseteq\delta(0)$(此处0表恒为0的函数),即对每个$x(t)\in A$,有$\rho(0,x)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-0|<\delta$,即对一切$x(t)\in A$,$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|<\delta$,所以对一切$t\in[a,b]$有$|x(t)|<\delta$,即有$M=\delta$,使命题成立.

② $\forall\epsilon>0$,因A致密,故A中每个点列有基本子列,由8.1.24,对$\frac{\epsilon}{3}>0$,A有有限的$\frac{\epsilon}{3}$-网存在,即有$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)\in C_{[a,b]}$,使对每个$x(t)\in A$,有$1\leqslant k\leqslant n$,使$\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_k(t)|<\frac{\epsilon}{3}$成立.注意$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_n(t)$都在$[a,b]$一致连续,故有$\delta>0$,使当$t_1,t_2\in[a,b]$,$|t_1-t_2|<\delta$时,$|x_i(t_1)-x_i(t_2)|<\frac{\epsilon}{3}$对每个$i=1,2,\cdots,n$同时成立,所以对每个$x(t)\in A$,当$t_1,t_2\in[a,b]$,且$|t_1-t_2|<\delta$时,有

$$|x(t_1)-x(t_2)|\overset{(\exists k)}{\leqslant}|x(t_1)-x_k(t_1)|+|x_k(t_1)-x_k(t_2)|+|x_k(t_2)-x(t_2)|$$
$$\leqslant\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon.$$

此即A中的函数等度一致连续.

$\Leftarrow$:只需证A中每个点列有收敛子列,而$C_{[a,b]}$完备,所以又只需证A中每个点列有基本子列.由8.1.24,又只需证对任何$\epsilon>0$,A有有限的ϵ-网存在即可.因A中的函数等度一致连续,故对$\frac{\epsilon}{3}>0$,存在$\delta>0$,当$t_1,t_2\in[a,b]$且$|t_1-t_2|<\delta$时,对一切$x(t)\in A$,有$|x(t_1)-x(t_2)|<\frac{\epsilon}{3}$.取$n$充分大,使$\frac{b-a}{n}<\delta$,将$[a,b]$作$n$等分分割:$a=t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n=b$,易知,对一切$x(t)\in A$,一切$t\in[a,b]$,当$t\in[t_{i-1},t_i]$时,有

$$|x(t)-x(t_i)|<\frac{\epsilon}{3};\ |x(t)-x(t_{i-1})|<\frac{\epsilon}{3}.$$

对每个$x(t)\in A$,作$\tilde{x}(t)=(x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n))$向与它对应,易知$\tilde{x}(t)$是$R^{n+1}$中一个向量,且

$$\tilde{A}=\{x(t_0),x(t_1),\cdots,x(t_n)\mid x(t)\in A\}$$

是R^{n+1}中的一个有界集,由8.1.19知$\tilde{A}$致密,故有$\tilde{A}$中的有限个向量$\tilde{x}_1(t),\tilde{x}_2(t),\cdots,\tilde{x}_m(t)$成为$\tilde{A}$的$\frac{\epsilon}{3}$-网(*),即有$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)\in A$,使对一切$x(t)\in A$,必有$1\leqslant k\leqslant m$,使$\rho(\tilde{x}(t),\tilde{x}_k(t))<\frac{\epsilon}{3}$即$(\sum\limits_{i=0}^{n}|x(t_i)-x_k(t_i)|^2)^{1/2}<\frac{\epsilon}{3}$,更有$|x(t_i)-x_n(t_i)|<\frac{\epsilon}{3}(i=0,1,2,\cdots,n)$,所以,对$\epsilon>0$,有$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)\in A$,使对每个$x(t)\in A$,每个$t\in[a,b]$,有$1\leqslant k\leqslant m$,使

$$|x(t)-x_k(t)|<|x(t)-x(t_i)|+|x(t_i)-x_k(t_i)|+|x_k(t_i)-x_k(t)|<\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}+\frac{\epsilon}{3}=\epsilon\text{(当}t\in[t_{i-1},t_i]\text{时成立)}.$$

即有

$$\rho(x,x_k)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-x_k(t)|<\epsilon.$$

即我们对任何$\epsilon>0$,找到了A中有限个函数$x_1(t),x_2(t),\cdots,x_m(t)$,使它们成为$A$的$\epsilon$-网.

注　上述"$\Leftarrow$"的证明中(*)的一步,用到了以下的一个命题:"$\forall\epsilon>0$,A有有限的ϵ-网$\Leftrightarrow\forall\epsilon>0$,$A$有属于$A$的有限$\epsilon$-网",这个命题的证明留给读者完成.下面几例主要是利用前面已证得的结论来解题的.

8.1.26 设 K 为距离空间中的紧集，A 是 K 至 K 的一个映照，若对任何 $x,y\in K\ (x\neq y)$，有 $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$，则必有唯一的 $x_0\in K$，使 $x_0=Ax_0$（即 A 有唯一的不动点）.

证 令 $f(x)=\rho(x,Ax)\ (x\in K)$，易验证 f 是 K 上的连续函数. 由 8.1.21 知，f 在 K 上有最小值存在，即有 $x_0\in K$，使

$$f(x_0)=\rho(x_0,Ax_0)=\min_{x\in K}f(x)=\min_{x\in K}\rho(x,Ax).$$

下证此 x_0 满足 $x_0=Ax_0$，否则，$x_0\neq Ax_0$，由题设有 $\rho(Ax_0,A(Ax_0))<\rho(x_0,Ax_0)$，即 $f(Ax_0)<f(x_0)$，这与 $f(x_0)$ 为最小值相矛盾，所以 $x_0=Ax_0$. 另外，若还有 $x_0^1\in K$，使 $x_0^1=Ax_0^1$，且 $x_0\neq x_0^1$，则由题设有 $0<\rho(x_0,x_0^1)=\rho(Ax_0,Ax_0^1)<\rho(x_0,x_0^1)$，这也矛盾，所以 $x_0^1=x_0$，即 A 的不动点唯一.

8.1.27 证明 Banach 压缩映象原理：设 X 为完备的距离空间，$A:X\to X$，若存在 $0\leqslant\theta<1$，使对一切 $x,y\in X$，有 $\rho(Ax,Ay)\leqslant\theta\rho(x,y)$，则有唯一的 $\bar{x}\in X$，使 $\bar{x}=A\bar{x}$（即 A 有唯一的不动点）.

证 任取 $x_0\in X$，令 $x_n=A^nx_0\ (n=1,2,\cdots)$，易知 (x_n) 是 X 中的一个点列. 注意对任何自然数 p，有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,x_{n+p})&\leqslant\rho(x_n,x_{n+1})+\rho(x_{n+1},x_{n+2})+\cdots\\&\quad+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p})\\&=\rho(A^nx_0,A^{n+1}x_0)+\rho(A^{n+1}x_0,A^{n+2}x_0)+\cdots\\&\quad+\rho(A^{n+p-1}x_0,A^{n+p}x_0)\\&\leqslant\theta^n\rho(x_0,Ax_0)+\theta^{n+1}\rho(x_0,Ax_0)+\cdots\\&\quad+\theta^{n+p-1}\rho(x_0,Ax_0)\\&=(\theta^n+\theta^{n+1}+\cdots+\theta^{n+p-1})\rho(x_0,Ax_0)\\&=\frac{\theta^n-\theta^{n+p}}{1-\theta}\rho(x_0,Ax_0)\\&\leqslant\frac{\theta^n}{1-\theta}\rho(x_0,Ax_0)\to0\ (n\to\infty).\end{aligned}$$

故 (x_n) 是基本列. 由于 X 完备，故有 $\bar{x}\in X$，使 $x_n\to\bar{x}\ (n\to\infty)$. 又由题设知 A 连续，故又有 $x_{n+1}=Ax_n\to A\bar{x}\ (n\to\infty)$，所以 $\bar{x}=A\bar{x}$. 即 $\bar{x}$ 为 A 的不动点，$\bar{x}$ 的唯一性证明同上题.

8.1.28 设 X 为完备的距离空间，$A:X\to X$，若存在 n 及 $0\leqslant\theta\leqslant1$，使对一切 $x,y\in X$，有 $\rho(A^nx,A^ny)\leqslant\theta\rho(x,y)$，则存在唯一的 $\bar{x}\in X$ 使得 $\bar{x}=A\bar{x}$.

证 令 $B=A^n$，则 $B:X\to X$，且满足 8.1.27 条件，故有唯一的 $x^*\in X$，使 $x^*=Bx^*=A^nx^*$，又 $Ax^*=A^{n+1}x^*=A^n(Ax^*)=B(Ax^*)$，故 Ax^* 也是 B 的不动点. 由于 B 的不动点唯一，故 $x^*=Ax^*$，此表明 x^* 也是 A 的不动点. 下证 A 的不动点唯一：若还有 $\bar{x}\in X$ 使 $\bar{x}=A\bar{x}$，则

$$\begin{aligned}\rho(x^*,\bar{x})&=\rho(Ax^*,A\bar{x})=\rho(A^2x^*,A^2\bar{x})\\&=\cdots=\rho(A^nx^*,A^n\bar{x})\leqslant\theta\rho(x^*,\bar{x}).\end{aligned}$$

所以 $\rho(x^*,\bar{x})=0$，即 $\bar{x}=x^*$.

8.1.29 设 X 为完备空间，$A:X\to X$，若

$$\inf_{(n)}\sup_{x\neq y}\frac{\rho(A^nx,A^ny)}{\rho(x,y)}<1,$$

则 A 有唯一的不动点.

证 由 inf 的定义知有 n，使

$$\sup_{x\neq y}\frac{\rho(A^nx,A^ny)}{\rho(x,y)}=\theta<1,$$

从而对一切 $x\neq y$，有

$$\frac{\rho(A^nx,A^ny)}{\rho(x,y)}\leqslant\theta,$$

从而对一切 $x,y\in X$，有 $\rho(A^nx,A^ny)\leqslant\theta\rho(x,y)$，由 8.1.28 知结论成立.

8.1.30 设 $a_{ij}\in\mathbf{R}^1\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，$\sum\limits_{i,j=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2<1$，其中 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j,\\0 & i\neq j.\end{cases}$ 证明：代数方程组

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\cdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{pmatrix}$$

对任何 $b_1,b_2,\cdots,b_n\in\mathbf{R}^1$ 有唯一解 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

证 令 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)'$，则上式成为 $Ax=b$，再令

$$Tx=b-Ax+Ix\qquad(I=(\delta_{ij})_{n\times n})$$

$$Tx=b-(A-I)x=b-(a_{ij}-\delta_{ij})_{n\times n}x$$

易知 $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$，且

$$(Tx)_j=b_j-\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})x_i\ (j=1,2,\cdots,n).$$

又

$$\begin{aligned}\rho(TX_1,TX_2)&=\Big(\sum_{j=1}^{n}((TX_1)_j-(TX_2)_j)^2\Big)^{1/2}\\&=\Big(\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})\Big)^2\Big)^{1/2}\\&\leqslant\Big(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2\cdot\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2\Big)^{1/2}\\&=\Big(\sum_{ij=1}^{n}(a_{ij}-\delta_{ij})^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{n}(x_i^{(2)}-x_i^{(1)})^2\Big)^{1/2}\\&\triangleq\theta\rho(x_1,x_2)\end{aligned}$$

及 $\mathbf{R}^n$ 完备，由压缩映象原理，有唯一的 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$，$\bar{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)'$，使 $\bar{x}=T\bar{x}$，即

$$\bar{x}=b-A\bar{x}+I\bar{x}=b-A\bar{x}+\bar{x}.$$

即有唯一的 $\bar{x}\in\mathbf{R}^n$ 使 $A\bar{x}=b$. 即

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

8.1.31　设 $f(t) \in C_{[0,1]}$，$\lambda \in \mathbf{R}^1$，证明积分方程

$$x(t) = f(t) + \lambda\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \quad (t \in [0,1])$$

有唯一连续解.

证　在 $C_{[0,1]}$ 中定义 $\rho(x,y) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} |x(t) - y(t)|$，则 $C_{[0,1]}$ 完备，对每个 $x(s) \in C_{[0,1]}$，令

$$Tx(t) = f(t) + \lambda\int_0^t x(s)\mathrm{d}s \quad (t \in [0,1]).$$

易知 $T: C_{[0,1]} \to C_{[0,1]}$，注意

$$|Tx_1(t) - Tx_2(t)|$$

$$= |\lambda| \left|\int_0^t (x_1(s) - x_2(s))\mathrm{d}s\right|$$

$$\leqslant |\lambda| t\rho(x_1,x_2),$$

$$|T^2x_1(t) - T^2x_2(t)| \leqslant |\lambda|^2 \frac{t^2}{2}\rho(x_1,x_2),$$

……

$$|T^nx_1(t) - T^nx_2(t)| \leqslant |\lambda|^n \frac{t^n}{n!}\rho(x_1,x_2)$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^n}{n!}\rho(x_1,x_2),$$

所以

$$\rho(T^nx_1, T^nx_2) = \max_{0\leqslant t\leqslant 1} |T^nx_1(t) - T^nx_2(t)|$$

$$\leqslant \frac{|\lambda|^n}{n!}\rho(x_1,x_2)(n = 1,2,\cdots).$$

因 $\frac{|\lambda|^n}{n!} \to 0$，故有 n 使 $\theta = \frac{|\lambda|^n}{n!} < 1$，于是由 8.1.28 知结论成立.

§8.2　线性泛函基本理论

设 X 是数域 Λ 上的线性空间，$\|\cdot\|: X \to \mathbf{R}^1$，若 $\|\cdot\|$ 满足：

1°　$\|x\| \geqslant 0$，$x = \theta$(零向量)$\Leftrightarrow \|x\| = 0$（正定义）；

2°　$\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$，$\alpha \in \Lambda$，$x \in X$（正齐性）；

3°　$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$（次可加性）.

则称 $(X, \|\cdot\|)$ 是线性赋范空间，$\|\cdot\|$ 称为 X 上的范数，$\|x\|$ 称为 x 的范数.

若在 $X \times X$ 上，定义

$$\rho(x,y) = \|x - y\|,$$

易知，ρ 是 X 上的一个距离，称这个距离为范数 $\|\cdot\|$ 诱导出的距离. 从这个意义上，我们说，每个线性赋范空间，都是一个线性的距离空间.

线性赋范空间完备，是指它按范数诱导出来的距离完备，完备的线性赋范空间称为 Banach 空间.

8.2.1　设 $V[a,b]$ 表 $[a,b]$ 上囿变且右连续函数的全体，线性运算按通常. 定义

$$\|x\| = |x(a)| + \bigvee_a^b(x) \quad (x(t) \in V[a,b]).$$

证明 $V[a,b]$ 是 Banach 空间.

证　易知通常的函数加法与数乘在 $V[a,b]$ 封闭，故 $V[a,b]$ 是线性空间. 注意 $\bigvee_a^b(x) = 0 \Leftrightarrow x(t) \equiv C$，则易验证 $\|\cdot\|$ 是范数，所以 $V[a,b]$ 是线性赋范空间，下证它是 Banach 空间：

设 (x_n) 是 $V[a,b]$ 中的基本列，即 $\forall \varepsilon > 0$，存在 N，当 $n, m \geqslant N$ 时，有

$$\|x_n - x_m\| = |x_n(a) - x_m(a)| + \sup_{(T)} |(x_n(t_i) - x_m(t_i)) - (x_n(t_{i-1}) - x_m(t_{i-1}))| < \varepsilon.$$

此处 sup 取自 $[a,b]$ 的一切分割：

$$T: a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

注意对任何 $t \in [a,b]$，

$$|x_n(t) - x_m(t)| \leqslant |x_n(a) - x_m(a)| + |(x_n(t) - x_m(t)) - (x_n(a) - x_m(a))|$$

$$\leqslant \|x_n - x_m\| < \varepsilon \ (n, m \geqslant N),$$

故 $(x_n(t))$ 在 $[a,b]$ 一致收敛. 设 $x_n(t) \xrightarrow{一致} x(t)$，于是对任一分割 T，有

$$|x_n(a) - x_m(a)| + \sum_{i=1}^n |(x_n(t_i) - x_m(t_i)) - (x_n(t_{i-1}) - x_m(t_{i-1}))| \leqslant \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

在上式中令 $m \to \infty$，得到

$$|x_n(a) - x(a)| + \sum_{i=1}^n |(x_n(t_i) - x(t_i)) - (x_n(t_{i-1}) - x(t_{i-1}))| < \varepsilon \ (n \geqslant N).$$

从而有

$$|x_n(a) - x(a)| + \sup_{(T)} \sum_{i=1}^n |(x_n(t_i) - x(t_i)) - (x_n(t_{i-1}) - x(t_{i-1}))| \leqslant \varepsilon \ (n \geqslant N).$$

即 $\|x_n - x\| \leqslant \varepsilon \ (n \geqslant N)$，此即 $\|x_n - x\| \to 0$.

再由

$$\sum_{i=1}^n |x(t_i) - x(t_{i-1})| \leqslant \sum_{i=1}^n |(x(t_i) - x_n(t_i)) - (x(t_{i-1}) - x_n(t_{i-1}))| + \sum_{i=1}^n |x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})|$$

$$< \varepsilon + M_n < +\infty$$

知 $x \in V[a,b]$，故 $x_n \to x \ (n \to \infty)$，所以 $V[a,b]$ 是 Banach 空间.

8.2.2　设 $x(t)$ 是 E 上的可测函数. 若存在 E_0，$\mu(E_0) = 0$，使 $x(t)$ 在 $E - E_0$ 上有界，则称 $x(t)$ 为 E 上的本性有界函数. 令

$L^{\infty}(E,\mu)=\{x(t)\mid x(t)$ 为 E 上的本性有界函数$\}$，

线性运算通常，约定 E 上 $a.e.$ 相函数为同一元素，在 $L^{\infty}(E,\mu)$ 定义

$$\|x\|=\inf_{\mu(E_0)=0}\sup_{E-E_0}|x(t)|,\quad x(t)\in L^{\infty}(E,\mu).$$

证明 $L^{\infty}(E,\mu)$ 为 Banach 空间.

证 易知 $L^{\infty}(E,\mu)$ 为线性空间，为证 $\|\cdot\|$ 是范数及 $L^{\infty}(E,\mu)$ 完备，先证对每个 $x(t)\in L^{\infty}(E,\mu)$，有 $E_x,\mu(E_x)=0$，使

$$\|x\|=\sup_{E-E_x}|x(t)|.$$

由 inf 的定义知，对每个 $\frac{1}{k}>0$，有 $E_k,\mu(E_k)=0,\sup\limits_{E-E_k}|x(t)|<\|x\|+\frac{1}{k}$ $(k=1,2,\cdots)$. 令 $E_x=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}E_k$，则 $\mu(E_x)=0$.

$$\|x\|\leqslant\sup_{E-E_x}|x(t)|\leqslant\sup_{E-E_k}|x(t)|$$

$$<\|x\|+\frac{1}{k}\ (k=1,2,\cdots),$$

所以 $\|x\|=\sup\limits_{E-E_x}|x(t)|$. 由此易证 $\|\cdot\|$ 是范数.

又设 (x_n) 是 $L^{\infty}(E,M)$ 中的基本列 则 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m\geqslant N$ 时，有 $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$. 从而有 $E_{n,m},\mu(E_{n,m})=0$ 使

$$\sup_{E-E_{n,m}}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\ (n,\ m\geqslant N).$$

令 $E_0=\bigcup\limits_{(n,m)}E_{n,m}$，则 $\mu(E_0)=0$，且当 $n,m\geqslant N$ 时，

$$\sup_{E-E_0}|x_n(t)-x_m(t)|$$

$$\leqslant\sup_{E-E_{n,m}}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

此表明 $(x_n(t))$ 在 $E-E_0$ 上一致收敛. 设 $x_n(t)\xrightarrow{\text{一致}}x(t)$ $(n\to\infty)$，注意对一切 $t\in E-E_0$，有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon\ (n,m\geqslant N\text{ 时}).$$

令 $m\to\infty$，得到 $|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$ $(n\geqslant N,t\in E-E_0)$，所以 $\sup\limits_{E-E_0}|x_n(t)-x(t)|\leqslant\varepsilon$ $(n\geqslant N)$. 注意 $x_n(t)\in L^{\infty}(E,M)$，故有 $E_n,m(E_n)=0$，使

$$\sup_{E-E_n}|x_n(t)|=\|x_n\|<+\infty$$

及 $\mu(E_0\cup E_n)=0$，所以有

$$\sup_{E-(E_0\cup E_n)}|x(t)|$$

$$\leqslant\sup_{E-(E_0\cup E_n)}|x(t)-x_n(t)|+\sup_{E-(E_0\cup E_n)}|x_n(t)|$$

$$\leqslant\sup_{E-E_0}|x(t)-x_n(t)|+\sup_{E-E_n}|x_n(t)|$$

$$\leqslant\varepsilon+\|x_n\|<+\infty.$$

故 $x(t)\in L^{\infty}(E,\mu)$，所以有

$$\|x_n-x\|\leqslant\sup_{E-E_0}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon\ (n\geqslant N).$$

此即 $x_n\to x$，所以 $L^{\infty}(E,\mu)$ 完备.

8.2.3 设 $0<p\leqslant1$，H^p 表 $[a,b]$ 上满足 Höleler 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^p$$

$$(a\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant b)$$

的函数的全体，线性运算按通常，对 $x(t)\in H^p$，定义

$$\|x\|=|x(a)|+\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}$$

证明 H^p 是 Banach 空间.

证 易证 H^p 为线性空间，$\|\cdot\|$ 为 H^p 上的范数（略），下证 H^p 为 Banach 空间.

设 (x_n) 是 H^p 中的基本列，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 N，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\|x_n-x_m\|=|x_n(a)-x_m(a)|+$$

$$\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{1}{|t_1-t_2|^p}\times$$

$$|(x_n(t_1)-x_m(t_1))-(x_n(t_2)-x_m(t_2))|$$

$$<\varepsilon,$$

于是对每个 $t\in(a,b]$，有

$$\frac{|x_n(t)-x_m(t)|}{|t-a|^p}$$

$$\leqslant\frac{|(x_n(t)-x_m(t))-(x_n(a)-x_m(a))|}{|t-a|^p}$$

$$+\frac{|x_n(a)-x_m(a)|}{|t-a|^p}$$

$$\leqslant\|x_n-x_m\|+\frac{|x_n(a)-x_m(a)|}{|t-a|^p}.$$

所以，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$|x_n(t)-x_m(t)|$$

$$\leqslant\|x_n-x_m\||t-a|^p+|x_n(a)-x_m(a)|$$

$$\leqslant\varepsilon|b-a|^p+\varepsilon=\varepsilon(|b-a|^p+1).$$

此表明 $(x_n(t))$ 在 $[a,b]$ 一致收敛. 设 $x_n(t)\xrightarrow{\text{一致}}x(t)$，注意对一切 $a\leqslant t_1<t_2\leqslant b$，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$|x_n(a)-x_m(a)|$$

$$+\frac{|x_n(t_1)-x_m(t_1)-(x_n(t_2)-x_m(t_2))|}{|t_1-t_2|^p}$$

$$\leqslant\|x_n-x_m\|<\varepsilon.$$

令 $m\to\infty$，得到

$$|x_n(a)-x(a)|$$

$$+\frac{|(x_n(t_1)-x(t_1))-(x_n(t_2)-x(t_2))|}{|t_2-t_1|^p}$$

$$<\varepsilon\ (n\geqslant N).$$

从而

$$|x_n(a)-x(a)|+$$

$$\sup_{a\leqslant t_1<t_2\leqslant b}\frac{|(x_n(t_1)-x(t_1))-(x_n(t_2)-x(t_2))|}{|t_2-t_1|^p}$$

$\leqslant \varepsilon\ (n \geqslant N)$.

注意对一切 $a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b$,

$$\frac{|x(t_1) - x(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p}$$

$$\leqslant \frac{|(x(t_1) - x_n(t_1)) - (x(t_2) - x_n(t_2))|}{|t_1 - t_2|^p}$$

$$+ \frac{|x_n(t_1) - x_n(t_2)|}{|t_1 - t_2|^p}$$

$$\leqslant \varepsilon + M_n < +\infty,$$

所以 $x(t) \in H^p$,所以

$$\| x_n - x \| = | x_n(a) - x(a) | + \sup_{a \leqslant t_1 < t_2 \leqslant b} \frac{|(x_n(t_1) - x(t_1)) - (x_n(t_2) - x(t_0))|}{|t_1 - t_2|^p}$$

$\leqslant \varepsilon\ (n \geqslant N)$,

此即 $\| x_n - x \| \to 0$ 即 $x_n \to x\ (n \to \infty)$,所以 H^p 为 Banach 空间.

8.2.4 设 $p \geqslant 1$,

$$l^p = \{(\xi_i) \mid \xi_i \in \mathbf{R}^1, \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty\},$$

线性运算如通常,对每个 $x = (\xi_i) \in l^p$,定义

$$\| x \| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p}.$$

证明 l^p 是 Banach 空间,且可分.

证 易知 l^p 是线范空间,下证 l^p 是 Banach 空间:设(x_n) 是 l^p 中的基本列:

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \cdots)\ (n = 1,2,\cdots)$$

即 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n, m \geqslant N$ 时,有

$$\| x_n - x_m \| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p)^{1/p} < \varepsilon.$$

注意 $|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| \leqslant \| x_n - x_m \| < \varepsilon\ (n, m \geqslant N)$,知$(\xi_i^{(n)})$ 是基本数列($i = 1,2,\cdots$),不妨设

$$\xi_i^{(n)} \to \xi_i (n \to \infty).$$

由于对任何自然数 I,当 $n, m \geqslant N$ 时,

$$\sum_{i=1}^{I} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}|^p < \varepsilon^p,$$

令 $m \to +\infty$,得到

$$\sum_{i=1}^{I} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \varepsilon^p (I = 1,2,\cdots, n \geqslant N).$$

所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p \leqslant \varepsilon^p (n \geqslant N).$$

又取 $n_0 \geqslant N$,得到

$$(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p)^{1/p} \leqslant (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_0)} - \xi_i|^p)^{1/p}$$

$$+ (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_0)}|)^{1/p} \leqslant \varepsilon + \| x_{n_0} \| < +\infty,$$

所以 $x = (\xi_i) \in l^p$,且

$$\| x_n - x \| = (\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)} - \xi_i|^p)^{1/p} \leqslant \varepsilon\ (n \geqslant N),$$

此即 $x_n \to x$,从而 l^p 完备.

由于 $A = \{(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_k, 0, 0, \cdots) \mid \xi_i \in \mathbf{R}^1, k = 1,2,\cdots\}$ 在 l^p 稠密,及

$B = \{(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_k, 0, 0, \cdots) \mid \eta_i$ 为有理数,$k = 1,2,\cdots\}$ 在 A 稠密,而 B 可数,所以 l^p 可分.

8.2.5 设 C 为一切收敛数列的全体,线性运算按通常,对每个 $x = (\xi_i) \in C$,定义

$$\| x \| = \sup_i |\xi_i|,$$

则$(C, \| \cdot \|)$ 为 Banach 空间.

证 $(C, \| \cdot \|)$ 为线性赋范空间的证明较易,略去,下证它是 Banach 空间.

设(x_n)是 C 中的基本列 $x_n = (\xi_i^{(n)})$,于是 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n, m \geqslant N$ 时,有

$$\| x_n - x_m \| = \sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon.$$

易知,当 $n, m \geqslant N$ 时,对一切 i,有

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i^{(m)}| < \varepsilon.$$

所以,存在 ξ_i 使 $\xi_i^{(n)} \to \xi_i (i = 1,2,\cdots)$. 在上式中,令 $m \to \infty$,得到

$$|\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon\ (n \geqslant N),$$

对一切 i 成立,所以有

$$\sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon\ (n \geqslant N).$$

注意,当 $n_0 \geqslant N$ 时,

$$|\xi_i - \xi_j| \leqslant |\xi_i - \xi_i^{(n_0)}| + |\xi_i^{(n_0)} - \xi_j^{(n_0)}|$$

$$+ |\xi_j^{(n_0)} - \xi_j|$$

$$\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon\ (i, j \geqslant N),$$

所以 $x = (\xi_i) \in C$,所以有

$$\| x_n - x \| = \sup_i |\xi_i^{(n)} - \xi_i| \leqslant \varepsilon (n \geqslant N),$$

此即 $x_n \to x\ (n \to \infty)$,所以 C 为 Banach 空间.

8.2.6 设 X, Y 是同一数域 Λ 上的 Banach 空间,定义

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\},$$

$$\alpha(x_1, y_1) + \beta(x_2, y_2) = (\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2),$$

$$\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|.$$

证明 $X \times Y$ 是 Banach 空间.

证 $X \times Y$ 是线性赋范空间的证明略去,仅证它是 Banach 空间,设$((x_n, y_n))$ 是 $X \times Y$ 中的基本列. $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n, m \geqslant N$ 时,有

$$\| (x_n, y_n) - (x_m, y_m) \|$$

$$= \| (x_n - x_m, y_n - y_m) \| < \varepsilon,$$

即

$$\| x_n - x_m \| + \| y_n - y_m \| < \varepsilon\ (n, m \geqslant N \text{时}).$$

易知，(x_n)，(y_n) 都是基本列，而 X、Y 完备，故有 $x \in X, y \in Y$，使 $x_n \to x, y_n \to y$，从而有 $(x,y) \in X \times Y$，使

$$\|(x_n,y_n)-(x,y)\| = \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0 \ (n\to\infty),$$

此即 $X\times Y$ 完备，所以 $X \times Y$ 是 Banach 空间.

8.2.7 在 $\mathbf{R}^n$ 中，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，定义

$$\|x\| = (\sum_{i=1}^n |\xi_i|^2)^{1/2},$$

$$Tx = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

证明 T 是 $\mathbf{R}^n$ 至 $\mathbf{R}^n$ 的有界线性算子，且

$$\max_{1\le i\le n}(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2} \le \|T\| \le (\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

证 易知 T 是 $\mathbf{R}^n$ 至 $\mathbf{R}^n$ 的线性算子，又

$$\|Tx\| = (\sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij}|^2)^{1/2}$$

$$\le (\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2 \sum_{i=1}^n |\xi_i|^2)^{1/2}$$

$$= (\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^2)^{1/2}$$

$$= (\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}\|x\|,$$

所以 T 有界，且

$$\|T\| \le (\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

另外，若取 $x_0 = (0,0,\cdots,\overset{(i)}{1},0,\cdots,0) \in \mathbf{R}^n$，则

$$\|x_0\| = 1, \|Tx_0\| = (\sum_{j=1}^n |\sum_{i=1}^n \xi_i a_{ij}|^2)^{1/2} = (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2} (i=1,2,\cdots,n).$$

所以

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1}\|Tx\| \ge \|Tx_0\| = (\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}(i=1,2,\cdots,n).$$

所以有

$$\max_{1\le i\le n}(\sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2} \le \|T\| \le (\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n |a_{ij}|^2)^{1/2}.$$

8.2.8 设 $k(s,t)\in L^q(\mathbf{R}^2, m\times m)$，$p>1$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，对每个 $f(t)\in L^p(\mathbf{R}^1,m)$，定义

$$Tf(s) = \int_{\mathbf{R}^1} k(s,t)f(t)\mathrm{d}t$$

证明 T 是 $L^p(\mathbf{R}^1,m)$ 至 $L^q(\mathbf{R}^1,m)$ 的有界线性算子，且 $\|T\| \le (\int_{\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}|k(s,t)|^q\mathrm{d}t\mathrm{d}s)^{1/q}$.

证 因

$$\int_{\mathbf{R}^1}|Tf(s)|^q\mathrm{d}s = \int_{\mathbf{R}^1}\left|\int_{\mathbf{R}^1}k(s,t)f(t)\mathrm{d}t\right|^q\mathrm{d}s$$

$$\le \int_{\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}|k(s,t)|^q\mathrm{d}t(\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|^p\mathrm{d}t)^{q/p}\mathrm{d}s$$

$$= \int_{\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}|k(s,t)|^q\mathrm{d}t\mathrm{d}s\cdot\int_{\mathbf{R}^1}|f(t)|^p\mathrm{d}t)^{q/p}$$

$$< +\infty,$$

所以 T 是 $L^p(\mathbf{R}^1,m)$ 至 $L^q(\mathbf{R}^1,m)$ 的算子，且 T 显然是线性的. 又由上式知

$$\|Tf\| = (\int_{\mathbf{R}^1}|Tf(s)|^q\mathrm{d}s)^{1/q}$$

$$\le (\int_{\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}|k(s,t)|^q\mathrm{d}t\mathrm{d}s)^{1/q}\|f\|,$$

所以 T 有界，且

$$\|T\| \le \left(\int_{\mathbf{R}^1}\int_{\mathbf{R}^1}|k(s,t)|^q\mathrm{d}t\mathrm{d}s\right)^{1/q}.$$

8.2.9 设 T 是 $C_{[a,b]}$ 至自身的有界线性算子，令 $Tt^n = f_n(t)\ (n=1,2,\cdots)$，证明 T 由 (f_n) 唯一确定.

证 用 $P_{[a,b]}$ 表多项式的全体，易知 $P[a,b]$ 在 $C_{[a,b]}$ 中稠密，又由题设知，对每个多项式

$$P(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i,$$

有

$$T(P) = \sum_{i=0}^n \alpha_i T(t^i) = \sum_{i=0}^n \alpha_i f_i(t).$$

故 T 在 $P_{[a,b]}$ 上由 (f_i) 唯一确定，而 $C_{[a,b]}$ 是 Banach 空间，故 T 在 $C_{[a,b]}$ 上亦唯一确定.

8.2.10 设 T 是线性赋范空间 X 至线性赋范空间 Y 的线性算子，$N(T)=\{x\in X \mid Tx=\theta\}$，证明 T 有界时，$N(T)$ 是闭的. 反之，当 $N(T)$ 闭时，T 是否一定有界?

证 ① 设 (x_n) 是 $N(T)$ 中的一个点列，且设 $x_n \to x\ (n\to\infty)$. 因 T 连续，故有 $Tx_n \to Tx\ (n\to\infty)$，而 $Tx_n = \theta\ (n=1,2,\cdots)$，所以 $Tx=\theta$，即 $x\in N(T)$. 此表明 $N(T)$ 是闭的.

② 当 $N(T)$ 闭时，T 未必有界，例如，在 $C^1_{[a,b]}$ 中，定义 $Tx(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)$，显然 T 是 $C^1_{[a,b]}$ 至 $C_{[a,b]}$ 的线性算子，此时

$$N(T) = \{x(t)\in C^1_{[a,b]} \mid x'(t)\equiv 0\}$$

$= \{C \mid C \in \mathbf{R}^1\}$

显然是闭的,但 T 是无界的.

8.2.11　设 $C^k_{[0,1]} = \{x(t) \mid x(t)$ 在$[0,1]k$ 阶连续可微$\}$,对每个 $x(t) \in C^k_{[0,1]}$,定义

$$\|x\| = \max_{0\leq i\leq k}(\max_{0\leq t\leq 1}|x^{(i)}(t)|);Tx(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t).$$

证明 T 是$C^k_{[0,1]}$ 至 $C_{[0,1]}$ 的有界线性算子,并求出 $\|T\|$ 值.

证　T 显然是 $C^k_{[0,1]}$ 至 $C_{[0,1]}$ 的线性算子,又 $\|Tx\| = \max\limits_{0\leq t\leq 1}|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t)| \leq \max\limits_{0\leq i\leq k}(\max\limits_{0\leq t\leq 1}|x^{(k)}(t)|) = \|x\|$,所以 T 有界,且 $\|T\| \leq 1$.另外,若取 $x_0(t) = t$,则$x_0(t) \in C^k_{[0,1]}\ \|x_0\| = 1$, $\|Tx_0\| = \|1\| = 1$,所以 $\|T\| = \sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\| \geq \|Tx_0\| = 1$.综上有

$$\|T\| = 1.$$

8.2.12　设 T 是线性空间X 到线性空间Y 的线性算子,A 是 $\mathscr{D}(T)$ 中的凸集,证明 TA 是 Y 中的凸集.如果X, Y都是线性赋范空间,T连续,$\mathscr{D}(T) = X$,问当 A 是凸闭集时,TA 是否也是凸闭集?

证　① 设 $Tx_1, Tx_2 \in TA, 0 \leq \alpha \leq 1$,则

$\alpha Tx_1 + (1-\alpha)Tx_2 = T(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \in TA$.

所以 TA 是凸集.

② 设 $X = C_{[-1,1]}$, $\|x\| = \max\limits_{-1\leq t\leq 1}|x(t)|$,对每个 $x(t) \in C_{[-1,1]}$,定义

$$Tx(s) = \int_{-1}^{s}x(t)\mathrm{d}t \quad (s \in [-1,1])$$

易知,T 是$C_{[-1,1]}$ 到 $C_{[-1,1]}$ 的有界线性算子,$\mathscr{D}(T) = C_{[-1,1]}$ 为凸闭集,此时

$$R(T) = TA = C^1_{[-1,1]} \subset C_{[-1,1]}$$

不是 $C_{[-1,1]}$ 中的凸闭集.例如,对

$$x(t) = |t| - 1 \in C_{[-1,1]},$$

取多项式$(P_n(t))$,使 $P_n(t) \xrightarrow{一致} |t|$,即

$$P_n(-1) + \int_{-1}^{s}P_n'(t)\mathrm{d}t \xrightarrow{一致} |s| \ (n \to \infty).$$

注意 $P_n(-1) \to |-1| = 1\ (n \to \infty)$,我们有

$$T(P_n') \to |s| - 1\ (n \to \infty).$$

此处$P_n'(t) \in C^1_{[-1,1]}$,而$|s|-1 \overline{\in} C^1_{[-1,1]}$,所以 $TA = C^1_{[-1,1]}$ 不是 $C_{[-1,1]}$ 的闭子集.

8.2.13　设 X, Y 是两个线性赋范空间,在 $X \times Y$ 上,规定 $\|(x,y)\| = \max(\|x\|, \|y\|)$,证明:对任何 $F \in (X\times Y)^*$,必有唯一的$f \in X^*$, $g \in Y^*$,使得$F((x,y)) = f(x) + g(y)$;如果在 $X^* \times Y^*$ 上规定 $\|(f,g)\| = \|f\| + \|g\|$,那么上述 $F \longmapsto (f,g)$ 的映照是$(X\times Y)^*$ 到 $X^* \times Y^*$ 的保范线性同构.

证　① 令 $f(x) = F((x,0)), g(y) = F((0,y))$,易知,$f$ 是 X 上的线性泛函,g 是 Y 上的线性泛函.又

$$|f(x)| = |F((x,0))| \leq \|F\|\ \|(x,0)\| \leq \|F\|\ \|X\|,$$

$$|g(y)| = |F((0,y))| \leq \|F\|\ \|(0,y)\| \leq \|F\|\ \|y\|,$$

所以,$f \in X^*, g \in Y$,且 $\|f\|, \|g\| \leq \|F\|$,

$$F((x,y)) = F((x,0)) + F((0,y)) = f(x) + g(y).$$

又若有 $f_1, f_2 \in X^*, g_1, g_2 \in Y^*$,使

$$F((x,y)) = f_1(x) + g_1(y) = f_2(x) + g_2(y)\ ((x,y) \in X \times Y)),$$

则有

$$F((x,0)) = f_1(x) = f_2(x),$$
$$F((0,y)) = g_1(y) = g_2(y).$$

所以 f, g 唯一.

② 由上述 $F \longmapsto \psi(f,g)$:

$$F((x,y)) = f(x) + g(y)$$

有

$(\alpha F)((x,y)) = \alpha f(x) + \alpha g(y)$, $\alpha F \to \alpha(f,g)$,

$$(F_1 + F_2)((x,y)) = f_1(x) + g_1(y) + f_2(x) + g_2(y), = (f_1 + f_2)(x) + (g_1 + g_2)(y),$$

故

$F_1 + F_2 \longmapsto (f_1 + f_2, g_1 + g_2) = (f_1, g_1) + (f_2, g_2)$

且对任何 $(f,g) \in X^* \times Y^*$,有 $F \in (X\times Y)^*$,使

$$F(x,y) = f(x) + g(y),即\ F \longmapsto (f,g),$$

所以,$F \longmapsto (f,g)$ 是$(X\times Y)^*$ 至 $X^* \times Y^*$ 的线性同构映照.又由

$$|F(x,y)| \leq \|f\|\ \|x\| + \|g\|\ \|y\| \leq (\|f\| + \|g\|)\max(\|x\|, \|y\|) = (\|f\| + \|g\|)\|(x,y)\|$$

得到

$$\|F\| \leq \|f\| + \|g\| = \|(f,g)\|.$$

又易知

$$|f(x)| + |g(y)| \leq \|F\|\ \|x\| + \|F\|\ \|y\| = \|F\|\ \|(x,y)\|,$$

所以

$$\sup_{\|x\|=1}|f(x)| + \sup_{\|y\|=1}|g(y)| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1}}\|F\|\ \|(x,y)\| = \|F\|$$

即 $\|f\| + \|g\| \leq \|F\|$; $\|(f,g)\| \leq \|F\|$.

所以有 $\|(f,g)\| = \|F\|$,即 $F \longmapsto (f,g)$ 保范.

8.2.14　设 $X = \{x(t) \mid x(0) = x(1) = 0; x(t)$ 在$[0,1]$绝对连续;$x'(t) \in L^2[0,1]\}$,对 $x(t) \in X$,

定义

$$\|x\| = \left(\int_0^1 |x'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

证明:① X 是 Banach 空间;

② $\forall f \in X^*$,存在唯一的 $\beta(t) \in X$,使

$$f(x) = \int_0^1 x(t)\beta(t)\mathrm{d}t \quad (x(t) \in X^*).$$

证 ① X 是线性赋范空间的证明较易,略去.下证 X 为 Banach 空间.

设(x_n)是 X 中的基本列,即 $\forall \varepsilon > 0$,存在 N,当 $n, m \geqslant N$ 时,有

$$\|x_n - x_m\|^2 = \int_n^1 |x_n'(t) - x_m'(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2.$$

同前面 $L^p(E,\mu)$ 的完备性之证,有子列(x_{n_k}')使 $x_{n_k}'(t) \xrightarrow{\text{a.e.}} g(t)$,注意当 $n, n_k \geqslant N$ 时,

$$\int_0^1 |x_n'(t) - x_{n_k}'(t)|^2 \mathrm{d}t < \varepsilon^2.$$

令 $k \to \infty$,由 Fatou 引理得

$$\int_0^1 |x_n'(t) - g(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant \varepsilon^2 (n \geqslant N).$$

又取 $n_0 \geqslant N$,有

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^1 |g(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leqslant \left(\int_0^1 |x_{n_0}'(t) - g(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\quad + \left(\int_0^1 |x_{n_0}'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&\leqslant \varepsilon + \|x_{n_0}\| < +\infty,
\end{aligned}$$

所以 $g(t) \in L^2[0,1]$.令 $x(t) = \int_0^t g(s)\mathrm{d}s$,则 $x(t)$ 在$[0,1]$绝对连续,$x(0) = 0$,$x'(t) = g(t) \in L^2[0,1]$,注意对每个 n,有$\int_0^1 x_n'(t)\mathrm{d}t = x_n(1) - x_n(0) = 0$,所以当 $n \geqslant N$ 时,

$$\begin{aligned}
|x(1)| &= \left|\int_0^1 g(s)\mathrm{d}s\right| \\
&\leqslant \int_0^1 |x_n'(s) - g(s)|\,\mathrm{d}s + \left|\int_0^1 x_n'(t)\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \left(\int_0^1 |x_n'(s) - g(s)|^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

因 $\varepsilon > 0$ 任意,所以 $x(1) = 0$,所以 $x(t) \in X$,从而又得到

$$\begin{aligned}
\|x - x_n\| &= \left(\int_0^1 |g(t) - x_n'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&< \varepsilon \ (n \geqslant N),
\end{aligned}$$

此即 $x_n \to x\ (n \to \infty)$,所以 X 是 Banach 空间.

② 令 $Y = \{x'(t) \mid x(t) \in X\}$,易知 Y 与 X 保范线性同构,Y(从而 X)是 $L^2[0,1]$ 的闭线性子空间,再令 $Y_1 = \{x'(t) + \alpha \mid x'(t) \in Y, \alpha \in \mathbf{R}^1\}$,对每个 $f \in X^* = Y^*$,在 Y_1 上定义 $\tilde{f}$:

$$\tilde{f}(x'(t) + \alpha) = f(x'(t)).$$

易知 $\tilde{f}$ 是 f 在 Y_1 上的保范线性延拓.$\tilde{f}(1) = 0$,将 $\tilde{f}$ 再次保范线性延拓至 $L^2[0,1]$,仍记为 $\tilde{f}$,于是存在唯一的 $\gamma(t) \in L^2[0,1]$,$\|\gamma\| = \|\tilde{f}\| = \|f\|$,使对一切 $x(t) \in X$,有

$$f(x) = \tilde{f}(x') = \int_0^1 x'(t)\gamma(t)\mathrm{d}t.$$

令 $\beta(t) = \int_0^t \gamma(s)\mathrm{d}s$,显然 $\beta(t)$ 在$[0,1]$绝对连续,$\beta'(t) = \gamma(t)$,$\beta(0) = 0$,$\beta(1) = \int_0^1 \gamma(t)\mathrm{d}t = \tilde{f}(1) = 0$,即 $\beta(t) \in X$,故对一切 $x \in X$,有

$$f(x) = \int_0^1 x'(t)\beta'(t)\mathrm{d}t.$$

注意上述 $f \longmapsto \beta(t)$ 是线性的满映射,及

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \|\gamma\| = \left(\int_0^1 |\gamma(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} \\
&= \left(\int_0^1 |\beta'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \|\beta\|,
\end{aligned}$$

所以 $f \longmapsto \beta$ 是 X^* 至 X 的保范线性同构.

8.2.15 设 E 是线性赋范空间,$x_1, x_2, \cdots, x_k \in E$,$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k \in \Lambda$($\Lambda$ 是数域).证明:

E 上有泛函 f 适合 $f(x_i) = \alpha_i (i = 1,2,\cdots,k)$ 及 $\|f\| \leqslant M \Leftrightarrow$ 对任何 $t_1, t_2, \cdots, t_k \in \Lambda$,$\left|\sum_{i=1}^k t_i\alpha_i\right| \leqslant M\left\|\sum_{i=1}^k t_i x_i\right\|$.

证 $\Rightarrow$: $\left|\sum_{i=1}^k t_i\alpha_i\right| = \left|\sum_{i=1}^k t_i f(x_i)\right|$

$$\leqslant \|f\| \left\|\sum_{i=1}^k t_i x_i\right\| \leqslant M\left\|\sum_{i=1}^k t_i x_i\right\|.$$

$\Leftarrow$:在 E 的有限维子空间

$$X = \left\{\sum_{i=1}^k t_i x_i \mid t_i \in \Lambda; i = 1,2,\cdots,k\right\}$$

上定义 f:

$$f\left(\sum_{i=1}^k t_i x_i\right) = \sum_{i=1}^k t_i\alpha_i,$$

易知 f 是 X 上的有界线性泛函($\|f\| \leqslant M$),将此 f 保范线性延拓至整个 E 上,仍记为 f,则 f 满足要求.

8.2.16 设$1 < p < +\infty$,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,证明:

对每个 $f \in (L^p_{(-\infty,+\infty)})^*$,存在 $\beta(t) \in L^q_{(-\infty,+\infty)}$,使对一切 $x(t) \in L^p_{(-\infty,+\infty)}$,有

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\beta(t)\mathrm{d}t$$

且 $f \longmapsto \beta$ 是保范线性同构.

证 对每个 $x(t) \in L^p_{(-\infty,+\infty)}$,令 $x_{(n)}(t) =$

$$\begin{cases} x(t), & |t| \leqslant n, \\ 0, & |t| > n, \end{cases}$$

则

$$x_{(n)}(t) \in L^p_{(-\infty,+\infty)},$$

$$\|x - x_{(n)}\|$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) - x_{(n)}(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$= \left(\int_{|t|>n} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \to 0 \ (n \to \infty),$$

即 $x_{(n)} \to x$,故有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{(n)}).$$

令

$H_n = \{x_{(n)}(t) \mid x(t) \in L^p_{(-\infty,+\infty)}\} \ (n = 1,2,\cdots)$,则 H_n 是 $L^p_{(-\infty,+\infty)}$ 的线性闭子空间,$H_n = L^p_{[-n,n]}$(线性保范同构),且

$$H_1 \subseteq H_2 \subseteq H_3 \subseteq \cdots \subseteq L^p_{(-\infty,+\infty)}.$$

令 $f_{(n)}$ 表 f 在 H_n 上的限制,则 $f_{(n)} \in (L^p_{[-n,n]})^*$,$\|f_{(n)}\| \leqslant \|f_{(n+1)}\| \leqslant \cdots \leqslant \|f\|$,$f_{(n)}$ 也是 $f_{(n+1)}$ 在 H_n 上的限制$(n = 1,2,\cdots)$,于是有 $\beta_n(t) \in L^q_{[-n,n]}$,使

$$f(x_{(n)}) = f_{(n)}(x_{(n)}) = \int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta_n(t)\mathrm{d}t.$$

又 $x_{(n)}(t) \in H_{n+1}$,又有 $B_{n+1}(t) \in L^q_{[-n,n+1]}$,使

$$f(x_{(n)}) = f_{(n+1)}(x_{(n)}) = \int_{-n-1}^{n+1} x_{(n)}(t)\beta_{n+1}(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta_{n+1}(t)\mathrm{d}t,$$

所以对一切 $x_{(n)}(t) \in L^p_{[-n,n]}$,有

$$\int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta_n(t)\mathrm{d}t = \int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta_{n+1}(t)\mathrm{d}t.$$

从而在$[-n,n]$上,有

$$\beta_n(t) = \beta_{n+1}(t) \ (n = 1,2,\cdots).$$

令 $\beta(t) = \beta_n(t)$,当 $t \in [-n,n]$ $(n = 1,2,\cdots)$,则 $\beta(t)$ 在$(-\infty,+\infty)$有定义,且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\beta(t)|^q \mathrm{d}t = \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} |\beta(t)|^q \mathrm{d}t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} |\beta_n(t)|^q \mathrm{d}t \leqslant \|f_{(n)}\| \leqslant \|f\|.$$

即 $\beta(t) \in L^q_{(-\infty,+\infty)}$.又

$$f(x_{(n)}) = \int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta_n(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-n}^{n} x_{(n)}(t)\beta(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x_{(n)}(t)\beta(t)\mathrm{d}t,$$

再注意

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} x_{(n)}(t)\beta(t)\mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\beta(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{+\infty} |x_{(n)}(t) - x(t)|\,|\beta(t)|\,\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |x_{(n)}(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p}$$

$$\cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |\beta(t)|^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} \to 0 \ (n \to \infty),$$

所以

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{(n)}) = \lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_{(n)}(t)\beta(t)\mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\beta(t)\mathrm{d}t.$$

注意上述 $f \longmapsto \beta$ 的映射,易知有

$\alpha f \longmapsto \alpha\beta, f_1 + f_2 \longmapsto \beta_1 + \beta_2, \|\beta\| = \|f\|$,

所以 $L^q_{(-\infty,+\infty)}$ 与$(L^p_{(-\infty,+\infty)})^*$ 保范线性同构.

8.2.17 证明 l^1 中的弱收敛与强收敛等价.

证 只需证当 $x_n \in l^1$,$x_n \xrightarrow{(w)} x$ 时,$x_n \xrightarrow{(s)} x$ $(n \to \infty)$.又只需证当 $x_n \xrightarrow{(w)} \theta$ 时,$x_n \xrightarrow{(s)} \theta$ $(n \to \infty)$.设

$$x_n = (\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \xi_3^{(n)}, \cdots) \ (n = 1,2,\cdots).$$

由 $x_n \xrightarrow{(w)} \theta$ 知对任何 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^\infty$,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n)}\eta_i \to 0 \ (n \to \infty).$$

下证有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

否则,存在 $\varepsilon_0 > 0$ 及(x_n)的子列(x_{n_k})使

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n_k)}| \geqslant \varepsilon_0 (k = 1,2,\cdots).$$

为叙述上的简便计,不妨设对一切 n,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \geqslant \varepsilon_0.$$

从而有 n_1 及 i_1 使 $\sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n_1)}| \geqslant \varepsilon_0/2$.注意当取

$y = (0,0,\cdots,\overset{(i)}{1},0,\cdots) \in l^\infty$ 时,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n)}\eta_i = \xi_i^{(n)} \to 0 \ (n \to \infty, i = 1,2,\cdots).$$

故有 $n_2 > n_1$ 及 $i_2 > i_1$,使

$$\sum_{i=i_1+1}^{i_2} |\xi_i^{(n_2)}| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

(否则对一切 $n > n_1$ 有 $\sum_{i=i_1+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < \varepsilon_0/2$,从而由

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| = \sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n)}| + \sum_{i=i_1+1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}|$$

$$< \sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n)}| + \varepsilon_0/2$$

知当 n 充分大时,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| < \sum_{i=1}^{i_1} |\xi_i^{(n)}| + \varepsilon_0/2$$
$$< \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0.$$

这是矛盾!)

同理,又有 $n_3 > n_2$ 及 $i_3 > i_2$,使

$$\sum_{i=i_2+1}^{i_3} |\xi_i^{(n_3)}| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

如此进行下去,我们得到 $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ 及 $i_1 < i_2 < i_3 < \cdots$,使

$$\sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} |\xi_i^{(n_{k+1})}| \geqslant \varepsilon_0/2.$$

令

$$y = (\operatorname{sng}\xi_1^{(n_1)}, \cdots, \operatorname{sng}\xi_{i_1}^{(n_1)}, \operatorname{sng}\xi_{i_1+1}^{(n_2)}, \cdots, \operatorname{sng}\xi_{i_2}^{(n_2)}, \cdots) \in l^{\infty},$$

则有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n_k)}\eta_i \geqslant \sum_{i=i_k+1}^{i_{k+1}} |\xi_i^{(n_{k+1})}| \geqslant \varepsilon_0/2 \quad (k = 1,2,\cdots)$$

这与对任何 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots) \in l^{\infty}$,有

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^{(n)}\eta_i \to 0 \ (n \to \infty)$$

相矛盾.所以

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i^{(n)}| \to 0 \ (n \to \infty).$$

8.2.18　设 $C_{[a,b]} = \{x(t) : x(t)$ 在 $[a,b]$ 连续$\}$, $\|x\| = \max\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$, $x_n(t) \in C_{[a,b]}$,证明:

$x_n \xrightarrow{w} x_0$

$\Leftrightarrow$ ① 存在 M,使 $\|x_n\| \leqslant M$;

② $x_n(t) \to x_0(t)$ $(t \in [a,b], n \to \infty)$.

证　$\Rightarrow$①:因对每个 $f \in (C_{[a,b]})^*$, $f(x_n) \to f(x_0)$,即 $x_n^*(f) \to x_0^*(f)$. $(C_{[a,b]})^*$ 为 Banach 空间,由共鸣定理知存在 M,使 $\|x_n^*\| \leqslant M$,即 $\|x_n\| \leqslant M$.

② 令 $g(\tau) = \begin{cases} 0 & a \leqslant \tau < t, \\ 1 & t \leqslant \tau \leqslant b, \end{cases}$ 则 $g(\tau) \in V_0[a,b]$,从而有

$$x_n(t) = \int_a^b x_n(\tau)\mathrm{d}g(\tau)$$
$$\to \int_a^b x_0(\tau)\mathrm{d}g(\tau) = x_0(t) \ (n \to \infty).$$

$\Leftarrow$:因 $|x_n(t) - x_0(t)| \leqslant \|x_n\| + \|x_0\| \leqslant M + \|x_0\|$ $(n = 1,2,\cdots)$,故由控制收敛定理知,对每个 $g(t) \in V_0[a,b]$,有

$$\left| \int_a^b x_n(t)\mathrm{d}g(t) - \int_a^b x_0(t)\mathrm{d}g(t) \right|$$
$$\leqslant \int_a^b |x_n(t) - x_0(t)| \mathrm{d}g(t) \to 0 \ (n \to \infty).$$

即对每个 $f \in (C_{[a,b]})^*$,有

$$f(x_n) \to f(x_0) \text{ 即 } x_n \xrightarrow{w} x_0.$$

8.2.19　设 $M[a,b] = \{x(t) | x(t)$ 是$[a,b]$上的有界函数$\}$, $\|x\| = \sup\limits_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t)|$, f 是 $M[a,b]$ 上的线性泛函.若 f 满足:当 $x(t) \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 0$(这样的 f 称为正线性泛函),证明 f 连续.

证　否则有 $x_n \in M[a,b]$, $\|x_n\| = 1$, $|f(x_n)| \to +\infty (n \to \infty)$,因 $|x_n(t) \pm x_n(t)| \in M[a,b]$,且 $\geqslant 0$,所以有 $f(|x_n|) \geqslant |f(x_n)| \to +\infty$.不妨设 $f(|x_n|) > 2^n (n = 1,2,\cdots)$,令

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n(t)|}{f(|x_n|)},$$

易知 $x(t)$ 有意义且 $x(t) \in M[a,b]$, $x(t) \geqslant 0$.注意对任何 N,有 $x(t) \geqslant \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{|x_n(t)|}{f(|x_n|)}$,故有

$$f(x) \geqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{f(|x_n|)}{f(|x_n|)} = N \to \infty.$$

这表明 $f(x)$ 无意义,矛盾!所以 f 连续.

8.2.20　设 X 为数域 Λ 上的线性赋范空间, M 是 X 的线性子空间,证明

M 弱闭 $\Leftrightarrow M$ 强闭.

证　$\Rightarrow$:设 $x_n \in M$, $x_n \xrightarrow{s} x_0$,往证 $x_0 \in M$.

显然 $x_n \xrightarrow{w} x_0$,而 M 弱闭,所以 $x_0 \in M$.

$\Leftarrow$:设 $x_n \in M$, $x_n \xrightarrow{w} x_0$,往证 $x_0 \in M$.否则 $\rho(x_0, M) > 0$.令

$$M_1 = \{x + \alpha x_0 \mid x \in M, \alpha \in \Lambda\}.$$

在 M_1 上定义一个 f:

$$f(x + \alpha x_0) = \alpha.$$

易知 f 是 M_1 上的线性泛函, $f_{|M} \equiv 0$.又

$$\|x + \alpha x_0\| = |\alpha| \left\|x_0 + \frac{x}{\alpha}\right\|$$
$$= |f(x + \alpha x_0)| \left\|x_0 + \frac{x}{\alpha}\right\|$$
$$\geqslant |f(x + \alpha x_0)| \rho(x_0, M),$$

所以

$$|f(x + \alpha x_0)| \leqslant \frac{1}{\rho(x_0, M)} \|x + \alpha x_0\|.$$

即 f 有界.将 f 延拓至 X,记为 $\tilde{f}$, $\tilde{f} \in X^*$,注意 $\tilde{f}(x_n) = 0$, $\tilde{f}(x_0) = 1$,故 $\tilde{f}(x_n) \nrightarrow \tilde{f}(x_0)$,与 $x_n \xrightarrow{w} x_0$ 相矛盾,所以 $x_0 \in M$.

8.2.21　设 $1 < p < +\infty$, A 是 l^p 至自身的算子, A 适合: $A(\xi_1, \xi_2, \cdots) = (0, \xi_1, \xi_2, \cdots)$ ($(\xi_1, \xi_2, \cdots)$

$\in l^p$). 证明 A 是 l^p 至自身的有界线性算子,并求 $\|A\|$ 与 A^*.

解 A 显然是 l^p 至自身的线性算子. 因对每个 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots) \in l^p$,有

$$Ax = A(\xi_1,\xi_2,\cdots) = (0,\xi_1,\xi_2,\cdots),$$

所以

$$\|Ax\| = \|(0,\xi_1,\xi_2,\cdots)\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|.$$

即 A 为保范算子,故 A 有界,且 $\|A\| = 1$.

又对每个 $f \in (l^p)^*$,存在 $(\eta_1,\eta_2,\cdots) \in l^q$,使

$$f(Ax) = \sum_{i=1}^{\infty}(Ax)_i\eta_i = \sum_{i=2}^{\infty}\xi_{i-1}\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_{i+1},$$

$$A^*f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\eta_{i+1}.$$

所以 A^* 是 l^q 至 l^q,且适合

$$A^*(\eta_1,\eta_2,\cdots) = (\eta_2,\eta_3,\cdots)((\eta_1,\eta_2,\cdots) \in l^q)$$

的有界线性算子.

8.2.22 设 X 是线性赋范空间,证明:

X 自反 $\Leftrightarrow X$ 的每个闭子的空间自反.

证 $\Rightarrow$:设 X_1 是 X 的闭子空间,只需证 $X_1^{**} \subseteq X_1$: $\forall g \in X_1^{**} = (X_1^*)^*$,对一切 $\tilde{f} \in X^*$,令

$$\tilde{g}(\tilde{f}) = g(\tilde{f}_{|X_1})$$

易知 $\tilde{g} \in X^{**}$,注意 $X = X^{**}$,所以对一切 $\tilde{f} \in X^*$,存在 $x \in X$,使 $\tilde{g}(\tilde{f}) = \tilde{f}(x)$. 于是,对一切 $f \in X_1^*$,将 f 保范线性延拓至X,记为 $\tilde{f}$,此时:$\tilde{f}_{|X_1} = f$,于是有

$$g(f) = \tilde{g}(\tilde{f}) \xlongequal{\exists x \in X} \tilde{f}(x).$$

下证 $x \in X_1$,则 $g(f) = f(x)$. 此表明 $X_1^{**} \subseteq X_1$.

否则,$\rho(x,X_1) > 0$,由 Hahn-Banach 定理,有 $\tilde{f}_0 \in X^*$,$\tilde{f}_{0|X_1} \equiv 0$,$\tilde{f}_0(x) \neq 0$,但 $\tilde{g}(\tilde{f}_0) = g(\tilde{f}_{0|X_1}) = 0$,这是矛盾,所以 $x \in X_1$.

$\Leftarrow$:显然.

8.2.23 设 X 是 Banach 空间,Y 是同一数域 Λ 上的线性赋范空间,$\{A_\alpha \mid \alpha \in I\}$ 是一族 X 至 Y 的有界线性算子. 若对任何 $y \in Y^*$,任何 $x \in X$,$\{f(A_\alpha x) \mid \alpha \in I\}$ 是一与 f 及 x 有关的有界数集,证明 $\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in I\}$ 是有界数集.

证 因 Y^* 是 Banach 空间,易知,当 $x \in X$ 固定时 $\{f(A_\alpha x) \mid \alpha \in I\}$ 是 Y^* 上一族连续性泛函. 由于对每个 $f \in Y^*$,$\{f(A_\alpha x) \mid \alpha \in I\}$ 有界,由共鸣定理知存在 M_x,使 $\sup\limits_{\|f\|=1}|f(A_\alpha x)| \leqslant M_x$,即

$$\sup_{\|f\|=1}|(A_\alpha x)^{**}(f)| \leqslant M_x \text{ 即 } \|A_\alpha x\| \leqslant M_x.$$

因对每个 $x \in X$,$\{\|A_\alpha x\| \mid \alpha \in I\}$ 有界,再由共鸣定理知 $\{\|A_\alpha\| \mid \alpha \in I\}$ 有界.

8.2.24 设 X 是 Banach 空间,Y,Z 是线性赋范空间,$\Phi(x,y)$ 是 $X\times Y$ 至 Z 的双线性映照(即 x 固定时,Φ 关于 y 线性,y 固定时,Φ 关于 x 线性),若对每个 $g \in Z^*$,$g(\Phi(x,\cdot)) \in Y^*$,$g(\Phi(\cdot,y)) \in X^*$,证明存在 M,使

$$\|\Phi(x,y)\| \leqslant M\|x\|\|y\|.$$

证 由 $\Phi(x,y)$ 双线性知:只需证当 $\|x\| = \|y\| = 1$ 时,有 M 使 $\|\Phi(x,y)\| \leqslant M$.

否则,有 $x_n \in X$,$y_n \in Y$,$\|x_n\| = \|y_n\| = 1$,$\|\Phi(x_n,y_n)\| \to +\infty$,从而有 $g_n \in Z^*$,$\|g_n\| = 1$,使 $|g_n(\Phi(x_n,y_n))| \to +\infty$. 由题设,当 x,g 都固定时,$g(\Phi(x,y)) \in Y^*$,所以有 $M_{g,x}$ 使

$$M_{gx} = \sup_{\|y\|=1}|g(\Phi(x,y))| < +\infty.$$

此表明,当 $g \in Z^*$ 固定时,X 上的连续线性泛函族 $\{g(\Phi(x,y)) \mid \|y\| = 1\}$ 在每个 x 有界,由共鸣定理,存在 M_g,使

$$M_g = \sup_{\|x\|=1}\sup_{\|y\|=1}|g(\Phi(x,y))| < +\infty.$$

此又表明,Z^* 上的连续线性泛函族

$$\{g(\Phi(x,y)) \mid \|x\| = 1, \|y\| = 1\}$$

在每个 g 有界,又由共鸣定理知,存在 M,使

$$M = \sup_{\|g\|=1}\sup_{\|x\|=1}\sup_{\|y\|=1}|g(\Phi(x,y))| < +\infty,$$

即

$$\sup_{\substack{\|x\|=1\\ \|y\|=1\\ \|g\|=1}}|g(\Phi(x,y))| = M < +\infty.$$

这与有 $x_n \in Y$,$y_n \in Y$,$g_n \in Z^*$,$\|x_n\| = \|y_n\| = \|g_n\| = 1$,使 $|g_n(\Phi(x_n,y_n))| \to +\infty$ 相矛盾. 故结论成立.

8.2.25 举例说明共鸣定理中,X 是 Banach 空间的假设不可除去.

解 设 $X = \{(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots) \mid \xi_i \in \mathbf{R}^1; i = 1,2,\cdots,n; n = 1,2,\cdots\}$ 对每个 $x = (\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,0,\cdots) \in X$,定义 $\|x\| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{1/2}$,易知 X 是 l^2 的线性子空间,在 X 定义一列泛函

$$f_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,\cdots) = m\xi_m(m = 1,2,\cdots),$$

易知,每个 $f_m \in X^*$,对每个 $x \in X$ 固定时,

$$f_m(x) = f_m(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,0,\cdots) = m\xi_m \to 0\ (m \to \infty),$$

所以 $\{f_m \mid m = 1,2,\cdots\}$ 在每个 x 有界. 若共鸣定理成立,应有 M,使 $\|f_m\| \leqslant M\ (m = 1,2,\cdots)$. 事实上,由于 $f_m(0,0,\overset{(m)}{1},0,\cdots) = m$,所以有

$$\|f_m\| = m \to +\infty \quad (m \to \infty).$$

此表明共鸣定理不成立,乃因 X 不是 Banach 空间

所致.

8.2.26 设 X 是Banach空间,(x_n) 是 X 中的一个点列,若对每个 $x\in X$,有唯一的一个数列(α_n),使 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ 成立(此时称 X 为有可列基的 Banach 空间).证明:在"$x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$"中,若令 $f_n(x)=\alpha_n$,则 $f_n\in X^*(n=1,2,\cdots)$.

证 先在 X 上定义另一个范数:对每个 $x=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\in X$,令

$$\|x\|_1=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|.$$

显然,1° $\|x\|_1\geqslant 0$,且 $\|x\|_1\geqslant\|x\|$,所以 $\|x\|_1=0\Leftrightarrow x=\theta$;

2° $\|\alpha x\|_1=|\alpha|\,\|x\|_1$;

3° $\|x+y\|_1=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)x_i\right\|$

$\leqslant\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|+\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right\|$

$\leqslant\|x\|_1+\|y\|_1$.

所以 $\|\cdot\|_1$ 是 X 上的范数,用 X_1 记$(X,\|\cdot\|_1)$.下证 X_1 是 Banach 空间:

设(x_l) 是 X_1 中的一个基本列,即 $\forall\varepsilon>0$,存在 k,当 $l,s\geqslant k$ 时,有 $\|x_l-x_s\|_1<\varepsilon$,注意 $\|x_l-x_s\|\leqslant\|x_l-x_s\|_1$,故$(x_l)$ 也是 X 中的基本列.所以有 $x\in X$,使 $\|x_l-x\|\to 0\ (l\to\infty)$.令

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i,\ x_l=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^{(l)}x_i\ (l=1,2,\cdots),$$

则有

$$\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|\to 0\ (l\to\infty).$$

注意当 $l,s\geqslant k$ 时,有

$$\|x_l-x_s\|_1=\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i^{(s)})x_i\right\|<\varepsilon,$$

故对每个 i,有

$\|(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i^{(s)})x_i\|$

$=\left\|\sum_{j=1}^{i}(\alpha_j^{(l)}-\alpha_j^{(s)})x_j-\sum_{j=1}^{i-1}(\alpha_j^{(l)}-\alpha_j^{(s)})x_j\right\|$

$\leqslant 2\|x_l-x_s\|_1<2\varepsilon\quad(l,s\geqslant k)$.

所以对每个固定的 i,$(\alpha_i^{(l)})$ 是一基本数列,从而有 β_i 使 $\alpha_i^{(l)}\to\beta_i$($l\to\infty$,关于 i 一致).

注意对每个 $n=1,2,\cdots$,有

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i^{(s)})x_i\right\|\leqslant\|x_l-x_s\|_1<\varepsilon\quad(l,s\geqslant k).$$

令 $s\to\infty$,得到

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\beta_i)x_i\right\|\leqslant\varepsilon\ (n=1,2,\cdots,l\geqslant k).$$

从而有

$$\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\beta_i)x_i\right\|\leqslant\varepsilon\quad(l\geqslant k).$$

此表明,若 $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i\in X$,则 $\left\|x_l-\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i\right\|_1\to 0\ (l\to\infty)$,即 X_1 完备获证.下补证 $\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i\in X$.

注意对每个 n,当 $l\geqslant k$ 时,有

$\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)x_i\right\|$

$=\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i^{(l)})x_i+\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|$

$\leqslant\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i^{(l)})x_i\right\|+\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|$

$<\varepsilon+\left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|$.

令 $n\to\infty$,得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)x_i\right\|\leqslant\varepsilon+\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|.$$

令 $l\to\infty$,由 $\left\|\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i^{(l)}-\alpha_i)x_i\right\|\to 0$,得到

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)\right\|<\varepsilon.$$

因 $\varepsilon>0$ 任意,所以

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)x_i\right\|=0.$$

所以有

$$\left\|\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_i-\beta_i)x_i\right\|=0.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha_i-\beta_i)x_i=\theta.$$

从而有 $\alpha_i=\beta_i(i=1,2,\cdots)$,所以

$$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i x_i=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\in X.$$

至此,我们证明了$(X,\|\cdot\|_1)$ 也完备.注意对每个 $x\in X$,有 $\|x\|\leqslant\|x\|_1$,由闭图象定理及逆算子定理可推知,$\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_1$ 等价.故有常数 C 使对一切 $x\in X$,有 $\|x\|_1\leqslant C\|x\|$.

最后注意,对每个 $x=\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i x_i\in X$,有

$$|\alpha_i|\leqslant\frac{1}{\|x_i\|}\cdot 2\sup_n\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i x_i\right\|$$

$$= \frac{2}{\|x_i\|}\|x\|_1 \leqslant \frac{2C}{\|x_i\|}\|x\|,$$

即 $|f_i(x)| \leqslant \frac{2C}{\|x_i\|}\|x\|$. 而 f_i 显然是 X 上的线性泛函,所以 $f_i \in X^*$ $(i = 1,2,\cdots)$.

注 这个问题的结论用处甚广,从直观上看也似应明显成立,然证明起来却难度甚大. 关键在于构造一个新的范数 $\|\cdot\|_1$,且证明 X 按此新范数也完备. 该一段证明中用了一系列细致的数学分析技巧,值得读者推敲. 最后还用了逆算子定理与闭图象定理的结论来阐明两种范数的等价性,才能得到本问题的结论. 由此可见,这个问题是比较深刻的.

8.2.27 设 X 为线性空间,A 是 X 至 X 的线性算子,λ 是 A^n 的特征值,证明 λ 的 n 次根中至少有一个是 A 的特征值.

证 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 λ 的 n 个 n 次根,则有

$$(A-\lambda_1 I)(A-\lambda_2 I)\cdots(A-\lambda_n I) = (A^n - \lambda I).$$

若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都不是 A 的特征值,则 $(A-\lambda_i I)$ 都是单射 $(i=1,2,\cdots,n)$,从而 $(A^n-\lambda I)$ 也是单射. 这与 λ 是 A^n 的特征值相矛盾,所以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 中至少有一个是 A 的特征值.

8.2.28 设 A 是复 Banach 空间 X 上的有界线性算子,$\lambda_0 \in \rho(A)$,又 (A_n) 是 X 上一列有界线性算子,适合 $\|A_n - A\| \to 0$ $(n\to\infty)$,证明当 n 充分大时,$\lambda_0 \in \rho(A_n)$ 且 $\|(A_n-\lambda_0 I)^{-1} - (A-\lambda_0 I)^{-1}\| \to 0$ $(n\to\infty)$.

证 令 $R(\lambda_0) = (A-\lambda_0 I)^{-1}$,则

$$\|(A-A_n)R(\lambda_0)\| \to 0\ (n\to\infty).$$

故当 n 充分大时,有

$$\|(A-A_n)R(\lambda_0)\| < \frac{1}{2}.$$

此时

$$\sum_{i=0}^{\infty}\|(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)\| < \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^i \|R(\lambda_0)\| < +\infty,$$

所以 $\sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)$ 收敛. 又

$$(A_n - \lambda_0 I)\sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(A_n-\lambda_0 I)(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}((A_n - A)+(A-\lambda_0 I))(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}((A-A_n)^i R^i(\lambda_0) - (A-A_n)^{i+1}R^{i+1}(\lambda_0))$$
$$= I,$$

同样

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)\right)(A_n-\lambda_0 I) = I,$$

所以 n 充分大时,$\lambda_0 \in \rho(A_n)$ 且

$$(A_n-\lambda_0 I)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0).$$

又由

$$(A_n-\lambda_0 I)^{-1} - (A-\lambda_0 I)^{-1}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0) - R(\lambda_0)$$
$$= R(\lambda_0)\left(\sum_{i=0}^{\infty}(A-A_n)^i R^i(\lambda_0) - I\right)$$
$$= R(\lambda_0)\left(I + \sum_{i=1}^{\infty}(A-A_n)^i R^i(\lambda_0) - I\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0),$$

因 $\|(A-A_n)R^2(\lambda_0)\| \to 0$ $(n\to\infty)$,故 $\forall\, 0<\varepsilon<1$,有 N,当 $n \geqslant N$ 时,$\|(A-A_n)R^2(\lambda_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. 所以

$$\|(A_n-\lambda_0 I)^{-1} - (A-\lambda_0 I)^{-1}\|$$
$$= \left\|\sum_{i=1}^{\infty}(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)\right\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|(A-A_n)^i R^{i+1}(\lambda_0)\|$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\|(A-A_n)R^2(\lambda_0)\|^i$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^i < \varepsilon,$$

此即

$$\|(A_n-\lambda_0 I)^{-1} - (A-\lambda_0 I)^{-1}\| \to 0 \quad (n\to\infty).$$

8.2.29 设 X 是复线性赋范空间,M,N 是 X 的线性子空间. 对任何 $x\in X$,有唯一的 $x' \in M$,$x'' \in N$,使 $x = x' + x''$. 又 M,N 都是有界线性算子 A 的不变子空间,证明 $\sigma(A_M) \subseteq \sigma(A)$ (此处 A_M 是 A 在 M 上的限制).

证 只需证 $\rho(A) \subseteq \rho(A_M)$. $\forall \lambda \in \rho(A)$,则 $(A-\lambda I)$ 是 X 上的单射,自然,$(A-\lambda I)_M = (A_M - \lambda I_M)$ 也是 M 上的单射. 又对任何 $y \in X$,有 $x\in X$,使 $(A-\lambda I)x = y$,所以当 $y_m \in M$ 时,亦有 $x_m \in X$,使上式成立. 事实上,此 $x_m \in M$,否则有

$$x_m = x_m' + x_m''\ (x_m' \in M, x_m'' \in N, x_m' \neq \theta)$$

从而

$$(A-\lambda I)x_m = (A-\lambda I)x_m' + (A-\lambda I)x_m''.$$

注意 $x_m'' \in N$ 且 $x_m'' \neq \theta$,$(A-\lambda I)$ 是单射,所以 $(A-\lambda I)x_m'' \in N$ 且 $(A-\lambda I)x_m'' \neq \theta$,这与 $y_m = (A-\lambda I)x_m \in M$ 相矛盾,所以,$x_m \in M$,此表明 $(A-\lambda I)$

是 M 至 M 的满映射.最后证 $(A-\lambda I)_M^{-1}$ 有界即可,若否,则有一列 $x_n\in M$, $\|x_n\|=1\ (n=1,2,\cdots)$,使

$$\|((A-\lambda I)_M)^{-1}x_n\| = \|(A-\lambda I)^{-1}x_n\| \to \infty\ (n\to\infty).$$

这与 $(A-\lambda I)^{-1}$ 在 X 有界相矛盾.所以

$$\lambda\in\rho(A_M).$$

8.2.30　在复的 $C_{[a,b]}$ 中定义

$$Tx(t)=t\cdot x(t)\quad (x(t)\in C_{[a,b]}),$$

求出 $\rho(T),\sigma(T),\sigma_a(T),\sigma_p(T),\sigma_r(T)$.

解　考察 $(T-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)$,易知,对任何复数 λ,由 $(t-\lambda)x(t)\equiv 0$,推出 $x(t)\equiv 0$,故任何 λ 均不是 T 的特征值,所以 $\sigma_p(T)=\varnothing$;又对任何 $y(t)\in C_{[a,b]}$,存在 $x(t)\in C_{[a,b]}$,使 $(t-\lambda)x(t)=y(t)\Leftrightarrow\lambda\overline{\in}[a,b]$,即当 $\lambda\overline{\in}[a,b]$ 时,$(T-\lambda I)$ 为满映射.注意 $(T-\lambda I)$ 总是单映射,再由逆算子定理,知 $\rho(T)=\{\lambda\in C\mid\lambda\overline{\in}[a,b]\}$,从而 $\sigma(T)=[a,b]$;又由 $\partial\sigma(T)=\sigma(T)\subseteq\sigma_a(T)$ 知 $\sigma_a(T)=[a,b]$;最后,$\sigma_r(T)=\sigma(T)-\sigma_a(T)=\sigma(T)-\sigma(T)=\varnothing$.

8.2.31　设 B 是 $[0,1]$ 上 Borel 集的全体,g 是 $[0,1]$ 上的单调升函数,在 $L^2_{([0,1],B,g)}$ 上定义 T:

$$Tx(t)=tx(t),\ x(t)\in L^2_{([0,1],B,g)}.$$

求出 $\rho(T),\sigma(T),\sigma_a(T),\sigma_p(T),\sigma_r(T)$.

解　考察算子 $(T-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)$,易知,$(T-\lambda I)x(t)\overset{\text{a.e}}{=\!=}0$,推出或 $x(t)\overset{\text{a.e}}{=\!=}0$,或 λ 为 g 的间断点.当 λ 为 g 的间断点时,令 $x_\lambda(t)=\begin{cases}1, & t=\lambda,\\ 0, & t\neq\lambda,\end{cases}$ 易知 $x_\lambda\in L^2_{([0,1],B,g)}$,$x_\lambda\neq\theta$,$(T-\lambda I)x_\lambda=(t-\lambda)x_\lambda\equiv 0$,所以 $(T-\lambda I)x_\lambda=\theta$,此时 λ 是 T 的特征值,所以,$\sigma_p(T)=\{t_0\in[a,b]\mid t_0$ 是 g 的间断点$\}$.

由上知,当 $\lambda\overline{\in}[a,b]$,或 $\lambda\in[a,b]$ 但 g 在 λ 连续时,$\lambda\overline{\in}\sigma_p(T)$.即此时 $(T-\lambda I)$ 都为单映射.又 $\lambda\overline{\in}[a,b]$ 时,对任何 $y(t)\in L^2_{([0,1],B,g)}$ 有 $x(t)=\dfrac{y(t)}{t-\lambda}\in L^2_{([0,1],B,g)}$,使 $(T-\lambda I)x(t)=y(t)$,即此时 $(T-\lambda I)$ 为满映射,所以 $\sigma(T)\subseteq[0,1]$.下面只需考察 $[0,1]$ 中使 g 连续的点,分两种情况考虑:

(i) g 在 λ 连续,且存在 $[\alpha,\beta]\in\lambda$ 使 g 在 $[\alpha,\beta]$ 取常值.此时,对任何 $y(t)\in L^2_{([0,1],B,g)}$,令

$$x(t)=\begin{cases}y(t)/t-\lambda, & t\overline{\in}[\alpha,\beta],\\ 0, & t\in[\alpha,\beta].\end{cases}$$

易知 $(T-\lambda I)x(t)\overset{\text{a.e}}{=\!=}y(t)$ 且

$$\int_0^1|x(t)|^2\mathrm{d}g=\int_0^\alpha\left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2\mathrm{d}g+\int_\beta^1\left|\frac{y(t)}{t-\lambda}\right|^2\mathrm{d}g<\infty,$$

所以,此时 $(T-\lambda I)$ 仍是满映射,即此种 $\lambda\in\rho(T)$;

(ii) g 在 λ 连续,但对任何 $[\alpha,\beta]\in\lambda$,g 在 $[\alpha,\beta]$ 不取常值.此时,不妨设有 $[0,1]$ 中一列 $\lambda_n\downarrow\lambda$,对这种 λ,我们令

$$x_n(t)=\begin{cases}1/(g(\lambda_n)-g(\lambda))^{1/2}, & t\in[\lambda,\lambda_n],\\ 0, & t\overline{\in}[\lambda,\lambda_n],\end{cases}$$

则有

$$\int_0^1|x_n(t)|^2\mathrm{d}g=\int_\lambda^{\lambda_n}\frac{1}{g(\lambda_n)-g(\lambda)}\mathrm{d}g=1,$$

$$\|(T-\lambda I)x_n\|^2=\int_\lambda^{\lambda_n}\frac{|t-\lambda|^2}{g(\lambda_n)-g(\lambda)}\mathrm{d}g\leqslant|\lambda_n-\lambda|^2\to 0\ (n\to\infty),$$

即有 $x_n\in L^2_{([0,1],B,g)}$,$\|x_n\|=1$,$(T-\lambda I)x_n\to\theta$,所以此种 $\lambda\in\sigma_a(T)$.再注意 $\sigma_p(T)\subseteq\sigma_a(T)$,及

$$\sigma(T)\subseteq[0,1]-\{\lambda\mid g\text{ 在}\lambda\text{ 连续,且有}[\alpha,\beta]\in\lambda\text{ 使 }g\text{ 在}[\alpha,\beta]\text{ 取常值}\}\subseteq\sigma_a(T),$$

所以有

$$\sigma(T)=\sigma_a(T),\ \sigma_r(T)=\varnothing.$$

8.2.32　证明对复 Banach 空间上的有界线性算子 T,成立

$$\sigma_r(T)\subseteq\sigma_p(T^*).$$

证　$\forall\lambda\in\sigma_r(T)$,即 $\lambda\in\sigma(T)-\sigma_a(T)$,由于 $\lambda\overline{\in}\sigma_a(T)$,故有 $\delta>0$,使对一切 $x\in X$,有 $\|(T-\lambda I)x\|\geqslant\delta\|x\|$.此表明 $(T-\lambda I)$ 必为单映射且 $(T-\lambda I)^{-1}$ 在 $R(T-\lambda I)$ 有界.从而 $(T-\lambda I)^{-1}$ 在 $\overline{R(T-\lambda I)}$ 有界.注意 $\lambda\in\sigma(T)$,故 $\overline{R(T-\lambda I)}\neq X$(否则 $\lambda\in\rho(T)$),于是由 Hahn-Banach 定理,存在非零的 $f_0\in X^*$,$f_0|_{\overline{R(T-\lambda I)}}\equiv 0$,即对一切 $x\in X$,有 $f_0(T-\lambda I)(x)=0$,即 $(T^*-\lambda I)f_0(x)=0$,即 $(T^*-\lambda I)f_0=\theta$,所以 $\lambda\in\sigma_p(T^*)$.即我们证明了

$$\sigma_r(T)\subseteq\sigma_p(T^*).$$

8.2.33　设 T 是复 Banach 空间 X 上的有界线性算子,并且存在 Jordan 曲线构成的围道 $\Gamma\subseteq\rho(T)$,Γ 按一定定向,使得 $\sigma(T)$ 被分割成 Γ 的内部部分 $\sigma_1(T)$ 与 Γ 的外部部分 $\sigma_2(T)$,记

$$E_1=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I-T)^{-1}\mathrm{d}\lambda,$$

证明下列命题:

(i) $E_1\in\mathscr{B}(X\to X)$;

(ii) $E_1^2=E_1$(从而 $(I-E_1)^2=I-E_1$);

(iii) $TE_1=E_1T$.

证　(i) 易知 $R(\lambda,T)=(\lambda I-T)^{-1}$ 在 Γ 上一致强连续,故 E_1 有定义且 $E_1\in\mathscr{B}(X\to X)$.

(ii) 取围道 $\Gamma_1\subseteq\rho(T)$,Γ_1 在 Γ 的外部,Γ_1 仍把

$\sigma(T)$ 分成内部部分 $\sigma_1(T)$ 与外部部分 $\sigma_2(T)$. 则有

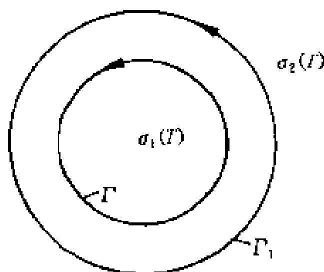


图 8.1

$$E_1^2 = E_1 \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\lambda I - T)^{-1}d\lambda$$
$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}(\mu I - T)^{-1}d\mu\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}d\lambda$$
$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_\Gamma(\mu I - T)^{-1}(\lambda I - T)^{-1}d\lambda d\mu$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_\Gamma\frac{1}{\lambda-\mu}((\mu I - T)^{-1}((\mu I - T) - (\lambda I - T))(\lambda I - T)^{-1})d\lambda d\mu$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\int_\Gamma\frac{(\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1}}{\lambda-\mu}d\lambda d\mu$$
$$= \frac{1}{4\pi^2}\Big(\int_{\Gamma_1}\int_\Gamma\frac{(\lambda I - T)^{-1}}{\lambda-\mu}d\mu d\lambda - \int_{\Gamma_1}\int_\Gamma\frac{(\mu I - T)^{-1}}{\lambda-\mu}d\lambda d\mu\Big)$$
$$= \frac{-1}{4\pi^2}\int_\Gamma 2\pi i(\lambda I - T)^{-1}d\lambda - \frac{1}{4\pi^2}\int_{\Gamma_1}\theta d\mu$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}d\lambda = E.$$

(iii) $$TE_1 = \frac{1}{2\pi i}T\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(T - \lambda I + \lambda I)(\lambda I - T)^{-1}d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(-I + \lambda(\lambda I - T)^{-1})d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}\cdot\lambda d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}(\lambda I - T + T)d\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma I + (\lambda I - T)^{-1}Td\lambda$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma(\lambda I - T)^{-1}d\lambda T = E_1 T.$$

8.2.34 设 A, B 是复 Banach 空间 X 上的两个有界线性算子,证明:

(i) $r(AB) = r(BA)$;

(ii) 当 A, B 可交换时, $r(A+B) \leqslant r(A) + r(B)$.

(式中 $r(A)$ 为 A 的谱半径, $r(A) = \lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\|^{\frac{1}{n}}$)

证 (i) $$r(AB) = \lim_{n\to\infty}\|(AB)^n\|^{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\|A(BA)^{n-1}B\|^{\frac{1}{n}}$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty}\|A\|^{\frac{1}{n}}\|(BA)^{n-1}\|^{\frac{1}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}}\|B\|^{\frac{1}{n}}$$
$$= r(BA).$$

同样可证得 $r(BA) \leqslant r(AB)$, 所以
$$r(AB) = r(BA).$$

(ii) 因 $\|A^i\|^{\frac{1}{i}} \to r(A)$, $\|B^i\|^{\frac{1}{i}} \to r(B)$ $(i\to\infty)$, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 N, 当 $i \geqslant N$ 时,
$$\|A^i\| \leqslant (r(A)-\varepsilon)^i,\ \|B^i\| \leqslant (r(B)+\varepsilon)^i.$$
于是,当 $n > 2N$ 时,
$$\|(A+B)^n\| = \Big\|\sum_{i=0}^n C_n^i A^i B^{n-i}\Big\|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^n C_n^i\|A^i\|\,\|B^{n-i}\|$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{N-1}C_n^i\|A\|^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i} + \sum_{i=N}^{n-N}C_n^i(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+i)^{n-i} + \sum_{i=n-N+1}^n C_n^i(r(A)+\varepsilon)^i\|B\|^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{N-1}C_n^i\Big(\frac{\|A\|}{r(A)+\varepsilon}\Big)^i(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i} + \sum_{i=N}^{n-N}C_n^i(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i} + \sum_{i=n-N+1}^n C_n^i\Big(\frac{\|B\|}{r(B)+\varepsilon}\Big)^{n-i}(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i}.$$

令 $P = \max\Big(\Big(\frac{\|A\|}{r(A)+\varepsilon}\Big)^i, \Big(\frac{\|B\|}{r(B)+\varepsilon}\Big)^i \mid i = 0,1,2,\cdots,N\Big)$, 则有
$$\|(A+B)^n\|$$
$$\leqslant P\sum_{i=0}^n C_n^i(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i} + \sum_{i=0}^n C_n^i(r(A)+\varepsilon)^i(r(B)+\varepsilon)^{n-i}$$
$$= (P+1)(r(A)+\varepsilon+r(B)+\varepsilon)^n,$$
$$\|(A+B)^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant (P+1)^{\frac{1}{n}}(r(A)+r(B)+2\varepsilon).$$
令 $n\to\infty$, 得到
$$r(A+B) \leqslant r(A)+r(B)+2\varepsilon.$$
因 $\varepsilon > 0$ 任意,所以有
$$r(A+B) \leqslant r(A)+r(B).$$

8.2.35 设 $\{a_{ij} \mid i,j = 1,2,\cdots\}$ 满足
$$\sum_{j=1}^\infty\sum_{i=1}^\infty |a_{ij}|^2 < \infty.$$
对每个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$, 定义

$$Ax = (\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{i2}, \cdots, \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{ij}, \cdots),$$

证明：A 是 l^2 上的全连续算子.

证 易知 A 是 l^2 上的有界线性算子，只需证 A 变有界集为致密集. 设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2 \leqslant M$, 则 $(Ax)_j = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{ij}$ $(j = 1, 2, \cdots)$

$$\sum_{j=n}^{\infty}|Ax_j|^2 = \sum_{j=n}^{\infty}|\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{ij}|^2$$
$$\leqslant \sum_{j=n}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty}|\xi_i|^2)$$
$$\leqslant M\sum_{j=n}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 \to 0\ (n \to \infty).$$

即当 $\|x\| \leqslant M$ 时，$\forall \varepsilon > 0$，存在 n_ε(与 x 无关)，使 $\sum_{j=n_\varepsilon}^{\infty}(Ax)_j < \varepsilon$，此即 $\{Ax \mid \|x\| \leqslant M\}$ 致密.

8.2.36 对每个 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots) \in l^2$，定义

$$Ax = (0, \xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \cdots, \frac{\xi_i}{i}, \cdots),$$

证明 A 是 l^2 上的全连续算子，并且是广义幂零算子，但 0 不是特征值.

证 A 显然是 l^2 上的有界线性算子，若令

$$a_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{i}, & i = j-1 \\ 0, & i \neq j-1 \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \cdots),$$

则 $\{a_{ij} \mid i, j = 1, 2, \cdots\}$ 满足

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}|\frac{1}{i}|^2 < \infty,$$

且

$$Ax = (0, \xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \cdots)$$
$$= (\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{i2}, \cdots). \qquad (*)$$

由上题结论知 A 是 l^2 上的全连续算子，又由 $(*)$ 知

$$A^2x = (0, 0, \frac{\xi_1}{1\cdot 2}, \frac{\xi_2}{2\cdot 3}, \cdots, \frac{\xi_i}{i(i+1)}, \cdots),$$

$$A^3x = (0, 0, 0, \frac{\xi_1}{1\cdot 2\cdot 3}, \frac{\xi_2}{2\cdot 3\cdot 4}, \cdots, \frac{\xi_i}{i(i+1)(i+2)}, \cdots),$$

……

$$A^nx = (0, 0, \cdots, 0, \frac{\xi_1}{n!}, \frac{\xi_2}{2\cdot 3\cdot (n+1)}, \cdots, \frac{\xi_i}{i(i+1)\cdots(i+n-1)}, \cdots),$$

……

所以有

$$\|A^nx\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\xi_i}{i(i+1)\cdots(i+n-1)}\right|^2\right)^{1/2}$$
$$< (\sum_{i=1}^{\infty}|\frac{\xi_i}{n!}|^2)^{1/2} \leqslant \frac{1}{n!}(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2)^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{1}{n!}\|x\|.$$

所以

$$\|A^n\| \leqslant \frac{1}{n!} \to 0 \quad (n \to \infty),$$

即 A 为广义幂零算子

又当 $Ax = \theta$ 时，显然有 $x = (0, 0, \cdots, 0, \cdots) = \theta$，所以零不是特征值.

8.2.37 设 $k(s,t)$ 是 $a \leqslant s, t \leqslant b$ 上的二元连续函数，对每个 $x(t) \in C_{[a,b]}$，定义

$$Kx(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

证明 K 是 $C_{[a,b]}$ 至 $C_{[a,b]}$ 的全连续算子.

证 易知 K 是 $C_{[a,b]}$ 至 $C_{[a,b]}$ 的有界线性算子，只需证：K 把有界集变成致密集. 设 M 是 $C_{[a,b]}$ 中的某个有界集，即存在常数 L，使当 $x(t) \in M$ 时，有 $\|x\| \leqslant L$，从而 $\|kx\| \leqslant \|k\|\|x\| \leqslant \|k\|L$，即 $KM = \{kx(s) \mid x(t) \in M\}$ 有界. 又注意对任何 $\varepsilon > 0$，对每个 $kx(s) \in KM$，当 $s_1, s_2 \in [a,b]$ 且 $|s_1 - s_2|$ 充分小时，有

$$|kx(s_1) - kx(s_2)|$$
$$= \left|\int_a^b K(s_1t)x(t)\mathrm{d}t - \int_a^b k(s_2t)x(t)\mathrm{d}t\right|$$
$$\leqslant \int_a^b |k(s_1,t) - k(s_2,t)||x(t)|\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

此表明 KM 等度一致连续. 由 $C_{[a,b]}$ 中致密集的判别法知 KM 是致密集，即 K 把有界集 M 变成致密集 KM，所以 K 为全连续算子.

8.2.38 设 $k(s,t)$ 是 $a \leqslant t, s \leqslant b$ 上的二元 Lebesgue 可测函数，$\int_a^b\int_a^b |k(s,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s < +\infty$，对每个 $x(t) \in L^2[a,b]$，定义

$$Kx(s) = \int_a^b k(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

证明 K 是 $L^2_{[a,b]}$ 至 $L^2_{[a,b]}$ 的全连续算子.

证 易知 K 是 $L^2_{[a,b]}$ 至 $L^2_{[a,b]}$ 上的有界线性算子，又由 Лузин 定理知，存在连续函数 $k_n(s,t) \in C_{[a,b]\times[a,b]}$，使 $\int_a^b\int_a^b |k(s,t) - k_n(s,t)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}s \to 0$ $(n \to \infty)$. 由上题易知，若令

$$K_nx(s) = \int_a^b k_n(s,t)x(t)\mathrm{d}t,\ x(t) \in L^2_{[a,b]},$$

则 K_n 也是 $L^2_{[a,b]}$ 至 $L^2_{[a,b]}$ 的全连续算子，于是对一切 $x(t) \in L^2_{[a,b]}$ 有

$$(K - K_n)x(s) = \int_a^b (k(s,t) - k_n(s,t))x(t)\mathrm{d}t.$$

所以

$$\|(K-K_n)x(s)\| = \left(\int_a^b |(k-k_n)x(s)|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$= \left(\int_a^b \left|\int_a^b (k(s,t)-k_n(s,t))x(t)dt\right|^2 ds\right)^{1/2}$$

$$\leqslant \left(\int_a^b\int_a^b |k(s,t)-k_n(s,t)|^2 dt ds\right)^{1/2}$$

$$\cdot\left(\int_a^b |x(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

所以

$$\|K-K_n\|$$

$$\leqslant \left(\int_a^b\int_a^b |k(s,t)-k_n(s,t)|^2 dt ds\right)^{1/2}$$

$$\to 0\ (n\to\infty),$$

即有全连续算子 K_n 一致收敛至有界线性算子 T,所以 T 是全连续算子.

8.2.39 设 A 是复 Banach 空间 X 上的全连续算子,$\lambda_0 \in \sigma(A)$,$\lambda_0 \neq 0$,$\varepsilon > 0$,圆 $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon$ 内只含 A 的唯一谱点 λ_0,令

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda,$$

证明以下命题:

(i) P_{λ_0} 全连续,且 $P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}$;

(ii) $P_{\lambda_0}X$ 是有限维空间且 $\{x \mid Ax = \lambda_0 x\} \subseteq P_{\lambda_0}X$;

(iii) $P_{\lambda_0}A = AP_{\lambda_0}$;

(iv) $P_{\lambda_0}^*X^*$ 是 A^* 的不变子空间且 $\{f \mid A^*f = \lambda_0 f\} \subseteq P_{\lambda_0}^*X^*$.

证 (i) 因 $(\lambda I - A)^{-1}$ 在 $\{\lambda \mid |\lambda-\lambda_0| = \varepsilon\}$ 一致强连续,故 P_{λ_0} 有定义且 $P_{\lambda_0} \in \mathscr{B}(X\to X)$,又

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} \frac{\lambda I - A + A}{\lambda} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} \left(\frac{I}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}A\right) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} \frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda A.$$

注意 $\frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}$ 在 $|\lambda-\lambda_0| = \varepsilon$ 一致强连续,所以 $\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} \frac{1}{\lambda}(\lambda I - A)^{-1} d\lambda \in \mathscr{B}(X\to X)$,而 A 全连续,所以 P_{λ_0} 全连续. $P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}$ 的证明只需注意 $P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon/2} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$,其余全同于 8.2.33 题的相应证明,此处略去.

(ii) 因

$$\{P_{\lambda_0}x \mid \|P_{\lambda_0}x\| = 1\}$$

$$= \{P_{\lambda_0}P_{\lambda_0}x \mid \|P_{\lambda_0}x\| = 1\}$$

致密,故 $P_{\lambda_0}X$ 为有限维空间. 又当 $x \in \{x \mid Ax = \lambda_0 x\}$ 时,有

$$(\lambda I - A)^{-1}x = (\lambda I - A)^{-1}\frac{Ax}{\lambda_0}$$

$$= -(\lambda I - A)^{-1}\frac{(\lambda I - A) - \lambda I}{\lambda_0}x$$

$$= \frac{-x}{\lambda_0} + \frac{\lambda(\lambda I - A)^{-1}x}{\lambda_0}.$$

所以 $(\lambda I - A)^{-1}x = \frac{x}{\lambda-\lambda_0}$,从而

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda x$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} \frac{-x}{\lambda-\lambda_0} d\lambda = x,$$

即 $x = P_{\lambda_0}x$,所以有

$$\{x \mid Ax = \lambda_0 x\} \subseteq P_{\lambda_0}X.$$

(iii) $P_{\lambda_0}A = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1}A d\lambda$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} -(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A - \lambda I) d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} -I d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A)^{-1}\lambda d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} \lambda(\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} (\lambda I - A + A)(\lambda I - A)^{-1} d\lambda = AP_{\lambda_0}.$$

(iv) 由 (iii) 知 $(P_{\lambda_0}A)^* = (AP_{\lambda_0})^*$,即 $A^*P_{\lambda_0}^* = P_{\lambda_0}^*A^*$,故对任何 $f \in X^*$,有 $A^*P_{\lambda_0}^*f = P_{\lambda_0}^*A^*f \in P_{\lambda_0}^*X^*$,所以 $P_{\lambda_0}^*X^*$ 是 A^* 的不变子空间. 又 $\forall f \in \{f \mid A^*f = \lambda_0 f\}$,对一切 $x \in X$,有

$$f((\lambda I - A)^{-1}x) = \frac{A^*f}{\lambda_0}((\lambda I - A)^{-1}x)$$

$$= \frac{f}{\lambda_0}(A(\lambda I - A)^{-1}x)$$

$$= \frac{-1}{\lambda_0}f((\lambda I - A - \lambda I)(\lambda I - A)^{-1}x)$$

$$= \frac{-1}{\lambda_0}f(x) + \frac{\lambda}{\lambda_0}f((\lambda I - A)^{-1}x),$$

所以有 $\frac{f(x)}{\lambda-\lambda_0} = f((\lambda I - A)^{-1}x)$,从而

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon} f((\lambda I - A)x) d\lambda$$

$$= f(P_{\lambda_0}x) = P_{\lambda_0}^*f(x).$$

注意上式对一切 $x \in X$ 成立,我们有

$$f = P_{\lambda_0}^*f \in P_{\lambda_0}^*X^*.$$

从而 $\{f \mid A^*f = \lambda_0 f\} \subseteq P_{\lambda_0}^*X^*$.

8.2.40 设 A 是复 Banach 空间 X 上的全连续算

子，$R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$，证明对任何 $\lambda_0\in\sigma(A)$，$\lambda_0\neq 0$，R_λ 在 λ_0 附近有展开式

$$R_\lambda=\frac{C_{-n}}{(\lambda-\lambda_0)^n}+\frac{C_{-n+1}}{(\lambda-\lambda_0)^{n-1}}+\cdots+C_0+\sum_{r=1}^{\infty}C_r(\lambda-\lambda_0)^r,$$

其中 $C_\gamma(\gamma=-n,-n+1,\cdots,0,1,2,\cdots)$ 为 X 上的有界线性算子.

证 用 $\mathscr{B}(X\to X)$ 表 X 上有界算子构成的Banach空间. 易知有 $\varepsilon>0$ 使 $\forall f\in\mathscr{B}^*(X\to X)$，$f(R_\lambda)$ 在 $0<|\lambda-\lambda_0|<\varepsilon$ 上解析，且在 $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ 上只有唯一的谱点 λ_0，于是，在 λ_0 附近有

$$f(R_\lambda)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(\lambda-\lambda_0)^n\quad(\text{laurent 展开}).$$

易知上式中的

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{f(R_\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots),$$

所以

$$\begin{aligned}&f(R_\lambda)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{f(R_\mu)}{(\mu-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\mu(\lambda-\lambda_0)^n\\&=f\Big(\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{R_\mu}{(\mu-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\mu(\lambda-\lambda_0)^n\Big).\end{aligned}$$

注意上式对一切 $f\in\mathscr{B}^*(X\to X)$ 成立，所以

$$\begin{aligned}R_\lambda&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{R_\mu}{(\mu-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\mu(\lambda-\lambda_0)^n\\&\triangleq\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n(\lambda-\lambda_0)^n.\end{aligned}$$

其中 $C_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{R_\mu}{(\mu-\lambda_0)^{n+1}}\mathrm{d}\lambda\in\mathscr{B}(X\to X)$ $(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，从而

$$\begin{aligned}C_{-(n+1)}&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{R_\mu}{(\mu-\lambda_0)^{-n}}\mathrm{d}\mu\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu-\lambda_0|=\varepsilon}(\mu-\lambda_0)^nR_\mu\mathrm{d}\mu\\&=(A-\lambda_0I)^nP_{\lambda_0}.\end{aligned}$$

下证有 n_0 使对每个 $x\in P_{\lambda_0}X$，$(\lambda_0I-A)^{n_0}x=\theta$，即 $(\lambda_0I-A)^{n_0}P_{\lambda_0}x=\theta$ 对一切 $x\in X$ 成立，即 $(\lambda_0I-A)^{n_0}P_{\lambda_0}=\theta$.

由8.2.39题的结论知，$\{x\mid Ax=\lambda_0x\}\subseteq P_{\lambda_0}X$，$P_{\lambda_0}X$ 为 A 的有限维不变子空间，从而易知，$P_{\lambda_0}X$ 也是 $P(A)$ 的不变子空间(这里 $P(A)$ 是 A 的任一多项式). 取 $x_0,x_1,\cdots,x_{k-1}$ 为 $P_{\lambda_0}X$ 的基，其中 x_0 是 A 关于 λ_0 的特征向量，于是，$x_0,Ax_0,A^2x_0,\cdots,A^kx_0$ 线性相关，故有非零多项式

$$P_0(\lambda)=\alpha_0^{(0)}+\alpha_1^{(0)}\lambda+\alpha_2^{(0)}\lambda^2+\cdots+\alpha_k^{(0)}\lambda^k$$

使 $P_0(A)x_0=\theta$. 又 $x_1,Ax_1,A^2x_1,\cdots,A^kx_1$ 线性相关，故有非零多项式

$$P_1(\lambda)=\alpha_0^{(1)}+\alpha_1^{(1)}\lambda+\alpha_2^{(1)}\lambda^2+\cdots+\alpha_k^{(1)}\lambda^k$$

使 $P_1(A)x_1=\theta$，…… 如此有非零多项式

$$P_{k-1}(\lambda)=\alpha_0^{(k-1)}+\alpha_1^{(k-1)}\lambda+\alpha_2^{(k-1)}\lambda^2+\cdots+\alpha_k^{(k-1)}\lambda^k$$

使 $P_{k-1}(A)x_{k-1}=\theta$. 令

$$P(\lambda)=P_0(\lambda)P_1(\lambda)\cdots P_{k-1}(\lambda),$$

则对每个 $x\in P_{\lambda_0}X$，有 $P(A)x=\theta$，分解 $P(\lambda)=\prod_{i=0}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{\gamma_i}$. 不妨设分解式中的 λ_0 就是题设中的 λ_0，下证对每个 $x\in P_{\lambda_0}X$，有 $(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}x=\theta$ (即 $(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}P_{\lambda_0}=0$). 否则有 $x\in P_{\lambda_0}X$，使 $(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}x\neq0$，从而在分解式 $P(\lambda)=\prod_{i=0}^{s}(\lambda-\lambda_i)^{\gamma_i}$ 中，至少有一个 $\lambda_i\neq\lambda_0$ 及多项式 $Q(\lambda)$，使得 $Q(A)(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}y\neq\theta$，但

$$(\lambda_iI-A)Q(A)(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}x=\theta.$$

令 $y=Q(A)(\lambda_0I-A)^{\gamma_0}x\neq\theta$，则 $(\lambda_iI-A)y=\theta$，即 y 是 A 关于 λ_i 的特征向量，注意 $x\in P_{\lambda_0}X$，故 $y\in P_{\lambda_0}X$. 又 $P_{\lambda_0}^2=P_{\lambda_0}$，所以

$$y=P_{\lambda_0}y=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}R_\lambda y\mathrm{d}\lambda.$$

注意 $Ay=\lambda_iy$，又有

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}R_\lambda\frac{\lambda I-A}{\lambda-\lambda_0}y\mathrm{d}\lambda\\&=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda-\lambda_0|=\varepsilon}\frac{y}{\lambda-\lambda_i}\mathrm{d}\lambda=\theta.\end{aligned}$$

这是矛盾，所以 $(\lambda_0-A)^{\gamma_0}P_{\lambda_0}=\theta$. 于是当 $n>\gamma_0$ 时，

$$\begin{aligned}C_{-n}&=(\lambda_0I-A)^{n-1}P_{\lambda_0}\\&=(\lambda_0I-A)^{n-1-\gamma_0}(\lambda_0-A)^{\gamma_0}P_{\lambda_0}=\theta.\end{aligned}$$

§8.3 Hilbert空间及算子理论

设 X 是复(或实)数域 Λ 上的线性空间，若对任何 $x,y\in X$，存在 Λ 上唯一的数 (x,y) 与之对应，且对应关系 $(\cdot,\cdot)$ 满足：

1° $(x,y)=\overline{(y,x)}$ $(x,y\in X)$(共轭对称)；

2° $(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y)$(对第一变元线性)；

3° $(x,x)\geqslant 0,(x,x)=0\Leftrightarrow x=0$(正定性).
则称$(X,(\cdot,\cdot))$为内积空间,数(x,y)称为x关于y的内积.

易知,在内积空间X中,若对每个$x\in X$,规定$\|x\|=(x,x)^{1/2}$,则$\|\cdot\|$是X上的一个距离,此距离称为由内积导出的距离,完备的内体空间(即内积空间按范数$\|x\|=(x,x)^{1/2}$完备)称为Hilbert空间.

证明一个空间为内积空间或Hilbert空间,只需根据题设条件逐个验证公理1°,2°,3°即可.

8.3.1 举出三个内积空间,它们的范数都不能由内积导出.

解 首先注意,当X是线性赋范空间时,若X上的范数$\|\cdot\|$可由内积导出,则$\|\cdot\|$满足:

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\&=2\|x\|^2+2\|y\|^2.\end{aligned}$$

由此知:

① $C_{[0,1]}$中的范数$\|x\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$不能由内积导出.例如取$x(t)=t,y(t)=1-t$,则$\|x\|^2=1,\|y\|^2=1,\|x+y\|^2=1,\|x-y\|^2=1$,显然,$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\|x\|^2+2\|y\|^2$,故此范数不能由内积导出.

② $l^p(p=3)$中的范数

$$\|x\|=(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p)^{1/p}$$

不能由内积导出.例如取$x=(1,0,0),y=(0,1,0)$,则$\|x\|^2=1,\|y\|^2=1,\|x+y\|^2=2^{2/3},\|x-y\|^2=2^{2/3}$,显然$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\|x\|^2+2\|y\|^2$.故此范数不能由任何内积导出.

③ $R_{[0,1]}$($[0,1]$上Riemann可积函数全体)中的范数$\|x\|=\int_0^1|x(t)|\mathrm{d}t$不能由内积导出.例如取$x(t)=t,y(t)=1-t$,则$\|x\|^2=\frac{1}{4},\|y\|^2=\frac{1}{4},\|x+y\|^2=1,\|x-y\|^2=\frac{1}{4}$,显然$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\neq 2\|x\|^2+2\|y\|^2$,故此范数不能由内积导出.事实上,当$p>1,p\neq 2$时,$l^p$中的范数都不能由内积导出.

8.3.2 设$R_1,R_2,\cdots$是一列内积空间,令$R=\{(x_n)\mid x_n\in R_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty\}$,当$(x_n),(y_n)\in R$时,规定,$\alpha(x_n)=(\alpha x_n),(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$及$((x_n),(y_n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)$,证明$R$是内积空间,且当$R_n$都是Hilbert空间时,$R$也是Hilbert空间.

证 因$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n\|^2=|\alpha|^2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^2\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|^2+\|y_n\|^2+2|(x_n,y_n)|)\\&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}(2\|x_n\|^2+2\|y_n\|^2)<\infty,\end{aligned}$$

故R是线性空间.又

1° $((x_n),(y_n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\overline{(y_n,x_n)}=\overline{((y_n),(x_n))}$;

$$\begin{aligned}2°\ &(\alpha(x_n^{(1)})+\beta(x_n^{(2)}),(y_n))\\&=\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha x_n^{(1)}+\beta x_n^{(2)},y_n)\\&=\alpha\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^{(1)},y_n)+\beta\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^{(2)},y_n)\\&=\alpha((x_n^{(1)}),(y_n))+\beta((x_n^{(2)}),(y_n));\end{aligned}$$

3° $((x_n),(x_n))=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n,x_n)\geqslant 0$,

$((x_n),(x_n))=0\Leftrightarrow(x_n)=\theta$.

故R是内积空间.

下证当R_n都是Hilbert空间时,R也是Hilbert空间:令$\tilde{x}=(x_n)$,设$(\tilde{x}_k)$是R中的基本列,即$\forall\varepsilon>0$,存在K,当$k,j\geqslant K$时,有

$$\|\tilde{x}_k-\tilde{x}_j\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2.$$

注意

$$\|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}\|\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}\|^2)^{1/2}<\varepsilon\quad(n=1,2,\cdots).$$

故$x_n^{(1)},x_n^{(2)},\cdots,x_n^{(j)},\cdots$是$R_n$中的基本列.而$R_n$完备,所以有$x_n^{(j)}\to x_n\in R_n(j\to\infty)$.再注意对任何$m$,有$\sum\limits_{n=1}^{m}\|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}\|^2\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(k)}-x_n^{(j)}\|^2<\varepsilon^2(k,j\geqslant K$时).令$j\to\infty$,得到$\sum\limits_{n=1}^{m}\|x_n^{(k)}-x_n\|^2\leqslant\varepsilon^2(k\geqslant K$时).再令$m\to\infty$,得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(n)}-x_n\|^2\leqslant\varepsilon^2(k\geqslant K\text{时}).$$

此处由于

$$\begin{aligned}&(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2)^{1/2}=(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n-x_n^{(n)}+x_n^{(k)}\|^2)^{1/2}\\&\leqslant(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n-x_n^{(n)}\|^2)^{1/2}+(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(k)}\|^2)^{1/2}\\&\leqslant\varepsilon+M_k(k\geqslant K),\end{aligned}$$

所以$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<\infty$. 令$\tilde{x}=(x_n)$，则$\tilde{x}\in \mathbf{R}$且

$$\|\tilde{x}_k-\tilde{x}\|=(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n^{(k)}-x_n\|^2)^{1/2}\leqslant\varepsilon\ (k\geqslant K$$

时).

即$\tilde{x}_k\to\tilde{x}\ (k\to\infty)$，所以$R$是Hilbert空间.

8.3.3 设$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是R^n中的一组基，证明：$(\cdot,\cdot)$成为R^n上的内积$\Leftrightarrow$存在$n\times n$的正定方阵$A=(a_{ij})$，使得

$$(\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i,\sum_{i=1}^{n}\eta_ie_i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j.$$

证 $\Rightarrow$：令$a_{ij}=(e_i,e_j)\ (i,j=1,2,\cdots,n)$，则$\overline{a_{ij}}=a_{ji}$. 又由内积的性质易知有

$$(\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i,\sum_{j=1}^{n}\eta_je_j)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(e_i,\sum_{j=1}^{n}\eta_je_j)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n}\bar{\eta}_j(e_i,e_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j.$$

注意对任何$\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j\neq\theta$，有

$$(\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i,\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j$$

$$=\|\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\|^2>0.$$

所以$A=(a_{ij})$为正定方阵.

$\Leftarrow$：对$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i,y=\sum_{j=1}^{n}\eta_je_j\in R^n$，令

$$(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j.$$

易验证：

1° $(x,y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\eta}_j=\overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{a_{ij}}\bar{\xi}_i\eta_j}$

$$=\overline{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\bar{\xi}_i\eta_j}=\overline{(y,x)};$$

2° $(\alpha x_1+\beta x_2,y)=\alpha(x_1,y)+\beta(x_2,y)$;

3° $(x,x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j\geqslant 0,x=0\Leftrightarrow(x,x)=0.$

8.3.4 设H是内积空间，$y\in H$，对每个$x\in H$，令$f(x)=(x,y)$，证明：$f\in H^*$且$\|f\|=\|y\|$.

证 由内积的定义知f关于x线性，又

$|f(x)|=|(x,y)|\leqslant\|y\|\|x\|\quad(x\in H)$，所以$f\in H^*$，且$\|f\|\leqslant\|y\|$. 另一方面，当$y\neq 0$时，有$|f(y)|=|(y,y)|=\|y\|^2$即$f(\frac{y}{\|y\|})=\|y\|$，所以

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|\geqslant f(\frac{y}{\|y\|})=\|y\|.$$

所以有

$$\|f\|=\|y\|.$$

8.3.5 设p是$(-\infty,+\infty)$上的Lebesgue可测函数，$p(t)\overset{a.e.}{>}0$，$H=\{f\mid f$在$(-\infty,+\infty)$Lebesgue可测，且$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2p(t)dt<+\infty\}$，视$H$中a.e.相等的函数为同一，证明按通常函数运算及$(f,g)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}p(t)dt$，$H$成为Hilbert空间.

证 易验证H是内积空间，下证H成为Hilbert空间，设(f_n)是H中的基本列，即$\forall\varepsilon>0$，存在N，当$n,m\geqslant N$时，有

$$\|f_n-f_m\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f_m(t)|^2p(t)dt<\varepsilon^2.$$

$\forall\sigma>0$，令$E_{n,m}(\sigma)=\{t\mid |f_n(t)\sqrt{p(t)}-f_m(t)\sqrt{p(t)}|\geqslant\sigma\}$，则当$n,m\geqslant N$时，有

$$\sigma^2m(E_{n,m}(\sigma))$$
$$\leqslant\int_{E_{n,m}(\sigma)}|f_n(t)-f_m(t)|^2p(t)dt$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f_m(t)|^2p(t)dt<\varepsilon^2,$$

此表明$(f_n\sqrt{p})$是依测度收敛意义的基本列，从而$(f_n\sqrt{p})$依测度收敛. 设$f_n\sqrt{p}\Rightarrow f\sqrt{p}$，由Riesz定理，有子列$(f_{n_k}\sqrt{p})$使$f_{n_k}\sqrt{p}\xrightarrow{a.e.}f\sqrt{p}$. 注意当$n,k\geqslant N$时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f_{n_k}(t)|^2p(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)\sqrt{p(t)}-f_{n_k}(t)\sqrt{p(t)}|^2dt<\varepsilon^2.$$

令$k\to\infty$，由Fatou引理，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f(t)|^2p(t)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)\sqrt{p(t)}-f(t)\sqrt{p(t)}|^2dt$$
$$\leqslant\varepsilon^2(n\geqslant N).$$

注意此处

$$(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sqrt{p(t)}|^2dt)^{1/2}$$
$$=(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sqrt{p(t)}-f_n(t)\sqrt{p(t)}+f_n(t)\sqrt{p(t)}|^2dt)^{1/2}$$
$$\leqslant(\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sqrt{p(t)}-f_n(t)\sqrt{p(t)}|^2dt)^{1/2}+(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)\sqrt{p(t)}|^2dt)^{1/2}$$
$$\leqslant\varepsilon+\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)|^2p(t)dt<\infty\quad(n\geqslant N).$$

所以$f\in H$，从而有

$$\|f_n-f\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_n(t)-f(t)|^2p(t)dt$$

$$< \varepsilon^2 \quad (n \geqslant N).$$

此即 $f_n \to f\ (n \to \infty)$，所以 H 为 Hilbert 空间.

8.3.6　设 H 是内积空间，N 是 H 的线性子空间，证明：当 N 完备时，$N = (N^{\perp})^{\perp}$.

证　$N \subseteq (N^{\perp})^{\perp}$ 是显然的. 又 $\forall x \in (N^{\perp})^{\perp}$，因 N 完备，必有唯一的 $x_0 \in N, z \in N^{\perp}$，使 $x = x_0 + z$，从而有 $(x,z) = (x_0,z) + \|z\|^2$. 注意 $(x,z) = 0, (x_0,z) = 0$. 故 $\|z\| = 0$ 即 $z = \theta$. 所以有 $x = x_0 \in N$. 因 $x \in (N^{\perp})^{\perp}$ 任意，所以 $(N^{\perp})^{\perp} \subseteq N$. 总之有 $N = (N^{\perp})^{\perp}$.

8.3.7　设 H 是内积空间，$M, N \subseteq H$，L 是 M 与 N 张成的线性子空间，证明 $L^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

证　因 $L \supseteq M, L \supseteq N$，故 $L^{\perp} \subseteq M^{\perp}, L^{\perp} \subseteq N^{\perp}$，所以 $L^{\perp} \subseteq M^{\perp} \cap N^{\perp}$. 另一方面，$\forall y \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$，则 $y \perp M, y \perp N$. 所以对一切 $z \in L$，因 $z = \alpha x_1 + \beta x_2$（其中 $x_1 \in M, x_2 \in N$），故有 $y \perp z$，即 $y \in L^{\perp}$. 注意 $y \in M^{\perp} \cap N^{\perp}$，得到 $M^{\perp} \cap N^{\perp} \subseteq L^{\perp}$. 总之，我们有 $L^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$.

8.3.8　设 $(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \cdots, x_n^{(i)}), i = 1,2,\cdots,m$ 是已知的实数组，利用投影定理求一实数组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{m}(x_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j^{(i)})^2$$

达到最小.

解　令 $x_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \cdots, x_j^{(m)}), j = 0,1,\cdots,n$，则 $x_j \in R^m$. 于是所提问题乃求达到 x_0 至 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 张成的子空间 $L = \{\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j \mid \alpha_j \in R^1\}$ 的最小距离的 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$. 由 L 完备及投影定理知

$\|x_0 - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j\|$ 最小 $\Leftrightarrow (x_0 - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j, x_i) = 0, i = 1,2,\cdots,n$. 即

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x_j, x_i) = (x_0, x_i), i = 1,2,\cdots,n.$$

所以，满足上述方程组的解 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ 便是本问题的解.

8.3.9　设 U 为 Hilbert 空间，M 为 U 的线性子空间，证明：$\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}, M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

证　① $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$ 显然，故 $\overline{M} \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$. 又任取 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$，由题设条件，可将 x 进行直交分解，即有 $x_0 \in \overline{M}, z \perp \overline{M}$ 使 $x = x_0 + z$. 注意 $x \in (M^{\perp})^{\perp}, z \in M^{\perp}$，又有 $(x,z) = (x_0,z) + \|z\|^2$，即有 $0 = 0 + \|z\|^2$，故 $z = \theta$，故 $x = x_0 \in \overline{M}$. 因 $x \in (M^{\perp})^{\perp}$ 任意，所以 $(M^{\perp})^{\perp} \subseteq \overline{M}$. 综上有 $\overline{M} = (M^{\perp})^{\perp}$.

② $\overline{M}^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ 显然. 又任取 $x \in M^{\perp}$，任取 $y \in \overline{M}$，因有 $y_n \in M$，使 $y_n \to y\ (n \to \infty)$，故 $(x,y) = \lim_{n\to\infty}(x, y_n) = 0$，即 $x \perp y$. 注意 $y \in \overline{M}$ 任意，所以 $x \in \overline{M}^{\perp}$. 又 $x \in M^{\perp}$ 任意，所以 $M^{\perp} \subseteq \overline{M}^{\perp}$. 综上有 $M^{\perp} = \overline{M}^{\perp}$.

8.3.10　设 H 为 Hilbert 空间，L 为 H 的线性子空间，证明

$$H = L \oplus L^{\perp} \Leftrightarrow L \text{ 闭（式中 } \oplus \text{ 表直交和）}.$$

证　$\Rightarrow$：任取 $\{x_n\} \subseteq L$，设 $x_n \to x\ (n \to \infty)$，往证 $x \in L$ 即可. 因 $H = L \oplus L^{\perp}$，故有 $x = x_0 + z$，其中 $x_0 \in L, z \in L^{\perp}$. 于是 $(x_n, z) \to (x_0, z) + \|z\|^2$. 注意 $(x_n, z) = 0\ (n = 1,2,\cdots), (x_0, z) = 0$，所以 $\|z\| = 0$ 即 $z = \theta$，从而 $x = x_0 \in L$.

$\Leftarrow$：因 H 是 Hilbert 空间，L 闭，故 L 完备，由投影定理知，对每个 $x \in H$，有 $x_0 \in L, z \in L^{\perp}$，使 $x = x_0 + z$，此表明 $H = L \oplus L^{\perp}$.

8.3.11　设 $H_n(t) = (-1)^n e^{t^2}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\ (n = 0,1,\cdots)$ 为 Hermite 多项式，作

$$\psi_n(t) = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t).$$

证明 $\{\psi_n(t) \mid n = 0,1,\cdots\}$ 组成 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的完备正交标准系.

证　先证 $\{\psi_n(t) \mid n = 1,2,\cdots\}$ 为正交标准系，当 $m \leqslant n$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t = (2^n n!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}(2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty}e^{-t^2}H_n(t)H_m(t)\mathrm{d}t.$$

用归纳法可证

$$H_n(t) = n!\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\frac{2^{n-2j}}{j!(n-2j)!}t^{n-2j} = \sum_{j=0}^{N}\frac{(-1)^j}{j!}n(n-1)\cdots(n-2j+1)(2t)^{n-2j}.$$

其中

$$N = \begin{cases}\dfrac{n}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\[2mm] \dfrac{n-1}{2}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}.\end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} H_n'(t) &= 2n\sum_{j=0}^{M}\frac{(-1)^j}{j!}(n-1)(n-2)\cdots(n-2j)(2t)^{n-1-2j} \\ &= 2nH_{n-1}(t), \end{aligned}$$

$$\text{其中 } M = \begin{cases}\dfrac{n-1}{2}, & n \text{ 为奇数}, \\[2mm] \dfrac{n-2}{2}, & n \text{ 为偶数}.\end{cases}$$

令 $V(t)=e^{-t^2}$，则

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t$$

$$=[(2^n n!\sqrt{\pi})(2^m m!\sqrt{\pi})]^{-\frac{1}{2}}\times\int_{-\infty}^{+\infty}H_n(t)e^{-t^2}H_m(t)\mathrm{d}t$$

$$=(2^n n!\sqrt{\pi}2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\times\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)e^{-t^2}(-1)^n e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=(2^n n!\sqrt{\pi}2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\times\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)(-1)^n V^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

$$=(2^n n!\sqrt{\pi}2^m m!\sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}\times(-1)^m\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)V^{(n)}(t)\mathrm{d}t.$$

注意

$$\int_{-\infty}^{+\infty}H_m(t)V^{(n)}(t)\mathrm{d}t$$

$$=H_m(t)V^{(n-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(n-1)}(t)H_m'(t)\mathrm{d}t$$

$$=(-1)2m\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(n-1)}(t)H_{m-1}(t)\mathrm{d}t$$

$$=(-1)^m 2^m m!\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t.$$

当 $m=n$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(0)}(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi};$$

当 $m\neq n$ 时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t=V^{(n-m-1)}(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0,$$

所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(t)\psi_m(t)\mathrm{d}t$$

$$=(2^n n!\pi)^{-\frac{1}{2}}(2^m m!)^{\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}V^{(n-m)}(t)\mathrm{d}t$$

$$=\begin{cases}1, & n=m,\\ 0, & n\neq m.\end{cases}$$

以上表明 $\{\psi_n(t)\mid n=1,2,\cdots\}$ 是标准正交系，下证它是完备系(即完全系).设 $x(t)\in L^2_{(-\infty,+\infty)}$ 使得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)\psi_n(t)\mathrm{d}t=0\ (n=0,1,2,\cdots),$$

从而

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}H_n(t)\mathrm{d}t=0(n=1,2,\cdots).$$

注意 $H_0(t)=1,H_1(t)=2t,H_2(t)=-2+4t^2,\cdots$，故有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}t^n\mathrm{d}t=0\quad(n=1,2,\cdots).$$

考察复函数

$$F(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}\mathrm{d}t.$$

$F(z)$ 在任意有穷复数有定义且到处具有有穷导数.

$$F'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}(it)\mathrm{d}t,$$

$$F^{(n)}(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{itz}(it)^n\mathrm{d}t\quad(n=0,1,2,\cdots),$$

从而 $F(z)\equiv0$，因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}e^{it\xi}\mathrm{d}t=0\quad(-\infty<\xi<+\infty).$$

上式两端同乘 $e^{-i\xi\eta}$(η 为实数)并按 ξ 从 $-\omega$ 到 ω 积分，得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty}x(t)e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{\sin\omega(t-\eta)}{t-\eta}\mathrm{d}t=0,$$

对一切 η 与 ω 成立，从而可得 $x(t)\overset{\text{a.e.}}{=}0$(见фихтенгольц微积分教程第三卷)，所以 $\{\psi_n(t)\mid n=0,1,2,\cdots\}$ 完全.

8.3.12 设 $\mathscr{F}=\{e_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ 是内积空间 H 中的直交系，证明：

$\mathscr{F}$ 是标准完备系 $\Leftrightarrow$ 对任何 $x,y\in H$，有

$$(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}.$$

证 $\Rightarrow$：因 $\mathscr{F}$ 是标准正交完备系，故有

$$x=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda,\ y=\sum_{\mu\in\Lambda}(y,e_\mu)e_\mu.$$

所以

$$\begin{aligned}(x,y)&=(\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)e_\lambda,\sum_{\mu\in\Lambda}(y,e_\mu)e_\mu)\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)(e_\lambda,\sum_{\mu\in\Lambda}(y,e_\mu)e_\mu)\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\sum_{\mu\in\Lambda}\overline{(y,e_\mu)}(e_\lambda,e_\mu)\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}\end{aligned}$$

$\Leftarrow$：对每个 $\mu\in\Lambda$，有

$$\begin{aligned}\|e_\mu\|^2=(e_\mu,e_\mu)&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(e_\mu,e_\lambda)\overline{(e_\mu,e_\lambda)}\\&=\|e_\mu\|^2\|e_\mu\|^2.\end{aligned}$$

不妨设 $\|e_\mu\|\neq0$，从而 $\|e_\mu\|=1\ (\mu\in\Lambda)$，故 $\mathscr{F}$ 为标准正交系.又对每个 $x\in H$，有

$$\begin{aligned}\|x\|^2=(x,x)&=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(x,e_\lambda)}\\&=\sum_{\lambda\in\Lambda}|(x,e_\lambda)|^2.\end{aligned}$$

所以 $\mathscr{F}$ 完备.

8.3.13 设 $\{\Phi_n\mid n=1,2,\cdots\}$ 是 $L^2(\Omega,\beta,\mu)$ (β

是 σ - 代数）中的标准正交完备系，$f = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \Phi_n)\Phi_n$ 是 f 的 Fourier 展开，称 $S_n(f) = \sum_{k=1}^{n}(f, \Phi_k)\Phi_k$ $(n = 1,2,\cdots)$ 为部分和序列，记 $E_n(\omega, \omega') = \sum_{k=1}^{n}\Phi_k(\omega)\overline{\Phi_k(\omega')}$. 证明

$$S_n(f)(\omega) = \int_{\Omega} f(\omega')E_n(\omega, \omega')\mathrm{d}\mu(\omega').$$

证
$$\begin{aligned} S_n(f)(\omega) &= \sum_{k=1}^{n}(f, \Phi_k)\Phi_k(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\int_{\Omega} f(\omega')\overline{\Phi_k(\omega')}\mathrm{d}\mu(\omega')\Phi_k(\omega) \\ &= \int_{\Omega}\sum_{k=1}^{n} f(\omega')\overline{\Phi_k(\omega')}\Phi_k(\omega)\mathrm{d}\mu(\omega') \\ &= \int_{\Omega} f(\omega')E_n(\omega, \omega')\mathrm{d}\mu(\omega'). \end{aligned}$$

8.3.14 设 H 是 Hilbert 空间，$\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ 是 H 的完备正交标准系，又设 f 是 Λ 上的函数，而且除去 Λ 中最多可列个元 λ 外，$f(\lambda) = 0$，同时 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2 < \infty$，令 $\widetilde{H}$ 是上述这种函数 f 的全体，按照函数的线性运算和内积

$$(f, g) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}$$

所成的内积空间，证明 $\widetilde{H}$ 是 Hilbert 空间，并且 $\widetilde{H}$ 和 H 保范线性同构.

证 首先 (f, g) 是内积. 因

(i) $(f, f) = \sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2 \geqslant 0$, $(f, f) = 0$ $\Leftrightarrow f(\lambda) \equiv 0$.

(ii)
$$\begin{aligned} &(\alpha f_1 + \beta f_2, g) \\ &= \sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha f_1(\lambda) + \beta f_2(\lambda))\overline{g(\lambda)} \\ &= \alpha\sum_{\lambda\in\Lambda} f_1(\lambda)\overline{g(\lambda)} + \beta\sum_{\lambda\in\Lambda} f_2(\lambda)\overline{g(\lambda)} \\ &= \alpha(f, g) + \beta(f_2, g). \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} (f, g) &= \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)\overline{g(\lambda)} \\ &= \overline{\sum_{\lambda\in\Lambda}\overline{f(\lambda)}g(\lambda)} = \overline{(g, f)}. \end{aligned}$$

下证 $\widetilde{H}$ 与 H 保范线性同构.

对每个 $f \in \widetilde{H}$，令 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda$，注意到 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2 < \infty$，故 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda$ 有意义. 令

$$\psi f(\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda,$$

显然 ψ 是 $\widetilde{H}$ 至 H 的线性映射. 显然，当 $f, g \in \widetilde{H}$，$f \neq g$ 时，$\psi f \neq \psi g$，故 ψ 为单射. 注意对 $x = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda \in H$，则在 Λ 中至多有可列个 λ 使 $(x, e_\lambda) \neq 0$. 令 $f(\lambda) = (x, e_\lambda)$，则 $\sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2 < \infty$，故 $f \in \widetilde{H}$ 且 $\psi f(\lambda) = \sum_{\lambda\in\Lambda} f(\lambda)e_\lambda = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda = x$，故 ψ 为满射. 又 $\|\psi f(\lambda)\| = \|x\| = \|\sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)e_\lambda\| = \sum_{\lambda\in\Lambda}|(x, e_\lambda)|^2 = \sum_{\lambda\in\Lambda}|f(\lambda)|^2 = \|f\|^2$，即 ψ 是保范线性同构，从而 $\widetilde{H}$ 是 Hilbert 空间.

8.3.15 设 $f(z)$ 是单位圆 $|z| < 1$ 中的解析函数，$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 < \infty$，这种解析函数全体记为 H_2，证明它按通常线性运算和内积

$$(f, g) = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\mathrm{d}\theta$$

成为复 Hilbert 空间. 任取 H_2 中的完备标准正交系 $\{e_n(z)\}$，证明当 $|z| < 1$，$|t| < 1$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(t)} = \frac{1}{1 - z\bar{t}}.$$

证 易知 $\|f\|^2 = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2\mathrm{d}\theta$.

对每个 $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \in H_2$，令 $T(f) = (a_n) \in l^2$，易知 T 是 H_2 至 l^2 的线性同构. 又

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n re^{in\theta}\right|^2\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty} a_n\bar{a}_m r^2 e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{r\to 1-0}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}a_n\bar{a}_m r^2\int_0^{2\pi} e^{i(n-m)\theta}\mathrm{d}\theta \\ &= \lim_{r\to 1-0}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}|a_n|^2 r^2\cdot 2\pi \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2 = \|(a_n)\|^2. \end{aligned}$$

故 H_2 与 l^2 保范线性同构，所以 H_2 为 Hilbert 空间. 又由上知 $1, z, z^2, \cdots$ 是 H_2 的标准正交完备系，故对任何其它标准正交完备系 $(e_n(z))$，有

$$e_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(e_n, z^k)z^k,\ z^n = \sum_{m=1}^{\infty}(z^n, e_m)e_m(z).$$

故
$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} e_n(z)\overline{e_n(t)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(e_n, z^k)z^k\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\overline{(e_n, t^m)t^m}\right) \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}(e_n, z^k)\overline{(e_n, t^m)}z^k\bar{t}^m \\ &= \sum_{k,m=0}^{\infty}(z^k, t^m)z^k\bar{t}^m = \sum_{n=0}^{\infty}z^k\bar{t}^k = \frac{1}{1 - z\bar{t}}. \end{aligned}$$

8.3.16 设 H 为复 Hilbert 空间，A 是 H 上的有界线性算子，证明

$$A = -A^* \Leftrightarrow \forall x \in H, \mathrm{Re}(Ax,x) = 0.$$

证 $\Rightarrow$: $\mathrm{Re}(Ax,x) = \frac{1}{2}((Ax,x) + \overline{(Ax,x)})$

$$= \frac{1}{2}((Ax,x) + \overline{(x,A^*x)})$$

$$= \frac{1}{2}(-(A^*x,x) + (A^*x,x))$$

$$= 0 \quad (x \in H).$$

$\Leftarrow$: 因

$$(A^*x,x) = (x,Ax) = \overline{(Ax,x)} = -(Ax,x),$$

令 $B = A^* + A$, 易知 B 自共轭, 且

$$(Bx,x) = ((A^* + A)x,x) = (A^*x,x) + (Ax,x) = 0.$$

于是对一切 $x \in H$, 有

$$\|Bx\|^2 = (Bx,Bx) = (B^2x,x) = \frac{1}{4}\{(A(x+Ax),x+Ax) - (A(x-Ax),x-Ax)\} = 0.$$

$\therefore B = \theta$, 即 $A = -A^*$.

8.3.17 设 H 为内积空间, $T \in \mathscr{B}(H \to H)$, $\|T\| \leqslant 1$, 证明:

$$\{x \in H \mid Tx = x\} = \{x \in H \mid T^*x = x\}.$$

证 $\forall x \in \{x \in H \mid Tx = x\}$, 则

$$0 \leqslant \|T^*x - x\|^2$$
$$= \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - (T^*x,x) - (x,T^*x)$$
$$= \|T^*x\|^2 + \|x\|^2 - (x,Tx) - (Tx,x)$$
$$= \|T^*x\|^2 - \|x\|^2 \leqslant \|x\|^2 - \|x\|^2 = 0,$$

即 $T^*x = x$, 即 $x \in \{x \in H \mid T^*x = x\}$. 所以

$$\{x \in H \mid Tx = x\} \subseteq \{x \in H \mid T^*x = x\}.$$

同样有

$$\{x \in H \mid T^*x = x\} \subseteq \{x \in H \mid Tx = x\}.$$

所以

$$\{x \in H \mid Tx = x\} = \{x \in H \mid T^*x = x\}.$$

8.3.18 设 $A \in \mathscr{B}(l^2 \to l^2)$, 对 $x = (\xi_i) \in \rho^2$, $Ax = (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j)$, 若 $A^*x = (\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^*\xi_j)$, 证明

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}, i,j = 1,2,\cdots$$

证 取 $e_i = (0,0,\cdots,\overset{(i)}{1},0,\cdots)(i = 1,2,\cdots)$, 则 $(Ae_i,e_j) = a_{ji}$, 所以 $a_{ij}^* = (A^*e_j,e_i) = (e_j,Ae_i) = \overline{(Ae_i,e_j)} = \overline{a_{ji}}$.

8.3.19 设 H 为复 Hilbert 空间, $A \in \mathscr{B}(H \to H)$, λ 为 A 的特征值, 问 $\bar{\lambda}$ 是否为 A^* 的特征值?

解 $\bar{\lambda}$ 未必是 A^* 的特征值, 例如, 设 (e_i) 是 H 中的标准正交完备系, 在 H 定义算子 A:

$$Ae_i = \begin{cases} \theta, & i = 1, \\ e_{i-1}, & i \geqslant 2. \end{cases}$$

即对每个 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i e_i \in H$,

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i Ae_i = \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i e_{i-1},$$

所以对每个 $y \in H$,

$$(Ax,y) = \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i \overline{(y,e_{i-1})} = \sum_{i=2}^{\infty} \xi_i \bar{\eta}_{i-1} = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_{j+1} \bar{\eta}_j = (x,A^*y).$$

所以, 对每个 $y = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_j \in H$, 有

$$A^*y = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j A^* e_j = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j e_{j+1} = \sum_{j=2}^{\infty} \eta_{j-1} e_j.$$

由以上易知, $\lambda = 0$ 为 A 的特征值(因有 $e_1 \in H$, $e_1 \neq \theta$ 使 $Ae_1 = \theta$), 但 $\bar{0} = 0$ 不是 A^* 的特征值. 事实上, 由 $A^*y = \sum_{j=2}^{\infty} \eta_{j-1} e_j = \theta$, 推出 $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \cdots = 0$, 即 $\eta = \theta$, 所以 A^* 无任何特征值.

8.3.20 设 H 是复 Hilbert 空间, J 是 H 中的有界自共轭算子, 对一切 $x \in H$, 有 $(Jx,x) \geqslant C(x,x)$(此处 $C > 0$), 在 H 中引入一个新内积 $(x,y)_J = (Jx,y)$, $x,y \in H$, 证明

① H 按 $(\cdot,\cdot)_J$ 成为 Hilbert 空间;

② 对 $A \in B(H \to H)$ 有

A 在 H_J 中自共轭 $\Leftrightarrow JA = A^*J$.

证 ① $(\cdot,\cdot)_J$ 是内积的证明较易(略去), 仅证 H_J 为 Hilbert 空间. 设 (x_n) 是 H_J 中的基本列, 即 $\|x_n - x_m\|_J \to 0$ $(n,m \to \infty)$. 注意 $\|x_n - x_m\|_J^2 \geqslant C\|x_n - x_m\|^2$, 故 (x_n) 也是 H 中的基本列, 从而有 $x \in H$, 使 $x_n \to x$. 但 $\|x_n - x\|_J^2 = (J(x_n - x),x_n - x)$, 注意 J 有界, $x_n - x \to \theta$, 所以 $\|x_n - x\|_J \to 0$, 即 H_J 为 Hilbert 空间.

② $\Rightarrow$: 对一切 $x,y \in H$, $(Ax,y)_J = (x,Ay)_J$, 即 $(JAx,y) = (Jx,Ay) = (A^*Jx,y)$. 所以有 $JA = A^*J$.

$\Leftarrow$: 因 $JA = A^*J$, 故对一切 $x,y \in H$, 有

$$(JAx,y) = (A^*Jx,y) = (Jx,Ay),$$

即

$$(Ax,y)_J = (x,Ay)_J$$

故 A 在 H_J 中自共轭.

8.3.21 复 Hilbert 空间 H 中的自共轭算子是否必有特征值?

解 复 Hilbert 空间中的自共轭算子未必都有特征值. 例如:

设 $H = L^2_{[-\pi,\pi]}$, $\|x\| = (\int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2 dt)^{1/2}$,

已知 H 为复 Hilbert 空间,对每个 $x(t)\in L^2_{[-\pi,\pi]}$,令

$$Ax(t)=tx(t)\ (t\in[-\pi,\pi]),$$

易知,A 是 H 中的自共轭算子,但对任何复数 λ,由

$$(A-\lambda I)x(t)=(t-\lambda)x(t)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$$

推出 $x(t)\overset{\text{a.e.}}{=\!=}0$,此表明任何复数 λ 都不是 A 的特征值,即 A 无任何特征值.

8.3.22 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子,$\{e_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ 是 H 的标准正交完备系,$\sum\limits_{\lambda\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2<\infty$(此种 T 称为 Hilbert-Schmidt 算子,简称 H.S. 算子). 证明 H.S. 算子必有界且

$$\|T\|\leqslant\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2\right)^{1/2}.$$

证 令 $M=\left\{\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k e_k \mid \xi_k \text{ 为复数}; e_k\in\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}; k=1,2,\cdots,n; n=1,2,\cdots\right\}$,对每个 $x\in H$,定义 $Bx=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)Te_\alpha$,则由

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}\|(x,e_\alpha)Te_\alpha\|$$
$$\leqslant\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}|(x,e_\alpha)|^2\right)^{1/2}<\infty$$

知 B 在 H 有定义且有界,

$$\|B\|\leqslant\left(\sum_{\alpha\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2\right)^{1/2}.$$

又易验证,在 M 上,$T=B$,故 $T_{|M}$ 有界. 注意,M 在 H 稠密,B 是 $T_{|M}$ 在 H 的有界延拓,由延拓的唯一性知在 H 上,也有 $T=B$,所以结论成立.

8.3.23 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的有界线性算子,若 $R(T)$ 为有限维的(即 T 为有限秩的),则 T 为 H.S. 算子.

证 设 $\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$ 是 H 的某个标准正交完备系,则有标准正交组 $\{f_1,f_2,\cdots,f_n\}\subseteq R(T)$,使

$$\|Te_\alpha\|^2=\left\|\sum_{k=1}^{n}(Te_\alpha,f_k)f_k\right\|^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|(Te_\alpha,f_k)|^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}|(T^*f_k,e_\alpha)|^2\quad(\alpha\in\Lambda).$$

所以有

$$\sum_{\alpha\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2=\sum_{\alpha\in\Lambda}\sum_{k=1}^{n}|(T^*f_k,e_\alpha)|^2$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\alpha\in\Lambda}|(T^*f_k,e_\alpha)|^2<\infty.$$

故 T 为 H.S. 算子.

8.3.24 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的 H.S. 算子,证明 T 全连续.

证 由 $\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}\|Te_\alpha\|^2<\infty$ 知有 $(e_k)\subseteq\{e_\alpha\mid\alpha\in\Lambda\}$,使当 $e_\alpha\neq e_k$ 时,$Te_\alpha=\theta$,$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|Te_k\|^2<\infty$.

对每个 $x\in H$,因 $x=\sum\limits_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)e_\alpha$,$T$ 有界,故

$$Tx=\sum_{\alpha\in\Lambda}(x,e_\alpha)Te_\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)Te_k.$$

令 $T_nx=\sum\limits_{k=1}^{n}(x,e_k)Te_k$,易知 T_n 是有界的有限秩算子,故全连续. 又

$$\|T-T_n\|=\sup_{\|x\|=1}\|(T-T_n)x\|$$
$$=\sup_{\|x\|=1}\left\|\sum_{k=n+1}^{\infty}(x,e_k)Te_k\right\|$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\sum_{k=n+1}^{\infty}\|(x,e_k)Te_k\|$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|Te_k\|^2\right)^{1/2}$$
$$\leqslant\sup_{\|x\|=1}\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|Te_k\|^2\right)^{1/2}\|x\|$$
$$\leqslant\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\|Te_k\|^2\right)^{1/2}\to0\quad(n\to\infty),$$

故 T 全连续.

8.3.25 设 A,B 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子,它们适合

$$(Ax,y)=(x,By)\quad(x,y\in H).$$

证明 A 有界.

证 $\forall y\in\{y\mid\|y\|=1\}$,易知 (x,By) 是关于 x 的连续线性泛函,又注意对一切 $y\in\{y\mid\|y\|=1\}$,

$$|(x,By)|=|(Ax,y)|\leqslant\|Ax\|.$$

由共鸣定理知有 M 使 $\sup\limits_{\|y\|=1}|(x,By)|\leqslant M$ 对一切 $y\in\{y\mid\|y\|=1\}$ 成立,从而

$$\sup_{\|y\|=1}\sup_{\|x\|=1}|(x,By)|$$
$$=\sup_{\|y\|=1}\sup_{\|x\|=1}|(Ax,y)|\leqslant M.$$

注意 $\|Ax\|=\sup\limits_{\|y\|=1}|(Ax,y)|$,所以

$$\sup_{\|x\|=1}\|Ax\|=\sup_{\|x\|=1}\sup_{\|y\|=1}|(Ax,y)|\leqslant M,$$

所以 A 有界.

8.3.26 设 (e_n) 是 Hilbert 空间 H 中标准正交系,(λ_n) 为实数列,$\lambda_n\to0\ (n\to\infty)$,令

$$Tx=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,$$

证明 T 是 H 上的自共轭全连续算子.

证 因 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|\lambda_n(x,e_n)|^2\leqslant M\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(x,e_n)|^2\leqslant M\|x\|^2<\infty$,故 T 有意义,易知 T 是 H 上的有界线性算子,又

$$(Tx,y)=(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,y)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)\overline{(y,e_n)},$$

$$(x,Ty)=(x,\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(y,e_n)e_n)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\overline{(y,e_n)}(x,e_n)=(Tx,y),$$

所以 T 自共轭.下证 T 全连续.

令 $T_nx=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,e_i)e_i(n=1,2,\cdots)$,易知 T_n 是 H 上的全连续算子(因有限秩).又

$$\|T-T_n\|^2=\sup_{\|x\|=1}\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i\|^2$$

$$\leqslant\sup_{i\geq n+1}|\lambda_i|^2\sup_{\|x\|=1}\sum_{i=n+1}^{\infty}|(x,e_i)|^2$$

$$\leqslant\sup_{i\geq n+1}|\lambda_i|^2\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以 T 全连续.

8.3.27　设 H 为复 Hilbert 空间,T 是 H 上的有界线性算子,则有

T 自共轭 $\Leftrightarrow$ 对一切 $x\in H$,(Tx,x) 为实数.

证　$\Rightarrow$:因对一切 $x\in H$,有 $(Tx,x)=(x,Tx)=\overline{(Tx,x)}$,故 (Tx,x) 为实数.

$\Leftarrow$:$\forall x,y\in H$,有

(Tx,y)

$=\frac{1}{4}\{(T(x+y),x+y)-(T(x-y),x-y)\}$

$+\frac{i}{4}\{(T(x+iy),x+iy)-(T(x-iy),x-iy)\}$

$=\frac{1}{4}\{(x+y,T(x+y))-(x-y,T(x-y))\}$

$+\frac{i}{4}\{(x+iy,T(x+iy))-(x-iy,T(x-iy))\}$

$=(y,Tx)$.

所以 T 自共轭.

8.3.28　设 H 为复 Hilbert 空间,T 是 H 上的自共轭算子,若 T 有特征值,则 T 的特征值都是实数.

证　设 λ 为 T 的特征值,即有 $x_0\in H,x_0\neq\theta$,$Tx_0=\lambda x_0$,从而

$$(Tx_0,x_0)=(\lambda x_0,x_0)=\lambda(x_0,x_0).$$

所以

$$\lambda=\frac{(Tx_0,x_0)}{(x_0,x_0)}\text{ 为实数}.$$

8.3.29　设 H 为 Hilbert 空间,T 是 H 上的全连续算子,$\lambda\neq 0$,$E_\lambda=\{x\in H\mid Tx=\lambda x\}$,证明 E_λ 是 H 的有限维子空间.

证　若 $E_\lambda=\{\theta\}$,结论显然成立.若 $E_\lambda\neq\{\theta\}$,我们证 E_λ 的单位球致密即可.

设 $x_n\in E_\lambda$,$\|x_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$,往证 (x_n) 有收敛子列.注意 $Tx_n=\lambda x_n$,T 全连续,故有 (Tx_n) 的子列 (Tx_{n_k}) 收敛,从而 $(x_{n_k})=(\frac{1}{\lambda}Tx_{n_k})$ 也收敛,所以 E_λ 的单位球致密.

注　由此题结论知,全连续算子的非零特征值 λ 对应的特征子空间必是有限维的.

8.3.30　设 H 为 Hilbert 空间,T 为 H 上的全连续算子,$\lambda\neq 0$,证明 $(T-\lambda I)$ 的值域 $\mathscr{R}(T-\lambda I)$ 是 H 的闭子空间.

证　设 $y_n=(A-\lambda I)x_n\to y_0(n\to\infty)$,即 $Ax_n-\lambda x_n\to y_0$.(i) 若 (x_n) 有有界子列,因 A 全连续,故 (Ax_n) 有子列 (Ax_{n_k}) 收敛,从而 $(x_{n_k})=\frac{1}{\lambda}(Ax_{n_k})$ 也收敛.设 $x_{n_k}\to x_0$,则 $Ax_{n_k}\to Ax_0$,所以 $Ax_{n_k}-\lambda x_{n_k}\to Ax_0-\lambda x_0=y_0$,所以 $y_0\in\mathscr{R}(A-\lambda I)$.

(ii) 若 $\|x_n\|\to\infty$,令 $E_\lambda=\{x\in H\mid Ax=\lambda x\}$,已知 E_λ 为 H 的有限维子空间,从而有 $\xi_n\in E_\lambda$,使

$$\|x_n-\xi_n\|=\inf_{y\in E_\lambda}\|x_n-y\|=\rho(x_n,E_\lambda)$$
$$(n=1,2,\cdots).$$

此处 $(x_n-\xi_n)$ 必有有界子列,否则由 $\|x_n-\xi_n\|\to\infty$ $(n\to\infty)$,可令 $\eta_n=\frac{x_n-\xi_n}{\|x_n-\xi_n\|}$,则

$$(A-\lambda I)\eta_n=\frac{(A-\lambda I)x_n}{\|x_n-\xi_n\|}\to\theta\ (n\to\infty).$$

又 $\|\eta_n\|=1$ $(n=1,2,\cdots)$,同(i)证,(η_n) 有子列 (η_{n_k}) 收敛.设 $\eta_{n_k}\to\eta_0(k\to\infty)$,从而 $(A-\lambda I)\eta_{n_k}\to A\eta_0-\lambda\eta_0=\theta$.此表明 $\eta_0\in E_\lambda$,从而

$$\rho(\eta_n,E_\lambda)\leqslant\|\eta_n-\eta_0\|\to 0\ (n\to\infty).$$

另一方面,存在 $\xi_n'\in E_\lambda$,使

$\rho(\eta_n,E_\lambda)=\|\eta_n-\xi_n'\|$

$=\|\frac{x_n-\xi_n}{\|x_n-\xi_n\|}-\xi_n'\|$

$=\frac{1}{\|x_n-\xi_n\|}\|x_n-\xi_n-\|x_n-\xi_n\|\xi_n'\|$

$=\frac{1}{\|x_n-\xi_n\|}\|x_n-(\xi_n+\|x_n-\xi_n\|\xi_n')\|$

$\geqslant\frac{1}{\|x_n-\xi_n\|}\rho(x_n,E_\lambda)=\frac{\|x_n-\xi_n\|}{\|x_n-\xi_n\|}$

$=1\not\to 0\quad(n\to\infty).$

这是矛盾,故 $(x_n-\xi_n)$ 有有界子列.再仿(i)之证,并注意 $(A-\lambda I)\xi_n=\theta$,易证得 $y_0\in\mathscr{R}(A-\lambda I)$.总之,$\mathscr{R}(A-\lambda I)$ 是闭的.

8.3.31　设 H 是复 Hilbert 空间,T 是 H 中的自共轭全连续算子,$\lambda\neq 0$,则

$$\lambda\in\sigma(T)\Leftrightarrow\lambda\text{ 是 }T\text{ 的特征值}.$$

证 $\Rightarrow$:由上题结论知,$\mathscr{R}(T-\lambda I)$ 为 H 的闭线性子空间,若 $\mathscr{R}(T-\lambda I)=H$,即 $(T-\lambda I)$ 为满映的,此时 $(T-\lambda I)$ 必不是可逆的(否则由逆算子定理导致 $\lambda\in\rho(T)$,与题设矛盾),故 λ 是 T 的特征值;若 $\mathscr{R}(T-\lambda I)\neq H$,则有 $z\in H, z\neq 0, z\perp R(T-\lambda I)$,从而对一切 $x\in H$,有

$$((T-\lambda I)x,z)=0, \text{即} (x,(T-\bar{\lambda}I)z)=0.$$

故 $Tz=\bar{\lambda}z$,故 $\bar{\lambda}$ 是 T 的特征值,从而 $\bar{\lambda}$ 为实数,从而 $\lambda=\bar{\lambda}$ 为 T 的特征值.

$\Leftarrow$:这是显然的事.

8.3.32 设 H 为复 Hilbert 空间,T 是 H 上的自共轭算子,证明 T 的不同特征值对应的特征向量相互直交.

证 设 λ_1,λ_2 是 T 的两个不同的特征值(都是实数),e_1,e_2 是对应的特征向量,则有

$$(\lambda_1e_1,e_2)=(Te_1,e_2)=(e_1,Te_2)=(e_1,\lambda_2e_2)$$

即有 $\lambda_1(e_1,e_2)=\lambda_2(e_1,e_2)$,即 $(\lambda_1-\lambda_2)(e_1,e_2)=0$.此处,因 $\lambda_1-\lambda_2\neq 0$,故 $(e_1,e_2)=0$,即

$$e_1\perp e_2.$$

8.3.33 设 H 是 Hilbert 空间,T 是 H 上的自共轭全连续算子,证明 T 最多只有可列个谱点.

证 只需证 $\sigma(T)$ 最多只有一个极限点,又只需证 $\sigma(T)$ 无非 0 的极限点.否则有一数列 (λ_n),$\lambda_n\in\sigma(T)$,$\lambda_n\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$,当 $n\neq m$ 时,$\lambda_n\neq\lambda_m$,$\lambda_n\to\lambda_0\neq 0\ (n\to\infty)$.注意到每个 λ_n 都是 T 的特征值,用 e_n 表 λ_n 对应的特征向量,不妨设 $\|e_n\|=1$,则 (e_n) 是 H 的一个标准正交系,且有 $Te_n=\lambda_ne_n\ (n=1,2,\cdots)$.由于 T 全连续,(Te_n) 应有收敛子列,另一方面,

$$\begin{aligned}
&\|Te_n-Te_m\|=\|\lambda_ne_n-\lambda_me_m\|\\
=&\|\lambda_0(e_n-e_m)-(\lambda_m-\lambda_0)e_m+(\lambda_n-\lambda_0)e_n\|\\
\geqslant&\|\lambda_0(e_n-e_m)\|-\|(\lambda_m-\lambda_0)e_m\\
&-(\lambda_n-\lambda_0)e_n\|\\
\geqslant&|\lambda_0|\,\|e_n-e_m\|-|(\lambda_m-\lambda_0)|\,\|e_m\|\\
&-|(\lambda_n-\lambda_0)|\,\|e_n\|\\
=&|\lambda_0|\,\|e_n-e_m\|-|\lambda_m-\lambda_0|-|\lambda_n-\lambda_0|\\
=&\sqrt{2}|\lambda_0|-|\lambda_m-\lambda_0|-|\lambda_n-\lambda_0|\\
\to&\sqrt{2}|\lambda_0|>0\ (n,m\to\infty).
\end{aligned}$$

这与 (Te_n) 有收敛子列相矛盾,故 $\sigma(T)$ 无非 0 的极限点,故 $\sigma(T)$ 最多为可列集.

8.3.34 设 H 为复 Hilbert 空间,T 为 H 上的自共轭全连续算子,则必有 H 中的标准正交系 (e_n) 及相应的非 0 实数列 (λ_n),使对一切 $x\in H$,有

$$Tx=\sum_{(N)}\lambda_n(x,e_n)e_n.$$

式中 $\sum\limits_{(N)}$ 表有限和或可列和,视 (e_n) 有限或可列而确定.

证 用 $\{\mu_k\}$ 表 T 的非 0 特征值的全体,则当 $\{\mu_k\}$ 无限时,必有 $\mu_k\to 0\ (k\to\infty)$.令

$$E_k=\{x\in H\mid Tx=\mu_kx\},$$

易知,E_k 是有限维的,当 $k\neq j$ 时,$E_k\perp E_j$,用 $e_1,e_2,\cdots,e_{n_1}$ 表 E_1 的标准正交基,用 $e_{n_1+1},e_{n_1+2},\cdots,e_{n_2}$ 表 E_2 的标准正交基,…令

$$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_{n_1}=\mu_1,$$
$$\lambda_{n_1+1}=\lambda_{n_1+2}=\cdots=\lambda_{n_2}=\mu_2,\cdots$$

于是得到 H 的标准正交系 (e_n) 及相应的实数列 (λ_n).用 M 表由 $e_1,e_2,\cdots,e_m$ 张成的子空间,则 M 与 $M^\perp$ 都是 T 的不变子空间,且 $H=M\oplus M^\perp$.对每个 $x\in H$,作直交分解 $x=x_m+x_m^\perp$(此处 $x_m\in M, x_m^\perp\perp M^\perp$),从而有 $Tx=Tx_m+Tx_m^\perp$,注意 $x_m=\sum\limits_{i=1}^{m}(x,e_i)e_i$,所以

$$Tx_m=\sum_{i=1}^{m}(x,e_i)Te_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x,e_i)e_i.$$

又注意 $T_{|M^\perp}$ 仍是自共轭全连续算子,且 $\|T_{|M^\perp}\|=\sup\limits_{\lambda\in\sigma(T_{|M^\perp})}|\lambda|=\sup\limits_{i\geqslant m+1}|\lambda_i|$,从而

$$\begin{aligned}
\|Tx_m^\perp\|&=\|T_{|M^\perp}x_m^\perp\|\leqslant\|T_{|M^\perp}\|\,\|x_M^\perp\|\\
&\leqslant\sup_{i\geqslant m+1}|\lambda_i|\,\|x\|\to 0\quad(m\to\infty).
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
Tx&=\lim_{m\to\infty}(Tx_m+Tx_M^\perp)\\
&=\lim_{m\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x,e_i)e_i+\lim_{m\to\infty}(T_{M^\perp}x_M^\perp)\\
&=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i(x,e_i)e_i.
\end{aligned}$$

第 9 篇　微分方程

§9.1　一阶常微分方程求解法

求解微分方程,远较求解代数方程困难.一方面是由于已经证明有些方程实际上是无法积分出来的;另一方面,至今还没有一个普遍方法可以用来判定一个方程是否可以积分.因此,迄今所知的可以完全积分的常微分方程类实际上为数甚少.根据 Kamke 的书《常微分方程手册》所收集的材料推测,可以完全积分的常微分方程类,目前已掌握的不会超过一万个.

在这种情况下,判断方程的类型,对于求解方程则相当重要.本节研究一阶常微分方经的求解法,这时最最基本的可积分方程类便是可分离变量的方程类,其它一切讨论都是设法把一个方程演化成可分离变量类.此外,技巧上要求较高,但求解方法更简捷的类型便是所谓全微分方程及积分因子方法.掌握可分离变量类和全微分方程类这两种方法,便可以讨论相当广泛的一阶常微分方程.本节针对方程的各种形式,介绍了近 20 种具体的求解方法.

9.1.1　设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\varphi(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续.试求解微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y).$$

解　分几种情况讨论.

(a) 设 $\varphi(y)\neq 0$,当 $y\in[c,d]$,又 $y(x)$ 为方程在 $[a,b]$ 上的解,则有

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x}\equiv f(x)\varphi(y(x)),x\in[a,b],$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))}\equiv f(x)\mathrm{d}x,x\in[a,b].$$

今设 $y(x_0)=y_0,(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$,则有

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x,x\in[a,b].$$

上述讨论说明,原方程任一 $[a,b]$ 上的解,必满足积分方程

$$\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x. \qquad (*)$$

今记

$$\Phi(y)=\int_{y_0}^{y}\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)},F(x)=\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x.$$

则(*)成为

$$\Phi(y)=F(x). \qquad (**)$$

现在证明,由(**)定义的隐函数 $y=y(x),y(x_0)=x_0$ 必存在,且为原方程的解.令

$$G(x,y)=\Phi(y)-F(x),$$

则 $G(x_0,y_0)=0$;又 G 对 $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$ 连续,且 $\frac{\partial G}{\partial y}=\Phi'(y)=\frac{1}{\varphi(y)}\neq 0,y\in[c,d]$,故根据隐函数定理,在 x_0 之某邻域内存在唯一的 $y=y(x)$,满足 $y(x_0)=y_0$,且连续可微.故得

$$G(x,y(x))\equiv\Phi(y(x))-F(x)\equiv 0.$$

即

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\varphi(y(x))}\equiv\int_{x_0}^{x}f(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)\varphi(y(x)).$$

根据以上讨论可得结论:原方程的满足 $y(x_0)=y_0$(其中 $(x_0,y_0)\in[a,b]\times[c,d]$)的解在 x_0 的某邻域中一定存在且唯一,又此解即函数方程(**)的隐函数.

(b) 设有 $y=y_1,\cdots,y_n$,使 $\varphi(y_j)=0,j=1,\cdots,n$.以 $y=y_j(j=1,\cdots,n)$ 代入原方程,可知 $y=y_j(j=1,\cdots,n)$ 均为方程之解.

结论:对 $a<y_1<\cdots<y_j<y_{j+1}<\cdots<y_n<b$,在每一区间 $(y_j,y_{j+1})(j=1,\cdots,n)$ 上,得到由下式解出之解

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x+C\ (C\text{ 为任意常数}).$$

除此以外,还有特别解 $y=y_1,y_2,\cdots,y_n$.

9.1.2　求解

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}\ (x\neq\pm 1).$$

解　$y\neq\pm 1$.解得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}+C_1\quad(C_1\text{ 为任意常数})$$

或

$$\arcsin y=\arcsin x+C_1.$$

最后得解

$$\begin{cases}y=\sin(\arcsin x+C_1),\\ y=\pm 1.\end{cases}$$

9.1.3 求方程$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2}$的满足下面条件的两个特解:(1)$y(0)=0$;(2)$y(0)=1$.

解 $y\neq\pm1$,则从$2\int\frac{dy}{y^2-1}=x+C_1$
得

$$\ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right|=x+C_1$$

或

$$y=\frac{1+Ce^x}{1-Ce^x}\quad(C_1,C\text{ 均为任意常数}).$$

对$y(0)=0$,得$\frac{1+C}{1-C}=0$,故$C=-1$,特解为

$$y=\frac{1-e^x}{1+e^x}.$$

$y(0)=1$之特解为$y=1$.

9.1.4 设M,P及N,Q分别在$[a,b]$及$[c,d]$上连续,求解

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0.$$

解 本题是9.1.1之另一形式,故易求解如下:设$N(y)P(x)\neq0,(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$,则得通解

$$\int\frac{M(x)}{P(x)}dx+\int\frac{Q(y)}{N(y)}dy=C.$$

又尚有特解$x=x_0$或$y=y_0$,此时应$P(x_0)=0$或$N(y_0)=0$.

9.1.5 求解

$$x(y^2-1)dx+y(x^2-1)dy=0.$$

解 注意:$y=\pm1,x=\pm1$均为方程之解,当$y\neq\pm1,x\neq\pm1$时,得通积分

$$\int\frac{xdx}{x^2-1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1$$

或

$$(x^2-1)(y^2-1)=C\ (C_1,C\text{ 均为常数}).$$

注意特解$x=\pm1$或$y=\pm1$可从通积分式中令$C=0$得出,故不必单列出来.

9.1.6 解方程

$$3e^x\mathrm{tg}y\,dx+(2-e^x)\sec^2y\,dy=0.$$

解 由

$$\frac{3e^x}{2-e^x}dx+\frac{\sec^2y\,dy}{\mathrm{tg}y}=0$$

得通积分

$$\mathrm{tg}y=C(2-e^x)^3.$$

另有特解$y=k\pi,k=0,\pm1,\cdots;x=\ln2$.可从通解式取$C=0$或$C\to\infty$解得,不用单列.

9.1.7 解方程

(1) $\frac{dy}{dx}\sin x-y\cos x=0,y(\frac{\pi}{2})=1$;

(2) $e^y(1+x^2)dy-2x(1+e^y)dx=0$.

解 (1)$y=\sin x$.

(2) 通积分为

$$1+e^y=C(1+x^2).$$

注 我们再强调一句,以上诸例的共同特点是:通过乘法或除法可以将自变量和因变量分列在等式两边;这时方程已经可以算是可积出.那些阻碍上述步骤的特殊常数应该事先列出,他们往往代表着方程的特殊(常数)解.对大量的方程而言,这些常数解常又可以从通解特定常数得到;也只有此时,特解毋需单列.注意特解有时有着很深刻的理论背景.

9.1.8 解方程$\frac{dy}{dx}=\sin(x-y)$.

解 方程已不具可分离变量形式,可令$u=x-y$,则原方程化为

$$dx-\frac{du}{1-\sin u}=0.$$

可得通解

$$x+C=\mathrm{ctg}(\frac{1}{2}u+\frac{1}{4}\pi),$$

故可得原方程之通解

$$x+C=\mathrm{ctg}(\frac{1}{2}(x-y)+\frac{1}{4}\pi).$$

9.1.9 解方程

$$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=a^2(a\text{ 为常数}).$$

解 令$u=x+y$,方程化为

$$u^2(\frac{du}{dx}-1)=a^2,$$

可得通积分

$$x+y=a\,\mathrm{tg}(C+\frac{y}{a}).$$

9.1.10 求$y+x\frac{dy}{dx}=a(1+xy)$之满足$y(\frac{1}{a})=-a$的特解.

解 令$xy+1=u$,方程化为$\frac{du}{dx}=au$,可得所求特解为$y=-\frac{1}{x}$.

9.1.11 $g(u)$为某区间上之连续函数,解方程

$$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x}).$$

解 令$u=\frac{y}{x}$,将(x,y)化到(x,u),则$y=ux$.令

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{x^2}(\frac{dy}{dx}x-y)$$

或

$$\frac{du}{dx}=(g(u)-u)/x.$$

此方程已有可分离变量形式,可知:当$g(u)\neq u$时,

有通积分

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u} = \ln x + C_1$$

或

$$x = Ce^{\int \frac{\mathrm{d}u}{g(u)-u}} (C_1, C \text{ 为任意常数}).$$

回到原变量(x, y),可得原方程通积分.

若$g(u_0) = u_0$,则$u = u_0$,或$y = u_0 x$为特解.

若$g(u) \equiv u$,方程化为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$,可得通解$y = Cx$($C$为任意常数).

上述三类解最后需通过任意常数C的取值,决定是否有必要单列.

注 本题方程又称之为齐次方程,定可化为可分离变量方程的重要类别.它的一般形式应为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), f(tx, ty) = f(x, y), \forall t \in \mathbf{R}.$$

(取$t = \frac{1}{x}$,令$g(\frac{y}{x}) = f(1, \frac{y}{x})$,即得本题形式)

9.1.12 解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg}\frac{y}{x}$.

解 令$\frac{y}{x} = u$,化得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\operatorname{tg}u} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \ (\operatorname{tg}u \neq 0).$$

解成$\sin u = Cx$,或$\sin\frac{y}{x} = Cx$.当$\operatorname{tg}u = 0$,即$\sin u = 0$,故此款已含于$C = 0$之取值情形,最后所得通解为$\sin\frac{y}{x} = Cx$.

9.1.13 解 $x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2\sqrt{xy} = y$.

解 写成 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} + 2\sqrt{\frac{y}{x}}\ (x \neq 0)$.令$\frac{y}{x} = u$,可得通解$u = (\ln|x| + C)^2$及特解$u = 0$.最后得

$$y = (\ln|x| + C)^2 x \quad \text{及 } y = 0.$$

9.1.14 求解方程($a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$均为常数)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2}.$$

解 (a) $c_1 = c_2 = 0$,方程形为$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(\frac{y}{x})$;

(b) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$,即有$k$,使$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$,则方程有形

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{k(a_2 x + b_2 y) + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2} = f(a_2 x + b_2 y).$$

令$u = a_2 x + b_2 y$,得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = a_2 + b_2 f(u).$$

此时得可分离变量型;

(c) $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0, c_1 \cdot c_2 \neq 0$.则有下方程之非零解$(\alpha, \beta)$

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0. \end{cases}$$

作代换$X = x - \alpha, Y = y - \beta$,方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y} = g(\frac{Y}{X}).$$

已具有齐次方程型.

注 从本题讨论可知,下面类型方程均可化为可分离变量型方程:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(\frac{a_1 x + b_1 y + c_1}{a_2 x + b_2 y + c_2});$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$$

($a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, a, b$均为常数).

9.1.15 求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

解 从$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y + x - 3 = 0 \end{cases}$解得$\alpha = 1, \beta = 2$,故应作代换$\begin{cases} x = X + 1, \\ y = Y + 2, \end{cases}$方程就此化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

令$u = Y/X$,得

$$X^2(u^2 + 2u - 1) = C,$$

或

$$Y^2 + 2XY - X^2 = C,$$

或

$$(y-2)^2 + 2(x-1)(y-2) - (x-1)^2 = C,$$

即

$$y^2 + 2xy - x^2 - 6y - 2x = C.$$

注意,$u^2 + 2u - 1 = 0$对应的$Y^2 + 2XY - X^2 = 0$也为解,但可从$C = 0$得出.

9.1.16 设$P(x), Q(x)$均为连续函数,求解方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x).$$

解 先设$Q(x) \equiv 0$,则方程为变量可分离,且得通解

$$y = Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x} \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

对于$Q(x) \neq 0$的情况,用常数变易法如下:

今设原方程之解具有形式

$$y(x) = C(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x},$$

其中$C(x)$待定,则一方面

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}+C(x)e^{\int P(x)dx}P(x),$$

另一方面，原方程右端可写成

$$P(x)C(x)e^{\int P(x)dx}+Q(x),$$

则令上两式相等，得

$$\frac{dC(x)}{dx}e^{\int P(x)dx}=Q(x).$$

解出 $C(x)$ 得

$$C(x)=\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C.$$

将 $C(x)$ 代入 $y(x)$ 之待定表达式，最后得原方程所求通解：

$$y=e^{\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx+C\right)$$

(C 为任意常数).

注 本题方程称为线性方程($Q\equiv0$ 时，称齐次线性方程). 也可称为可化为分离变量方程的重要类型之一. 其中用到的常数变易法尚有更普遍的意义，后文将谈及.

9.1.17 求解方程

$$(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}\ (n\text{ 为常数}).$$

解 方程具有线性形式，其中 $P(x)=\frac{n}{x+1}$, $Q(x)=e^x(x+1)^n\ (x\neq-1)$. 故用上题表达式，可得

$$y(x)=(x+1)^n(e^x+C)\ (C\text{ 为任意常数}).$$

9.1.18 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}.$$

解 写成 $\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y$，此为 x 关于 y 之线性方程，通解为

$$x(y)=y^2(C-\ln|y|).$$

9.1.19 求解 $\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n$.

解 不妨设 $n\neq0$ (否则为线性方程), $n\neq1$ (否则为齐次线性方程). 作代换

$$z=y^{1-n},$$

而将变量 (x,y) 变换成 (x,z)，则有

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}.$$

方程因而化为

$$y^n(1-n)^{-1}\frac{dz}{dx}=P(x)y+Q(x)y^n,$$

或

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)P(x)z+(1-n)Q(x).$$

由此不难写出通解 (注意，$y=0$ 亦为特解).

注 本题方程称为 Bernoulli 方程.

9.1.20 解方程 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$.

解 令 $z=y^{-1}$，得 $\frac{dz}{dx}=-\frac{6}{x}z+x$，解得

$$z=\frac{C}{x^6}+\frac{x^2}{8}\ (C\text{ 为任意常数}).$$

最后得通解

$$\frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=C\ (y\neq0).$$

9.1.21 解方程

$$2x^2\frac{dy}{dx}=x^2+y^2.$$

解 齐次方程，通解为

$$2x=(x-y)\ln Cx.$$

注 以上诸例已经不具有变量可分离形式，因此求解此等方程的合乎逻辑的想法自然是将它们化为变量可分离类型，于是就出现了寻求代换的技巧问题. 前人为我们总结了三种很有用的类型，即齐次方程、线性方程和以这两者为其特例的 Bernoulli 方程. 但是这三类方程也不是万能的. 遇到三类以外的方程时，技巧问题依然存在，请看以下各例.

9.1.22 $(x^2y^2-1)dy+2xy^3dx=0$.

解 本题不具有齐次型形式，也不是线性方程或 Bernoulli 方程，为此试用代换 $y=z^\alpha$，α 待定，则得

$$dy=\alpha z^{\alpha-1}dz,$$

代入原方程得

$$\alpha(x^2z^{3\alpha-1}-z^{\alpha-1})dz+2xz^{3\alpha}dx=0.$$

此时项 $x^2z^{3\alpha-1}$, $z^{\alpha-1}$ 及 $xz^{3\alpha}$ 分别有次数为 $2+3\alpha-1$, $\alpha-1$ 及 $1+3\alpha$. 故当令 $3\alpha+1=\alpha-1$，即令 $\alpha=-1$ 时，将得到齐次方程，故知应作代换 $y=\frac{1}{z}$，原方程就此化为

$$(z^2-x^2)dz+2zxdx=0.$$

令 $z=xu$，得可分离变量方程

$$u(u^2+1)dx+x(u^2-1)du=0.$$

解得 $x(u^2+1)/u=C$. 令 $u=1/xy$ 代入还原，得

$$1+x^2y^2=Cy.$$

注意求解中所得特解 $y=0$，可令 $C\to+\infty$ 得到.

9.1.23 解方程

(1) $2x(x-y^2)\frac{dy}{dx}+y^3=0$;

(2) $4y^6+x^3=6xy^5\frac{dy}{dx}$.

解 (1) 用 $y=z^\alpha$ 试探，可知 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，可将方程齐次化，即 $y=z^{\frac{1}{2}}$ 为所求代换. 最后可得通解

$$y^2=x\ln Cy^2.$$

(2) $\alpha=\frac{1}{2}$，即用 $y=z^{\frac{1}{2}}$ 可将方程齐次化，最后

可得通解

$$Cx^4 = y^6 + x^3.$$

9.1.24　解下列方程

(1) $y(1+\sqrt{1+x^2y^4})dx + 2xdy = 0$;

(2) $(x+y^3)dx + 3(y^3-x)y^2dy = 0$.

解　(1) 代换为 $z = y^{-\frac{1}{2}}$,通解为

$x^2y^4 + 1 = (Cx^2y^2 - 1)^2$.

(2) 代换为 $y = z^{\frac{1}{3}}$,通解为

$$2\mathrm{arctg}(\frac{y^3}{x}) = \ln(x^2+y^6) + C.$$

9.1.25　设已知线性微分方程 $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ 之积分曲线族为 C_λ. 令 M_λ 是族 C_λ 与直线 $x = r$(r 为任意常数)之交点族,证明:过 M_λ 所作的 C_λ 的切线族共点.

证明　曲线族 C_λ 的方程即方程的通积分,其中 λ 对应于任意常数,曲线 C_λ 在其上某点 (x_λ, y_λ) 处的斜率,根据几何意义,恰等于

$$p(x_\lambda)y_\lambda + q(x_\lambda).$$

特别,在直线 $x = r$ 上点 (r, y_λ) 处的斜率应为

$$p(r)y_\lambda + q(r).$$

今用 (X, Y) 表示流动坐标,则 C_λ 在 (r, y_λ) 处的切线方程应为

$$Y - y_\lambda = (X - r)(p(r)y_\lambda + q(r))$$

或写成

$$Y - q(r)(X-r) = q_\lambda(1 + p(r)(X-r)).$$

今任取两个 $y_{\lambda_1}, y_{\lambda_2}$,以求上两直线之交点,从联立方程

$$\begin{cases} Y - q(r)(X-r) = y_{\lambda_1}(1 + p(r)(X-r)) \\ Y - q(r)(X-r) = y_{\lambda_2}(1 + p(r)(X-r)) \end{cases}$$

解得

$$X = r - \frac{1}{p(r)},\ Y = \frac{q(r)}{p(r)}\ (p(r) \neq 0).$$

由此可知,交点与 λ 之选择无关.

9.1.26　解方程 $\frac{dy}{dx} = y/(2y\ln y + y - x)$.

解　线性方程,通解为

$$x = \frac{C}{y} + y\ln y.$$

9.1.27　解方程　$xy' + y = y^2\ln x$.

解　方程 $xy' + y = 0$ 有通解 $y = \frac{C}{x}$. 取 $y = \frac{C(x)}{x}$ 为原方程通解,代入原方程得

$$\frac{dC(x)}{dx} = C^2(x)\frac{\ln x}{x^2},$$

解之得　$C(x) = x/(1 + Cx + \ln x)$,故原方程通解为

$$y = (1 + Cx + \ln x)^{-1}.$$

注　本解法说明,对 Bernoulli 方程亦可施行常数变异法.

9.1.28　解方程

$$x\int_0^x y(t)dt = (x+1)\int_0^x ty(t)dt\ (x > 0).$$

解　本题可视为积分方程.两边求导,得

$$\int_0^x y(t)dt = \int_0^x ty(x)dt + x^2y(x).$$

再对 x 求导,得线性齐次方程

$$x^2\frac{dy}{dx} + (3x-1)y = 0.$$

最后可得通解

$$y = Cx^{-3}e^{-\frac{1}{x}}.$$

9.1.29　解下面方程

(1) $(x^3 + e^y)\frac{dy}{dx} = 3x^2$;

(2) $2\sin x\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^3\sin^2 x$;

(3) $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

解　(1) 通解为 $x^3e^{-y} = C + y$.

(2) 通解为 $y^2(C - x)\sin x = 1$.

(3) 通解为 $y^4 + 2x^2y^2 + 2y^2 = C$.

9.1.30　解方程

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}y + e^x/\cos y.$$

解　作代换 $z = \sin y$,可将方程化为

$$\frac{dz}{dx} = z + e^x,$$

为线性方程,故得通解

$$\sin y = (x + C)e^x.$$

9.1.31　解方程 $\frac{dy}{dx} = y(e^x + \ln y)$.

解　令 $z = \ln y$,方程化为

$$\frac{dz}{dx} = z + e^x,$$

故易得通解

$$\ln y = (x + C)e^x.$$

9.1.32　解方程

(1) $y\frac{dy}{dx} + 1 = (x-1)e^{-\frac{1}{2}y^2}$;

(2) $\cos y\frac{dy}{dx} + \sin y = x + 1$;

(3) $\frac{dy}{dx} + x\sin 2y = 2xe^{-x^2}\cos^2 y$.

解　(1) 令 $z = \exp(\frac{1}{2}y^2)$,方程化为 $\frac{dz}{dx} + z = x - 1$,故通解为

$$x - 2 + Ce^{-x} = \exp(\frac{1}{2}y^2).$$

(2) 令 $z = \sin y$，可得通解

$$(\sin y - x)e^{x} = C.$$

(3) 令 $z = \operatorname{tg} y$，方程化为

$$\frac{dz}{dx} + 2xz = 2xe^{-x^2},$$

最后可得通解

$$\operatorname{tg} y \cdot e^{x^2} = C + x^2.$$

9.1.33 解下列方程

(1) $\int_a^x ty(t)dt = x^2 + y(x)$（$a$ 为常数）；

(2) $\int_0^1 y(xs)ds = ny(x)$.

解 (1) 求导可得

$$\frac{dy}{dx} = xy - 2x,$$

通解为

$$y = e^{\frac{x^2}{2}}(C + 2e^{-\frac{x^2}{2}})$$

或 $$y = Ce^{\frac{1}{2}x^2} + 2.$$

注意原方程满足条件 $y(a) = -a^2$，由此解得常数 $C = -(2 + a^2)e^{-\frac{1}{2}a^2}$，故最后得解为

$$y(x) = 2 - (2 + a^2)e^{\frac{1}{2}(x^2 - a^2)}.$$

(2) 令 $\tau = xs$，处理方程中的积分，则方程可改写为

$$\frac{1}{x}\int_0^x y(\tau)d\tau = ny(x).$$

求导之，得 $\frac{dy}{dx} = \frac{1-n}{nx}y$，故最后可得通解

$$y = Cx^{\frac{1-n}{n}}.$$

9.1.34 求解微分方程

$$\frac{dy}{dx} = a(x) + b(x)y + c(x)y^2.$$

解 本题所列方程即著名的 Riccati 方程，已经证明，一般情况下，此方程不可积出. 因此本题无解.

但可以证明，已知其一个特解 $y^*(x)$，则可将之积出. 事实上，令 $y = y^* + z$，代入方程得

$$\frac{dz}{dx} = (2c(x)y^* + b(x))z + c(x)z^2.$$

此为 Bernoulli 方程，可给出通解.

9.1.35 解方程

$$\frac{dy}{dx} = e^x + e^{2x} - 2e^x y + y^2.$$

解 观察得一特解 $y = y^*(x) = e^x$，则令 $y = e^x + z$，化方程为 $\frac{dz}{dx} = z^2$，故 $z = (C - x)^{-1}$，最后得原方程通解

$$y = e^x + \frac{1}{C - x}.$$

9.1.36 解下列方程

(1) $e^{-x}\frac{dy}{dx} = 1 - e^{2x} + 2e^x y - y^2$；

(2) $x^2\frac{dy}{dx} = 1 + xy + x^2y^2$.

解 (1) 观察得特解 $y^*(x) = e^x$，故最后得通解为

$$y = e^x + \frac{1}{C + e^x}.$$

(2) 观察得特解 $y^*(x) = -\frac{1}{x}$，故最后得通解为

$$y = -\frac{1}{x} + \frac{1}{(C - \ln x)x}.$$

注 以上各例的求解，极大程度依赖于寻求代换. 既然出现了像 Riccati 方程那样的不可积类型，寻求代换的技巧就无法规可言了. 一般说来，解题全凭经验（尤其是遇到 9.1.36 题那样需要观察特解的情况）！但是题 9.1.22 中的代换 $y = z^a$ 却很有用，宜于掌握之.

注意 9.1.28 题与 9.1.33 题已不是微分方程，而是积分方程，常用的办法是求寻. 当然，求导法也不是万能的.

9.1.37 求解下列方程

(1) $xdx + ydy = 0$；

(2) $(x^3 + y)dx + (x - y)dy = 0$；

(3) $(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0$.

解 (1) 方程左端恰是函数 $\frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ 的全微分，即方程等价于 $d[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)] = 0$，从而立得通积分

$$x^2 + y^2 = C.$$

(2) 仍用(1) 的求解思路，应求一函数 $V(x, y)$，使其全微分恰成为方程之左端. 这时，立即得出通积分 $V(x, y) = C$.

本题求 V 较(1) 困难. 将方程左端分项，写成

$$x^3dx + (ydx + xdy) - ydy = 0,$$

则可写成

$$d(\frac{x^4}{4}) + d(xy) - d(\frac{y^2}{2}) = 0.$$

得通积分

$$\frac{x^4}{4} + xy - \frac{y^2}{2} = C.$$

(3) 同上题，将方程写成

$$3x^2dx + 6(xy^2dx + x^2ydy) + 4y^3dy = 0$$

或

$$d(x^3) + d(y^4) + 6d(\frac{x^2y^2}{2}) = 0.$$

最后得通积分

$$x^3+3x^2y^2+y^4=C.$$

注 本题所列三个方程便是全微分方程，掌握本法，求解简捷，困难是技巧上的要求较高. 注意，并不是每一个微分方程都是全微分方程.

9.1.38 微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$$

为一全微分方程（即左端可写成某可微函数之全微分）的充分必要条件是

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\equiv\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

证明 本题要求 M 及 N 为连续可微.

必要性. 设有连续可微函数 $U(x,y)$，使

$$\mathrm{d}U=M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y.$$

则有

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y),\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y).$$

从而

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

必要性得证.

充分性. 为此要求一函数 U，使 $\frac{\partial U}{\partial x}=M$ 及 $\frac{\partial U}{\partial y}=N$. 令

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi(y),$$

则

$$N(x,y)=\frac{\partial U(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x+\varphi'(y)$$

或依题中条件

$$N(x,y)=\varphi'(y)+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N}{\partial x}\mathrm{d}x$$

或

$$N(x,y)=\varphi'(y)+N(x,y)\Big|_{x=x_0}^{x=x}$$

即

$$N(x,y)=\varphi'(y)+N(x,y)-N(x_0,y)$$

最后得

$$\varphi'(y)=N(x_0,y),\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y+C.$$

故所求函数 U 为

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)\mathrm{d}y+C.$$

验证可知，U 合乎全微分所要求的性质.

9.1.39 求解

$$xy\mathrm{d}x+\left(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=0.$$

解 令 $M=xy,N=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{y}$，则有

$$\frac{\partial M}{\partial y}=x=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

为全微分方程，用 9.1.38 得到的公式，取 $x_0=0,y_0=1$，得

$$U=\int_0^x xy\mathrm{d}x+\int_1^y\left(\frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|.$$

故通积分为

$$\frac{1}{2}x^2y+\ln|y|=C.$$

注 本题也可从分拆各项求解：

$$\left(xy\mathrm{d}x+\frac{x^2}{2}\mathrm{d}y\right)+\frac{1}{y}\mathrm{d}y=0,$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{x^2y}{2}\right)+\mathrm{d}(\ln|y|)=0.$$

9.1.40 求解

$$\left(\cos x+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y=0.$$

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=-\frac{1}{y^2}=\frac{\partial N}{\partial x}.$

为全微分方程，求出 $U(x,y)=\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}$.

通积分为

$$\sin x+\ln|y|+\frac{x}{y}=C.$$

9.1.41 求解

$$(\sin xy+xy\cos xy)\mathrm{d}x+x^2\cos xy\mathrm{d}y=0.$$

解 $\frac{\partial M}{\partial y}=2x\cos xy-x^2y\sin xy=\frac{\partial N}{\partial x}$，为全微分方程.

$$U(x,y)=\int M\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

$$=\int(\sin xy+xy\cos xy)\mathrm{d}x+\varphi(y)$$

$$=-\frac{1}{y}\cos xy+\left(x\sin xy+\frac{1}{y}\cos xy\right)+\varphi(y)$$

$$=x\sin xy+\varphi(y)$$

（括号中的项来自分部积分），由此又有

$$\varphi'(y)+x^2\cos xy=\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)=x^2\cos xy.$$

故得 $\varphi'(y)=0,\varphi(y)=C$（任意常数）. 最后得通积分为

$$x\sin xy=C.$$

注 本题不用 U 的公式求解，得到一样结果.

9.1.42 解下列全微分方程

(1) $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}x$

$$+(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2})dy=0;$$

(2) $(\frac{1}{y}\sin 2x + x)dx + (y - \frac{1}{y^2}\sin^2 x)dy = 0$;

(3) $(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} + 2xy - \frac{y}{x})dx$

$+ (\sqrt{1+x^2} + x^2 - \ln x)dy = 0.$

解 (1) 通积分

$$\sqrt{x^2+y^2} + \ln|xy| + x/y = C.$$

(2) 通积分

$$\frac{1}{y}\sin^2 x + \frac{1}{2}(x^2+y^2) = C.$$

(3) 通积分

$$y\sqrt{1+x^2} + x^2y - y\ln x = C.$$

9.1.43 解下列全微分方程

(1) $y(x^2+y^2+a^2)dy + x(x^2+y^2-a^2)dx = 0$ (a 为常数);

(2) $\frac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx + (\frac{x}{\cos^2 xy} + \sin y)dy = 0$;

(3) $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{xdy-ydx}{x^2} = 0.$

解 (1) $(x^2+y^2)^2 + 2a^2(y^2-x^2) = C.$

(2) $\mathrm{tg}xy - \cos x - \cos y = C.$

(3) $(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{y}{x} = C.$

注 全微分方程是一种非常广泛的方程类型.此法能很快地写出通积分(此时可认为方程已经解出).在上面所给诸例中,还包含了完整的求解过程,但如果解题者能掌握大量的全微分公式,则有时求解几乎只是举手之劳.

9.1.44 解方程

$$(x+y^2)dx - 2xydy = 0.$$

解 $M(x,y) = x+y^2, N(x,y) = -2xy$,今 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = -2y, \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$,因而方程不是全微分类型.这时试用下法求解:

将方程乘以 x^{-2},得

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx - \frac{2y}{x}dy = 0.$$

左端中 $\overline{M}(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{y^2}{x^2}$,右端 $\overline{N}(x,y) = -\frac{2y}{x}$.今

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{2y}{x^2} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x},$$

即新的方程已为全微分型,而且很快得到通积分

$$U = \ln|x| - \frac{y^2}{x} = C.$$

注意原方程可以写成

$$x^2 dU = 0,$$

故 $U = C$ 仍为原方程的通积分.

注 上述解法中的函数 $\mu(x,y) = x^{-2}$,称为积分因子,对于非全微分方程的求解,寻求积分因子就成为极端重要的方法.

9.1.45 解方程

(1) $2xy\ln y dx + (x^2 + y^2\sqrt{1+y^2})dy = 0$;

(2) $(3x+2y+y^2)dx + (x+4xy+5y^2)dy = 0.$

解 (1) 有积分因子 $\mu(x,y) = \frac{1}{y}$.原方程乘以 $\frac{1}{y}$ 后,可得

$$0 = 2x\ln y dx + \frac{x^2+y^2\sqrt{1+y^2}}{y}dy$$
$$= d(x^2\ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)^{\frac{3}{2}}).$$

故通积分是

$$x^2\ln y + \frac{1}{3}(1+y^2)^{3/2} = C.$$

(2) $\mu(x,y) = x+y^2$.原方程乘以 $\mu(x,y)$ 后,得

$$0 = (3x+2y+y^2)(x+y^2)dx$$
$$+ (x+4xy+5y^2)(x+y^2)dy$$
$$= d[(x+y)(x+y^2)^2].$$

故得通积分

$$(x+y)(x+y^2)^2 = C.$$

注 本题说明了寻求积分因子的难度.积分因子理论一方面还有其更深刻的理论背景,另一方面,Riccati 方程之例,说明期望一个普遍的寻求积分因子的方法是不切实际的.人们对积分因子的要求只可能是寻找形形式式的特殊形式.

9.1.46 试给出具有下面特殊性质的积分因子的条件:

(1) $\mu(x,y)$ 仅为 x 的函数;

(2) $\mu(x,y)$ 仅为 y 的函数;

(3) $\mu(x,y) = \mu(\omega(x,y))$.

解 方程为

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

$\mu(x,y)$ 为积分因子,因此 $\mu(x,y)$ 必须满足等式

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(\mu N),$$

或写成

$$\frac{1}{\mu}(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}.$$

上式右端由原方程确定,故寻求积分因子相当于求解一个偏微分方程.

(1) 此时$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$,故得到求 $\mu(x)$ 的常微分方程

$$\frac{d\mu}{\mu}=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/Ndx.$$

此时自然要求$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/N$ 为一仅含 x 之函数,记为 $\psi(x)$. 最后得积分因子为

$$\mu(x)=e^{\int\psi(x)dx}.$$

(2) 此时$\frac{\partial\mu}{\partial x}=0$,$\mu$ 的方程为

$$\frac{d\mu}{\mu}=(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})/Mdy$$

即应要求$(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y})/M$ 为仅含 y 之函数, 记为 $\varphi(y)$. 积分因子为

$$\mu(y)=e^{\int\varphi(y)dy}.$$

(3)$\mu(x,y)=\mu(\omega(x,y))$,$\omega$ 为 x,y 之函数,故有

$$N\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{d\mu}{d\omega}\frac{\partial\omega}{\partial y}$$
$$=(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})\mu(\omega(x,y)).$$

或写成

$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}d\omega.$$

视 ω 为μ 的自变量,此时应要求右端的分式

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/(N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y})$$

为一函数 $\omega(x,y)$ 之复合函数,记为 $\Phi(\omega(x,y))$. 现在从

$$\frac{d\mu}{\mu}=\Phi(\omega)d\omega$$

可得

$$\mu=e^{\int\Phi(\omega)d\omega}\equiv f(\omega)=f(\omega(x,y)).$$

注 本款用来寻求具有下列形式的积分因子.

(1) $\mu(x,y)$ 为 xy 之函数$\mu(xy)$,此时要求

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/(Ny-Mx)=\Phi(xy).$$

(2) $\mu(x,y)$ 为 $x+y$ 之函数$\mu(x+y)$,此时要求

$$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/(N-M)=\Phi(x+y).$$

读者不妨用本法求解 9.1.45 题.

9.1.47 求线性方程的积分因子.

解 方程为

$$(p(x)y+q(x))dx-dy=0.$$

令$(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})/N=-p(x)$,故有仅含 x 之积分因子. 易得

$$\mu(x)=e^{-\int p(x)dx}.$$

9.1.48 试求齐次方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 之积分因子.

解 $\mu(x,y)=\frac{1}{Mx+Ny}$.

9.1.49 试求 Bernoulli 方程之积分因子.

解 方程为$(p(x)y+q(x)y^n)dx-dy=0$. 积分因子为

$$\mu(x,y)=y^{-n}\cdot e^{(1-n)\int p(x)dx}.$$

9.1.50 求解$(py-qx)dx-(px+qy)dy=0$,其中 p,q 为常数.

解 此为齐次方程,依 9.1.48 题,有积分因子

$$\mu(x,y)=\frac{1}{(py-qx)x-(px+qy)y}$$
$$=-\frac{1}{q(x^2+y^2)},$$

故从

$$-\frac{py-qx}{q(x^2+y^2)}dx+\frac{px+qy}{q(x^2+y^2)}dy=0$$

可得通积分

$$\sqrt{x^2+y^2}=Ce^{\frac{p}{q}\arctan\frac{y}{x}}.$$

9.1.51 证明:设 μ_0 为 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ 之积分因子,且得通积分 $U_0=C$. 则对任一单元可微函数 $\Phi(U)$,函数

$$\mu(x,y)=\mu_0(x,y)\Phi(U_0)$$

也是积分因子.

证明 依题设,应有

$$0=\mu_0(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)$$
$$=dU_0(x,y).$$

今

$$\mu(x,y)(M(x,y)dx+N(x,y)dy)$$
$$=\mu_0(x,y)\Phi(U_0)(Mdx+Ndy)$$
$$=\Phi(U_0)dU_0$$
$$=d(\int\Phi(U_0)dU_0),$$

故可得通积分

$$\Phi(x,y)=C,$$

其中 $\Phi(x,y)=\int\Phi(U_0)dU_0\mid_{U_0=U_0(x,y)}$

注 本题证明的积分因子性质提供了一个被认为较具普遍性的积分因子方法,试将方程写成

$$(M_1dx+N_1dy)+(M_2dx+N_2dy)=0$$

(或更多项),已知各括号内已求得积分因子

$$\mu_1(x,y)(M_1dx+N_1dy)=dU_1(x,y),$$
$$\mu_2(x,y)(M_2dx+N_2dy)=dU_2(x,y).$$

根据本题结论,两个括号还各有更一般的积分因子

$$\mu(x,y)=\mu_1\Phi_1(U_1)\text{ 及 }\rho(x,y)=\mu_2\Phi_2(U_2),$$

其中Φ_1及Φ_2是任意可微单元函数.现在设法寻求适当的Φ_1及Φ_2,使成立等式

$$\mu_1\Phi_1(U_1)=\mu(x,y)=\rho(x,y)=\mu_2\Phi_2(U_2),$$

则上式代表的函数即为原始方程的积分因子.

9.1.52　求解方程

$$(\frac{y}{x}+3x^2)dx+(1+\frac{x^3}{y})dy=0.$$

解　此方程非全微分型.将之写成

$$(\frac{y}{x}dx+dy)+(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy)=0.$$

第一括号有积分因子$\mu_1=x$,且

$$x(\frac{y}{x}dx+dy)=d(U_1),U_1=xy;$$

第二括号有积分因子$\mu_2=y$,且

$$y(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy)=d(U_2),U_2=x^3y.$$

故原方程积分因子应具形式

$$\mu(x,y)=x\Phi_1(xy)=y\Phi_2(x^3y),$$

其中Φ_1,Φ_2待选.今选(尚有别的选法)

$$\Phi_1(\mu)=\mu^2,\Phi_2(\mu)=\mu,$$

则上式成立:

$$\mu(x,y)=x(xy)^2=y(x^3y)=x^3y^2.$$

故原方程有积分因子x^3y^2.事实上,

$$0=x^3y^2(\frac{y}{x}dx+dy)+x^3y^2(3x^2dx+\frac{x^3}{y}dy)$$
$$=d(\frac{1}{3}x^3y^3)+d(\frac{1}{2}x^6y^2),$$

通积分为

$$2x^3y^3+3x^6y^2=C.$$

9.1.53　求解$(x-y^2)dx+2xydy=0$.

解　仍为非全微分型.写成

$$xdx+(-y^2dx+2xydy)=0,$$

则有$\mu_1(x,y)=1,U_1=\frac{1}{2}x^2;\mu_2=\frac{1}{x^2},U_2=\frac{y^2}{x}$.今选$\Phi_1$及$\Phi_2$使$\mu_1\Phi_1(U_1)=\mu_2\Phi_2(U_2)$,或可选

$$\Phi_1(\frac{1}{2}x^2)=\frac{1}{x^2}\Phi_2(\frac{y^2}{x}).$$

$\Phi_1(U)=\frac{1}{2}U^{-1},\Phi_2(U)=1$,则得

$$\mu(x,y)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}=x^{-2}.$$

今有

$$0=x^{-2}(xdx-y^2dx+2xydy)$$
$$=d(\ln|x|)+d(\frac{y^2}{x}),$$

通积分为

$$\ln|x|+\frac{y^2}{x}=C.$$

9.1.54　解下列方程

(1) $(x^2\ln x-2xy^3)dx+3x^2y^2dy=0$;

(2) $(2xy^2-3y^3)dx+(7-3xy^2)dy=0$.

解　(1) $\mu(x,y)=\mu(x)$,通积分为

$$y^3+x^3(\ln x-1)=Cx^2\quad(\mu=x^{-4}).$$

(2) $\mu(x,y)=\mu(y)$,通积分为

$$x^2-7/y-3xy=C\quad(\mu=y^{-2}).$$

9.1.55　解方程

(1) $(3y^2-x)dx+(2y^3-6xy)dy=0$;

(2) $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0$.

解　(1) $\mu(x,y)=\mu(\omega),\omega=x+y^2$,通积分为

$$(x+y)^2=C(x-y^2)\ (\mu=(x+y^2)^{-3}).$$

(2) $\mu(x,y)=\mu(\omega),\omega=y^2-x^2$,通积分为

$$1+y^2-x^2=Cx\quad(\mu=(y^2-x^2+1)^2).$$

注　从理论上讲,寻求积分因子即相当于求解.因此,上面12例也可以视为求解一阶显式方程的总结.现在我们可以用下面这张表格来描绘解题思路.

变量可分离类→可化为变量分离类(线性类,齐次类,Bernoulli类,寻找特解或其它)→全微分方程→积分因子法.

再强调一次,确实存在使以上各法失效的方程类型.

9.1.56　求解$x=e^{y'}-y'\quad(y'=\frac{dy}{dx})$.

解　令$y'=t$,则$x=e^t-t$.

今因

$$dy=y'dx,$$

故得

$$dy=t(e^t-1)dt.$$

从而

$$y=\int t(e^t-1)dt+C$$
$$=(t-1)e^t-\frac{t^2}{2}+C.$$

最后解得通解的参数形式:

$$\begin{cases}x=e^t-t,\\ y=(t-1)e^t-\frac{t^2}{2}+C.\end{cases}$$

注　本题及以下诸题均讨论所谓隐式微分方程,其特征是方程中的一阶导数不能或不宜解出,这时所用的方法是引进参数,然后用$dy=y'dx$导出通解的参数形式.

9.1.57　解方程$x=y'/(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}$.

解　令$y'=\mathrm{tg}t$,则$x=\sin t$.今从

$$dy=y'dx=\mathrm{tg}t\cos tdt=\sin tdt$$

得出

$$y=-\cos t+C.$$

故得通解

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -\cos t + C \end{cases}$$

或

$$x^2 + (y - C)^2 = 1.$$

注 上题及本题方程均有形式 $x = F(y')$，故参数化的方式是 $y' = t$.

9.1.58 解方程 $x^3 + (y')^3 - 3xy' = 0$.

解 令 $y' = tx$，则从 $x^3 + t^3x^3 - 3x^2t = 0$ 得

$$x = \frac{3t}{1+t^3}, y' = \frac{3t^2}{1+t^3}.$$

故

$$dy = y'dx = \frac{9(1-2t^3)t^2}{(1+t^3)^3}dt,$$

或

$$y = \frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C.$$

通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{3t}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2}\dfrac{1+4t^3}{(1+t^3)^2} + C. \end{cases}$$

9.1.59 解方程

$$y^2(y'-1) = (2-y')^2.$$

解 令 $2 - y' = yt$，则代入方程可得

$$y' = 1 + t^2, y = \frac{1}{t} - t.$$

今从

$$dy = y'dx \text{ 或 } dx = dy/y'$$

得出

$$dx = \frac{d(\frac{1}{t} - t)}{1+t^2} = -\frac{1}{t^2}dt.$$

故有

$$x = \frac{1}{t} + C.$$

通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + C, \\ y = \dfrac{1}{t} - t \end{cases}$$

或

$$y = x - C - \frac{1}{x-C}.$$

注 上题及本题中方程形式为 $F(x,y') = 0$ 或 $F(y,y') = 0$. 本质上仍以 $y' = t$ 为参数化方式.

9.1.60 解方程 $y = (y')^2 - xy' + \frac{x^2}{2}$.

解 令 $y' = p$，则 $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$.

从 $dy = pdx$ 可知

$$(2p - x)dp + (-p + x)dx = pdx$$

或

$$(2p - x)(dp - dx) = 0.$$

第二括号得出 $p = x + C$，代入 $y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}$，得通解

$$y = (x+C)^2 - x(x+C) + \frac{x^2}{2}$$
$$= \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

从第一括号得出 $p = \frac{x}{2}$，代入 y 的表达式，得

$$y = \frac{x^2}{4}.$$

此解不含通解之内.

9.1.61 解方程

$$(y')^3 - 4xyy' + 8y^2 = 0.$$

解 令 $y' = p$，则得

$$x = \frac{p^2}{4y} + \frac{2y}{p},$$

于是

$$dx = (\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2})dp + (-\frac{p^2}{4y^2} + \frac{2}{p})dy,$$

从而

$$dy = pdx - p[(\frac{p}{2y} - \frac{2y}{p^2})dp + (\frac{2}{p} - \frac{p^2}{4y^2})dy].$$

化简得

$$(\frac{p^3 - 4y^2}{2py})dp + (-\frac{p^3 - 4y^2}{4y^2})dy = 0$$

或

$$\frac{p^3 - 4y^2}{2y}(\frac{dp}{p} - \frac{dy}{2y}) = 0.$$

括号内得出 $\frac{dp}{p} = \frac{dy}{2y}$，$p = C\sqrt{y}$，从而得通解

$$x = \frac{C_1^2}{4} + \frac{2}{C_1}\sqrt{y}$$

或

$$y = C_1(x - C)^2.$$

另一因式得出 $p = (4y^2)^{1/3}$，代入 x 的表达式得到特解 $x^3 = \frac{27}{4}y$，即

$$y = \frac{4}{27}x^3.$$

注 上题及本题中方程的形式为

$$F(x,y,y') = 0.$$

参化办法是令 x(或 y)为 $p = y'$ 及 y(或 x)的函数，再从全微分 dx(或 dy)得出 dx 及 dp 的方程.

特别应注意，上题及本题中都出现特解，称之为奇解. 它的重要性质是：奇解常为通解作为曲线族的

包络,因而在奇解上处处破坏解的唯一性.

9.1.62 解方程 $y = 2xy' + \ln y'$.

解 令 $y' = p$,则 $y = 2xp + \ln p$.

今有

$$dx = \frac{1}{p}dy = \frac{1}{p}\left(2x dp + \frac{1}{p}dp + 2p dx\right)$$

或

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x - \frac{1}{p^2}.$$

解得 $x = \frac{C}{p^2} - \frac{1}{p}$,故通解为

$$\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{1}{p}, \\ y = \ln p + \dfrac{2C}{p} - 2. \end{cases}$$

注 本方程称为 Lagrange 方程,其一般形状为

$$y = x\varphi(y') + \psi(y').$$

9.1.63 解方程 $y = xy' + \varphi(y')$ (其中 φ 为某可微函数).

解 令 $y' = p$,则 $y = px + \varphi(p)$,故

$$p dx = (x + \varphi'(p))dp + p dx$$

或

$$dp(x + \varphi'(p)) = 0.$$

$dp = 0$ 得出 $p = C$,而得通解

$$y = Cx + \varphi(C).$$

从 $x = -\varphi'(p)$,得奇解

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p), \\ y = px + \varphi(p). \end{cases}$$

注 本题方程称为 Clairaut 方程. 与 Lagrange 方程一样,在早期讨论初等几何时,曾被广泛地讨论过.

9.1.64 求一曲线,使其上每点处的切线,与两定点的距离的乘积为常数.

解 设待求曲线方程为 $y = f(x)$,两定点位于 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 处(如图 9.1).

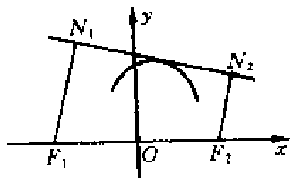


图 9.1

从解析几何知

$$F_1N_1 = \pm\frac{y'c + xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

$$F_2N_2 = \pm\frac{-y'c + xy' - y}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

注意已设 (x,y) 处的切线方程为 $Y = y'X + (y - y'x)$. 其中 (X,Y) 为笛氏坐标. 依题设,有

$$\frac{(xy' - y)^2 - c^2(y')^2}{1 + (y')^2} = b^2 (\text{定值}),$$

或

$$y = xy' + \sqrt{(1 + (y')^2)b^2 + c^2(y')^2}.$$

可见为 Clairaut 方程. 故即得通解

$$y = c_1x + \sqrt{b^2 + a^2c_1^2}$$

(其中已取 $a^2 = b^2 + c^2$).

这是一族直线. 另得奇解

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a^2p}{\sqrt{b^2 + a^2p^2}}, \\ y = -\dfrac{a^2p^2}{\sqrt{b^2 + a^2p^2}} + \sqrt{b^2 + a^2p^2}. \end{cases}$$

化简得

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

即椭圆. 容易看出,通解直线族恰为奇解,即椭圆的切线族.

9.1.65 解下列方程

(1) $y = y'\ln y'$;

(2) $(y')^3 + (x + 2)e^y = 0$.

解 (1) 通解为

$$2(x + C) = (\ln p + 1)^2, y = p\ln p.$$

(2) 通解为

$$(x + 2)^{4/3} = 4e^{-y/3} + C.$$

9.1.66 解下列方程

(1) $y = x(y')^2 - (y')^{-2}$;

(2) $x = y(y')^{-1} + (y')^{-2}$.

解 (1) Lagrange 方程,通解为

$$\begin{cases} x = (Cp^2 - 2p - 1)/2p^2(p - 1)^2, \\ y = (Cp^2 + 2p - 1)/2(p - 1)^2 - \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

(2) Clairaut 方程,通解为

$$x = Cy + C^2.$$

奇解为 $4x + y^2 = 0$.

注 让我们用几句话来总结一阶隐式方程. 这几句话是:一个原则,三种类型,两类方程,两个概念.

一个原则就是坚决参数化. 此时分类当然很重要:对三种类型就有三种参化形式:

$F(x,y') = 0$ $(t = y')$;

$F(y,y') = 0$ $(t = y')$;

$F(x,y,y') = 0$ $(p = y', x = x(y,p),$
$y = y(x,p))$.

两类方程是指 Lagrange 方程与 Clairaut 方程. 注意,在应用问题中这两类方程的通解并不重要;重要的是奇解和包络这两个概念.

从理论上说，一阶方程出现最多的是隐式方程，可见我们实际上对之讨论得很少.要提醒读者的是，一阶隐式方程和奇解有着很深刻的理论背景.

§9.2 高阶常微分方程求解法

高阶方程的求解自然要比一阶方程更为困难，即使是对于线性微分方程.但是有一个例外：常系数线性微分方程.我们可以完整地求出它的通解来，所以常系数线性方程的求解，主要精力是集中在讨论对应的非齐次方程的特解.（本节根据方程的具体类型，分别介绍了算子法等近10种方法.）

9.2.1 求方程 $y''' - 2y'' - 3y' = 0$ 的通解.

解 记 $y^{(n)} = D^n y$，将方程写成

$$D^3 y - 2D^2 y - 3Dy = 0,$$

$$或(D^3 - 2D^2 - 3D)y = 0.$$

我们熟知，其时首先要解特征方程

$$D^3 - 2D^2 - 3D = 0,$$

得 $D = 0, -1, 3$，故知方程有三特解 $1, e^{-x}, e^{3x}$.由于此三特解为线性无关，故立得通解

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}.$$

注 本题方程为齐次常系数三阶常微分方程.线性常微分方程的一般形状是

$$L_n(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = f(x).$$

其中系数 $a_1(x), \cdots, a_n(x)$ 是某区间 (a,b) 上的连续函数.上述方程又可写成

$$L_n(y) \equiv (D^n + a_1(x)D^{n-1} + \cdots + a_n(x))y = f(x).$$

可以把上面括号整体看作一种运算，常称为线性微分算子.本题中各 $a_i(x)$ 均为实常数，今后也仅对实常系数的情形来进一步发展线性微分算子方法.

9.2.2 求解 $y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$.

解 写成 $(D^3 - 6D^2 + 11D - 6)y = 0$，从特征方程

$$0 = D^3 - 6D^2 + 11D - 6 = (D-1)(D-2)(D-3)$$

解得 $D = 1, 2, 3$，共三实根，故可立即写出通解

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

9.2.3 解 $y''' - 3y'' + 9y' + 13y = 0$.

解 写成

$$(D^3 - 3D^2 + 9D + 13)y = 0,$$

或

$$(D+1)(D^2 - 4D + 13)y = 0.$$

特征方程 $(D+1)(D^2 - 4D + 13) = 0$ 有根 $D = -1, 2 \pm 3i$.故对应特解是 $e^{-x}, e^{2x}\cos 3x, e^{2x}\sin 3x$.从而通解是

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}\cos 3x + C_3 e^{2x}\sin 3x.$$

9.2.4 求 $y^{(4)} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0$ 之通解.

解 写成

$$(D^4 - 4D^3 + 5D^2 - 4D + 4)y = 0,$$

或

$$(D-2)^2(D^2+1)y = 0.$$

特征根是 $D = 2, 2, \pm i$，对应的特解应是 $e^{2x}, xe^{2x}, \cos x, \sin x$，故写成通解

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + C_3\cos x + C_4 \sin x.$$

9.2.5 求 $y'' + y = (\cos x)^{-1}$ 之通解.

解 本题为非齐次方程，先求出对应齐次方程 $y'' + y = 0$ 之通解.写成 $(D^2+1)y = 0$，可知征特根为 $\pm i$，相应通解为 $y_1 = C_1\cos x + C_2 \sin x$.

设原方程有特解形为

$$y_* = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x.$$

其中 C_1, C_2 为待定函数.常数变异告诉我们，应求解下面的方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ C_1'(x)(\cos x)' + C_2'(x)(\sin x)' = (\cos x)^{-1} \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0 \\ -C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = (\cos x)^{-1} \end{cases}$$

（方程组右端为原方程非齐次项 $(\cos x)^{-1}$）.解得

$$C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x}, C_2'(x) = 1,$$

或

$$C_1(x) = \ln|\cos x|, C_2(x) = x.$$

最后得通解为

$$y(x) = y_1(x) + y_*(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x.$$

注 对常系数方程，在应用上，不常运用常数变异法.对于特殊非齐次项的常系数方程，下文将提供更简捷的办法.

9.2.6 求解下列方程

(1) $y^{(4)} + 2y''' + 4y'' - 2y' - 5y = 0$;

(2) $4y'' - 8y' + 5y = 0$.

解 (1) $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + e^{-x}(C_3\cos 2x + C_4 \sin 2x)$;

(2) $y = e^x\left(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2}\right)$.

9.2.7 求解下列 Cauchy 问题

(1) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = 3$;

(2) $y''' + y'' = 0; y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = 1$.

解 (1) $y = e^x(1 + x)$.

(2) $y = x + e^{-x}$.

9.2.8 求解非齐次方程

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{1}{x}\ (x \neq 0).$$

解 本题不是常系数方程. 为求通解需先知道齐次方程 $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$ 的两个线性无关的特解. 现设用观察法得到两个特解

$$y_1 = \frac{\sin x}{x}, y_2 = \frac{\cos x}{x}.$$

令

$$y(x) = C_1(x)\frac{\sin x}{x} + C_2(x)\frac{\cos x}{x},$$

考虑方程组

$$\begin{cases} C_1'(x)\frac{\sin x}{x} + C_2'(x)\frac{\cos x}{x} = 0, \\ C_1'(x)(\frac{\sin x}{x})' + C_2'(x)(\frac{\cos x}{x})' = \frac{1}{x}. \end{cases}$$

最后解得

$$C_1(x) = \sin x, C_2(x) = \cos x.$$

故原方程通解是

$$y(x) = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x} + \frac{1}{x}.$$

注 我们说过,高阶方程中最重要、研究得最彻底的是线性方程,因此我们就从它开始. 因为有了常数变易法(9.2.5题),所以重点似乎应放在齐次方程的求解. 但是,齐次常系数线性方程的求解来得太容易(只需要解代数方程),而齐次变系数线性方程的求解则又太困难(即使求出一个特解),这就构成了这一单元的特点:我们着力于求解具有特殊右端(物理学中称此种项为强迫项)的(任意高阶的)非齐次常系数线性方程. 这样做既是为了避免使用繁复的常数变易法,也是为了让解题者掌握一种最实用的技巧——微分算子法.

9.2.9 求解

$$y'' + 5y' + 6y = x^2.$$

解 写成$(D^2 + 5D + 6)y = x^2$,

或

$$(D + 2)(D + 3)y = x^2.$$

故对应齐次方程$(D+2)(D+3)y = 0$之通解为

$$y_1(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x}.$$

今用下法求原方程之一特解 $y^*(x)$. 显然 $y^*(x)$ 满足

$$(D + 2)(D + 3)y^* = x^2.$$

今用下法求出 y^*.

$$\begin{aligned} y^*(x) &= \frac{1}{(D+2)(D+3)}x^2 \\ &= (\frac{1}{D+2} - \frac{1}{D+3})x^2 \\ &= \frac{1}{D+2}x^2 - \frac{1}{D+3}x^2 \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{1+\frac{D}{2}})x^2 - \frac{1}{3}(\frac{1}{1+\frac{D}{3}})x^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4} - \cdots)x^2 \\ &\quad - \frac{1}{3}(1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9} - \cdots)x^2 \\ &= \frac{1}{2}(1 - \frac{D}{2} + \frac{D^2}{4})x^2 \\ &\quad - \frac{1}{3}(1 - \frac{D}{3} + \frac{D^2}{9})x^2 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{2}(x^2)' + \frac{1}{4}(x^2)'') \\ &\quad - \frac{1}{3}(x^2 - \frac{1}{3}(x^2)' + \frac{1}{9}(x^2)'') \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - x + \frac{1}{2}) - \frac{1}{3}(x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}) \\ &= \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}. \end{aligned}$$

通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= y_1(x) + y^*(x) \\ &= C_1e^{-2x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{18}x + \frac{19}{108}. \end{aligned}$$

注 本题所用方法即微分算子法,此法核心内容是将求导运算 D 同时当作数与运算来处理. 上法中, $\frac{1}{(D+2)(D+3)}$ 视为$(D+2)(D+3)$ 的逆运算,经分成部分分式后,又将 D 作为数,将$\frac{1}{1+D}$展开(或读作除法),最后,又将 $D, D^2, \cdots$ 恢复其运算功能. 至此,积分微分方程问题已变为求导问题.

上述方法有其严密的理论根据;但本法早在20世纪30～40年代已在工程师中间广为流传,理论工作于20世纪50年代初才完成.

9.2.10 给定一个微分算子

$$L_n = D^n + a_1D^{n-1} + \cdots + a_{n-1}D + a_n$$

$$(a_i, i = 1, \cdots, n \text{ 为常数}).$$

则对任一有 n 次导数的函数 $g(x)$,得到唯一的函数 $f(x)$

$$L_n(g(x)) = f(x).$$

今定义逆运算子$\frac{1}{L_n}$如下:对任一连续函数 $f(x)$,定义

$$\frac{1}{L_n}(f(x)) = g(x),$$

g 恰为微分方程 $L_n(g) = f(x)$ 之一特解.

证明下列事实：(1) 给定 f 后，g 不为唯一；

(2) 对任意常数 a,b 及连续函数 $h(x),g(x)$，成立

$$\frac{1}{L_n}(ah(x)+bg(x))$$
$$=a\frac{1}{L_n}(h(x))+b\frac{1}{L_n}(g(x));$$

(3) 设有另一微分算子 $L_m=D^m+a_1D^{m-1}+\cdots+a_m$，则

$$\frac{1}{L_n}\frac{1}{L_m}(g(x))=\frac{1}{L_m}\frac{1}{L_n}(g(x));$$

(4) 成立

$$\frac{1}{L_n}(g(x))$$
$$=\frac{1}{(D-\lambda_1)^{\rho_1}\cdots(D-\lambda_k)^{\rho_k}}(g(x))$$
$$=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\rho_i}\frac{1}{(D-\lambda_i)^j}(g(x)).$$

(后一式相当于将有理函数$\frac{1}{L_n}$展为部分分式)

证明 (1) 设 $g_1(x)$ 是方程 $L_n(y)=0$ 之特解，则有 $L_n(g(x)+g_1(x))=L_n(g(x))=f(x)$，故

$$\frac{1}{L_n}(f(x))=g(x)+g_1(x).$$

(2) 与(3) 直接从定义推出；(4) 从(3) 以及定义推出.

9.2.11 给定 L_n 如上题，证明下列性质：

(1) 设 $F(k)\neq 0$，此处 $F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$ 为多项式(与 L_n 对应)，则

$$\frac{1}{L_n}e^{kx}=\frac{1}{F(k)}e^{kx};$$

特别，$\rho\neq k$ 时，

$$\frac{1}{D-\rho}e^{kx}=\frac{1}{k-\rho}e^{kx}.$$

(2) $$\frac{1}{L_n(D)}e^{kx}\cdot f(x)=e^{kx}\frac{1}{L_n(D+k)}f(x).$$

特别，

$$\frac{1}{(D-\rho)^m}e^{kx}\cdot f(x)=e^{kx}\frac{1}{D^m}f(x).$$

(3) 当 $F(\lambda)$ 为偶次多项式，$F(ik)\neq 0$，则

$$\frac{1}{L_n(D)}\sin kx=\frac{1}{F(ik)}\sin kx.\text{ 其中 } i=\sqrt{-1}.$$

对 $\cos kx$ 亦有类似公式.

特别，对一般的 $L_n(D)$，当 $F(ik)\neq 0$ 时，

$$\frac{1}{L_n(D)}\sin kx=L_n(-D)\frac{1}{L_n(-ik)L_n(ik)}\sin kx.$$

证明 (1) 因 $(D-\rho)e^{kx}=(k-\rho)e^{kx}$，故有

$$e^{kx}=(k-\rho)\frac{1}{D-\rho}e^{kx}.$$

令

$$\frac{1}{L_n(D)}e^{kx}=\frac{1}{(D-\rho_1)\cdots(D-\rho_n)}e^{kx}$$
$$=\frac{1}{(D-\rho_1)\cdots(D-\rho_{n-1})}\frac{1}{k-\rho_n}e^{kx}$$
$$=\cdots=\frac{1}{F(k)}e^{kx}.$$

(2) $(D-\rho)e^{kx}g(x)$
$$=ke^{kx}g(x)+e^{kx}g'(x)-e^{kx}g(x)\cdot\rho$$
$$=e^{kx}(Dg(x)+(k-\rho)g(x))$$
$$=e^{kx}(D+k-\rho)g(x).$$

今令

$$g(x)=\frac{1}{D+k-\rho}(f(x)),$$

则$(D+k-\rho)(g(x))=f(x)$，代入上式，得

$$(D-\rho)e^{kx}\frac{1}{D+k-\rho}(f(x))=e^{kx}f(x),$$

或

$$e^{kx}\frac{1}{D+k-\rho}(f(x))=\frac{1}{D-\rho}e^{kx}f(x).$$

一般公式可由此逐步推出.

(3) 因 $D^2(\sin kx)=(ik)^2\sin kx$，故

$$(D^2-\rho)\sin kx=((ik)^2-\rho)\sin kx,$$

从而

$$\sin kx=((ik)^2-\rho)\frac{1}{D^2-\rho}\sin kx.$$

当 $F(\lambda)$ 为偶多项式时，

$$L_n(D)=(D^2-\rho_1)\cdots(D^2-k),$$

故一般公式由上式逐步推出.

注 (1) $\frac{1}{L_n}$ 还有另一性质，我们述而不证：

$$\frac{1}{D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_{n-1}D+a_n}(x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m)$$
$$=(\sum_{r=0}^{\infty}\beta_rD^r)(x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)$$
$$=\sum_{r=0}^{m}\beta_rD^r(x^m+\cdots+b_m).$$

(2) 当 $F(ik)=0$ 时，此时宜用 Euler 公式

$$e^{ikx}=\cos kx+i\sin kx.$$

(3) 以上两题旨在建立我们算子法的理论基础.由于我们仍然不能做到完全严格，所以对于只求解题技巧的读者，可以不必追求细节，但请务必记住 9.2.10 及 9.2.11 两题的有关结论，以便通过下面各题尽快掌握这个方法.

9.2.12 求下面方程的一个特解

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=6e^{2x}.$$

解 $$y(x)=\frac{1}{D^2-1}(6e^{2x})=6\frac{1}{2^2-1}e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}.$$

9.2.13 求方程 $\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 4y = 2e^{2x}$ 之一特解.

解 $y(x) = \frac{1}{D^2 - 4D + 4}2e^{2x}$

$$= 2\frac{1}{(D-2)^2}e^{2x}$$

$$= 2e^{2x}\frac{1}{[(D+2)-2]^2}\cdot 1$$

$$= 2e^{2x}\frac{1}{D^2}\cdot 1.$$

设 $\frac{1}{D^2}\cdot 1 = g(x)$,则 $D^2 g(x) = 1$,即 $g''(x) = 1$,可知 $g(x) = \frac{1}{2!}x^2$,故最后得

$$y(x) = x^2 e^{2x}.$$

9.2.14 解 $\frac{d^2y}{dx^2} - y = e^x$.

解 $y(x) = \frac{1}{D^2-1}e^x = \frac{1}{(D-1)}\frac{1}{(D+1)}e^x$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{D-1}e^x = \frac{1}{2}e^x\frac{1}{D}\cdot 1$$

$$= \frac{1}{2}xe^x$$

得通解为

$$y(x) = \frac{1}{2}xe^x + C_1e^x + C_2e^{-x}.$$

9.2.15 求下面方程特解

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} = -5x^2 + 2x.$$

解 $y(x) = \frac{1}{D^2 - 5D}(-5x^2 + 2x)$

$$= \frac{1}{D}\frac{1}{D-5}(-5x^2+2x)$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{D}\frac{1}{1-\frac{D}{5}}(-5x^2+2x)$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{D}\left[1+\frac{D}{5}+\left(\frac{D}{5}\right)^2\right](-5x^2+2x)$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{D}\left[(-5x^2+2x)+\frac{1}{5}(-10x+2) + \frac{1}{25}(-10)\right]$$

$$= \left(-\frac{1}{5}\right)\frac{1}{D}[-5x^2]$$

$$= \frac{1}{D}x^2 = \frac{1}{3}x^3.$$

9.2.16 求 $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 5y = -3e^x + 5x^2$ 的特解.

解 显然 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$,

其中 $y_1(x) = \frac{1}{D^2 - 6D + 5}(-3e^x)$

$$= \frac{1}{(D-1)(D-5)}(-3e^x),$$

$$y_2(x) = \frac{1}{(D-1)(D-5)}(5x^2).$$

今有

$$y_1(x) = (-3)\frac{1}{D-1}\frac{1}{D-5}e^x = (-3)\frac{1}{D}\frac{e^x}{1-5}$$

$$= \frac{3}{4}\frac{1}{D-1}e^x = \frac{3}{4}e^x\frac{1}{D}\cdot 1 = \frac{3}{4}xe^x.$$

$$y_2(x) = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{D-1}+\frac{1}{D-5}\right)(5x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-D} - \frac{1}{5}\frac{1}{1-D/5}\right)(5x^2)$$

$$= \frac{1}{4}\left((1+D+D^2) - \frac{1}{5}\left(1-\frac{D}{5}+\frac{D^2}{25}\right)\right)(5x^2)$$

$$= \frac{62}{25} + \frac{12}{5}x + x^2.$$

最后得

$$y(x) = \frac{3}{4}xe^x + \frac{62}{25} + \frac{12}{5}x + x^2.$$

9.2.17 求 $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 6\cos 2x + 3\sin 2x$ 之特解.

解 $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$

$$= \frac{1}{D^2+1}6\cos 2x + \frac{1}{D^2+1}3\sin 2x$$

$$= 6\frac{1}{(2i)^2+1}\cos 2x + 3\frac{1}{(2i)^2+1}\sin 2x$$

$$= -2\cos 2x - \sin 2x.$$

9.2.18 求下面方程之特解

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = -13\sin 2x.$$

解 $y(x) = \frac{1}{D^2+D+1}(-13)\sin 2x$

$$= [(-D)^2+(-D)+1]\frac{1}{[(-D)^2+(-D)+1]}$$

$$\times\frac{1}{(D^2+D+1)}(-13)\sin 2x$$

$$= [D^2-D+1]\frac{1}{D^4+D^2+1}(-13)\sin 2x$$

$$= (-13)(D^2-D+1)\frac{\sin 2x}{(i2)^4+(i2)^2+1}$$

$$= -(D^2-D+1)\sin 2x$$

$$= 3\sin 2x + 2\cos 2x.$$

9.2.19 求下面方程特解

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = \cos 2x.$$

解 $y(x) = [(-D+2)^2]$

$$\cdot\frac{1}{(-D+2)^2}\frac{1}{(D+2)^2}\cos x$$

$$= (D-2)^2\frac{1}{(D^2-4)^2}\cos x$$

$$= (D-2)^2\frac{\cos x}{((2i)^2-4)^2}$$

$$= \frac{1}{8}\sin 2x.$$

9.2.20 求 $\frac{d^2y}{dx^2}+y=2\sin x$ 之特解.

解 因 $(i)^2+1=0$,上法无效.今取

$$\sin x=\frac{1}{2i}[e^{ix}-e^{-ix}],$$

则特解

$$y(x)=\frac{1}{D^2+1}(\frac{1}{i}[e^{ix}-e^{-ix}])$$

$$=\frac{1}{i}[\frac{1}{D^2+1}e^{ix}-\frac{1}{D^2+1}e^{-ix}]$$

$$=\frac{1}{i}[e^{ix}\frac{1}{(D+i)^2+1}\cdot 1-e^{-ix}\frac{1}{(D-i)^2+1}\cdot 1]$$

$$=\frac{1}{i}[e^{ix}\frac{1}{D+2i}\frac{1}{D}\cdot 1-e^{-ix}\frac{1}{D-2i}\frac{1}{D}\cdot 1]$$

$$=\frac{1}{i}[e^{ix}\frac{1}{D+2i}x-e^{-ix}\frac{1}{D-2i}x]$$

$$=2\mathrm{Im}[e^{ix}\frac{1}{D+2i}x].$$

$\mathrm{Im}z$ 表复数 z 虚部.今

$$e^{ix}\frac{1}{D+2i}x=\frac{1}{2i}e^{ix}\frac{1}{1+\frac{D}{2i}}x$$

$$=\frac{1}{2i}e^{ix}[1-\frac{D}{2i}]x=\frac{1}{2i}e^{ix}(x-\frac{1}{2i})$$

$$=\frac{1}{4}\cos x-\frac{x}{2}\sin x-i(x\cos x+\frac{1}{2}\sin x),$$

故

$$y(x)=-x\cos x-\frac{1}{2}\sin x.$$

9.2.21 求下面方程之特解

$$\frac{d^2y}{dx^2}-y=e^x\cos x\cdot x.$$

解 今有

$$e^x\cdot x\cdot\cos x=\frac{1}{2}(xe^{(1+i)x}+xe^{(1-i)x})=\mathrm{Re}(xe^{(1+i)x}),$$

($\mathrm{Re}z$ 表复数 z 的实部) 故可写成

$$y(x)=\mathrm{Re}(\frac{1}{D^2-1}e^{(1+i)x}\cdot x).$$

而 $\frac{1}{D^2-1}e^{(1+i)x}\cdot x=e^{(1+i)x}\frac{1}{(D+1+i)^2-1}\cdot x$

$$=e^{(1+i)x}\frac{1}{D^2+2(1+i)D+(2i-1)}\cdot x$$

$$=e^{(1+i)x}\frac{1}{2i-1}(\frac{1}{1+\frac{2+2i}{2i-1}D+\frac{D^2}{2i-1}}x)$$

$$=e^{(1+i)x}\frac{1}{2i-1}[x-\frac{2+2i}{2i-1}]$$

$$=-\frac{1}{5}e^x(\cos x+i\sin x)[(x-\frac{14}{5})+i(2x+\frac{2}{5})],$$

故

$$y(x)=e^x[(-\frac{x}{5}+\frac{14}{25})\cos x+(\frac{2}{5}x+\frac{2}{25})\sin x].$$

9.2.22 求解方程

$$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+y=e^{-x}(x-5).$$

解 $y(x)=\frac{1}{(D+1)^3}e^{-x}(x-5)$

$$=e^{-x}\frac{1}{D^3}(x-5).$$

设 $g(x)=\frac{1}{D^3}(x-5)$,则 $D^3g(x)=x-5$,故知

$$g(x)=\frac{x^4}{24}-\frac{5}{6}x^3.$$

最后得通解

$$y(x)=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3x^2e^{-x}+\frac{x^3}{24}e^{-x}(x-20).$$

注 这一批例题充分反映出算子方法的特点:简捷,灵巧,清楚.无怪受到应用数学工作者的好评.尤其因为实用问题中的强迫项大都是三类函数 e^{kx}, $\sin nx(\cos nx)$, x^m 的组合,这就使这个方法具有一定的普遍性.至此,加上常数变易法后,我们已经成功地完成了对高阶常系数线性方程的求解.在常微分方程理论中,也只有这类方程已被人们完全掌握.一旦碰到别类方程,我们就又需要各种各样的代换技巧,如下面一些例子所说.

9.2.23 解微分方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+2x\frac{dy}{dx}-6y=0.$$

解 本题讨论的方程为变系数线性型,因而前此用及方法全部失效.但对本题由于结构特殊,可设法将之化为常系数方程求解.

作自变量代换 $x=e^t$,则应用

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}/\frac{dx}{dt}=e^{-t}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})/\frac{dx}{dt}=e^{-t}\frac{d}{dt}[e^{-t}\frac{dy}{dt}]$$

$$=e^{-2t}[\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}],$$

代入原方程,化简得

$$\frac{d^2y}{dt^2}+\frac{dy}{dt}-6y=0,$$

由此解得

$$y(x)=C_1e^{-3t}+C_2e^{2t}.$$

最后得

$$y(x)=C_1x^{-3}+C_2x^2.$$

注 本题方程称 Euler 方程,一般形状为

$$a_0x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=f(x)$$

(其中 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为常数),此时,代换 $x=e^t$ 恒可将之化为常系数情形.

9.2.24 解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+2y=0.$$

解 取形式解 $y=x^k$ 试探(k 待定),则有

$$k(k-1)x^k-kx^k+2x^k=0,$$

即 $k(k-1)-k+2=0$,或 $k^2-2k+2=0$.解得 $k=1\pm i$.从而对应通解为

$$y(x)=C_1x^{1+i}+C_2x^{1-i}$$

或可写成

$$y(x)=C_1\mathrm{Re}(x^{1+i})+C_2\mathrm{Im}(x^{1+i}).$$

今

$$x^{1+i}=xe^{i\ln x}=x(\cos\ln x+i\sin\ln x),$$

故

$$y(x)=C_1x\cos\ln x+C_2x\sin\ln x.$$

注 用形式解 x^k 试探,是解 Euler 方程的又一方法.

9.2.25 解方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-2y=\sin\ln x.$$

解 自变量代换 $x=e^t$,可将方程化成

$$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=\sin t.$$

故特解为

$$\begin{aligned}y^*(x)&=\frac{1}{D^2-D-2}\sin t\\&=(D^2+D-2)\frac{\sin t}{i^4-5i^2+4}\\&=\frac{1}{10}(\cos t-3\sin t).\end{aligned}$$

通解是

$$y(t)=y^*(t)+C_1e^{2t}+C_2e^{-t}.$$

原方程通解为

$$y(x)=C_1x^2+C_2x^{-1}+\frac{1}{10}(\cos\ln x-3\sin\ln x).$$

9.2.26 解方程

$$\frac{d^3y}{dx^3}-\frac{3}{x}\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{6}{x^2}\frac{dy}{dx}-\frac{6}{x^3}y=0\ (x\neq 0).$$

解 通解是

$$y(x)=C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

9.2.27 解方程

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+xy=0.$$

解 本题为线性变系数型,但又非 Euler 型,故前法失效.一般说来.仅当已知一特解 y_1 时、方可求出另一与之线性相关的特解 y_2 来.本题中可设已有一特解 $y_1=\frac{\sin x}{x}$.

作因变量代换 $y=\frac{\sin x}{x}z$,则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx}z+y_1\frac{dz}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y_1}{dx^2}z+2\frac{dy_1}{dx}\frac{dz}{dx}+y_1\frac{d^2z}{dx^2},$$

代入方程得

$$\left(x\frac{d^2y_1}{dx^2}+2\frac{dy_1}{dx}+xy_1\right)z+xy_1\frac{dz}{dx}+2\left(x\frac{dy_1}{dx}+y_1\right)\frac{dz}{dx}=0.$$

或将 $y_1=\frac{\sin x}{x}$ 代入后化简得

$$\frac{d^2z}{dx^2}\sin x+2\frac{dz}{dx}\cos x=0.$$

再令 $u=\frac{dz}{dx}$,则上式化为一个一阶方程

$$\frac{du}{dx}+2\mathrm{ctg}x\,u=0.$$

解得

$$u=(\sin x)^{-2}.$$

从而得

$$z=-\mathrm{ctg}x.$$

故得另一特解

$$y_2=\frac{\sin x}{x}(-\mathrm{ctg}x)=-\frac{\cos x}{x}.$$

最后得通解

$$y(x)=C_1\frac{\sin x}{x}+C_2\frac{\cos x}{x}.$$

注 没有一般的方法可用来求解一般的变系数线性方程.本题体现一种重要的精神是降阶.将原方程化到 u 的方程,用的因变量代换是

$$y=y_1\int u\,dx,$$

这其实是个降阶的普适代换.

9.2.28 证明:已知 n 阶线性方程

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=0$$

的一个特解 y_1,可将方程降一阶,降后方程仍为线性方程.特别,当 $n=2$ 时,已知一个特解,必可完全解出方程.

证明 以 $n=3$ 为例,作因变量代换

$$y=y_1\cdot\int z\,dx,$$

则

$$\frac{dy}{dx}=y_1'\int z\,dx+y_1\cdot z,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=y_1''\int z\,dx+2y_1'z+y_1z',$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=y_1'''\int z\,dx+3y_1''z+3y_1'z'+y_1z''.$$

代入

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = 0$$

得

$$y_1 \cdot z'' + [3y_1' + a_1y_1]z' + [3y_1'' + 2a_1y_1' + a_2y_1]z + (y_1''' + a_1y_1'' + a_2y_1' + a_3y_1)\int z\mathrm{d}x = 0.$$

或

$$y_1 \cdot z'' + [3y_1' + a_1y_1]z' + [3y_1'' + 2a_1y_1' + a_2y_1]z = 0.$$

原方程已降阶为二阶线性方程.

由于一阶线性方程可完全积出,故本题后一结论成立.事实上,设已知两阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + p(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + q(x)y = 0$$

之一特解 $y_1(x)$,用前法,代换 $y = y_1 \cdot \int z\mathrm{d}x$ 将方程化为

$$y_1 \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + [2y_1' + py_1]z = 0.$$

最后解出

$$z = \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$$

故

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{1}{y_1^2}e^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

9.2.29 解方程

$$(2x + 1)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + (4x - 2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 8y = 0.$$

解 用特解 $y_1 = e^{mx}$ 试探.通解为

$$y(x) = C_1(1 + 4x^2) + C_2e^{-2x}.$$

9.2.30 求解方程 $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4$.

解 齐次方程有特解 $y_1 = \frac{1}{x}$,另一特解为 $y_2 = x^3$.通解为

$$y(x) = C_1x^{-1} + C_2x^3 + x^4.$$

注 这一批例子突出了两个方法:或者用代换将方程化为常系数线性方程(如 Euler 方程),或者用寻找特解的办法来使方程降阶.9.2.28 题证明能得到几个线性无关特解,就可以将方程降几阶.但是特解的寻求恰恰是最困难的,因为至今还没有找到(实际上也找不到)一个普遍的好方法.

Euler 方程虽说是一个特殊的可化为常系数的方程(其标准代换是自变量代换 $x = e^t$),但在理论上已经证明(1956 年),在所有可化为常系数线性方程的类型中,Euler 方程具有一定的普遍性.换句话说,我们也不能指望从可化为常系数方程类中再挖掘出普遍方法来.

9.2.31 解方程

$$(1 + y^2)y\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = (3y^2 - 1)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2.$$

解 本题已不是线性方程.试仍用降阶法处理之.

令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = z$,则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(z) = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$,代入方程得

$$(1 + y^2)y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}z = (3y^2 - 1)z^2$$

或

$$(1 + y^2)y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = (3y^2 - 1)z \quad (z \neq 0)$$

或

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{3y^2 - 1}{(1 + y^2)y}\mathrm{d}y$$

或

$$\frac{zy}{(1 + y^2)^2} = C_1.$$

现在从

$$\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}y}{(1 + y^2)^2} = C_1$$

得通解

$$\frac{1}{1 + y^2} = Ax + B.$$

当 $z = 0$ 时,得解 $x =$ 常数,已含于上式.

注 本题方法适用于不含自变量之方程

$$F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0.$$

使用的代换旨在引进新自变量 y,以便降阶.

9.2.32 解方程

$$xy\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + x\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

解 令 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = zy$,则

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}z + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = yz^2 + y\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = y\left(z^2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right).$$

代入方程得

$$xy^2\left(z^2 + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right) + xy^2z^2 - y^2z = 0$$

或

$$2xz^2 + x\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - z = 0.$$

这是关于 z 的 Bernoulli 方程,解得

$$z = \frac{x}{x^2 + C_1},$$

或 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}/y = \frac{x}{x^2 + C_1}$,最后解得原方程通解

$$y = C_2\sqrt{x^2 + C_1}.$$

注 用代换 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}/y = z$,可以对下面方程降阶:

$$F(x,y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n})=0,$$

其中 F 关于 $y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^ny}{dx^n}$ 为齐次函数.

9.2.33 解方程 $e^{y''}+y''=x$.

解 令 $y''=z$,则 $x=e^z+z$.

今有

$$dy'=y''dx=z(e^z+1)dz,$$

故

$$y'=\int z(e^z+1)dz+C_1$$
$$=(z-1)e^z+\frac{1}{2}z^2+C_1.$$

又

$$dy=y'dx$$
$$=[(z-1)e^z+\frac{1}{2}z^2+C_1](e^z+1)dz,$$

最后得通解为下面参数式

$$\begin{cases}y=(\frac{z}{2}-\frac{3}{4})e^{2z}+(\frac{z^2}{2}-C_1-1)e^z+\frac{z^3}{6}\\ \qquad +C_1z+C_2,\\ x=e^z+z.\end{cases}$$

9.2.34 解方程

$$e^{y'''}+y'''=y'.$$

解 令 $y'''=z$,则 $y'=e^z+z$.

今有

$$dy''=y'''dx,dy'=y''dx,$$

由此两式得

$$\frac{dy''}{y'''}=\frac{dy'}{y''},$$

或

$$y''dy''=y'''dy'$$

或

$$d[(y'')^2]=2z(e^z+1)dz$$

(用 z 代 y''',用 $d(e^z+z)$ 代 dy'). 由此得出

$$y''=[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{\frac{1}{2}}.$$

现在从

$$dx=dy'/y''$$
$$=(e^z+1)dz/[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{\frac{1}{2}}$$

得

$$x=\int\frac{(e^z+1)dz}{[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{1/2}}+C_2.$$

最后,从

$$dy=y'dx=\frac{(e^z+z)(e^z+1)}{[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{1/2}}dz$$

得通解

$$\begin{cases}y=\int\frac{(e^z+z)(e^z+1)}{[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{1/2}}dz+C_3,\\ x=\int\frac{(e^z+1)dz}{[2(z-1)e^z+z^2+C_1]^{1/2}}+C_2.\end{cases}$$

注 上题及本题旨在求参数化的通解,处理的方程是高阶导数未能或不宜解出的方程,情况类似于上一章中同类方程.

由这两题可见非线性高阶方程的降阶和求解,一般说来都较困难.

9.2.35 解方程

$$x^4y''-(x^3+2yx)y'+4y^2=0.$$

解 令 $x=e^\tau,y=ze^{2\tau}$,变量(x,y)已换成(τ,z),则有

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{d\tau}\frac{d\tau}{dx}=\frac{dy}{d\tau}e^{-\tau}=(2z+\frac{dz}{d\tau})e^\tau,$$

$$y''=\frac{dy'}{d\tau}\frac{d\tau}{dx}=\frac{dy'}{d\tau}e^{-\tau}=\frac{d^2z}{d\tau^2}+3\frac{dz}{d\tau}+2z,$$

代入方程,得

$$e^{4\tau}(\frac{d^2z}{d\tau^2}+3\frac{dz}{d\tau}+2z)$$
$$-(e^{3\tau}+2ze^{3\tau})(\frac{dz}{d\tau}+2z)e^\tau+4z^2e^{4\tau}=0,$$

化简得

$$\frac{d^2z}{d\tau^2}+2(1-z)\frac{dz}{d\tau}=0.$$

令 $\frac{dz}{d\tau}=u$,则 $\frac{d^2z}{d\tau^2}=\frac{du}{dz}\frac{dz}{d\tau}=\frac{du}{dz}u$,代入上式,得一 z 与 u 的方程(一阶线性型)

$$\frac{du}{dz}+2(1-z)=0.$$

解得

$$u=z^2-2z-C_1,$$

即

$$\frac{dz}{d\tau}=z^2-2z-C_1.$$

解得

$$z=1+C_1\text{tg}(C_1\tau+C_1\ln C_2).$$

最后得(令 $x=e^\tau$ 代入),

$$y=x^2(1+C_1\text{tg}(C_1\ln(C_2x))).$$

9.2.36 求解方程

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{3y'y''}{1+(y')^2}=0.$$

解 方程左端可写成

$$\frac{d}{dx}[\ln|y''|-\frac{3}{2}\ln(1+(y')^2)]=0,$$

故方程降阶成

$$\frac{y''}{(1+(y')^2)^{3/2}}-C_1=0.$$

此式又可写成

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{(1+(y')^2)^{1/2}} - C_1 x\right] = 0,$$

故方程再次降阶成

$$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - C_1 x = C_2.$$

这是个隐式一阶方程，令 $y' = \operatorname{tg}\tau$，则得

$$x = \frac{1}{C_1}\sin\tau - \frac{C_2}{C_1} = \bar{C}_1\sin\tau + \bar{C}_2.$$

今从 $dy = y'dx = \bar{C}_1\sin\tau d\tau$ 可得通解之参数式

$$\begin{cases} y = -\bar{C}_1\cos\tau + C_3, \\ x = \bar{C}_1\sin\tau + \bar{C}_2. \end{cases}$$

可化成圆族

$$(x-\bar{C}_2)^2 + (y-\bar{C}_3)^2 = \bar{C}_1^2.$$

注 本题实际上是一全微分方程方法在高阶方程的推广. 下面两题则是积分因子方法的推广.

9.2.37 求解

$$\frac{d^2y}{dx^2}y + 2y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{2}{x}y\frac{dy}{dx} = 0.$$

解 写成

$$y''y + 2y^2(y')^2 + (y')^2 - \frac{2}{x}yy' = 0.$$

将方程乘以 $1/yy'$，得

$$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0.$$

此式可写成

$$\frac{d}{dx}[\ln|y'| + y^2 + \ln|y| - 2\ln|x|] = 0,$$

即得

$$\frac{1}{2}e^{y^2}\cdot y\cdot y' - C_1x^2 = 0.$$

此式又可写成

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3\right] = 0.$$

最后得通解

$$\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{C_1}{3}x^3 = C_2.$$

9.2.38 解方程 $yy'' - 2y'^2 = 0.$

解 方程两边同乘以 $\frac{1}{yy'}$，得

$$\frac{y''}{y'} - \frac{2y'}{y} = 0,$$

或

$$\frac{d}{dx}[\ln|y'| - 2\ln|y|] = 0.$$

即 $\frac{y'}{y^2} = C_1$，通解为 $y = \frac{1}{Ax+B}$.

9.2.39 解方程 $y''' = \sqrt{1+(y'')^2}$.

解 仿 9.2.36 题，通解为

$$y = \mathrm{sh}(x+C_1) + C_2x + C_3.$$

9.2.40 解方程 $x^2yy'' = (y-xy')^2$.

解 仿 9.2.32 题，通解为

$$y = C_2xe^{-\frac{C_1}{x}}.$$

9.2.41 解方程

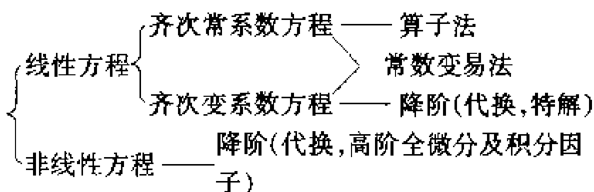
$$x^3y'' = (y-xy')^2.$$

解 仿 9.2.35 题，令 $x = e^t, y = ze^t$，可得通解

$$y = x\ln\frac{x}{C_1x+C_2}.$$

注 这一批例题全部都是非线性方程，求解的困难更大，能以介绍的方法也更少. 大致说来，让方程降阶仍然是我们赖以求解的原则. 办法是：通过代换(9.2.31 ~ 9.2.35)(请注意与代换相应的方程类型)，寻找全微分式(9.2.36 ~ 9.2.37)，或是寻找积分因子(9.2.38 ~ 9.2.41).

末了，我们也像一阶方程那样，按照求解的难易排出一张次序表如下：



§9.3 常微分方程组求解法

如所周知，最一般的常微分方程组，是具有下面形状的典则方程组：

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t,x_1,\cdots,x_n) \\ &\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t,x_1,\cdots,x_n) \end{aligned}\right\} \quad ①$$

且如假定 ① 的右端 $f_1,\cdots,f_n$ 在某域 $D\subset R^{n+1}$ 上有连续偏导数，则 Cauchy 问题

$$\begin{cases} ① \\ x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \cdots, x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

有唯一解(其中 $(t_0,x_1^0,\cdots,x_n^0)\in R^{n+1}$).

即使对于 ① 的特例，n 维线性常微分方程组

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t) \end{aligned}\right\} \quad ②$$

(可设 $a_{ij}(t)$，$f_j(t)$ 在某区间 $[a,b]$ 上连续)，其求解问题也是十分困难的，除非是当 $a_{ij}(t)$，$i,j = 1,2,\cdots,n$，都是常数的常系数方程组的情形.

用矩阵记号,可将②写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{f}(t), \tag{③}$$

其中

$$A(t)=\begin{pmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \cdots\cdots&\cdots&\cdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{pmatrix},\boldsymbol{f}(t)=\begin{pmatrix}f_1(t)\\ \vdots\\ f_n(t)\end{pmatrix},$$

又③中 $\boldsymbol{x}$ 表 n 维向量

$$\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

微分方程理论告诉我们,只要求出③对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=A(t)\boldsymbol{x} \tag{④}$$

的 n 个线性无关的特解

$$\boldsymbol{x}_1=\begin{pmatrix}x_{11}(t)\\ \vdots\\ x_{1n}(t)\end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{x}_n=\begin{pmatrix}x_{n1}(t)\\ \vdots\\ x_{nn}(t)\end{pmatrix},$$

或者说,一个基本解阵

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}x_{11}(t)&\cdots&x_{n1}(t)\\ x_{12}(t)&\cdots&x_{n2}(t)\\ x_{1n}(t)&\cdots&x_{nn}(t)\end{pmatrix}$$

即可得到④的通解,其形为($\boldsymbol{c}$ 表任意常数向量):

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c}.$$

利用上面的表示及9.3.1的公式可以求出④与③式的通解.对线性组,重点讲矩阵方法;对非线性组,重点是组合可积法.

9.3.1 设 $\Phi(t)$ 是④的基本解阵,则③的通解可用下式计算

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{x}_0+\int_{x_0}^{x}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 Φ^{-1} 表逆阵,又 $\boldsymbol{x}_0$ 表初值向量:

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0.$$

解 已知①的通解为 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\cdot\boldsymbol{c}$($\boldsymbol{c}$ 为常向量).设④有一解形为

$$\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c}(t),$$

则

$$\boldsymbol{x}'(t)=\Phi'(t)\boldsymbol{c}(t)+\Phi(t)\boldsymbol{c}'(t).$$

代入③式,得

$$\Phi'(t)\boldsymbol{c}(t)+\Phi(t)\boldsymbol{c}'(t)=A(t)\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)+\boldsymbol{f}(t).$$

用等式 $\Phi'(t)=A(t)\Phi(t)$,上式化简为

$$\Phi(t)\boldsymbol{c}'(t)=\boldsymbol{f}(t),$$

故得

$$\boldsymbol{c}'(t)=\Phi^{-1}(t)\boldsymbol{f}(t).$$

今因 $\boldsymbol{c}(t_0)=\boldsymbol{x}_0$,故得

$$\boldsymbol{c}(t)=\boldsymbol{x}_0+\int_{x_0}^{t}\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)\mathrm{d}s.$$

代入 $\boldsymbol{x}(t)=\Phi(t)\boldsymbol{c}(t)$,可得所要公式.

9.3.2 求解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y\end{cases}(t>0).$$

解 本题可写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{t}&-1\\ \dfrac{1}{t^2}&\dfrac{2}{t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}.$$

仍用原式求解,令 $z=x+ty$,则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}&=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+y+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\\ &=\left(\frac{x}{t}-y\right)+y+t\left(\frac{x}{t^2}+\frac{2}{t}y\right)\\ &=\frac{2}{t}(x+ty)=\frac{2}{t}z.\end{aligned}$$

由此解得 $z=t^2$.从而 $x=t^2-ty$.将此式代入第一方程得

$$2t-y-t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}(t^2-ty)-y,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{t}y+1.$$

由此解得 $y=t\ln t$.因而解得方程的一个特解

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2-t^2\ln t\\ t\ln t\end{pmatrix}.$$

今直接从方程可观察到另一特解

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t^2\\ -t\end{pmatrix}.$$

最后得基本解阵为

$$\Phi(t)=\begin{pmatrix}t^2&t^2-t^2\ln t\\ -t&t\ln t\end{pmatrix}.$$

通解为

$$\begin{aligned}\Phi(t)&=\begin{pmatrix}t^2&t^2(1-\ln t)\\ -t&t\ln t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}c_1t^2+c_2t^2(1-\ln t)\\ -c_1t+c_2t\ln t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

9.3.3 求下面方程组的通解

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t}x-y-t,\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{1}{t^2}x+\dfrac{2}{t}y-t^2.\end{cases}$$

解 写成矩阵形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & -1 \\ \frac{1}{t^2} & \frac{2}{t} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f(t),$$

$$f(s) = \begin{pmatrix} s \\ -s^2 \end{pmatrix}.$$

对应齐次方程由上题已知有基本解阵

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{pmatrix}.$$

易算得

$$\Phi^{-1}(s) = \frac{1}{s^2}\begin{pmatrix} \ln s & s(\ln s - 1) \\ 1 & s \end{pmatrix},$$

故有

$$\Phi^{-1}(s)f(s) = \frac{1}{s}\begin{pmatrix} \ln s + s^2(1-\ln s) \\ 1 - s^2 \end{pmatrix}.$$

令 $t_0 = 1$,又得

$$\int_1^t \Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(\ln t)^2 - \frac{t^2}{2}\ln t + \frac{3t^2}{4} - \frac{3}{4} \\ \ln t - \frac{t^2}{2} + \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

最后得方程组的通解为

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi(t)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \int_1^t \Phi(t)\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s$$

$$= \begin{pmatrix} t^2 & t^2(1-\ln t) \\ -t & t\ln t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}\ln t - \frac{t^2}{2}(\ln t)^2 + \frac{t^4}{4} - \frac{t^2}{4} \\ \frac{t}{2}(\ln t)^2 + \frac{t}{2}\ln t - \frac{3}{4}t^3 + \frac{3}{4}t \end{bmatrix}.$$

注 我们也把方程组分成线性与非线性两种类型分别加以讨论.对于线性组,跟高阶方程情形一样,由于常数变易法(9.3.1 题),我们的重点是齐次组. 9.3.3 题是一个完整的寻求通解的题例,内容包括寻求特解和常数变易法.注意,本题中如非观察到另一特解,通解将难以求出.至今尚未有普遍的寻求线性变系数方程组的通解的方法.

讨论中的另一个特点是充分利用矩阵知识.

9.3.4 给定一常数矩阵 A(n 阶),可定义一个新矩阵

$$e^A = \lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k}\frac{A^i}{i!}.$$

试证明矩阵 e^A 具有以下性质:

(1) $e^{At}|_{t=0} = E$,E 为单位阵;

(2) 设 $AB = BA$,则 $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$;

(3) 对任一 A,e^A 为非奇,且 $(e^A)^{-1} = e^{-A}$;

(4) 设 T 为非奇,则 $e^{T^{-1}AT} = T^{-1}e^AT$;

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(e^{At}) = A\cdot e^{At}$;

(6) 设 A 为一对角分块阵

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_k \end{bmatrix},$$

则

$$e^A = \begin{bmatrix} e^{A_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{A_k} \end{bmatrix}.$$

特别,如 A 为对角阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则

$$e^A = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix};$$

(7) 设 $B = \lambda E + N$,E 为单位阵,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

则对

$$B = \begin{bmatrix} \lambda & & & 0 \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

即有

$$e^{Bt} = e^{\lambda Et + Nt} = e^{\lambda t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & & & \cdots & 1 \end{bmatrix};$$

(8) $e^{\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}} = e^a\begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix}$.

证 注意矩阵列 $\{A_k\}$ 之极限 A,由下式定义

$$\lim_{k\to\infty}\| A_k - A \| = 0,$$

其中 $\| A \|$ 表示 A 之各元的绝对值和.设 $A = (a_{ij})$,则

$$\| A \| = \sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |.$$

故 e^A 之存在由级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\| A \|^k}{k!}$ 之收敛性可知.同理,e^{At} 之存在,由 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\| A^k t^k \|}{k!}$ 对一切有界 t 为收敛可知.

(1) 的证明是显然的.

(2) $$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A+B)^k}{k!}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\rho=0}^{k}\frac{A^\rho B^{k-\rho}}{\rho!(k-\rho)!}\right);$$

(注意此处已用及 $AB = BA$).

另方面,

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty}\frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^j}{j!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\rho=0}^{k}\frac{A^{\rho}B^{k-\rho}}{\rho!(k-\rho)!}\right).$$

(3) 之证明为显然.

(4) $$e^{T^{-1}AT} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(T^{-1}AT)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{T^{-1}A^kT}{k!} = T^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}\right)T.$$

(5) $$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{\triangle t\to 0}\frac{1}{\triangle t}(e^{A(t+\triangle t)} - e^{At}) = e^{At}\lim_{\triangle t\to 0}\frac{e^{A\triangle t}-E}{\triangle t} = e^{At}\lim_{\triangle t\to 0}\left(\frac{1}{\triangle t}\left(A\triangle t + \frac{A^2\triangle t^2}{2!} + \cdots\right)\right) = e^{At}\cdot A = A\cdot e^{At}.$$

(6) 因

$$\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} A_1^m & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^m \end{pmatrix},$$

故

$$e^A = E + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}^i = E + \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i!}\begin{pmatrix} A_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k^i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A_1^i & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}A_k^i \end{bmatrix}.$$

(7) $$e^{(\lambda E+N)t} = e^{\lambda t}\cdot e^{Nt} = e^{\lambda t}\left(E + Nt + \frac{(Nt)^2}{2!} + \cdots\right).$$

令

$$N = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, N^2 = \begin{bmatrix} 0 & & 0 & \\ 0 & \ddots & & \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \cdots,$$

$$N^{k-1} = \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \\ 1 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad N^k = 0\ (k \geqslant n),$$

代入上式即可得证.

(8) 之证明,由下式可推出

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} b^m & 0 \\ 0 & b^m \end{pmatrix}, \text{当 } m = 4p;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 0 & -b^m \\ b^m & 0 \end{pmatrix}, \text{当 } m = 4p+1;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} -b^m & 0 \\ 0 & -b^m \end{pmatrix}, \text{当 } m = 4p+2;$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 0 & b^m \\ -b^m & 0 \end{pmatrix}, \text{当 } m = 4p+3.$$

9.3.5 求常系数线性方程组(n 组)

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \dfrac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

之通解.

解 令

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix}, \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

方程可写成

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}.$$

再令 $\boldsymbol{c}$ 为一任意常数向量,则向量

$$e^{At}\boldsymbol{c}$$

将满足上述方程.事实上,$\frac{d}{dt}(e^{At}\boldsymbol{c}) = Ae^{At}\boldsymbol{c}$.故知,原方程的通解为

$$\boldsymbol{x} = e^{At}\cdot\boldsymbol{c}.$$

特别,如取初值 $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$,则 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{x}_0$.又原方程有基本解阵 $\Phi(t) = e^{At}$,$\Phi(0) = E$.

注 因此,常系数线性方程组的求解,归结于计算矩阵 e^{At}.

9.3.6 Cauchy 问题

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{f}(t), \\ \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \end{cases}$$

之解有形式

$$\boldsymbol{x}(t) = \Phi(t)\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t)\Phi^{-1}(s)\boldsymbol{f}(s)ds,$$

或

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{At}\boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t}e^{(t-s)A}\boldsymbol{f}(s)ds$$

($\Phi(t)$ 为齐次方程之基本解阵).

9.3.7 求 $\frac{d}{dt}\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\boldsymbol{x}$ 之基本解阵.

解 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

故

$$e^{At} = e^{\begin{pmatrix} 2t & 0 \\ 0 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$= e^{2t}\left(E + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}t + \frac{1}{2!}\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2 t^2 + \cdots\right)$$

$$= e^{2t}\left(E + \begin{pmatrix}0 & t\\0 & 0\end{pmatrix}\right) = e^{2t}\begin{pmatrix}1 & t\\0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{pmatrix}.$$

通解应为

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\0 & e^{2t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1e^{2t} + c_2te^{2t}\\c_2e^{2t}\end{pmatrix}.$$

注 1 本题的 A 较简单.对于更复杂的 A,宜用下面三个结论来计算 e^{At}.

(1) 设 A 有 n 个相异特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n(\lambda_i \neq \lambda_j, i \neq j, i,j = 1,\cdots,n)$,又设 $\boldsymbol{v}_i$ 为 λ_i 对应的特征向量,则

$$e^{At} = [e^{\lambda_1 t}\boldsymbol{v}_1, e^{\lambda_2 t}\boldsymbol{v}_2, \cdots, e^{\lambda_n t}\boldsymbol{v}_n].$$

(2) 设 A 有 k 个特征根 $\lambda_1(n_1$ 重$),\cdots,\lambda_k(n_k$ 重$)$, $\lambda_i \neq \lambda_j(i \neq j, i,j = 1,\cdots,k), n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$,则

$$e^{At}\boldsymbol{c} = \sum_{j=1}^{k} e^{At}\boldsymbol{v}_j,$$

其中

$$e^{At}\boldsymbol{v}_j = e^{\lambda_j t}[E + t(A - \lambda_j E) + \frac{t^2}{2!}(A - \lambda_j E)^2 + \cdots + \frac{t^{n_j-1}}{(n_j - 1)!}(A - \lambda_j E)^{n_j-1}]\boldsymbol{v}_j,$$

其中向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ 由 $\boldsymbol{c}$ 唯一确定,$\boldsymbol{v}_j$ 由 $(A - \lambda_j E)^{n_j}\boldsymbol{v}_j = 0$ 求得,$j = 1,2,\cdots,k$ 且 $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}_1 + \cdots + \boldsymbol{v}_k$.

(3) 设 A 仅有一 n 重特征根 λ,则

$$e^{At} = e^{\lambda t}\sum_{i=0}^{n-1}(A - \lambda E)^i \cdot \frac{t^i}{i!}.$$

注 2 比起高阶方程来,即使是常系数方程组,求解要繁复得多(但可以彻底解出),理由是需要寻求特征向量.题 9.3.7 列出的所有的情况,可以通过下面各例题掌握求解法.

9.3.8 解方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = 5x + 4y,\\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = 5y.\end{cases}$$

解 $A = \begin{pmatrix}5 & 4\\0 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}$,

$$e^{At} = e^{5t}\left(E + \begin{pmatrix}0 & 4\\0 & 0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}^2\frac{16t^2}{2!}\right)$$

$$= e^{5t}\begin{pmatrix}1 & 4t\\0 & 1\end{pmatrix}.$$

方程有两线性无关解

$$\begin{pmatrix}e^{5t}\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4te^{5t}\\e^{5t}\end{pmatrix}.$$

9.3.9 解方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5 & 4\\4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

解 从 $\det\begin{pmatrix}5-\lambda & 4\\4 & 5-\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 9 = 0$ 知有特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 9$.

求 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix}$,从 $(A - E)\begin{pmatrix}\mu_1\\\mu_2\end{pmatrix} = 0$ 解得 $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1$.

求 $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$,从 $(A - 9E)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} = 0$ 解得 $\xi_1 = 1, \xi_2 = 1$.

由此得基本解阵

$$\Phi(t) = \left(e^t\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, e^{9t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}e^t & e^{9t}\\-e^t & e^{9t}\end{pmatrix}.$$

通解为

$$\Phi(t)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1e^t + c_2e^{9t}\\-c_1e^t + c_2e^{9t}\end{pmatrix}.$$

9.3.10 解方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

解 从 $\det(A - \lambda E) = 0$,得 $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$,特征根为 $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$.

先求 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}$, $(A - (2+i)E)\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} = 0$,解得 $\xi_1 = 1, \xi_2 = -i$.此时不必求 $\boldsymbol{v}_2$,缘因 $\boldsymbol{v}_2$ 必与 $\boldsymbol{v}_1$ 共轭.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix}e^{(2+i)t}\\-ie^{(2+i)t}\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}e^{2t}\cos t + ie^{2t}\sin t\\e^{2t}\sin t - ie^{2t}\cos t\end{pmatrix}$$

$$= e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\end{pmatrix} + ie^{2t}\begin{pmatrix}\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}.$$

基解阵为

$$\Phi(t) = e^{2t}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\\sin t & -\cos t\end{pmatrix}.$$

9.3.11 解方程组

$$\frac{d}{dx}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & -1\\1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

解 特征方程 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$,特征根 $\lambda_{1,2} = 3$,因此 $n_1 = 2$.故

$$e^{At}\boldsymbol{c} = e^{3t}(E + (A - 3E)t)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t & -t\\t & -t\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix}1+t & t\\ t & 1-t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}$$

$$= e^{3t}\begin{pmatrix}c_1+t(c_1-c_2)\\ c_2+t(c_1-c_2)\end{pmatrix}.$$

通解为

$$\begin{pmatrix}(c_1+t(c_1-c_2))e^{3t}\\ (c_2+t(c_1-c_2))e^{3t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar{c}_1e^{3t}+\bar{c}_2te^{3t}\\ (\bar{c}_1-\bar{c}_2)e^{3t}+\bar{c}_2te^{3t}\end{pmatrix}.$$

9.3.12 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda-1)(\lambda-2)^2$,特征根 $\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=2,n_1=1,n_2=2$.

先求 $v_1=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$,解 $(A-1\cdot E)v_1=0$,或解

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}=0$$

得 $u_1=0,u_2=u_3=\alpha$(任意常数).

求 $v_2=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}$,解

$$(A-2E)^2v_2=0,$$

或解

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}=0$$

得 $s_1=s_2=\beta,s_3=\gamma(\beta,\gamma$ 为任意常数),今令

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix},$$

解得 $\alpha=c_2-c_1,\beta=c_1,\gamma=c_3+c_1-c_2$.得

$$v_1=\begin{pmatrix}0\\ c_2-c_1\\ c_2-c_1\end{pmatrix},v_2=\begin{pmatrix}c_1\\ c_1\\ c_3-c_2+c_1\end{pmatrix}.$$

通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=e^tEv_1+e^{2t}(E+t(A-2E))v_2$$

$$=e^t\begin{pmatrix}0\\ c_2-c_1\\ c_2-c_1\end{pmatrix}+e^{2t}\begin{pmatrix}1+t & -t & t\\ 2t & 1-2t & t\\ t & -t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3-c_2+c_1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}(c_1+t(c_3-c_2+c_1))e^{2t}\\ (c_2-c_1)e^t+(c_1+t(c_3-c_2+c_1))e^{2t}\\ (c_2-c_1)e^t+(c_3-c_2+c_1)e^{2t}\end{pmatrix}.$$

9.3.13 求解方程组

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

解 $\det(A-\lambda E)=(\lambda-1)(\lambda+2)^2,\lambda_1=1,\lambda_{2,3}=-2,n_1=1,n_2=2$.

先求 $v_1=\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}$,从 $(A-1\cdot E)v_1=0$ 解得 $u_1=u_2=u_3=\alpha$(任意常数).

求 $v_2=\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}$.从 $(A+2E)^2v_2=0$ 或

$$\begin{pmatrix}3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\\ 3 & 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\ s_2\\ s_3\end{pmatrix}=0$$

解得 $s_1+s_2+s_3=0$,或 $s_1=\beta,s_2=\gamma,s_3=-\gamma-\beta$.

今从

$$\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\beta-\gamma\end{pmatrix}$$

得出 $\alpha=\frac{1}{3}(c_1+c_2+c_3),\beta=\frac{1}{3}(2c_1-c_2-c_3)$,$\gamma=\frac{1}{3}(2c_2-c_3-c_1)$,最后得通解为

$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=e^tE\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+e^{-2t}(E+(A+2E)t)\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\beta-\gamma\end{pmatrix}$$

$$=e^t\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+e^{-2t}\begin{pmatrix}1+t & t & t\\ t & 1+t & t\\ t & t & 1+t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\beta-\gamma\end{pmatrix}$$

$$=e^{-t}\begin{pmatrix}\alpha\\ \alpha\\ \alpha\end{pmatrix}+e^{-2t}\begin{pmatrix}\beta\\ \gamma\\ -\beta-\gamma\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\alpha e^t+\beta e^{-2t}\\ \alpha e^t+\gamma e^{-2t}\\ \alpha e^t-\beta e^{-2t}-\gamma e^{-2t}\end{pmatrix}.$$

9.3.14 解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} x'' = y, \\ y'' = x, \\ x(0) = y(0) = 1, x'(0) = 2, y'(0) = 0. \end{cases}$$

解 化为一个四维典则线性组,可得特解

$$x = e^t + \sin t, y = e^t - \sin t.$$

9.3.15 解 Cauchy 问题

$$\begin{cases} x' + 4y + 2x = 4t + 1, \\ y' + x - y = \dfrac{3}{2}t^2, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$$

解 $x = t + t^2, y = -\dfrac{1}{2}t^2.$

注 下面开始讨论非线性方程组,我们要说的是,对于这一类组,更没有什么普遍方法可资应用.下面各例(9.3.16 ~ 9.3.25)旨在寻求尽量多的首次积分.我们这里称此法为可积组合法.

9.3.16 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2(x^2 + y^2)t, \\ \dfrac{dy}{dt} = 4xyt. \end{cases}$$

解 两式相加,可得

$$\frac{d(x + y)}{dt} = 2t(x + y)^2,$$

由此得

$$\frac{1}{x + y} + t^2 = c_1. \qquad ⑤$$

两式相减,得

$$\frac{d(x - y)}{dt} = 2t(x - y)^2,$$

由此得

$$\frac{1}{x - y} + t^2 = c_2. \qquad ⑥$$

由 ⑤ 及 ⑥ 两式解得

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 + c_2 - 2t^2}{2(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)}, \\ y = \dfrac{c_2 - c_1}{2(c_1 - t^2)(c_2 - t^2)}. \end{cases}$$

注 本题方程已为非线性型,故前此所用方法失效!⑤ 及 ⑥ 即为首次积分.对 n 维方程组,求出 n 个独立首次积分,即可认为方程已经解出.以本题为例,⑤ 与 ⑥ 独立的意思是:$\dfrac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(x, y)} \neq 0$,其中 Φ_1, Φ_2 分别为 ⑤,⑥ 之右端表达式:$\Phi_1 = \dfrac{1}{x + y} + t^2, \Phi_2 = \dfrac{1}{x - y} + t^2$,今有

$$\frac{D(\Phi_1, \Phi_2)}{D(x, y)} = -\frac{2}{(x^2 - y^2)^2} \neq 0 \ (x \neq y).$$

9.3.17 求解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{x - y}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 1. \end{cases}$$

解 从 $\dfrac{d(x - y)}{dt} = 0$,得 $\Phi_1 = x - y = c_1$.将此式代入第二、三方程,得

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{c_1}{z - t}, \\ \dfrac{dz}{dt} = c_1 + 1, \end{cases}$$

可得

$$z = (c_1 + 1)t + c_2$$

及

$$y = \ln | c_1 t + c_2 | + c_3.$$

通解为

$$x = \ln | c_1 t + c_2 | + c_1 + c_3,$$
$$y = \ln | c_1 t + c_2 | + c_3,$$
$$z = (c_1 + 1)t + c_2.$$

9.3.18 解方程组

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3 - x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 - x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 - x_1. \end{cases}$$

解 将方程写成

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{x_3 - x_2} = \frac{dx_2}{x_1 - x_3} = \frac{dx_3}{x_2 - x_1}.$$

今从 $(x_3 - x_2) + (x_1 - x_3) + (x_2 - x_1) = 0$,可知

$$d(x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

或得一首次积分 $\psi_1 = x_1 + x_2 + x_3 = c_1$.

今因 $x_1(x_3 - x_2) + x_2(x_1 - x_3) + x_3(x_2 - x_1) \equiv 0$,得

$$x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3 = 0,$$

或得第二个首次积分 $\psi_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c_2$.

注意,从

$$x_1(x_1 - x_3) + x_2(x_3 - x_2) + x_1(x_2 - x_1)$$
$$+ x_3(x_3 - x_2) + x_2(x_2 - x_1) + x_3(x_1 - x_3) \equiv 0$$

可得

$$x_1 dx_2 + x_2 dx_1 + x_2 dx_3 + x_3 dx_2 + x_1 dx_3$$
$$+ x_3 dx_1 = 0,$$

或又一首次积分

$$\psi_3 - x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 - c_3.$$

不幸,$\psi_3 = \dfrac{1}{z}(\psi_1^2 - \psi_2)$,故 ψ_3 已与 ψ_1, ψ_2 非独立.

令从 $\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2$ 解出

$$x_1 = \frac{1}{2}(c_1 - x_3 - \sqrt{2c_2 - c_1^2 + 2c_1x_3 - 3x_3^2}),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(c_1 - x_3 + \sqrt{2c_2 - c_1^2 + 2c_1x_3 - 3x_3^2}),$$

从而得

$$\frac{dx_3}{dt} = \sqrt{2c_2 - c_1^2 + 2c_1x_3 - x_3^2}.$$

解得

$$\arcsin\left(\frac{3x_3 - c_1}{\sqrt{6c_2 - 2c_1^2}}\right) - \sqrt{3}t = c_3.$$

最后得第三个首次积分

$$\arcsin \frac{2x_3 - x_1 - x_2}{2\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}} - \sqrt{3}t = c_3.$$

注 本题方法常称组合可积法. 可用来讨论一般的典则方程组 (I), 只要将之写成对称形

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx_1}{f_1} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n}.$$

选函数 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n, \mu$ 使满足两个条件:

(1) $\mu + \mu_1 f_1 + \cdots + \mu_n f_n = 0$;

(2) $\mu dt + \mu_1 dx_1 + \cdots + \mu_n dx_n = d\psi(t, x_1, \cdots, x_n)$.

则得一首次积分 $\psi(t, x_1, \cdots, x_n) = c$.

本题提醒需注意首次积分的独立性.

9.3.19 解方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t - y}{y - x}, \frac{dy}{dt} = \frac{x - t}{y - x}.$$

解 写成

$$\frac{dt}{y - x} = \frac{dx}{t - y} = \frac{dy}{x - t}.$$

显有 $dt + dx + dy = 0$, 即有首次积分 $x + y + t = c_1$. 又从 $t(y - x) + x(t - y) + y(x - t) \equiv 0$ 得第二个首次积分

$$x^2 + y^2 + t^2 = c_2.$$

9.3.20 求解方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{1 - \sqrt{y - x - t}}, \frac{dy}{dt} = \frac{2}{1 - \sqrt{y - x - t}}.$$

解 今写成 $\frac{dt}{1 - \sqrt{y - x - t}} = \frac{dx}{1} = \frac{dy}{2}$, 则有

$$\frac{d(y - x - t)}{\sqrt{y - x - t}} = \frac{dx}{-1},$$

故解得

$$\psi_1 = 2\sqrt{y - x - t} + x = c_1.$$

又从 $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{2}$, 得 $\psi_2 = 2x - y = c_2$.

9.3.21 求解方程组

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{1}{y}, \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{x - t}.$$

解 写成

$$\frac{dt}{1} = \frac{y dx}{y - 1} = -\frac{(x - t)dy}{1}.$$

从

$$\frac{y(dx - dt)}{-1} = \frac{(x - t)dy}{1}$$

知有

$$-\frac{d(x - t)}{x - t} = \frac{dy}{y},$$

解得

$$\psi_1 = (x - t)y = c_1.$$

由此得

$$\frac{dx}{dt} = 1 - \frac{x - t}{c_1}$$

或 $dx = dt - \frac{x - t}{c_1}dt$, 即

$$\frac{d(x - t)}{x - t} + \frac{dt}{c_1} = 0.$$

解得

$$(x - t)e^{t/c_1} = c_2.$$

解第二个首次积分

$$(x - t)e^{\frac{t}{(x - t)y}} = c_2.$$

9.3.22 解

$$\frac{dt}{2x} = -\frac{dx}{\ln t} = \frac{dy}{\ln t - 2x}.$$

解 由第一等式, 得出

$$x^2 + t(\ln t - 1) = c_1.$$

另一首次积分易见为

$$t + x + y = c_2.$$

9.3.23 求解

$$\frac{dt}{4y - 5x} = \frac{dx}{5t - 3y} = \frac{dy}{3x - 4y}.$$

解 从

$$3(4y - 5x) + 4(5t - 3y) + 5(3x - 4y) \equiv 0$$

得

$$\psi_1 = 3t + 4x + 5y = c_1.$$

又

$$2t(4y - 5x) + 2x(5t - 3y) + 2y(3x - 4y) \equiv 0,$$

故有

$$\psi_2 = t^2 + x^2 + y^2 = c_2.$$

9.3.24 求解

$$\begin{cases} t dx = (t - 2x)dt, \\ t dy = (tx + ty - 2x - t)dt. \end{cases}$$

解 通解为

$$x = \frac{1}{3}t + \frac{1}{t^2}c_2, y = c_1e^t - \frac{t}{3} - \frac{1}{t^2}c_2.$$

9.3.25 求解

$$\frac{t\mathrm{d}t}{x^2-2xy-y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x+y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-y}.$$

解 $\psi_1=x^2+y^2+t^2=c_1;\psi_2=x^2-2xy-y^2=c_2$.

注 组合可积法又可用来求解一阶线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}X_i(x_1,\cdots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_i}=0. \quad ⑦$$

及一阶拟线性偏微分方程

$$\sum_{i=1}^{n}Y_i(x_1,\cdots,x_n;z)\frac{\partial z}{\partial x_i}=Z(x_1,\cdots,x_n;z). \quad ⑧$$

⑦中，$x_1,\cdots,x_n$ 为自变量，u 为待求函数. ⑧中 z 为未知函数，$x_1,\cdots,x_n$ 为自变量. 可设 X_i,Y_i,Z 在某域上具连续偏导数.

对⑦作对称微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{X_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}.$$

设已求得它的 $n-1$ 个独立的首次积分 $\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)=c,j=1,\cdots,n$，则立得⑦的通解

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\Phi(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_{n-1}),$$

此处 Φ 为 $n-1$ 元的任意连续可微函数.

对⑧也作对称微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1}=\frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2}=\cdots=\frac{\mathrm{d}x_n}{Y_n}=\frac{\mathrm{d}z}{Z}.$$

设已求得它的 n 个独立首次积分 $\psi_j(x_1,\cdots,x_n,z)=c_j(j=1,\cdots,n)$，则令 Φ 为一 n 元任意连续可微函数，⑧的通解即可从

$$\Phi(\psi_1,\cdots,\psi_n)=0$$

解出.

9.3.26 解方程

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-2y\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

解 作对称组

$$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}y}{-2y}=\frac{\mathrm{d}z}{-z},$$

得两个独立首次积分

$$\psi_1=xz=c_1,\psi_2=x\sqrt{y}=c_2.$$

原方程通解为

$$u(x,y)=\Phi(xz,x^2y)\quad(\Phi\text{ 为任意函数}).$$

9.3.27 解方程

$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x}+(x-z)\frac{\partial u}{\partial y}+(y-x)\frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

解 作 $\frac{\mathrm{d}x}{z-y}=\frac{\mathrm{d}y}{x-z}=\frac{\mathrm{d}z}{y-x}$，得首次积分

$$\psi_1=x+y+z=c_1,$$
$$\psi_2=x^2+y^2+z^2=c_2.$$

通解为

$$u(x,y)=\Phi(x+y+z,x^2+y^2+z^2).$$

9.3.28 求解 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

解 $u(x,y)=\Phi(x^2+y^2)$.

9.3.29 求方程

$$\sqrt{x}\frac{\partial u}{\partial x}+\sqrt{y}\frac{\partial u}{\partial y}+\sqrt{z}\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

的满足 $u\mid_{z=1}=x-y$ 的解.

解 从

$$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y}}=\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}}$$

解得首次积分

$$\psi_1=\sqrt{x}-\sqrt{z}=c_1,\psi_2=\sqrt{y}-\sqrt{z}=c_2.$$

通解应为

$$u(x,y)=\Phi(\sqrt{x}-\sqrt{z},\sqrt{y}-\sqrt{z}).$$

今应选 Φ，使

$$\Phi(\sqrt{x}-1,\sqrt{y}-1)=x-y.$$

例如，可选 $\Phi(\alpha,\beta)=(\alpha+1)^2-(\beta+1)^2$，故所求解应为

$$u(x,y)=(\sqrt{x}-\sqrt{z}+1)^2-(\sqrt{y}-\sqrt{z}+1)^2.$$

9.3.30 求 $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ 的满足 $z\mid_{x=0}=\varphi(y)$ 之解，φ 为已知函数.

解 已知通解为 $z(x,y)=\Phi(x^2+y^2)$（Φ 为任意函数）. 应选 Φ，使 $\Phi(y^2)=\varphi(y)$. 为此可令 $\Phi(\alpha)=\varphi(\sqrt{\alpha})$，故所要解为

$$z(x,y)=\varphi(\sqrt{x^2+y^2}).$$

注 求特解的标准办法如下：兹以上题及本题为例. 上题中从首次积分 $\psi_1=c_1,\psi_2=c_2$，得 $\overline{\psi}_1=\psi_1\mid_{z=1}=\sqrt{x}-1,\overline{\psi}_2=\psi_2\mid_{z=1}=\sqrt{y}-1$. 解得 $(\overline{\psi}_1+1)^2=x,(\overline{\psi}_2+1)^2=y$，故有

$$u\mid_{z=1}=(\overline{\psi}_1+1)^2-(\overline{\psi}_2+1)^2.$$

最后得解

$$u=(\psi_1+1)^2-(\psi_2+1)^2.$$

以本题为例. 从 $\psi=x^2+y^2$ 得 $\overline{\psi}=y^2$，或 $y=\sqrt{\overline{\psi}}$. 故 $z\mid_{x=0}=\varphi(\sqrt{\overline{\psi}})$，从而得

$$z=\varphi(\sqrt{\psi}).$$

9.3.31 求解

$$xy\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}+x(1+x^2)=0.$$

解 从

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy}=\frac{\mathrm{d}y}{-y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{-x(1+x^2)}$$

解得首次积分

$$\psi_1=xy,\psi_2=2x^2+x^4+4xyz.$$

故通解含于

$$\Phi(xy, 2x^2 + x^4 + 4xyz) = 0 \ (\Phi \text{ 为任意函数})$$

中,或写成

$$2x^2 + x^4 + 4xyz = f(x,y) \ (f \text{ 为任意函数}).$$

故可得

$$z = \frac{1}{4xy}f(xy) - \frac{x}{2y} - \frac{x^3}{4y}.$$

9.3.32 解方程

$$(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2.$$

解 从

$$\frac{dx}{1 + \sqrt{z - x - y}} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$$

解得首次积分

$$\psi_1 = z - 2y, \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y.$$

通解含于

$$F(z - 2y, 2\sqrt{z - x - y} + y) = 0$$

中.

9.3.33 求方程

$$\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - x}{z}$$

的满足 $z|_{x=1} = y^2$ 之解.

解 从

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1} = \frac{dz}{\frac{y - x}{z}}$$

解得首次积分

$$\psi_1 = x + y, \psi_2 = 2xy - z^2.$$

故通解含于

$$\Phi(x + y, 2xy - z^2) = 0 \quad (\Phi \text{ 为任意函数})$$

中,或写成

$$z = \sqrt{2xy + f(x + y)} \quad (f \text{ 为任意函数}).$$

令 $\overline{\psi}_1 = 1 + y, \overline{\psi}_2 = 2y - z^2$,故可写成

$$y = \overline{\psi}_1 - 1, z^2 = 2(\overline{\psi}_1 - 1) - \overline{\psi}_2.$$

现在初始条件 $z = y^2$ 相当于

$$2(\overline{\psi}_1 - 1) - \overline{\psi}_2 = (\overline{\psi}_1 - 1)^4.$$

故从 $2(\psi_1 - 1) - \psi_2 = (\psi_1 - 1)^4$ 可得所求的解为

$$z = \sqrt{(x + y - 1)^4 + 2xy - 2(x + y - 1)}.$$

9.3.34 求方程 $(1 + \sqrt{z - x - y})\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2$ 的满足(1) $z|_{y=0} = 2x$;(2) $z|_{y=0} = x$ 之解.

解 已知 $\psi_1 = z - 2y, \psi_2 = 2\sqrt{z - x - y} + y$.

(1) $\overline{\psi}_1 = z, \overline{\psi}_2 = 2\sqrt{z - x}$,从条件 $z|_{y=0} = 2x$ 得出

$$\overline{\psi}_1 = 2(\overline{\psi}_1 - \frac{1}{4}\overline{\psi}_2^2).$$

所求解应为

$$2z - 4y - (2\sqrt{z - x - y} + y)^2 = 0.$$

(2) 初始条件 $z|_{y=0} = x$ 相当于

$\overline{\psi}_1 - \frac{1}{4}\overline{\psi}_2^2 = \overline{\psi}_1$,或 $\overline{\psi}_2 = 0$,故所求解为 $\psi_2 = 0$,即

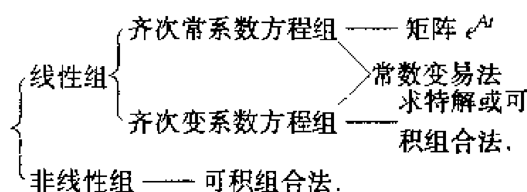
$$2\sqrt{z - x - y} + y = 0,$$

或

$$z = \frac{y^2}{4} + x + y.$$

注 从一阶偏微分方程的讨论可以看出,其基本内容是对称方程组和首次积分,而基本(差不多也是唯一的)方法便是可积组合法.这些内容其实最初都出自经典力学.求解非线性方程可视为这套方法的一次演习.可见,我们讨论的非线性组的求解法其实都属于经典范围.至于近年来发展出来的许多新方法,大都已经超出本书的要求了.

作为总结,对于方程组的求解,我们也用表格表示如下:



附:一阶偏微分方程 —— 可积组合法.

§9.4 二阶线性偏微分方程——特征线法

二阶(两变元)偏微分方程的一般形状是

$$a(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}) = 0. \quad ①$$

根据它的性质和求解方法,我们对之分类如下:设 $a(x,y), b(x,y)$ 及 $c(x,y)$ 是某区域 $D \subset \mathbf{R}^2$ 上具有二阶连续偏导数的函数.

(1) 当

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) > 0, (x,y) \in D$$

时,称 ① 为双曲型;

(2) 当

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) = 0, (x,y) \in D$$

时,称 ① 为抛物型;

(3) 当

$$b^2(x,y) - a(x,y)c(x,y) < 0, (x,y) \in D$$

时,称 ① 为椭圆型.

求解 ① 的第一件事是将之化为正则型,其法如下:

首先求解特征线方程

$$a(x,y)\mathrm{d}y^2-2b(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+c(x,y)\mathrm{d}x^2=0 \quad ②$$

这是一个二次一阶常微分方程,可写成两个方程

$$a\mathrm{d}y-(b+\sqrt{b^2-ac})\mathrm{d}x=0, \quad ③$$

$$a\mathrm{d}y-(b-\sqrt{b^2-ac})\mathrm{d}x=0. \quad ④$$

设已求出 ③ 与 ④ 的通积分

$$\varphi(x,y)=c,\psi(x,y)=c.$$

(1) 对双曲方程($b^2-ac>0$),用新变量(ξ,η)来代替原变量(x,y):

$$\xi=\varphi(x,y),\eta=\psi(x,y). \quad ⑤$$

这时可将原方程 ① 化成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_1(\xi,\eta,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}),$$

这是双曲型方程的正则型.

(2) 对抛物型方程($b^2-ac=0$),这时只得一个通积分 $\varphi(x,y)=c$.今任选一函数 $\eta=\eta(x,y)$,要求它与 φ 在D上为独立,即要求

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y}\\ \frac{\partial\eta}{\partial x} & \frac{\partial\eta}{\partial y}\end{vmatrix}\neq 0,$$

则代换 ⑤ 可将方程 ① 化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_2(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}).$$

这是抛物型方程的正则型.

(3) 对椭圆型方程($b^2-ac<0$),③ 与 ④ 的通积分将为复共轭,它们因此定义了一对虚特征曲线.设 ③ 的通积分是

$$\varphi(x,y)+i\psi(x,y)=c,$$

φ 及 ψ 为其实部与虚部,则用它们来作代换 ⑤,可将 ① 化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_3(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}).$$

这是椭圆型方程的正则型.

要注意的是,在代换 ⑤ 的正则化过程中,宜用下面的计算公式:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(\frac{\partial\xi}{\partial x})^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(\frac{\partial\eta}{\partial x})^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\cdot\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\cdot\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}(\frac{\partial\xi}{\partial y})^2+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}(\frac{\partial\eta}{\partial y})^2+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}(\frac{\partial\xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial x})+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}\frac{\partial\eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\xi}\frac{\partial^2\xi}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\eta}\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}.$$

9.4.1 试将方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

化为正则型.

解 $b^2-ac=x^2y^2>0$,在$(x,y)\neq(0,0)$处.故为双曲型.特征线方程为

$$x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x=0 \quad 及 \quad x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0.$$

得通积分

$$xy=c\ 及\ \frac{y}{x}=c.$$

作代换

$$\xi=xy,\quad \eta=\frac{x}{y}.$$

用 ⑥ 式可得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{y^2}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{y^2}{x^4}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+2\frac{y}{x^3}\frac{\partial u}{\partial\eta};$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

代入方程得正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

9.4.2 将下列方程化为正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2\frac{\partial u}{\partial x}+6\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解 $b^2-ac=4>0$,为双曲型.特征线方程为

$$\mathrm{d}y^2-2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-3\mathrm{d}x^2=0,$$

或

$$(\mathrm{d}y+\mathrm{d}x)(\mathrm{d}y-3\mathrm{d}x)=0.$$

得通积分

$$x+y=c \quad 及 \quad 3x-y=c.$$

作代换

$$\xi=x+y,\eta=3x-y,$$

可算出

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}=1,\frac{\partial\xi}{\partial y}=1,\frac{\partial\eta}{\partial x}=3,\frac{\partial\eta}{\partial y}=-1;$$

及

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+3\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}.$$

又

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+6\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+9\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-3\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}.$$

代入方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

9.4.3　求下面方程之正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　$b^2-ac=-1<0$，为椭圆型. 特征线方程为

$$(2+i)\mathrm{d}x-\mathrm{d}y=0\ (i=\sqrt{-1}).$$

得通积分

$$(2\pm i)x-y=c.$$

作代换

$$\xi=2x-y,\psi=x,$$

可算得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial\xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+4\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}.$$

代入得正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

9.4.4　将下面方程化为正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial x}+\beta\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0$$

(α,β,c 为常数).

解　$b^2-ac=0$，故为抛物型方程. 今特征方程为

$$(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)^2=0.$$

由此得一通积分. 取 $\eta=y$，则

$$\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0.$$

今取

$$\xi=x+y,\quad \eta=y.$$

则可算得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}.$$

代入原方程得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+(\alpha+\beta)\frac{\partial u}{\partial\xi}+\beta\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu=0.$$

9.4.5　将下面方程化为正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\cos x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-(3+\sin^2 x)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　应作代换

$$\xi=2x+\sin x+y,\eta=2x-\sin x-y.$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{\eta-\xi}{32}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

9.4.6　将下面方程化为正则型

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+2x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　应作代换

$$\xi=x^2-y^2,\quad \eta=x^2.$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi-\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

9.4.7　将下面方程化为正则型

$$\mathrm{tg}^2 x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\,\mathrm{tg}x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\mathrm{tg}^3 x\frac{\partial u}{\partial x}=0.$$

解　应作代换

$$\xi=y\sin x,\eta=y,$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

9.4.8　讨论下面方程

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

解　今有 $b^2-ac=-y$. 故当 $y<0$ 时，即在下半平面内，得一双曲型方程；当 $y>0$ 时，即在上半平面内，得一椭圆型方程.

特征方程为

$$y(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}x)^2=0.$$

当 $y>0$ 时，得共轭方程

$$y^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y\pm i\mathrm{d}x=0,$$

及通积分

$$\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}}+ix=c,$$

故应取代换

$$\varphi=x,\psi=\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}},$$

得正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{1}{\xi\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0\ (y>0).$$

对 $y<0$，得特征线方程

$$\pm(-y)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y+\mathrm{d}x=0,$$

故得通积分

$$x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=c,x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}}=c.$$

作代换

$$\xi=x-\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},\eta=x+\frac{2}{3}(-y)^{\frac{3}{2}},$$

得正则型

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\ (y<0).$$

注　本题方程又称混合型.

9.4.9　讨论方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-3y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$
$$-2x\frac{\partial u}{\partial x}+4y\frac{\partial u}{\partial y}+16x^4u=0.$$

解　应作代换

$$\xi=xy,\eta=x^3/y,$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+\frac{1}{4\eta}\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{1}{\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta}+u=0.$$

9.4.10　讨论方程

$$(1+x^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1+y^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　应作代换

$$\xi=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\eta=\ln(y+\sqrt{1+y^2}),$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=0.$$

注　本题方程常称 Laplace 方程.

9.4.11　讨论方程

$$\sin^2x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2y\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

解　应作代换

$$\xi=y\operatorname{tg}\frac{x}{2},\eta=y,$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\frac{\partial u}{\partial\xi}=0.$$

9.4.12　讨论方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\alpha\frac{\partial u}{\partial y}=0\ (\alpha\text{ 为常数}).$$

解　$b^2-ac=-y\begin{cases}>0\text{ 下半面},\\<0\text{ 上半面},\end{cases}$

故为一混合型方程. $y>0$ 时,应作代换

$$\xi=x,\eta=2\sqrt{y},$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{2\alpha-1}{\eta}\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

$y<0$ 时,应作代换

$$\xi=x-2\sqrt{-y},\eta=x+2\sqrt{-y},$$

正则型为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{\alpha-\frac{1}{2}}{\xi-\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}-\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0.$$

9.4.13　解下面方程

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$+y\frac{\partial u}{\partial y}=0\ (y\neq 0).$$

解　$b^2-ac=0$,故为抛物型.特征线方程为

$$(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y)^2=0.$$

故可选代换

$$\xi=xy,\eta=y.$$

今有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial y}=x\frac{\partial u}{\partial\xi}+\frac{\partial u}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=y^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2x\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=xy\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}.$$

正则型为(注意 $\eta=y\neq 0$)

$$\eta\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+\frac{\partial u}{\partial\eta}=0.$$

对 η 进行积分,得

$$\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{1}{\eta}\varphi(\xi).$$

(其中 φ 为 ξ 之任意函数).再对 η 进行积分,得

$$u=\ln\eta\cdot\varphi(\xi)+\psi(\xi),$$

$\psi(\xi)$ 为 ξ 之另一任意函数.回到原变量 (x,y),得原方程之通解

$$u(x,y)=\varphi(xy)\ln y+\psi(xy).$$

9.4.14　求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\sin x\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\cos^2y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-\cos x\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　特征线为

$$x+y-\cos x=c,x-y+\cos x=c.$$

可算出通解为

$$u(x,y)=\varphi(x+y-\cos x)+\psi(x-y+\cos x).$$

其中 φ 及 ψ 为任意函数.

9.4.15　求解方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial y}\right)=x^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

解　作代换 $v=ux$,化为 v 的方程,今有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{x^2}\left[\frac{\partial v}{\partial x}x-v\right],\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

代入原方程得

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial v}{\partial x}-v\right)=x\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$$

或

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

出此可得通解

$$u(x,y)=\frac{1}{x}(\varphi(x-y)+\psi(x+y)),$$

φ,ψ 为任意函数.

9.4.16　求解

$$(x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=0.$$

解　作代换 $v=(x-y)u$,化为 v 的方程,最后可得通解

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}(\varphi(x)-\psi(y))$$

(φ,ψ 为任意函数).

9.4.17　求解

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2yz\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}+z^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+2zx\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}=0.$$

解　本题为三变量方程,作代换 $(x,y,z)\to(\xi,\eta,\zeta)$ 如下:

$$\xi=\frac{y}{x},\eta=\frac{z}{x},\zeta=z-y.$$

最后可得通解为

$$u(x,y,z)=(z-y)\varphi(\frac{y}{x},\frac{z}{x})+\psi(\frac{y}{x},\frac{z}{x})$$ (φ,ψ 为任意函数).

9.4.18　求解方程

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0.$$

解　本题为四阶方程.作代换

$$\xi=x+y,\eta=x-y,$$

可解得通解

$$u(x,y)=(x-y)f_1(x+y)+(x+y)f_2(x-y)+f_3(x-y)+f_4(x+y),$$

其中 f_1,f_2,f_3 及 f_4 为任意函数.

9.4.19　设常数 a_{11},a_{12},a_{22} 满足 $a_{11}\cdot a_{22}=a_{12}^2$,求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2a_{21}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

解　本题为三变量方程,仍用正则化(右端)方法,可得通解

$$u(x,y,t)=\varphi(x+\sqrt{a_{11}}t,y+\sqrt{a_{22}}t)+\psi(x-\sqrt{a_{11}}t,y-\sqrt{a_{22}}t),$$

其中 φ,ψ 为任意函数.

9.4.20　证明:方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{n}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{m}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$ (n,m 为自然数)

具有下形之通解,其中 $X(x),Y(y)$ 为任意函数.

$$u(x,y)=\frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\partial y^{n-1}}[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}]$$

解　将方程

$$(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

(9.4.16题)对 x,y 分别求导 $(m-1)$ 次及 $(n-1)$ 次即可.

9.4.21　求解方程

$$\frac{\partial u}{\partial x\partial y}-\frac{2}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{3}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{3}{(x-y)^2}u=0.$$

解　用 $v=(x-y)u$ 化简方程,可得通解

$$u(x,y)=\frac{1}{x-y}\frac{\partial}{\partial x}[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}],$$

其中 $X(x)$ 及 $Y(y)$ 为任意函数.

9.4.22　证明:方程

$$E(\alpha,\beta)=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}-\frac{\beta}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\alpha}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

(α,β 为常数,$0<\alpha,\beta<1,\alpha+\beta\neq 1$),有下面形状之通解

$$u(x,y)=(y-x)^{1-\alpha-\beta}\int_0^1\varphi[x+(y-x)t]t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}dt+\int_0^1\psi[x+(y-x)t]t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt.$$

解　注意,原方程 $E(\alpha,\beta)=0$ 有特解 $(a-x)^{-\alpha}(y-a)^{-\beta}$($a$ 为常数);如令 $\varphi(z)$ 为任意函数,则

$$u(x,y)=\int_x^y\varphi(z)(z-x)^{-\alpha}(y-z)dz$$

也是原方程 $E(\alpha,\beta)=0$ 之解.

以下记 $Z(\alpha,\beta)$ 为 $E(\alpha,\beta)=0$ 之解,则简单计算可证明

$$Z(\alpha,\beta)=(y-x)^{1-\alpha-\beta}Z(1-\beta,1-\alpha).\qquad(*)$$

令函数

$$\int_x^y\psi(z)(z-x)^{\beta-1}(y-z)^{\alpha-1}dz$$

(ψ 为任意函数)为 $E(1-\beta,1-\alpha)=0$ 之解.依据 $(*)$ 式,$E(\alpha,\beta)=0$ 又有新的解

$$(y-x)^{1-\alpha-\beta}\int_x^y\psi(z)(z-x)^{\beta-1}(y-z)^{\alpha-1}dz.$$

最后得原方程通解

$$u(x,y)=\int_x^y\varphi(z)(z-x)^{-\alpha}(y-z)^{-\beta}dz+(y-x)^{1-\alpha-\beta}\int_x^y\psi(z)(z-x)^{\beta-1}(y-z)^{\alpha-1}dz.$$

再用代换 $z=x(1-t)+yt$,可将上式化为题设表达式.

9.4.23　证明:方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{n}{x-y}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{m}{x-y}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

有下面形状通解($X(x)$ 及 $Y(y)$ 为任意函数):

$$u(x,y)=(x-y)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right].$$

解 用上题(*)式(取 $\alpha=\alpha'+m,\beta=\beta'+n$),并注意显然的等式

$$Z(\alpha'+m,\beta'+n)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}Z(\alpha',\beta'),$$

可得

$$(x-y)^{1-m-n-\alpha'-\beta'}Z(1-\beta'-n,1-\alpha'-m)=\frac{\partial^{m+n}Z(\alpha',\beta')}{\partial x^m\partial y^n}.$$

再用一次(*)式,

$$(x-y)^{1-m-n-\alpha'-\beta'}Z(1-\beta'-n,1-\alpha'-m)=\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[\frac{Z(1-\beta',1-\alpha')}{(x-y)^{\alpha'+\beta'-1}}\right].$$

今代 α',β',m,n 以 $1-\beta',1-\alpha',n,m$,得

$$Z(\alpha'-m,\beta'-n)=(x-y)^{m+n+1-\alpha'-\beta'}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\partial y^n}\left[\frac{Z(\alpha',\beta')}{(x-y)^{1-\alpha'-\beta'}}\right].$$

最后令 $\alpha'=\beta'=0$,可得

$$Z(-m,-n)=(x-y)^{m+n+1}\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^n\partial y^m}\left[\frac{X(x)-Y(y)}{x-y}\right].$$

9.4.24 解下面初始问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-3\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\\ u\mid_{y=0}=3x^2,\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=0.\end{cases}$$

解 可解得通解形为

$$u(x,y)=\varphi(x+y)+\psi(3x-y).$$

今用初始条件确定任意函数 φ 及 ψ.

今有

$$\varphi(x)+\psi(3x)=3x^2,\varphi'(x)-\psi'(3x)=0.$$

由前一式得 $\varphi'(x)+3\psi'(3x)=6x$,故得出 $\varphi'(x)=\frac{3}{2}x$,以 X 及 Y 分别记 φ 及 ψ 的自变量,解得

$$\varphi(X)=\frac{3}{4}X^2+C\ (C\text{为任意常数}).$$

故得

$$\psi(Y)=\frac{1}{3}Y^2-\varphi\left(\frac{Y}{3}\right)=\frac{1}{4}Y^2-C.$$

故最后得解为

$$u(x,y)=\frac{3}{4}(x+y)^2+\frac{1}{4}(3x-y)^2$$

或

$$u(x,y)=3x^2+y^2.$$

9.4.25 求下面初值问题之解

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2\cos x\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-\sin^2x\frac{\partial^2u}{\partial y^2}-\sin x\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$u\mid_{y=\sin x}=\varphi_0(x),\frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=\sin x}=\varphi_1(x).$$

解 双曲型方程.正则代换

$$\xi=x-\sin x+y,\eta=x+\sin x-y$$

将方程化为

$$u_{\xi\eta}=0.$$

故得通解为

$$u(x,y)=X(x-\sin x+y)+Y(x+\sin x-y),$$

X,Y 为任意函数,初条件给出

$$X(x)+Y(x)=\varphi_0(x),X'(x)-Y'(x)=\varphi_1(x),$$

由此解得

$$X(z)=\frac{1}{2}\varphi_0(z)+\frac{1}{2}\int_0^z\varphi_1(s)ds+C,$$

$$Y(z)=\frac{1}{2}\varphi_0(z)-\frac{1}{2}\int_0^z\varphi_1(s)ds-C.$$

故得所求解为

$$u(x,y)=\frac{1}{2}(\varphi_0(x-\sin x+y)+\varphi_0(x+\sin x-y))+\frac{1}{2}\int_{x+\sin x-y}^{x-\sin x+y}\varphi_1(s)ds.$$

9.4.26 求下列问题之解

$$(1+x^2)\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-(1+y^2)\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0,$$

$$u\mid_{y=0}=\varphi_0(x),\frac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=\varphi_1(x).$$

解 所求解为

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left(\varphi_0\left(\frac{\alpha^2-1}{2\alpha}\right)+\varphi_0\left(\frac{\beta^2-1}{2\beta}\right)\right)-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\frac{1}{s}\varphi_1\left(\frac{s^2-1}{2s}\right)ds,$$

其中

$$\alpha=(x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2}),$$

$$\beta=\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}.$$

9.4.27 求解

$$\begin{cases}x^2\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-2xy\dfrac{\partial^2u}{\partial x\partial y}-3y^2\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}=0,\\ u\mid_{y=1}=\varphi_0(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=1}=\varphi_1(x).\end{cases}$$

解 所求解为

$$u(x,y)=\frac{3}{4}\varphi_0(x\sqrt[3]{y})+\frac{1}{4}y\varphi_0\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{3}{16}\sqrt[3]{x^4y}\int_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y}\varphi_0(x)x^{-\frac{7}{4}}dx-\frac{3}{4}\sqrt[4]{x^3y}\int_{x\sqrt[3]{y}}^{x/y}\varphi_1(x)x^{-\frac{7}{4}}dx.$$

9.4.28 证明下列问题有唯一解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}+y\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial y}=0\ (y<0),\\ u\mid_{y=0}=\tau(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}\text{为有界值}.\end{cases}$$

解 方程有通解

$$u(x,y)=X(x-2\sqrt{-y})+Y(x+2\sqrt{-y}).$$

由此可得所求解

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\tau(x-2\sqrt{-y})+\tau(x+2\sqrt{-y})]\quad(y<0).$$

9.4.29 求解下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}-y^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\\ u\mid_{y=0}=\varphi_0(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=\varphi_1(x).\end{cases}$$

解 化为正则型,再用9.4.22题($\alpha=\frac{1}{8},\beta=\frac{3}{8}$),可得所求解为

$$u(x,y)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{y}{\Gamma(\frac{7}{8})\Gamma(\frac{5}{8})}$$
$$\times\int_0^1\varphi_1[x+y^2(s-\frac{1}{2})]s^{-\frac{1}{8}}(1-s)^{-\frac{3}{8}}\mathrm{d}s$$
$$+\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\frac{3}{8})\Gamma(\frac{1}{8})}$$
$$\times\int_0^1\varphi_0[x+y^2(s-\frac{1}{2})]s^{-5/8}(1-s)^{-7/8}\mathrm{d}s,$$

其中 $\Gamma(s)$ 为 Γ- 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x.$$

9.4.30 求解下列初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^4}-2\dfrac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0,\\ u\mid_{y=0}=\tau(x),\dfrac{\partial u}{\partial y}\mid_{y=0}=\rho(x),\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\mid_{y=0}=\rho_1(x),\dfrac{\partial^3 u}{\partial y^3}\mid_{y=0}=\rho_2(x).\end{cases}$$

解 用9.4.18题之通解形式,可得所求解为

$$\begin{aligned}u(x,y)=&4[\tau(x+y)+\tau(x-y)]\\&-2y[\tau'(x+y)-\tau'(x-y)]\\&-2y[\rho(x+y)+\rho(x-y)]\\&+6\int_{x-y}^{x+y}\rho(s)\mathrm{d}s+2y\int_{x-y}^{x+y}\rho_1(s)\mathrm{d}s\\&-\int_{x-y}^{x+y}[(x-s)^2-y^2]\rho2(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

9.4.31 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

之一解,要求解在特征线 $t+x=0$ 的 OA 段上(图9.2),

$$u(x,t)=\varphi(x);$$

在特征线 $t-x=0$ 的

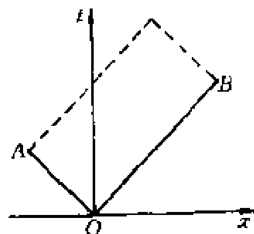


图 9.2

OB 段上,

$$u(x,t)=\psi(x),$$

且满足 $\varphi(0)=\psi(0)$

解 利用方程通解

$$u(x,t)=X(x-t)+Y(x+t),$$

可得

$$u(x,y)=\varphi(\frac{x-t}{2})+\psi(\frac{x+t}{2})-\varphi(0).$$

9.4.32 求方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=0\ (y<0)$$

的解,要求解在特征线 $L_1:x-2\sqrt{-y}=0$ 及 $L_2:x+2\sqrt{-y}=1$ 的段 OB 及 AB 上(图9.3),分别取值

$$u(x,y)\mid_{L_1}=\varphi_1(x),0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},$$
$$u(x,y)\mid_{L_2}=\varphi_2(x),\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,$$

且 $\varphi_1(\frac{1}{2})=\varphi_2(\frac{1}{2})$.

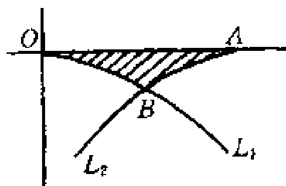


图 9.3

解 用通解形式

$$u(x,y)=X(x-2\sqrt{-y})+Y(x+2\sqrt{-y})\quad(y<0),$$

可得所求之解为

$$u(x,y)=\varphi_1(\frac{1}{2}(x+2\sqrt{-y}))+\varphi_2(\frac{1}{2}(x-2\sqrt{-y}+1))-\varphi_1(\frac{1}{2}).$$

9.4.33 求方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\rho a\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial t}=-\frac{a}{\rho}\frac{\partial u}{\partial x}$$

的满足初始条件

$$u\mid_{t=0}=0,v\mid_{t=0}=0\ (0\leqslant x\leqslant l)$$

及边条件

$$u\mid_{x=0}=0,v\mid_{x=l}=a(t)(1+\beta u)-1\ (t\geqslant 0)$$

的解,其中 a,β,ρ 为常数,$a(t)$ 为给定函数.

解 求导后可将问题化为 u 与 v 的二阶方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0.$$

由此可得所要的解为

$$\begin{cases} u(x,t) = \varphi(t - \frac{x}{\alpha}) - \varphi(t + \frac{x}{\alpha}), \\ v(x,t) = \frac{1}{\rho}[\varphi(t - \frac{x}{\alpha}) + \varphi(t + \frac{x}{\alpha})], \end{cases}$$

其中 $\varphi(x) \equiv 0$. 在$(-\frac{l}{\alpha}, \frac{l}{\alpha})$ 中,又

$$\varphi(t + \frac{l}{\alpha}) = \frac{\rho[\alpha(t) - 1]}{1 + \beta\rho\alpha(t)} + \frac{\beta\rho\alpha(t) - 1}{\beta\rho\alpha(t) + 1}\varphi(t - \frac{l}{\alpha})$$

§9.5 二阶线性偏微分方程——分离变量法

设 $\rho(x), p(x), q(x)$ 为充分光滑的函数($\rho(x) > 0, p(x) > 0, q(x) \geqslant 0$),求方程

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u \quad ①$$

的非零解,要求满足边值条件

$$\left.\begin{aligned} \alpha u(0,t) + \beta\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0 \\ \gamma u(l,t) + \delta\frac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0 \end{aligned}\right\} \quad ②$$

及初始条件

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \varphi_1(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \quad ③$$

其中 $l, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ 为常数,$\varphi_0(x), \varphi_1(x)$ 为已知函数.

设所求解具下面形状:

$$u(x,t) = T(t)X(x). \quad ④$$

将 ④ 代入 ①,得

$$\rho T''(t)X(x) = T(t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)T(t)X(x),$$

或

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

其中 λ 为某常数.

由此得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}x}\right] + [\lambda\rho(x) - q(x)]X = 0, \quad ⑤$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \quad ⑥$$

因 $T(t) \not\equiv 0$,故为使函数 ④ 满足边值条件 ②,充分必要条件是下面条件成立:

$$\left.\begin{aligned} \alpha X(0) + \beta X'(0) = 0 \\ \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0 \end{aligned}\right\} \quad ⑦$$

这样,为求函数 $X(x)$,等价于求解下面的常微分方程的边值问题:

求值 λ(称为特征值),使方程 ⑤ 存在非零解,满足边值条件 ⑦;求出这些非零解(称为特征函数).

常微分方程理论已经证明下面一些结论:

(1) 存在特征值的可数集 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_m < \cdots$ 对应于特征函数 $X_1(x), X_2(x), \cdots$

(2) $q \geqslant 0$ 蕴含特征值 λ_n 为正.

(3) 在区间$[0,l]$上,特征函数构成一个权为 $\rho(x)$ 的标准正交组:

$$\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ 1 & m = n. \end{cases} \quad ⑧$$

(4) 每一满足边值条件 ⑦ 的具有二阶连续导数的函数 $f(x)$,都可按特征函数 $X_n(x)$ 展开成绝对一致收敛的级数:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

$$c_n = \int_0^1 \rho(x)X_n(x)f(x)\mathrm{d}x.$$

对每一 $\lambda = \lambda_n$,方程 ⑤ 的通解 $T_n(t)$ 为

$$T_n(t) = A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t,$$

A_n, B_n 为任意常数. 由此得到方程 ① 的下面形状的解的无限集

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = (A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x).$$

今作级数

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}t + B_n\sin\sqrt{\lambda_n}t)X_n(x) \quad ⑨$$

假设此级数,连同它的关于 x 及 t 的两次逐项求导得到的级数都为一致收敛,则此级数和应满足方程 ① 及边值条件 ②.

为使初始条件 ③ 满足,应有

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi_0(x), \quad ⑩$$

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\lambda_n}B_n X_n(x) = \varphi_1(x). \quad ⑪$$

设级数 ⑩ 及 ⑪ 为一致收敛,则乘 ⑩ 及 ⑪ 两边以 $\rho(x)X_n(x)$,并对 x 从0到 l 积分,即可确定系数 A_n, B_n. 依 ⑧ 式,我们得到

$$A_n = \int_0^l \rho(x)\varphi_0(x)X_n(x)\mathrm{d}x,$$

$$B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x)X_n(x)\mathrm{d}x.$$

将上述值代入级数 ⑨,便得到所要的解.

9.5.1 解下面问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,\\ u(x,0)=\dfrac{4hx(l-x)}{l^2},\dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\\ \qquad(0\leqslant x\leqslant l)\end{cases}$$

其中 a,h,l 为常数.

解 双曲方程.所求解为

$$u(x,y)=\frac{32h}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^3},$$

其中 $h=u(\frac{l}{2},0)$.

9.5.2 求解下面问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$u(0,t)=0,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,$$
$$u(x,0)=\frac{hx}{l},\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=0.$$

其中 a,h,l 为常数.

解 双曲方程.所求解为

$$u(x,t)=\frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

9.5.3 求解下列问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$
$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,\frac{\partial u(l,t)}{\partial x}=0,$$
$$u(x,0)=\varphi_0(x),\frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x),$$
$$(0<x<l)$$

其中 a,l 为常数,φ_0,φ_1 为已知函数.

解 双曲方程.所求解为

$$u(x,t)=\frac{1}{l}\int_0^l[\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)]dx$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi at}{l}+b_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi x}{l},$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\varphi_1(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx.$$

9.5.4 求解下面问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}-\dfrac{2h_1}{T_0}u\right|_{x=0}=0,\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{2h_2}{T_0}u\right|_{x=l}=0,\\ u(x,0)=\varphi_0(x),\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x).\end{cases}$$

其中 a,h_1,h_2,l 及 T_0 为常数,φ_0,φ_1 为已知函数.

解 所求解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\mu_n at}{l}+b_n\sin\frac{\mu_n at}{l}\right)X_n(x),$$

其中

$$a_n=\frac{\int_0^l\varphi_0(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},$$
$$b_n=\frac{l}{\mu_n a}\frac{\int_0^l\varphi_1(x)X_n(x)dx}{\int_0^l X_n^2(x)dx},$$
$$X_n(x)=\cos\frac{\mu_n x}{l}+\frac{2h_1 l}{T_0\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l},$$

又 $\mu_1,\mu_2,\mu_3,\cdots$ 为下面方程之根

$$\operatorname{ctg}\mu=\alpha\left(\frac{\mu}{l}-\frac{\varphi h_1h_2 l}{T_0{}^2\mu}\right)\left(\alpha=\frac{T_0}{2(h_1+h_2)}\right).$$

9.5.5 求解下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}+2h\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(0,t)=0,u(l,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi_0(x),\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\varphi_1(x).\end{cases}$$

其中 h,a,l 为常数,φ_0,φ_1 为已知函数.

解 为双曲方程.所求解为

$$u(x,t)=e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos q_n t+b_n\sin q_n t),$$

其中

$$q_n=\sqrt{\frac{n^2a^2\pi^2}{l^2}-h^2}.$$

又

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{h}{q_n}a_n+\frac{2}{lq_n}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

9.5.6 在零初值及零边值条件下,求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\operatorname{sh}x.\quad(a,b\text{ 为常数})$$

解 本问题可化为求形为 $u(x,t)=v(x)+w(x,t)$ 之解,其中 $v(x)$ 为方程 $a^2v''(x)+b\operatorname{sh}x=0$ 的满足边条件 $v(0)=v(l)=0$ 之解,而 w 为下列问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2},\\ w(0,t)=0,w(l,t)=0,\\ w(x,0)=-v(x),\dfrac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0.\end{cases}$$

由此得所要之解

$$u(x,t)=\frac{b}{a^2}\left(\frac{x}{l}\operatorname{sh}l-\operatorname{sh}x\right)$$

$$+\frac{2b}{a^2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$-\frac{2b\pi\operatorname{sh}l}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2\pi^2+l^2}\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

9.5.7　在零初值条件及边值条件

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0$$

下,求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+bx(x-l),$$

其中 b,l 为常数.

解　同上法,所求解为

$$u(x,t)=-\frac{bx}{12}(x^3-2x^2l+l^3)$$

$$+\frac{8l^4}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi at}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5}.$$

9.5.8　在零初条件及边界条件

$$u(0,t)=A,u(l,t)=0$$

之下,求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2h\frac{\partial u}{\partial t}-b^2u=0,$$

其中 a,h,b,A,l 为常数.

解　仍为双曲方程.所求解为

$$u(x,t)=A\frac{\operatorname{sh}b(l-x)}{\operatorname{sh}bl}$$

$$-2Ae^{-\mu t}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi}{b^2l^2+k^2\pi^2}\left(\operatorname{ch}n_kt+\frac{\mu}{n_k}\operatorname{sh}n_kt\right)\sin\frac{k\pi x}{l},$$

其中

$$\mu=\frac{h}{a^2},n_k=\frac{1}{a^2l}\sqrt{h^2l^2-a^2(b^2l^2+k^2\pi^2)}.$$

9.5.9　求解下列问题:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

$$u\mid_{x=0}=u\mid_{x=b}=u\mid_{y=0}=u\mid_{y=b}=0,$$

$$u\mid_{t=0}=Axy(b-x)(b-y),\frac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}=0.$$

其中 a,b,A 均为常数.

解　所求解为

$$u(x,y,t)$$

$$=\frac{64Ab^4}{\pi^6}\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{b}\sin\frac{(2m+1)\pi y}{b}}{(2n+1)^3(2m+1)^3}$$

$$\times\cos\sqrt{(2n+1)^2+(2m+1)^2}\,\frac{a\pi t}{b}.$$

9.5.10　求解方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

边值条件为

$$u\mid_{x=0}=u\mid_{x=l}=u\mid_{y=0}=u\mid_{y=m}=0,$$

又 $u(x,y,0)=0,\frac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0}$ 之值,除去 $x=\frac{l}{2},y=\frac{m}{2}$ 的一个甚小邻域外处处为零.

解　所求解为

$$u(x,y,t)$$

$$=\frac{4A}{a\pi ml}\sum_{k,p=1}^{\infty}\frac{\psi_{kp}\left(\frac{l}{2},\frac{m}{2}\right)}{\mu_{kp}}\psi_{kp}(x,y)\sin\mu_{kp}\pi at,$$

其中

$$\psi_{kp}(x,y)=\sin\frac{k\pi x}{l}\sin\frac{p\pi y}{m},$$

$$\mu_{kp}=\sqrt{\left(\frac{k}{l}\right)^2+\left(\frac{p}{m}\right)^2}.$$

9.5.11　求解下列问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},0<x<l,t>0,\\ u(0,t)=u(l,t)=0,t>0,\\ u(x,0)=\begin{cases}x,当0<x\leqslant\frac{l}{2},\\ l-x,当\frac{l}{2}\leqslant x<l.\end{cases}\end{cases}$$

解　本题为抛物型方程.所求解为

$$u(x,t)$$

$$=\frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}e^{-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

9.5.12　求解下面问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ u(0,t)=0,\frac{\partial u}{\partial x}+Hu\mid_{x=l}=0,\\ u(x,0)=f(x),\end{cases}$$

其中 $a,l,H>0$ 为常数,$f(x)$ 为已知函数.

解　抛物型方程.所求解为

$$u(x,t)$$

$$=\frac{2}{l}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{p^2+\mu_n^2}{p(p+1)+\mu_n^2}e^{-\frac{\mu_n^2a^2t}{l^2}}\sin\frac{\mu_nx}{l}$$

$$\times\int_0^l f(x)\sin\frac{\mu_nx}{l}\mathrm{d}x,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\cdots$ 为下面方程的正根

$$\operatorname{tg}\mu=-\frac{\mu}{p},p=Hl>0.$$

9.5.13　求解下面问题

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,u(l,t)=u_0,u(x,0)=\varphi(x).\end{cases}$$

其中 a,l,u_0 为常数,$\varphi(x)$ 为已知函数.

解　可将所求解写成 $u(x,t)=u_0+v(x,t)$,最

后得所求解为

$$u(x,t)=u_0+\sum_{n=0}^{\infty}a_n e^{-a^2\lambda_n^2 t}\cos\lambda_n x,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\mathrm{d}x-\frac{(-1)^n 4u_0}{\pi(2n+1)},$$

$$\lambda_n=\frac{(2n+1)\pi}{2l}.$$

9.5.14　求解下列问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2},\\ k\dfrac{\partial u}{\partial x}+q\ \Big|_{x=-R}=0,\ -k\dfrac{\partial u}{\partial x}+q\ \Big|_{x=R}=0,\\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x}=0,u(x,0)=0,\end{cases}$$

其中 a,k,q,R 为常数.

解　所求解为

$$u(x,t)=\frac{a^2q}{kR}\left(t-\frac{R^2-3x^2}{6a^2}\right)-\frac{2qR}{k\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{R}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{R^2}t}.$$

9.5.15　求解下面问题

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-b^2u,$$

$$u(0,t)=u_0,u(l,t)=u_1,u(x,0)=f(x),$$

其中 a,b,l,u_0,u_1 为常数,$f(x)$ 为已知函数.

解　求形为 $u=v+w$ 之解,其中 v 为方程

$$a^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}-b^2v=0$$

之解.满足边值条件 $v(0)=u_0,v(l)=u_1,w$ 为下面问题之解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-b^2w\\ w(0,t)=0,w(l,t)=0,\\ w(x,0)=f(x)-v(x).\end{cases}$$

由此可得所求解为

$$u(x,t)=\frac{u_1\mathrm{sh}\frac{b}{a}x-u_0\mathrm{sh}\frac{b}{a}(x-l)}{\mathrm{sh}\frac{b}{a}l}+\frac{2\pi}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{(-1)^nu_1-u_0}{\lambda_n^2}e^{-a^2\lambda_n^2t}\sin\frac{n\pi x}{l}+\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-a^2\lambda_n^2t}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,$$

其中

$$\lambda_n^2=\frac{n^2\pi^2}{l^2}+\frac{b^2}{a^2}.$$

9.5.16　求方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的满足边值条件

$$u(0,t)=0,u(l,t)=0(t>0)$$

及初值条件

$$u\ |_{t=0}=f(x)\ (0\leqslant x\leqslant l)$$

之解.其中 a,l 为常数,$f(x)$ 为已知函数.

解　设 $T(x,t)$ 是方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

的解,则函数 $u(x,t)=-2a^2\dfrac{\partial T}{\partial x}/T$ 应为方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

之解.今将 T 写成

$$T(x,t)=c(t)e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(r,t)\mathrm{d}r}.$$

令 $t=0$,得

$$T(x,0)=c_0e^{-\frac{1}{2a^2}\int_0^x u(x,0)\mathrm{d}x}=T_0(x).\qquad(*)$$

又从边值条件,及上述 u 与 T 的关系,知

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x}=\frac{\partial T(l,t)}{\partial x}=0.\qquad(**)$$

因此现在可在(*)及(**)的条件下求解方程

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

求解后,代入 u 与 T 之关系,最后得所求解为

$$u(x,t)=\frac{2a^2\pi}{l}\frac{\sum\limits_{n=1}^{\infty}nA_n\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}t}}{A_0+\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t}},$$

其中,

$$A_0=\frac{1}{l}\int_0^l T_0(x)\mathrm{d}x,A_n=\frac{2}{l}\int_0^l T_0(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x.$$

注　本题为二阶非线性方程.

9.5.17　在矩形 $D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 上求解 Laplace 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

要求满足边条件:

$$u\ |_{x=0}=\varphi_0(y),u\ |_{x=a}=\varphi_1(y)\quad(0\leqslant y\leqslant b);$$

$$u\ |_{y=0}=\psi_0(y),u\ |_{y=b}=\psi_1(y)\quad(0\leqslant y\leqslant a),$$

且

$$\varphi_0(0)=\psi_0(0),\varphi_0(b)=\psi_1(0),$$

$$\varphi_0(0)=\psi_1(a),\varphi_1(b)=\psi_1(a).$$

最后,对特例

$$\varphi_0(y)=Ay(b-y),\psi_0(x)=B\sin\frac{\pi x}{a},$$

$$\varphi_1(y)=\psi_1(x)=0$$

求出解($\varphi_0,\varphi_1,\psi_0,\psi_1$ 为已知函数,a,b,A,B 为常数).

解 将问题分两部分:

(1) 求满足边界条件

$$u_1(0,y)=\varphi_0(y),u_1(a,y)=\varphi_1(y),$$
$$u_1(x,0)=0,u_1(x,b)=0$$

之解 $u_1(x,y)$.

(2) 求满足边界条件

$$u_2(0,y)=0,u_2(a,y)=0,$$
$$u_2(x,0)=\psi_0(x),u_2(x,b)=\psi_1(x)$$

之解 $u_2(x,y)$.

则 $u(x,y)=u_1+u_2$ 为所要之解,结果为

$$u=\frac{2}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname{sh}\frac{n\pi(a-x)}{b}\int_0^b\varphi_0(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y$$
$$+\operatorname{sh}\frac{n\pi x}{b}\int_0^b\varphi_1(y)\sin\frac{n\pi y}{b}\mathrm{d}y\Big]\frac{\sin\frac{n\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}}$$
$$+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\operatorname{sh}\frac{n\pi(b-y)}{a}\int_0^a\psi_0(x)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x$$
$$+\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}\int_0^a\psi_1(y)\sin\frac{n\pi x}{a}\mathrm{d}x\Big]\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\operatorname{sh}\frac{n\pi b}{a}}.$$

特殊情况之解为

$$u(x,y)=B\frac{\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$+\frac{8Ab^2}{\pi^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi(a-x)}{b}}{(2n+1)^3}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi y}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi a}{b}}$$

9.5.18 在半带域 $0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y<\infty$ 上求 Laplace 方程的满足边值条件

$$u(0,y)=0,u(a,y)=0,u(x,0)=A\left(1-\frac{x}{a}\right),$$
$$u(x,\infty)=0\ (0\leqslant x\leqslant a)$$

之解,其中 a,A 为常数.

解 所求解为

$$u(x,y)=\frac{2A}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

9.5.19 在圆环$1\leqslant r\leqslant 2$ 内求满足边条件

$$u\mid_{r=1}=0,u\mid_{r=2}=Ay$$

之调和函数.

解 化成极坐标,可得

$$u(r,\theta)=\frac{8A}{3}\operatorname{sh}\ln r\cdot\sin\theta.$$

9.5.20 在环域(内、外圆半径为 R_1 及 R_2,中心在原点)中求解 Laplace 方程的 Dirichlet 问题. 再考虑环域为圆的极限情形.

解 化为极坐标,可得

$$r^2\frac{\partial^2u}{\partial r^2}+r\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}=0.$$

边界条件为

$$u(r,\theta+2\pi)=u(r,\theta),u(R_1,\theta)=f_1(\theta),$$
$$u(R_2,\theta)=f_2(\theta),$$

其中 $f_1(\theta)$ 及 $f_2(\theta)$ 为可展成 Fourier 级数的已知函数. 最后可得

$$u(r,\theta)=\frac{\alpha_0^{(2)}-\alpha_0^{(1)}}{\ln R_2-\ln R_1}\ln r+\frac{\alpha_0^{(1)}\ln R_2-\alpha_0^{(2)}\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(R_1^nR_2^{-n}-R_1^{-n}R_2^n)^{-1}\times\{[(\alpha_n^{(1)}R_2^{-n}$$
$$-\alpha_n^{(2)}R_1^{-n})r^n-(\alpha_n^{(1)}R_2^n-\alpha_n^{(2)}R_1^n)r^{-n}]\cos n\theta$$
$$+[(\beta_n^{(1)}R_2^{-n}-\beta_n^{(2)}R_1^{-n})r^n$$
$$-(\beta_n^{(1)}R_2^n-\beta_n^{(2)}R_1^n)r^{-n}]\sin n\theta\}.$$

其中

$$\alpha_0^{(1)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\theta)\mathrm{d}\theta,\alpha_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$\beta_n^{(1)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_1(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta;$$
$$\alpha_0^{(2)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\theta)\mathrm{d}\theta,\alpha_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\theta)\cos n\theta\mathrm{d}\theta,$$
$$\beta_n^{(2)}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f_2(\theta)\sin n\theta\mathrm{d}\theta.$$

对圆的极限情形,解为

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{R^2-r^2}{R^2-2Rr\cos(t-\theta)+r^2}\mathrm{d}t$$

9.5.21 求解同一环域内的边值问题,边值条件改为

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R_1}=f_1(\theta),u\Big|_{r=R_2}=f_2(\theta).$$

解 以 $\alpha_0^{(1)},\alpha_0^{(2)},\alpha_k^{(1)},\alpha_k^{(2)},\beta_k^{(1)}$ 及$\beta_k^{(2)}$ 记上题同一公式,则所求解为

$$u(r,\theta)=\alpha_0^{(2)}+\alpha_0^{(1)}R_1\ln\frac{r}{R_2}+\sum_{k=1}^{\infty}k^{-1}(R_1^{k-1}R_2^{-k}$$
$$+R_2^kR_1^{-k-1})^{-1}\times\{[(\alpha_k^{(1)}R_2^{-k}+kR_1^{-k-1}\alpha_k^{(2)})r^k$$
$$+(kR_1^{k-1}\alpha_k^{(2)}-R_2^k\alpha_k^{(1)})r^{-k}]\cos k\theta$$
$$+[(\beta_k^{(1)}R_2^{-k}+kR_1^{-k-1}\beta_k^{(2)})r^k$$
$$+(kR_1^{k-1}\beta_k^{(2)}-R_2^k\beta_k^{(1)})r^{-k}]\sin k\theta\}.$$

9.5.22 在矩形 $D:0\leqslant x\leqslant a,0\leqslant y\leqslant b$ 中求 Laplace 方程的满足边值条件

$$u(0,y)=A,u(a,y)=Ay,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=0}=0,\quad\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=b}=0$$

的解,其中 A,a,b 均为常数.

解 所求解为

$$u(x,y)=A+\frac{A(b-2)}{2a}x-$$
$$\frac{4Ab}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\frac{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi x}{b}}{\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\cos\frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

9.5.23　在扇形 $0 \leqslant \rho \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant \alpha$ 内求 Laplace 方程的满足边值条件

$$u(\rho,0) = u(\rho,\alpha) = 0, u(R,\varphi) = A\varphi$$

之解，其中 R,α,A 均为常数.

解　引进极坐标，可得所求解

$$u(\rho,\varphi) = \frac{2A\alpha}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\frac{n\pi}{\alpha}}\frac{\sin\frac{n\pi\varphi}{\alpha}}{n}.$$

9.5.24　在一中心为原点，半径为 a 的圆内，求解 Poisson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -4$$

的解，边值条件为

$$u\big|_{r=a} = 0.$$

解　引进极坐标，可得

$$u(x,y) = a^2 - (x^2 + y^2).$$

9.5.25　在中心为原点，半径为 R 的圆内，求 Poinsson 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -xy$$

的满足边界条件

$$u\big|_{r=R} = 0$$

之解.

解　求形为 $u(x,y) = v + w$ 之解，其中

$$v(x,y) = -\frac{1}{12}xy(x^2 + y^2)$$

(为 Poinsson 方程之一特解)，$w(x,y)$ 为下问题之解：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0,\\ w\big|_{r=R} = -v\big|_{r=R}.\end{cases}$$

由此可得

$$u(r,\theta) = -\frac{1}{24}r^4\sin 2\theta + \frac{R^4}{48\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin 2t\,\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr\cos(t-\theta) + r^2}\mathrm{d}t.$$

9.5.26　在环域 $a \leqslant r \leqslant b$ 内求解

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12(x^2 - y^2),\\ u\big|_{r=a} = 0, \dfrac{\partial u}{\partial r}\big|_{r=b} = 0.\end{cases}$$

解　用极坐标，可得

$$u(r,\varphi) = \left[(a^4 + b^4)r^4 - (a^6 + 2b^6)r^2 - (a^2 - 2b^2)\frac{a^4 b^4}{r^2}\right]\frac{\cos 2\varphi}{a^4 + b^4}.$$

第 10 篇　离散数学

§10.1　容斥原理

设 A 和 B 是两个有限集，A 和 B 的并集记作 $A\cup B$，并记 $S=A\cup B$. A 和 B 的交集记作 $A\cap B$. 集合 A 的基数，也即集合 A 中的元素个数记作 $|A|$，则有

$$|S|=|A|+|B|-|A\cap B|. \qquad ①$$

集合 A 在 S 中的补集记作 $\overline{A}$，则有

$$|\overline{A}\cap\overline{B}|=|S|-|A|-|B|+|A\cap B|. \qquad ②$$

式①是容斥原理的简单形式，式②是所谓逐步淘汰原理的简单形式. 式①和式②是彼此等价的，所以通称为容斥原理. 容斥原理是组合计数的一个基本原理，在计数问题中有着广泛应用. 通常在应用式①来计数时，总是将所欲计数的集合 S 分解为子集 A 和 B 的并，然后再利用式①求出 $|S|$. 因此，如何确定有限集 A 和 B，使得 $S=A\cup B$. 这是应用式①来计数的关键. 在应用式②计数时，其关键则是，确定 S 的子集 A 和 B，使得 $S=A\cup B$，而且将所欲计数的集合表为 $\overline{A}\cap\overline{B}$. 在简单的计数问题中，容斥原理的简单形式①和②往往已足够应付，但在解比较繁杂的计数问题时，则需要用到一般形式的容斥原理，因此掌握容斥原理的一般形式是必要的，也是十分有益的.

10.1.1　设 A_1，A_2，A_3 是有限集，$S=A_1\cup A_2\cup A_3$. 证明：

$$\begin{aligned}|S|=|A_1\cup A_2\cup A_3|&=|A_1|+|A_2|+|A_3|\\&\quad-|A_1\cap A_2|-|A_1\cap A_3|-|A_2\cap A_3|\\&\quad+|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned} \qquad ③$$

证　用贡献法. 所谓贡献法就是考察每个元素在计数过程中的贡献. 例如，要对集 S 的子集 A 计数，即要求出基数 $|A|$，我们考察集 S 中的每个元素对基数 $|A|$ 的贡献. 如果集 S 中元素 a 属于子集 A，就说元素 a 对基数 $|A|$ 的贡献是 1；如果元素 a 不属于子集 A，就说元素 a 对基数 $|A|$ 的贡献是 0. 集 S 中所有元素对基数 $|A|$ 的贡献之和即是所欲要的基数 $|A|$. 在证明涉及基数的等式时可以用贡献法，例如要证明等式③成立，我们可以考察集 S 中每个元素对等式③两端的贡献. 如果对等式③两端的贡献都相同，则等式③成立，否则等式③不成立.

现在用贡献法来证明式③成立. 首先设 x 是集 S 中的一个元素，则 x 到式③左端的贡献恒为 1. 现在考察 x 对式③右端的贡献. 由于 $S=A_1\cup A_2\cup A_3$，所以 x 必属于子集 A_1，A_2，A_3 中的某一个. 如果 x 只属于子集 A_1，A_2，A_3 中一个子集，但不属于其他两个子集，例如，设 $x\in A_1$，但 $x\notin A_2$，$x\notin A_3$，则 x 对 $|A_1|+|A_2|+|A_3|$ 的贡献为 $1+0+0=1$，对 $|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|$ 的贡献为 $0+0+0=0$，对 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 的贡献为 0. 因此 x 对式③右端的贡献为 $1-0+0=1$；如果 x 只属于子集 A_1，A_2，A_3 中两个子集，但不属余下的子集，例如 $x\in A_1$，$x\in A_2$，但 $x\notin A_3$，则 x 对 $|A_1|+|A_2|+|A_3|$ 的贡献为 $1+1+0=2$，对 $|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|$ 的贡献为 $1+0+0=1$，对 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 的贡献为 0. 因此 x 对式③右端的贡献为 $2-1+0=1$；如果 x 同时属于三个子集 A_1，A_2，A_3，则 x 对 $|A_1|+|A_2|+|A_3|$ 的贡献为 $1+1+1=3$，对 $|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|$ 的贡献为 $1+1+1=3$，对 $|A_1\cap A_2\cap A_3|$ 的贡献为 1. 所以 x 对式③右端的贡献为 $3-3+1=1$. 这就证明，集合 S 中每个元素对式③的左端和右端的贡献都是 1. 从而式③成立.

注　10.1.1 的证明所用的贡献法是论证有关组合计数的恒等式的一种基本方法，请给予重视.

10.1.2　设 A_1，A_2，…，A_m 是集 S 的子集，且 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$. 证明：

$$\begin{aligned}|S|&=|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|\\&=\sum_{i=1}^{m}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant m}|A_i\cap A_j|\\&\quad+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant m}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots\\&\quad+(-1)^{m}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned} \qquad ④$$

证　用贡献法. 设 $x\in S$，则 x 对式④左端的基数 $|S|$ 的贡献为 1. 现在考察 $x\in S$ 对式④右端的贡献. 由于 $S=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m$，且 $x\in S$，则必有某个正整数 k，$1\leqslant k\leqslant m$，使得 $x\in A_{i_j}$，$j=1$，2，…，k，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant m$，但 $x\notin A_{l_t}$，$t=1$，2，…，$m-k$，$1\leqslant l_1<l_2<\cdots<l_t\leqslant m$，且 $i_1i_2\cdots i_kl_1l_2\cdots l_t$ 是自然数 1，2，…，m 的一个排列，现在考虑 x 对基数 $|A_{r_1}\cap A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_s}|$ 的贡献. 当 $1\leqslant s\leqslant k$ 且 A_{r_1}，A_{r_2}，…，A_{r_s} 是从子集 A_{i_1}，A_{i_2}，…，A_{i_k} 中取出的 s 个子集时，则 x 对基数 $|A_{r_1}\cap$

$A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_s}|$的贡献为1．当$1\leqslant s\leqslant k$且$A_{r_1}$，$A_{r_2}$，…，$A_{r_s}$中含有$A_{l_1}$，$A_{l_2}$，…，$A_{l_t}$中的子集时，$x$对基数$|A_{r_1}\cap A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_s}|$的贡献为0．由于从子集$A_{i_1}$，$A_{i_2}$，…，$A_{i_k}$中取出子集$A_{r_1}$，$A_{r_2}$，…，$A_{r_s}$的方法有$C_k^s$个．因此，当$1\leqslant s\leqslant k$时，$x$对$\sum_{1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_s\leqslant m}|A_{r_1}\cap A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_s}|$的贡献为$C_k^s$．当$k+1\leqslant s\leqslant m$时，由于子集$A_{r_1}$，$A_{r_2}$，…，$A_{r_s}$中必含有子集$A_{l_1}$，$A_{l_2}$，…，$A_{l_t}$的子集，因此$x$对$\sum_{1\leqslant r_1<r_2<\cdots<r_s\leqslant m}|A_{r_1}\cap A_{r_2}\cap\cdots\cap A_{r_s}|$的贡献为0．令$s=1,2,\cdots,m$，则得到，$x$对式④右端的贡献之和为

$$C_k^1-C_k^2+C_k^3-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^k.$$

而

$$\begin{aligned}&C_k^1-C_k^2+C_k^3-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^k\\&=1-(1-1)^k=1,\end{aligned}$$

因此x对式④右端的贡献为1．

10．1．3　设A_1，A_2，A_3是集S的子集．证明：

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3|&=|S|-\sum_{i=1}^{3}|A_i|\\&+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}|A_i\cap A_j|-|A_1\cap A_2\cap A_3|.\end{aligned}\qquad ⑤$$

证　先证明，如果$A\subseteq S$，则

$$|\overline{A}|=|S|-|A|.\qquad ⑥$$

仍用贡献法．设$x\in S$．如果$x\in A$，则x对基数$|\overline{A}|$的贡献为0，对基数$|S|$和$|A|$的贡献均为1，因此，x对式⑥左端的贡献为0，而对式⑥右端的贡献为$1-1=0$；如果$x\in\overline{A}$，则x对基数$|\overline{A}|$的贡献为1，对基数$|S|$和$|A|$的贡献分别是1和0．因此x对式⑥左端的贡献为1，对式⑥右端的贡献为$1-0=1$．所以对集合S中任意一个元素x，它对式⑥左、右端的贡献都相同．因此式⑥成立．

其次证明，$A_1\cup A_2\cup A_3$和$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$构成集合$S$的一个分划．即有

$$\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}=\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3.\qquad ⑦$$

设$x\in\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$，则$x$不是$A_1$，$A_2$，$A_3$中每个子集的元素，因此$x\in\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$．反之设$x\in\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$，则$x$不是子集$A_1$，$A_2$，$A_3$中任何一个子集的元素．所以$x\in\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}$．

在式⑥中取$A=A_1\cup A_2\cup A_3$，则有

$$|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|=|S|-|A_1\cup A_2\cup A_3|.$$

将式⑦和式③代入上式即得式⑤．

10．1．4　设A_1，A_2，…，A_m是集合S的子集，证明：

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|\\&=|S|-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|A_i|+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|\\&-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant m}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|+\cdots\\&+(-1)^m|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m|.\end{aligned}\qquad ⑧$$

证　与10．1．3类似，容易证明：

$$\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m=\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m}.$$

由式⑥得到

$$\begin{aligned}|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m|&=|\overline{A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m}|\\&=|S|-|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m|.\end{aligned}$$

将式④代入上式即得式⑧．

注　式④通常称为容斥原理，式⑧称为逐步淘汰原理．

10．1．5　设A是集合S的子集．定义S的在A上的特征函数χ_A如下：

$$\chi_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A,\\0, & x\notin A.\end{cases}$$

设A_1，A_2，…，A_m和B_1，B_2，…，B_n是集合S的两组子集，a_1，a_2，…，a_m和b_1，b_2，…，b_n是两组实数．考虑等式

$$\begin{aligned}&a_1|A_1|+a_2|A_2|+\cdots+a_m|A_m|\\&=b_1|B_1|+b_2|B_2|+\cdots+b_n|B_n|.\end{aligned}\qquad ⑨$$

设$x\in S$，记

$$\begin{aligned}L(x)&=a_1\chi_{A_1}(x)+a_2\chi_{A_2}(x)\\&+\cdots+a_m\chi_{A_m}(x),\end{aligned}\qquad ⑩$$

$$\begin{aligned}R(x)&=b_1\chi_{B_1}(x)+b_2\chi_{B_2}(x)\\&+\cdots+b_n\chi_{B_n}(x),\end{aligned}\qquad ⑪$$

$L(x)$和$R(x)$分别称为元素x对式⑨左端和右端的贡献．证明：如果对S中每个元素x，有

$$L(x)=R(x),\qquad ⑫$$

则式⑨成立．

证　注意，对$1\leqslant i\leqslant m$，有

$$|A_i|=\sum_{x\in S}\chi_{A_i}(x).$$

同样，对$1\leqslant j\leqslant n$，有

$$|B_j|=\sum_{x\in S}\chi_{B_j}(x).\qquad ⑬$$

因此，式⑨左端为

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}a_i|A_i|&=\sum_{i=1}^{m}a_i\left(\sum_{x\in S}\chi_{A_i}(x)\right)\\&=\sum_{x\in S}\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{A_i}(x).\end{aligned}$$

由式⑩得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_i|A_i|=\sum_{x\in S}L(x).$$

由式⑫得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_i|A_i|=\sum_{x\in S}R(x).$$

由式⑪得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_i|A_i|=\sum_{x\in S}\sum_{j=1}^{n}b_j\chi_{B_j}(x)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{x\in S}\chi_{B_j}(x).$$

再由式⑬得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_i|A_i|=\sum_{j=1}^{n}b_j|B_j|.$$

因此式⑨成立.

注 10. 1. 5不但指出，所谓贡献法即是所谓子集上的特征函数方法，同时还指出了用贡献法证明有关组合计数的等式的理论依据.

10. 1. 6 设 S 是一个有限集，w 是集合 S 到实数域 R 的一个映射. 对于 $x\in S$，$w(x)$ 称为元素 x 的权. w 称为集合 S 上的权函数. 设 $A\subseteq S$，定义 $w(A)=\sum_{x\in A}w(x)$，即 $w(A)$ 是子集 A 中所有元素的权之和，它称为子集 A 的权. 设 A_1，A_2，…，A_m 和 B_1，B_2，…，B_n 是集合 S 的两组子集，a_1，a_2，…，a_m 和 b_1，b_2，…，b_n 是两组实数，考虑集合赋权等式

$$\sum_{i=1}^{m}a_iw(A_i)=\sum_{j=1}^{n}b_jw(B_j). \quad ⑭$$

对于 $x\in S$，记

$$L(x)=\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{A_i}(x),$$
$$R(x)=\sum_{j=1}^{n}b_j\chi_{B_j}(x).$$

$L(x)$ 和 $R(x)$ 分别称为元素 x 对式⑭左端和右端的贡献. 证明：如果对于任意 $x\in S$，均有

$$L(x)=R(x), \quad ⑮$$

则式⑭成立.

证 由子集权的定义可知，对 $1\leqslant i\leqslant m$，有

$$w(A_i)=\sum_{a\in A_i}w(a)=\sum_{x\in S}w(x)\chi_{A_i}(x).$$

同样，对 $1\leqslant j\leqslant n$，有

$$w(B_j)=\sum_{b\in B_j}w(b)$$
$$=\sum_{x\in S}w(x)\chi_{B_j}(x). \quad ⑯$$

于是，

$$\sum_{i=1}^{m}a_iw(A_i)=\sum_{i=1}^{m}a_i\left(\sum_{x\in S}w(x)\chi_{A_i}(x)\right)$$
$$=\sum_{x\in S}\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\chi_{A_i}(x)\right)w(x).$$

由式⑮得到

$$\sum_{i=1}^{m}a_iw(A_i)=\sum_{x\in S}\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\chi_{B_j}(x)\right)w(x)$$
$$=\sum_{j=1}^{n}b_j\left(\sum_{x\in S}w(x)\chi_{B_j}(x)\right).$$

将式⑯代入上式即得

$$\sum_{i=1}^{m}a_iw(A_i)=\sum_{j=1}^{n}b_jw(B_j).$$

因此式⑭成立.

注 对于给定的集合 S，定义 S 到实数域**R**的映射 w 为：对 $x\in S$，令 $w(x)=1$，则 w 是 S 上的一个权函数. 设 $A\subseteq S$，则

$$w(A)=\sum_{x\in A}w(x)=\sum_{x\in A}1=|A|.$$

即子集 A 的权 $w(A)$ 即是子集 $|A|$ 的基数. 因此，10. 1. 6 是 10. 1. 5 的推广. 另外，10. 1. 6 的证明用的也是贡献法.

10. 1. 7 设 w 是有限集 S 上的权函数，A_1，A_2，…，A_m 是集合 S 的子集. 证明：

$$w(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m)$$
$$=w(S)-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}w(A_i)$$
$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}w(A_i\cap A_j)-\cdots$$
$$+(-1)^m w(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_m). \quad ⑰$$

记 $M=\{1, 2, \cdots, m\}$. 对于 $X=\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\subseteq M$，记

$$A_X=A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_k}.$$

则式⑰等价于

$$w(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m)$$
$$=w(S)-\sum_{|X|=1}w(A_X)+\sum_{|X|=2}w(A_X)-\cdots$$
$$+(-1)^m\sum_{|X|=m}w(A_X)$$
$$=\sum_{X\subseteq M}(-1)^{|X|}w(A_X). \quad ⑱$$

证 只证式⑰成立. 对任意 $x\in S$，考察 x 对式⑰左、右两端的贡献 $L(x)$ 和 $R(x)$. 注意，对 S 的任意子集 A 和 B，有

$$\chi_{A\cap B}(x)=\chi_A(x)\chi_B(x),$$
$$\chi_{\overline{A}}(x)=1-\chi_A(x).$$

因此，x 对式17左端的贡献为

$$L(x)=\chi_{\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_m}(x)$$
$$=\chi_{\overline{A}_1}(x)\chi_{\overline{A}_2}(x)\cdots\chi_{\overline{A}_m}(x)$$
$$=(1-\chi_{A_1}(x))(1-\chi_{A_2}(x))\cdots$$
$$(1-\chi_{A_m}(x)).$$

将上式右端展开，得到

$$L(x)=1-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\chi_{A_i}(x)$$
$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}\chi_{A_{i1}}(x)\chi_{A_{i2}}(x)-\cdots$$
$$+(-1)^m\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\cdots\chi_{A_m}(x).$$

另一方面，x 对式⑰右端的贡献为

$$R(x)=1-\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\chi_{A_i}(x)$$
$$+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant m}\chi_{A_{i1}}(x)\chi_{A_{i2}}(x)-\cdots$$
$$+(-1)^m\chi_{A_1}(x)\chi_{A_2}(x)\cdots\chi_{A_m}(x).$$

因此，对任意 $x\in S$，有 $L(x)=R(x)$. 由 10. 1. 6，式⑰成立.

注 式⑰是赋权形式的容斥原理. 它是容斥原理

⑧的推广．由于容斥原理是组合计数的一个基本原理，因此，一直是组合数学家研究的对象．人们力图给出更为广泛的容斥原理．有兴趣的读者可以进一步阅读魏万迪的文章《广容斥原理及其应用》（科学通报，1980年第2期第296至299页）和邵嘉裕的文章《计数多项式与计数子》（高校应用数学学报，1988年第2期）．

10．1．8　设 n 和 k 是正整数，$n>3$，$\frac{n}{2}<k<n$，且设平面上有 n 个点，其中任意三点不共线，而且用一些线段连接其中某些点．证明：如果其中每个点都至少和其他 k 个点用线段连接，则在所有连接的线段中至少有三条，它们构成一个三角形．

证　因为 $n>3$，$k>\frac{n}{2}$，所以 $k\geqslant 2$．而所给的 n 个点中每个点都至少和其他 k 个点用线段连接．因此，这 n 个点中至少有两点 a 和 b 用线段连接，设给定 n 点的集合为 S．S 中去掉点 a 和 b 的集合记作 $S-\{a,b\}$．$S-\{a,b\}$ 中所有与 a 用线段连接的点集合记作 A，$S-\{a,b\}$ 中所有与 b 用线段连接的点集合记作 B．注意，欲证结论成立，只需证明，$A\cap B\neq\varnothing$，即 $|A\cap B|\geqslant 1$．由容斥原理（即式①）有

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

由于点 a 至少和其他 k 个点用线段连接，而且点 a 和点 b 用线段连接，因此 $|A|\geqslant k-1$．同理有 $|B|\geqslant k-1$．另一方面，$A\cup B\subseteq S-\{a,b\}$，所以 $|A\cup B|\leqslant n-2$．于是，

$$n-2\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$\geqslant 2k-2-|A\cap B|.$$

由此得到 $|A\cap B|\geqslant 2k-n$．由已知条件 $k>\frac{n}{2}$ 得到 $|A\cap B|\geqslant 2k-n>0$．

注　从10．1．8的证明可以看出，在应用容斥原理①时，关键在于确定集合 A 和 B．

10．1．9　空间中有 $2m$ 个点，$m\geqslant 2$，其中任意4点不共面．证明：如果这 $2m$ 个点之间至少连有 m^2+1 条线段，则所连的线段中至少有3条，它们构成一个三角形．

证　对 m 用归纳法．当 $m=2$ 时，空间中给定4个点，它们之间至少连有5条线段．易知这些线段中至少有3条，它们构成一个三角形．现在假设结论对 $m-1$ 成立．也即假设空间中给定 $2m-2$ 个点，其中任意四点不共面．如果这 $2m-2$ 个点之间至少连有 $(m-1)^2+1=m^2-2m+2$ 条线段，则这些线段中至少有三条，它们可以构成一个三角形．下面证明，结论对 m 成立．

设空间中给定的 $2m$ 个点的集合记作 S，点集 S 中所有点之间至少连有 $2m^2+1$ 条线段．设 a，$b\in S$，且 a 和 b 有线段连接．S 中去掉点 a 和 b 后余下的集合记作 $S-\{a,b\}$．$S-\{a,b\}$ 中含有 $2(m-1)$ 个点，且其中任意4点不共面．如果 $S-\{a,b\}$ 中所有点之间至少连有 $(m-1)^2+1$ 条线段，则由归纳假设，其中至少有3条，它们构成一个三角形．因此设 $S-\{a,b\}$ 中所有点之间至多连有 $(m-1)^2$ 条线段，这说明，$S-\{a,b\}$ 中的点与点 a 和 b 之间至少连有 $m^2+1-1-(m-1)^2=2m-1$ 条线段．$S-\{a,b\}$ 中与点 a 用线段连接的点的集合记作 A，与 b 用线段连接的点的集合记作 B．则

$$|A\cup B|\leqslant|S-\{a,b\}|=2m-2,$$

而且 $|A|+|B|\geqslant 2m-1$．由容斥原理（式①）得到

$$2m-2\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$
$$\geqslant 2m-1-|A\cap B|.$$

因此，$|A\cap B|\geqslant 1$．所以存在 $c\in A\cap B$，使得 c 与 a 和 b 用线段相连接，而 a 和 b 用线段相连接，从而 a，b，c 是由三条线段构成的一个三角形的三个顶点．

注　10．1．9中线段数目 m^2+1 是不能减少的．例如在平面的单位圆周上取 $2m$ 个等分点 x_1，x_2，$\cdots$，x_{2m}．记 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{x_{m+1},\cdots,x_{2m}\}$．$X$ 中每个点和 Y 中每个点都用线段相连接．因此这 $2m$ 个点连有 m^2 条线段．但这 m^2 条线段中不存在三条线段，它们构成一个三角形．尽管这里是用平面上的点作为例子．但容易想象，对空间中的点也是成立的．

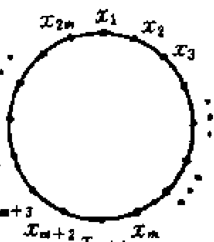


图10．1

10．1．10　设空间中给定 $2m+1$ 个点，$m\geqslant 1$，其中任意四点不共面．证明：如果这 $2m+1$ 个点之间至少连有 m^2+m+1 条线段，则其中至少有三条线段，它们构成一个三角形．

证　对 m 用归纳法．当 $m=1$ 时，3个点，连3条线段，它们构成一个三角形．因此当 $m=1$ 时结论成立．假设结论对 $m-1$ 成立，即如果空间给定 $2m-1$ 个点，任四点不共面，它们之间至少连有 $(m-1)^2+(m-1)+1=m^2-m+1$ 条线段，则这些线段中至少有三条，它们构成一个三角形．下面证明结论对 m 成立．

设空间给定 $2m+1$ 个点的集合为 S．由题设，必有点 a，$b\in S$，a 和 b 用线段相连接．如果 $S-$

$\{a, b\}$ 中至少连有 $(m-1)^2+(m-1)+1=m^2-m+1$ 条线段，则由归纳假设，这些线段中至少有三条，它们构成一个三角形. 因此设 $S-\{a, b\}$ 中所有点之间至多连有 m^2-m 条线段. 所以 $S-\{a, b\}$ 与 $\{a, b\}$ 之间所连的线段至少有 $m^2+m+1-1-(m^2-m)=2m$ 条. 用 A 和 B 分别表示 $S-\{a, b\}$ 中与点 a 和 b 用线段连接的点的集合. 则 $|A|+|B|\geqslant 2m-1$. 另一方面，$A\cup B\subseteq S-\{a, b\}$. 所以 $|A\cup B|\leqslant 2m-1$. 于是由容斥原理（式①）有

$$2m-1\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\geqslant 2m-|A\cap B|.$$

从而有

$$|A\cap B|\geqslant 1.$$

于是存在 $c\in A\cap B$. 从而点 c 和 a 与 b 用线段相连. 而点 a 和 b 用线段相连接. 所以点 a，b，c 是用所连接的线段构成的三角形的三个顶点. 这就证明结论对 m 成立. 从而 10. 1. 10 成立.

注 可以举例证明，当所连接的线段数目从 m^2+m+1 减至 m^2+m 时结论不再成立. 另外，10. 1. 9和 10. 1. 10 可以叙述为这样一个图论定理：设 G 是任意一个 n 阶简单图，其边数记作 $e(G)$. 记

$$\epsilon(n)=\begin{cases} m^2+1, & n=2m \\ m^2+m+1, & n=2m+1. \end{cases}$$

则当 $e(G)\geqslant\epsilon(n)$ 时，图 G 一定含有 3 圈，而当 $e(G)<\epsilon(n)$ 时一定存在一个 n 阶简单图 G，使得图 G 不含 3 圈. 这是数学家 W. Mantel 1907 年证明的一个定理. 至于如何将 10. 1. 9 和 10. 1. 10转化为图论定理，请读者自己考虑.

10. 1. 11　一次国际数学会议有1990位数学家参加，其中每位数学家至少有 1327 位合作者. 证明：其中一定有四位数学家，他们之中每二个人都曾合作过.

证 先把命题转化成图论语言：把与会的 1990 位数学家视为 1990 个顶点，其集合记作 V. 对于 $u, v\in V$，当且仅当数学家 u 和 v 曾经合作研究时顶点 u 和 v 相邻，得到一个 1990 阶简单图，记作 G. 由题意，对于任意 $v\in V$，数学家 v 曾和 1327 位数学家合作过，因此，其度 $d(u)\geqslant 1327$. 所欲证的是，G 中有 4 个顶点（数学家），其中任意两个顶点（数学家）都相邻（合作过）. 即图 G 含有一个 4 阶完全子图 K_4. 于是 10. 1. 11 的图论形式是：设 G 是 1990 阶简单图，V 是G 的顶点集合. 如果对任意 $u\in V$，$d(v)\geqslant 1327$，则 G 含有 4 阶完全子图 K_4.

与10. 1. 9 和 10. 1. 10 相仿，设 uv 是图 G 的一条边. $V-\{u, v\}$ 中所有分别与 u 和 v 相邻的顶点集合分别记作 A 和 B. 由已知条件，$d(u)\geqslant 1327$，$d(v)\geqslant 1327$，所以 $|A|\geqslant 1326$，$|B|\geqslant 1326$. 另外，$A\cup B\subseteq V-\{u, v\}$. 因此 $|A\cup B|\leqslant|V-\{u, v\}|=1988$. 由容斥原理（式①），有

$$1988\geqslant|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|\geqslant 2\times 1326-|A\cap B|.$$

所以

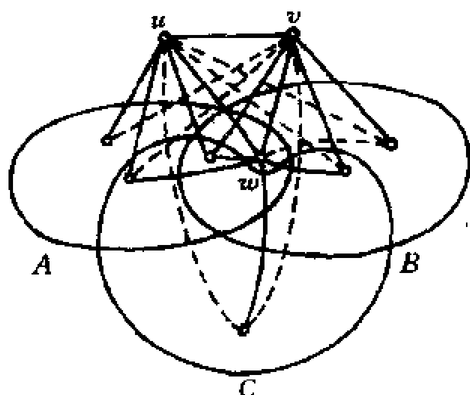


图 10. 2

$$|A\cap B|\geqslant 2\times 1326-1988>0.$$

从而 $A\cap B\neq\emptyset$. 任取 $w\in A\cap B$. $V-\{u, v, w\}$ 中所有与 w 相邻的顶点集合记作 C（图 10. 2）. 由已知条件，$d(w)\geqslant 1327$，所以 $|C|\geqslant 1325$. 另一方面，$(A\cap B)\cup C\subseteq V-\{a, b\}$. 因此，$|(A\cap B)\cup C|\leqslant 1988$. 再次用容斥原理（式①）得到

$$\begin{aligned}1988&\geqslant|(A\cap B)\cup C|\\&=|A\cap B|+|C|-|(A\cap B)\cap C|\\&\geqslant 3\times 1325-1988-|A\cap B\cap C|.\end{aligned}$$

所以

$$|A\cap B\cap C|\geqslant 3\times 1325+2-2\times 1988=1.$$

从而 $A\cap B\cap C\neq\emptyset$. 取 $x\in A\cap B\cap C$. 则顶点 u，v，w，x 中任意两顶点都相邻，即 u，v，w，x 是图 G 的一个 4 阶完全子图 K_4 的 4 个顶点. 从而 G 含有 K_4.

注 10. 1. 11 的证明中两次用了容斥原理（式①），而且第二次是对 $A\cap B$ 和 C 使用的. 这是值得注意的. 另外，10. 1. 9，10. 1. 10 和 10. 1. 11 是图论中下述极端问题的特殊情形：对于给定的正整数 k 和 n，求这样的最小正整数 $\epsilon_k(n)$，使得当边数 $e(G)\geqslant\epsilon_k(n)$ 时，n 阶简单图 G 一定含有 k 阶完全子图 K_k. 1941 年著名数学家 Turán 解决了这一问题. Turán 首先引进一个 n 阶 k 部完全图 $T_k(n)$，其顶点集合 V 由 k 个两两不交的子集 V_1，

V_2, …, V_k 构成，它们的顶点数 $|V_1|$, $|V_2|$, …, $|V_k|$ 彼此至多相差 1. 对每个 V_i, V_i 中任意两点不相邻，对不同的 V_i 和 V_j, V_i 中的顶点和 V_j 中的顶点都相邻. 图 $T_k(n)$ 后来称为 Turán 图，其边数记作 $t_k(n)$. 利用 Turán 图 $T_k(n)$, Turán 证明，$\varepsilon_k(n)=t_{k-1}(n)+1$. 这就是 Turán 定理. Turán 定理之证明已超出离散数学这门课程的范围，这里不拟赘述. 有兴趣的读者可参阅 B. Bollobas 专著《Extremal Graph Theory (Academic Press, London New York San Francisco, 1978)》一书.

10. 1. 12　求在1到10000之间不被 4, 5 或 6 整除的整数的个数.

解　设 A 是 1 到 10000 之间的整数集合，A_i 是 1 到 10000 之间能被整数 i 整除的集合，则

$$|A_4|=\left[\frac{10000}{4}\right]=2500,$$

$$|A_5|=\left[\frac{10000}{5}\right]=2000,$$

$$|A_6|=\left[\frac{10000}{6}\right]=1666,$$

$$|A_4\cap A_5|=\left[\frac{10000}{20}\right]=500,$$

$$|A_4\cap A_6|=\left[\frac{10000}{12}\right]=833,$$

$$|A_5\cap A_6|=\left[\frac{10000}{30}\right]=333,$$

$$|A_4\cap A_5\cap A_6|=\left[\frac{10000}{60}\right]=166.$$

另外，$\overline{A}_4\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_6$ 是 1 到 10000 之间不被 4, 5 和 6 整除的整数集合. 由容斥原理（式⑤）有

$$\begin{aligned}&|\overline{A}_4\cap\overline{A}_5\cap\overline{A}_6|\\&=|A|-|A_4|-|A_5|-|A_6|+|A_4\cap A_5|\\&\quad+|A_4\cap A_6|+|A_5\cap A_6|-|A_4\cap A_5\cap A_6|\\&=10000-(2500+2000+1666)\\&\quad+(500+833+333)-166\\&=5334.\end{aligned}$$

于是所求的整数个数为 5334.

10. 1. 13　（Euler 函数 $\varphi(n)$）设 n 是正整数，$\varphi(n)$ 表示从 1 到 n 之间所有与 n 互素的整数个数. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，其中 p_1, p_2, …, p_k 是互异的素数，α_1, α_2, …, α_k 是正整数. 证明：

$$\varphi(n)=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

证　设 A 是从 1 到 n 之间的整数集合，A_i 是 A 中被 p_i 整除的整数个数，$i=1, 2, \cdots, k$. 则 $\varphi(n)=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k|$. 由容斥原理（式⑧）有

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}|A_i|\\&\quad+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|-\cdots\\&\quad+(-1)^k|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.\end{aligned}$$

显然，$|A|=n$. 又 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$. 所以当 $1\leqslant i\leqslant k$ 时，

$$|A_i|=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}}p_i^{\alpha_i-1}p_{i+1}^{\alpha_{i+1}}\cdots p_k^{\alpha_k}=\frac{n}{p_i}.$$

当 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant k$ 时，

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}|=\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}}.$$

当 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant k$ 时，

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}}.$$

于是

$$\begin{aligned}\varphi(n)&=n-\sum_{i=1}^{k}\frac{n}{p_i}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}\frac{n}{p_{i_1}p_{i_2}}-\cdots\\&\quad+(-1)^k\frac{n}{p_1p_2\cdots p_k}.\\&=n\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}}-\cdots\right.\\&\quad\left.+(-1)^k\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right)\\&=n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).\end{aligned}$$

10. 1. 14　设 n 是正整数，所有从 1 到 n 之间与 n 互素的整数的平方和记作 $f_2(n)$. 设 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$，其中 p_1, p_2, …, p_k 是互异的素数，α_1, α_2, …, α_k 是正整数. 证明：

$$\begin{aligned}f_2(n)&=\frac{1}{3}n^2\varphi(n)\\&\quad+\frac{(-1)^k}{6}p_1p_2\cdots p_k\varphi(n).\end{aligned}$$

证　从 1 到 n 之间的整数集合记作 A. A 中被 p_i 整除的整数集合记作 A_i, $i=1, 2, \cdots, k$. 定义 A 上的权函数 $w(m)$ 为：对于 $m\in A$，令 $w(m)=m^2$. 则 $f_2(n)=w(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k)$. 注意这是证明的关键，请仔细想一想其成立的理由. 则由赋权形式的容斥原理⑰，有

$$\begin{aligned}&w(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k)\\&=w(A)-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}w(A_i)\\&\quad+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}w(A_{i_1}\cap A_{i_2})-\cdots\\&\quad+(-1)^kw(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k).\end{aligned}$$

由集 A 的权 $w(A)$ 的定义，有

$$\begin{aligned}w(A)&=\sum_{m\in A}w(m)=\sum_{m\in A}m^2\\&=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n.\end{aligned}$$

当$1\leqslant i\leqslant k$时，

$$w(A_i)=\sum_{m\in A_i}w(m).$$

设$m\in A_i$，则$p_i|m$，从而$m=q_ip_i$，q_i为正整数．由于$m=q_ip_i\in A_i\subseteq A$，所以$m=q_ip_i\leqslant n$．于是$q_i\leqslant\frac{n}{p_i}$．所以

$$\begin{aligned}w(A_i)&=\sum_{m\in A_i}q_i^2p_i^2=\sum_{q_i=1}^{\frac{n}{p_i}}q_i^2p_i^2\\&=p_i^2\left(1^2+2^2+\cdots+\left(\frac{n}{p_i}\right)^2\right)\\&=p_i^2\left(\frac{1}{3}\left(\frac{n}{p_i}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\frac{n}{p_i}\right)^2+\frac{1}{6}\frac{n}{p_i}\right)\\&=\frac{1}{3}\frac{n^3}{p_i}+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}p_in.\end{aligned}$$

同理，当$1\leqslant i_1<i_2\leqslant k$时，

$$w(A_{i_1}\cap A_{i_2})=\frac{1}{3}\frac{n^3}{p_{i_1}p_{i_2}}+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}p_{i_1}p_{i_2}n.$$

一般地，当$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant k$时，

$$\begin{aligned}&w(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t})\\&=\frac{1}{3}\frac{n^3}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}}+\frac{1}{2}n^2+6p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_t}n.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}w(A_i)&=\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\left(\frac{1}{3}\frac{n^3}{p_i}+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}p_in\right)\\&=\frac{n^3}{3}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{1}{p_i}+\frac{1}{2}kn^2+\frac{n}{6}\sum_{1\leqslant i\leqslant k}p_i.\end{aligned}$$

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}w(A_{i_1}\cap A_{i_2})=\frac{n^3}{3}\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}}+\frac{1}{2}C_k^2n^2+\frac{n}{6}\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}p_{i_1}p_{i_2}.$$

……

$$\begin{aligned}&\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant k}w(A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t})\\&=\frac{n^3}{3}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant k}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}\\&+\frac{1}{2}C_k^tn^2+\frac{n}{6}\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant k}p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}f_2(n)&=w(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_k)\\&=\frac{n^3}{3}\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}}-\cdots+(-1)^k\frac{1}{p_1p_2\cdots p_k}\right)\\&+\frac{n^2}{2}\left(1-C_k^1+C_k^2-\cdots+(-1)^kC_k^k\right)\\&+\frac{n}{6}\left(1-\sum_{1\leqslant i\leqslant k}p_i+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant k}p_{i_1}p_{i_2}-\cdots+(-1)^kp_1p_2\cdots p_k\right).\end{aligned}$$

由10．1．13得到

$$\begin{aligned}f_2(n)&=\frac{n^3}{3}\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)\\&+\frac{n^2}{2}(1-1)^k\\&+\frac{n}{6}(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_k)\\&=\frac{n^2}{3}\varphi(n)+\frac{(-1)^k}{6}p_1p_2\cdots p_k\varphi(n).\end{aligned}$$

注 从1到n之间与n互素的整数的m次幂之和记作$f_m(n)$．应用赋权形式的容斥原理⑰可以容易求得$f_m(n)$．例如，有

$$f_1(n)=\frac{1}{2}n\varphi(n).$$

10．1．15 （错位排列）设$\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$是正整数1，2，…，n的一个排列．如果对每个$i=1,2,\cdots,n$，$\pi_i\neq i$，则称$\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$是一个错位排列．求1，2，…，n的所有错位排列的个数D_n．

解 记$A=\{1,2,\cdots,n$的所有排列$\}$．所有满足$\pi_i=i$的排列$\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$的集合记作A_i，$i=1,2,\cdots,n$．则$D_n=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$．显然，

$|A|=n!$，

$|A_i|=(n-1)!$，$i=1,2,\cdots,n$．

$|A_{i_1}\cap A_{i_2}|=(n-2)!$，$1\leqslant i_1<i_2\leqslant n$．

…………

$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=(n-t)!$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant n$．

因此由容斥原理⑧得到

$$\begin{aligned}D_n&=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|\\&=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|\\&-\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|+\cdots\\&+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!\\&-C_n^3(n-3)!+\cdots+(-1)^nC_n^n(n-n)!\\&=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).\end{aligned}$$

10．1．16 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不同的字母．用n对字母$a_1,a_1;a_2,a_2;\cdots;a_n,a_n$排成$2n$元字．求相同字母不相邻的$2n$元字的个数$g(n)$．

解 用n对字母$a_1,a_1;a_2,a_2;\cdots;a_n,a_n$排成的$2n$元字集合记作$A$．$A$中两个字母$a_i$，$a_i$相邻的$2n$元字集合记作$A_i$，$i=1,2,\cdots,n$．于是$g(n)=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|$．将$n$对字母$a_1,a_1;a_2,a_2;\cdots;a_n,a_n$排成的$2n$元字共有$(2n)!$个．对于一个$2n$元字，对换其中字母$a_i$与$a_i$的位置，得到的是同一个$2n$元字．因此，在

$(2n)!$ 个 $2n$ 元字中，同一个 $2n$ 元字重复出现 2^n 次．所以 $|A|=\frac{(2n)!}{2^n}$．对于给定的 i，考虑字母 a_i 和 $n-1$ 对字母 a_1，a_1；a_2，a_2；…；a_{i-1}，a_{i-1}；a_{i+1}，a_{i+1}；…；a_n，a_n 排成的 $2n-1$ 元字．如果将诸字母视为互异，则排成的 $2n-1$ 元字的个数为 $(2n-1)!$．将一个 $2n-1$ 元字中 a_k 和 a_k 对调位置，$k\neq i$，得到的是同一个 $2n-1$ 元字．因此在排成的 $2n-1$ 元字中同一个 $2n-1$ 元字重复出现 2^{n-1} 次．于是 $|A_i|=\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}$．同理，当 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant n$ 时，

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=\frac{(2n-t)!}{2^{n-t}}.$$

于是由容斥原理⑧，有

$$\begin{aligned}g(n)&=|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_n|\\&=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|-\cdots\\&\quad+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|\\&=\frac{(2n)!}{2^n}-C_n^1\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+C_n^2\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\cdots\\&\quad+(-1)^nC_n^n\frac{(2n-n)!}{2^{n-n}}\\&=\frac{(2n)!}{2^n}-C_n^1\frac{(2n-1)!}{2^{n-1}}+C_n^2\frac{(2n-2)!}{2^{n-2}}-\cdots\\&\quad+(-1)^nn!.\end{aligned}$$

注 在 10．1．16 中，若记 A 中恰有 k 对相同字母相邻的 $2n$ 元字的个数为 $g_k(n)$，$k=0$，1，…，n．则 $g_0(n)=g(n)$．可以求得

$$g_k(n)=C_n^k\sum_{i=0}^{n-k}(-1)^iC_{n-k}^i\frac{(2n-k-i)!}{2^{n-k-i}}.$$

读者无妨试证之．

10．1．17 设 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 是自然数 1，2，…，n 的一个排列．如果对于正整数 k，$1\leqslant k\leqslant n$，$\pi_k=k$，则 k 称为排列 $\pi_1\pi_2\cdots\pi_n$ 的一个不动点．自然数 1，2，…，n 的所有无不动点 k 的排列个数记作 f_n，所有恰有一个不动点 k 的排列个数记作 g_n，证明：$|f_n-g_n|=1$．

证 显然，自然数 1，2，…，n 的无不动点 k 的排列即是错位排列．因此 $f_n=D_n$．自然数 1，2，…，n 的所有恰有一个不动点 k 的排列集合记作 A_k，$k=1$，2，…，n．易知 $|A_k|=D_{n-1}=f_{n-1}$．而且

$$g_n=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|=nf_{n-1}.$$

由 10．1．15 可知

$$f_n=D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right),$$

$$\begin{aligned}g_n&=nf_{n-1}\\&=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\right).\end{aligned}$$

所以

$$f_n-g_n=(-1)^n.$$

于是

$$|f_n-g_n|=1.$$

10．1．18 设1978个集合 A_1，A_2，…，A_{1978} 满足

$$|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{1978}|=40,$$

且对任意 i，j，$1\leqslant i<j\leqslant 1978$，有

$$|A_i\cap A_j|=1.$$

求 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1978}|$．

解 由容斥原理④，有

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1978}|\\&=\sum_{1\leqslant i\leqslant 1978}|A_i|-\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant 1978}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|\\&\quad+\sum_{1\leqslant i_1<i_2<i_3\leqslant 1978}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap A_{i_3}|-\cdots\\&\quad+(-1)^{1978}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1978}|.\end{aligned}$$

由已知条件，只需对给定的正整数 t，$3\leqslant t\leqslant 1978$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant 1978$，求出 $|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|$．为此考虑集 A_1 中 40 个元素在 A_2，A_3，…，A_{1978} 中出现的情况．如果 A_1 中每个元素都至多在 A_2，A_3，…，A_{1978} 的 49 个集合中出现，则 A_1 中 40 个元素至多在 A_2，A_3，…，A_{1978} 的 $40\times 49=1960$ 个集合中出现．由于 A_2，A_3，…，A_{1978} 共有 1977 个集合，所以其中必有某个 A_i，使 $A_i\cap A_1=\varnothing$．与已知条件矛盾．所以存在 $a\in A_1$，使得 a 在 A_2，A_3，…，A_{1978} 中至少 50 个集合中出现．由已知条件，即可设

$$\{a\}=A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=\cdots=A_1\cap A_{51}.$$

设 $a\notin A_i$，$52\leqslant i\leqslant 1978$．记

$$A_i\cap A_j=\{a_j\},\qquad 1\leqslant j\leqslant 51.$$

显然 $a_j\neq a$．若对于 $1\leqslant j$，$k\leqslant 51$，$a_j=a_k$，则由 $a_j=a_k\in A_j\cap A_k$ 和 $a\in A_j\cap A_k$ 得到，$|A_j\cap A_k|\geqslant 2$．与已知条件矛盾．所以 $a_j\neq a_k$．于是 A_i 含有 51 个不同的元素 a_1，a_2，…，a_{51}，即 $|A_i|\geqslant 51$，与已知条件矛盾．所以 $a\in A_i$，$i=52$，…，1978．这表明，对于给定 t，$3\leqslant t\leqslant 1978$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant 1978$，有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=1.$$

于是

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant 1978}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=C_{1978}^t.$$

所以

$$\begin{aligned}&|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1978}|\\&=40\times 1978-C_{1978}^2+C_{1978}^3-\cdots\end{aligned}$$

$-\ (-1)^{1978}C_{1978}^{1978}$

$=39\times1978+1-\ [C_{1978}^{0}-C_{1978}^{1}+C_{1978}^{2}-\cdots$
$+\ (-1)^{1978}C_{1978}^{1978}]$

$=77143-\ (1-1)^{1978}=77143.$

10．1．19　设1987个集合 A_1，A_2，$\cdots A_{1987}$满足

$$|A_1|=|A_2|=\cdots=|A_{1987}|=45,$$
$$|A_i\cup A_j|=89,\quad 1\leqslant i<j\leqslant1987.$$

求$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1987}|$.

解　由容斥原理④，

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1987}|$$
$$=\sum_{1\leqslant i\leqslant1987}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant1987}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant1987}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+\ (-1)^{1987}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1987}|$$
$$=45C_{1987}^{1}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant1987}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant1987}|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$-\cdots+\ (-1)^{1987}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1987}|.$$

于是问题化为，对给定正整数 t，$2\leqslant t\leqslant1987$，且 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant1987$，求$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|$.

首先当 $t=2$ 时，由容斥原理①有

$$89=|A_{i_1}\cup A_{i_2}|$$
$$=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|-|A_{i_1}\cap A_{i_2}|$$
$$=90-|A_{i_1}\cap A_{i_2}|,$$

所以，对 $1\leqslant i_1<i_2\leqslant1987$，有

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}|=1.$$

其次设 $3\leqslant t\leqslant1987$，并考虑集 A_1 中 45 个元素在集 A_2，A_3，$\cdots$，A_{1987}中出现的情况．如果 A_1 中每个元素都至多在 A_2，A_3，$\cdots$，A_{1987}的 44 个集中出现，则 A_1 中的元素至多出现在 A_2，A_3，$\cdots$，A_{1987}中的 1980 个集合．于是必有 A_i，$2\leqslant i\leqslant1987$，使$|A_1\cap A_i|=0$，矛盾，所以存在 $a\in A_1$，使得 a 在 A_2，A_3，$\cdots$，A_{1987}中的 45 个集合中出现，不妨设 A_2，A_3，$\cdots$，A_{46} 含有 a．对任意 A_i，$47\leqslant i\leqslant1987$，记 $A_i\cap A_j=\{a_j\}$，$1\leqslant j\leqslant46$．显然，$a_j\neq a$．若对 $1\leqslant j<k\leqslant46$，$a_j=a_k$，则 a，$a_j=a_k\in A_j\cap A_k$．与$|A_j\cap A_k|=1$ 矛盾．因此 a_1，a_2，$\cdots$，$a_{46}\in A_i$，且两两互异．从而$|A_i|\geqslant46$．矛盾．这表明，$a\in A_i$，$2\leqslant i\leqslant1987$，于是

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=1,$$

其中　$1\leqslant i_1<\cdots<i_t\leqslant1987$.

因此

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant1987}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=C_{1987}^{t}.$$

所以

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_{1987}|$$
$$=45C_{1987}^{1}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant1987}|A_i\cap A_j|$$
$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant1987}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots$$
$$+\ (-1)^{1987}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{1987}|$$
$$=45C_{1987}^{1}-C_{1987}^{2}+C_{1987}^{3}-\cdots+\ (-1)^{1987}C_{1987}^{1987}$$
$$=44\times1987+1-\ [C_{1987}^{0}-C_{1987}^{1}-C_{1987}^{2}+\cdots$$
$$+\ (-1)^{1987}C_{1987}^{1987}]$$
$$=87429-\ (1-1)^{1987}=87429.$$

10．1．20　有 n 对夫妇，$n\geqslant3$，围坐在圆桌旁，圆桌旁的坐位依次编号为 1，2，$\cdots$，$2n$．求男女相互间隔且夫妇不相邻的坐法种数 a_n.

解　依题意，n 位女士要么都坐在单号座位上，要么都坐在双号座位上，即女士就座的方式有两种、而 n 位女士在 n 个单号座位或双号座位上就座的方式有 $n!$．现在考虑 n 位女士在双号座位上就座的方式 φ 下，n 位男士就座的方法．设在女士就座方式 φ 下，在 2，4，$\cdots$，$2n$ 号座位上的 n 位女士依次为 w_1，w_2，$\cdots$，w_n，她们的先生依次是 h_1，h_2，$\cdots$，h_n．h_1，h_2，$\cdots$，h_n 在 1，2，$\cdots$，n 号座位上的入座方式数为 $n!$ 种，其集合记作 A．记

$A_1=\{h_1$ 坐在 w_1 的右边的坐法$\}$，

$A_2=\{h_1$ 坐在 w_1 的左边的坐法$\}$．

$A_3=\{h_2$ 坐在 w_2 的右边的坐法$\}$，

$A_4=\{h_2$ 坐在 w_2 的左边的坐法$\}$．

…………

$A_{2n-1}=\{h_n$ 坐在 w_n 的右边的坐法$\}$，

$A_{2n}=\{h_n$ 坐在 w_n 的左边的坐法$\}$．

则在诸位女士的坐法 φ 下，诸男士的符合题意的坐法种数为$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{2n}|$．由容斥原理⑧，

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{2n}|$$
$$=|A|-\sum_{1\leqslant i\leqslant2n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i_1<i_2\leqslant2n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}|-\cdots$$
$$+\ (-1)^{2n}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_{2n}|.\qquad ⑲$$

于是所有符合题意的坐法种数为

$$a_n=2\ (n!)\ |\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\cdots\cap\overline{A}_{2n}|.$$

现在计算$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|$，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant2n$．注意，由 A_1，A_2，$\cdots$，A_{2n}的意义，显然有

$$|A_i\cap A_{i+1}|=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 2n,$$

其中定义 $A_{2n+1}=A_1$．这说明，当 i_1，i_2，$\cdots$，i_t 中含有相邻的整数时，

$$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=0.$$

特别当 $n<t\leqslant2n$ 时，上式成立，从而

$$\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_t\leqslant2n}|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|=0.$$

于是在式⑲中只需对 $1\leqslant t\leqslant n$，且 i_1，i_2，$\cdots$，i_t 不含相邻整数求出$|A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_t}|$即可．注意，此时

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant 2n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$$

中的项数是从排在圆周上的编号 1，2，…，$2n$ 中取出 t 个不相邻的整数 i_1，i_2，…，i_t 的组合数，从而其项数为 $\frac{2n}{t}C_{2n-t-1}^{t-1}$. 对每个取定的 i_1，i_2，…，i_t，即男士 h_{i_1}，h_{i_2}，…，h_{i_t} 在 n 个单号座位上就座后，余下有 $n-t$ 个男士在余下的 $n-t$ 个单号座位上就座的种数为 $(n-t)! = |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}|$. 因此，

$$\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_t \leqslant 2n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_t}| = \frac{2n}{t}C_{2n-t-1}^{t-1} \cdot (n-t)!.$$

于是有

$$\begin{aligned} a_n &= 2(n!)\,|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{2n}}| \\ &= 2(n!)\Big\{n! - \frac{2n}{1}C_{2n-1-1}^{1-1} \cdot (n-1)! \\ &\quad + \frac{2n}{2}C_{2n-2-1}^{2-1} \cdot (n-2)! \\ &\quad + \cdots + \frac{2n}{n}C_{2n-n-1}^{n-1} \cdot (n-n)!\Big\} \\ &= 2(n!)\sum_{t=0}^{n}(-1)^t \frac{2n}{t}C_{2n-t-1}^{t-1} \cdot (n-t)! \\ &= 2(n!)\sum_{t=0}^{n}(-1)^t \frac{2n}{2n-t}C_{2n-t}^{t} \cdot (n-t)! \end{aligned} \qquad ⑳$$

注 10. 1. 20 最早是 P. G. Tait 1876 年提出的. 1877 年 A. Cayley 和 T. Muir 独立解决这一问题. 1891 年 E. Lucas 最早将它收入到他的书《数的理论（Théorie de nombres）》（Paris，1891）中. 关于 a_n 的表达式⑳是 J. Touchard 1934 年得出的. 这里的解法是 I. Kaplansky 1943 年给出的.

10. 1. 21 设 S 是有限集，p_1，p_2，…，p_n 是一组与 S 中元素有关的性质，其集合记作 P. 对于 $T \subseteq P$，S 中具有属于 T 的所有性质的元素的个数记作 $N_{\geqslant}(T)$. 注意这种元素除具有 T 中所有性质外也可能具有 $P-T$ 中的性质. 另外，S 中恰具有属于 T 的所有性质的元素的个数记作 $N_{=}(T)$. 这种元素除具有 T 中的所有性质外，不再具有 $P-T$ 中任何一个性质. 证明：对于给定的 $T \subseteq P$，有

$$N_{=}(T) = \sum_{P \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}N_{\geqslant}(Z). \qquad ㉑$$

其中和号表示对所有满足 $P \supseteq Z \supseteq T$ 的集合 Z 求和. 特别有

$$N_{=}(\varnothing) = \sum_{Z \subseteq P}(-1)^{|Z|}N_{\geqslant}(Z). \qquad ㉒$$

证 用贡献法证明式㉑. 考察任意 $x \in S$ 对式㉑左端和右端的贡献. 如果 x 不具有 T 中所有性质，则 x 对 $N_{=}(T)$ 的贡献为 0. 对任意 $Z \supseteq T$，由于 x 不具有 T 中所有性质，从而也不具有 Z 中所有性质，因此 x 对 $N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 0，从而对 $\sum_{P \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 0. 所以 x 对式㉑两端的贡献相等（都是 0）；若 x 恰含有 T 中全部性质，则 x 对式㉑左端的贡献为 1. 对任意 $Z \supseteq T$，当 $Z = T$ 时，x 对 $N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 1，当 $Z \supsetneqq T$ 时，x 对 $N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 0. 因此 x 对 $\sum_{P \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 1. 所以 x 对式㉑两端的贡献相等（都是 1）；若 x 除具有 T 中所有性质外，还具有 T 之外的 m 个性质 p_{i_1}，p_{i_2}，…，p_{i_m}，$m \geqslant 1$，则 x 对式㉑左端的贡献为 0. 考察 x 对 $\sum_{P \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献. 记 $S = T \cup \{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_m}\}$. 如果 $T \subseteq Z \subseteq S$，则 x 对 $N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 1. 如果 $S \subsetneqq Z \subseteq P$，则 x 对 $N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为 0. 于是 x 对 $\sum_{P \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}N_{\geqslant}(Z)$ 的贡献为

$$\sum_{S \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|}.$$

显然，满足 $S \supseteq Z \supseteq T$ 且 $|Z|-|T|=i$ 的集合 Z 有 C_m^i 个，$i=0$，1，…，m. 于是

$$\sum_{S \supseteq Z \supseteq T}(-1)^{|Z|-|T|} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{S \supseteq Z \supseteq T \\ |Z|=|T|+i}}(-1)^i = \sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_m^i = (1-1)^m = 0.$$

所以 x 对式㉑两端之贡献都是 0.

10. 1. 22 沿用 10. 1. 21 的记号，证明：对给定的 $T \subseteq P$，有

$$N_{\geqslant}(T) = \sum_{P \supseteq Z \supseteq T}N_{=}(Z). \qquad ㉓$$

证 用贡献法证明式㉓. 考察任意 $x \in S$ 对式㉓左、右两端的贡献. 如果 x 不具有 T 中所有性质，则 x 对式㉓左端的贡献为 0，而对任意 $P \supseteq Z \supseteq T$，$x$ 对 $N_{=}(Z)$ 的贡献为 0，从而对 $\sum_{P \supseteq Z \supseteq T}N_{=}(Z)$ 的贡献为 0. 因此，x 对式㉓两端的贡献相等（都是 0）；如果 x 除具有 T 中所有性质外，还具有性质 p_{i_1}，p_{i_2}，…，p_{i_m}，但不再具有其他性质，即 x 恰具有 $Z_0 = T \cup \{p_{i_1}, p_{i_2}, \cdots, p_{i_m}\}$ 中所有性质，则 x 对 $N_{=}(Z)$ 的贡献为 1，而对其他 Z，$T \subseteq Z \subseteq P$，$x$ 对 $N_{=}(Z)$ 的贡献为 0. 所以 x 对式㉓右端的贡献为 1. 另外，x 对 $N_{\geqslant}(T)$ 的贡献为 1. 于是 x 对式㉓两端的贡献都是 1.

注 式㉓可以直接由 $N_{\geqslant}(T)$ 和 $N_{=}(Z)$ 的意义加以证明. 另外，由式㉓可以导出式㉑，读者无妨自己证之. 式㉒称为容斥原理，前面的容斥原理⑧和④都可以从式㉒导出. 熟知，有限集 P 的所有子集的集合记作 $\mathscr{P}(P)$，在子集间的包含关系下 $\mathscr{P}(P)$ 是一个偏序集. $N_{=}$ 和 $N_{\geqslant}$ 是定义在偏序集

$\mathscr{P}(P)$上的两个函数，它们之间存在着关系㉑和㉓. 可以证明（不难），由式㉑可以导出式㉓，反之也可以由式㉓导出式㉑. 它们称为偏序集$\mathscr{P}(P)$上的反演公式. 美国数学家 Rota 1964 年建立了一般偏序集上的反演公式. 反演公式是数论中经典的 Möbius 反演公式的推广. 直到现在，反演公式的种种推广和统一形式仍是组合数学研究的一个课题.

10. 1. 23　设 n 阶简单图G具有m条边. 证明：图 G 中至少含有$\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right)$个3圈.

证　记图 G 中所有与顶点u相邻的顶点集合为$N(u)$. 设 u 和 v 是图G的任意两个顶点. 则由容斥原理有

$$|N(u)\cap N(v)|=|N(u)|+|N(v)|-|N(u)\cup N(v)|.$$

易知$|N(u)|=d(u)$，即顶点 u 的度，而$|N(u)\cup N(v)|\leqslant n$. 因此

$$|N(u)\cap N(v)|\geqslant d(u)+d(v)-n. \quad ㉔$$

注意，如果图 G 中顶点u和v相邻，则$|N(u)\cap N(v)|$即是以 uv 为一边的 3 圈的个数. 设 E 是图G的边集合，将式㉔对图 G 中所有的边求和，注意到图 G 中每个3圈在此求和过程中被重复算了三次，因此图 G 中3圈的个数至少是

$$\frac{1}{3}\sum_{uv\in E}(d(u)+d(v)-n).$$

记上式为 f_n，则

$$\begin{aligned}f_n&=\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}\left[\sum_{u\in V}\left(\sum_{v\in N(u)}d(u)\right)+\sum_{v\in V}\left(\sum_{u\in N(v)}d(v)\right)\right]-\sum_{uv\in E}n\right\}\\&=\frac{1}{3}\left\{\sum_{u\in V}(d(u)^2-mn)\right\}.\end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式得到

$$f_n\geqslant\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{n}\left(\sum_{u\in V}(d(u))^2-mn\right)\right\}.$$

由度边定理有$\sum_{u\in V}d(u)=2m$，因此

$$f_n\geqslant\frac{4m}{3n}\left(m-\frac{n^2}{4}\right).$$

10. 1. 24　设 n 阶简单图G不含k阶完全子图K_k. 证明：图 G 中度小于或等于$p=\left\lfloor\frac{(k-2)n}{k-1}\right\rfloor$的顶点的个数至少是$m=\left\lfloor\frac{n}{k-1}\right\rfloor$，其中$\lfloor x\rfloor$是大于或等于$x$的最小整数.

证　设$n=(k-1)q+r$，$0\leqslant r\leqslant k-2$，且设$(k-2)n=(k-1)p+s$，$0\leqslant s\leqslant k-2$，$r$ 和 s 是整数. 易知若$r=0$，则$s=0$，且若$r\geqslant1$，则$s=k-r-1$.

现在设图 G 中度$d(x)\leqslant p$的顶点x的个数小于m. 记$X=\{x\in V(G)\mid d(x)\leqslant p\}$，$Y=\{y\in V(G)\mid d(y)\geqslant p+1\}$，其中$V(G)$是图$G$的顶点集合. 则 X，Y 是$V(G)$的分划，而且$|X|\leqslant m-1$，$|Y|\geqslant n-m+1$.

任取$y_1\in Y$，用$N(y_1)$表示图G中与顶点y_1相邻的顶点集合，即y_1的邻域. 任取$y_2\in N(y_1)\cap Y$. 则由容斥原理有

$$\begin{aligned}&|N(y_1)\cap N(y_2)|\\&=|N(y_1)|+|N(y_2)|\\&\quad-|N(y_1)\cup N(y_2)|\\&\geqslant2(p+1)-n.\end{aligned}\quad ㉕$$

如此继续. 设$y_i\in\bigcap_{i<j}N(y_i)\cap Y$，$i=1, 2, \cdots, k-2$. 记$B=\bigcap_{i=1}^{k-2}N(y_i)$. 首先证明：

$$|B|\geqslant(k-2)(p+1)-(k-3)n. \quad ㉖$$

为此对$k-2\geqslant2$用归纳法. 当$k-2=2$时，由式㉕可知式㉖成立. 设式㉖对$k-3$时成立，即有

$$\left|\bigcap_{i=1}^{k-3}N(y_i)\right|\geqslant(k-3)(p+1)-(k-4)n.$$

则由容斥原理有

$$\begin{aligned}|B|&=\left|\bigcap_{i=1}^{k-2}N(y_i)\right|\\&=\left|\left(\bigcap_{i=1}^{k-3}N(y_i)\right)\cap N(y_{k-2})\right|\\&=\left|\bigcap_{i=1}^{k-3}N(y_i)\right|+|N(y_{k-2})|\\&\quad-\left|\left(\bigcap_{i=1}^{k-3}N(y_i)\right)\cup N(y_{k-2})\right|\\&\geqslant(k-3)(p+1)-(k-4)n+(p+1)-n\\&=(k-2)(p+1)-(k-3)n.\end{aligned}$$

因此式㉖成立. 其次证明：

$$(k-2)(p+1)-(k-3)n\geqslant\left\lfloor\frac{n}{k-1}\right\rfloor. \quad ㉗$$

考虑两种情形：$r=0$和$r\geqslant1$.

情形1：$r=0$. 此时$s=0$. 因此

$$\begin{aligned}&(k-2)(p+1)-(k-3)n\\&=(k-2)((k-2)q+1)\\&\quad-(k-3)(k-1)q\\&=q+k-2\geqslant q.\end{aligned}$$

情形2：$r\geqslant1$. 此时$s=k-r-1$. 因此

$$\begin{aligned}&(k-2)(p+1)-(k-3)n\\&=(k-1)p-p+(k-2)\\&\quad-(k-1)p-s+n\\&=n-p+k-s-2\\&=\frac{n}{k-1}+\frac{(k-2)n}{k-1}-p+k-s-2\\&=q+\frac{r}{k-1}+p+\frac{s}{k-1}-p+k-s-2\end{aligned}$$

$= q + \frac{r+s}{k-1} + k - s - 2$
$\geqslant q+1.$

因此式㉗成立.

由于 $|X|<m$，$|B|\geqslant m$，且 X，Y 是 $V(G)$ 的一个分划，所以 $B\cap Y\neq\varnothing$. 于是存在 $y_{k-1}\in B\cap Y$，且 $d(y_{k-1})\geqslant p+1$. 再由容斥原理得到

$$\left|\left(\bigcap_{i=1}^{k-2}N(y_i)\right)\cap N(y_{k-1})\right|$$
$$\geqslant (k-1)(p+1)-(k-2)n$$
$$=k-1-s>0.$$

因此存在 $y_k\in\bigcap_{i=1}^{k-1}N(y_i)$. 这表明，$y_1$，$y_2$，…，$y_k$ 之间任意两个顶点都相邻. 也即图 G 含有 k 阶完全子图 K_k. 与题设矛盾. 因此 $|X|\geqslant m$.

§10.2 (0，1) 矩阵、集合与关系

如果 $m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 中每个元素 a_{ij} 只能取值 0 或 1，则 A 称为 $m\times n$ (0，1) 矩阵. $m\times n$ (0，1) 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 可以看成是实数域 **R** 上矩阵，此时矩阵的和与乘积按通常实数域 **R** 上矩阵的加法与乘法进行，得到的矩阵不一定是 (0，1) 矩阵. $m\times n$ (0，1) 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 也可以看成是二元布尔代数 $\mathscr{B}$ 上矩阵，此时矩阵的和与乘积应按二元布尔代数 $\mathscr{B}$ 上矩阵运算法则进行，得到的矩阵一定是 (0，1) 矩阵.

(0，1) 矩阵通常是组合结构的表示，对于同一个 (0，1) 矩阵 A，可以有多种组合意义. 弄清 (0，1) 矩阵的各种组合背景，即可应用组合矩阵论的结论与技巧来处理各种类型的组合问题. 因此 (0，1) 矩阵既是组合矩阵论研究的基本对象，也是解决各类组合问题的重要工具.

10.2.1 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 元集，X_1、X_2、…、X_m 是 X 的子集. 定义 $m\times n$ (0，1) 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 如下

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & x_j\in X_i,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

矩阵 A 称为 X_1，X_2，…，X_m 关于 X 的关联矩阵. 证明：

(1) 记 $m\times n$(0,1)矩阵 A 的第 i 行上所有元素之和为 r_i，即 $r_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$，$i=1,2,\cdots,m$，$A$ 的第 j 列上所有元素之和记作 s_j，即 $s_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{mj}$，$j=1,2,\cdots,n$. r_i 和 s_j 分别称为 A 的第 i 行和与第 j 列和. 则 $|X_i|=r_i$，$i=1,2,\cdots,m$，s_j 是元素 x_j 在 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 中出现的次数.

(2) 记 $S=AA'=[s_{ij}]$，其中 A' 是矩阵 A 的转置. 则

$$s_{ij}=\begin{cases}|X_i\cap X_j|, & 1\leqslant i\neq j\leqslant n,\\ |X_i|, & 1\leqslant i=j\leqslant n.\end{cases}$$

(3) 记 $T=A'A=[t_{ij}]$，则当 $i\neq j$ 时，t_{ij} 是元素 x_i，x_j 同时在 X_1，X_2，…，X_m 中出现的次数.

(4) 记 $Y_i=X-X_i$，$i=1, 2, \cdots, m$. 则 Y_1，Y_2，…，Y_m 是关于 X 的关联矩阵 $B=J_{m\times n}-A$，其中 $J_{m\times n}$ 是 $m\times n$ 全 1（即每个元素均为 1）矩阵. 记 $W=AB'=[w_{ij}]$. 则 w_{ij} 是差集 X_i-X_j 的基数.

证 (1) 由关联矩阵 A 的意义易知，$r_i=|X_i|$，$i=1, 2, \cdots, m$，s_j 是元素 x_j 在 X_1，X_2，…，X_m 中出现的次数. $j=1, 2, \cdots, n$.

(2) 由矩阵乘积的意义可知，

$$s_{ij}=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{in}a_{jn}.$$

注意，$a_{ik}a_{jk}=1$，当且仅当 $a_{ik}=1$ 且 $a_{jk}=1$，即 $x_k\in X_i$ 且 $x_k\in X_j$，即 $x_k\in X_i\cap X_j$. 而 s_{ij} 即是 1，2，…，n 中使得 $a_{ik}a_{jk}=1$ 的 k 的个数，因此当 $i\neq j$ 时，$s_{ij}=|X_i\cap X_j|$. 当 $i=j$ 时，$s_{ij}=|X_i|$.

(3) 由矩阵乘法的意义可知，

$$t_{ij}=a_{1i}a_{1j}+a_{2i}a_{2j}+\cdots+a_{mi}a_{mj}.$$

注意，$a_{ki}a_{kj}=1$，当且仅当 $a_{ki}=1$ 且 $a_{kj}=1$，即当且仅当 $x_i\in X_k$ 且 $x_j\in X_k$，即 $x_i,x_j\in X_k$. 而 t_{ij} 即是 1,2,…,n 中使得 $a_{ki}a_{kj}=1$ 的 k 的个数，因此 t_{ij} 是元素 x_i，x_j 同时出现在 X_k 中之子集 X_k 的个数，也即元素 x_i，x_j 同时出现在 $X_1,X_2,\cdots,X_m$ 中的次数.

(4) 记 $B=[b_{ij}]$，则当 $x_j\in Y_i$ 时，$b_{ij}=1$. 当 $x_j\notin Y_i$ 时，$b_{ij}=0$，因此当 $x_j\notin X_i$ 时，$b_{ij}=1$，当 $x_j\in X_i$ 时，$b_{ij}=0$. 记 $J_{m\times n}-A=[c_{ij}]$，则 $c_{ij}=1-a_{ij}$. 因此当 $x_j\notin X_i$ 时，$c_{ij}=1=b_{ij}$，当 $x_j\in X_i$ 时，$c_{ij}=0=b_{ij}$. 因此 $B=J_{m\times n}-A$. 其次由 $W=AB'=[w_{ij}]$ 得到

$$w_{ij}=a_{i1}(1-a_{j1})+a_{i2}(1-a_{j2})+\cdots+a_{in}(1-a_{jn}).$$

其中 $a_{ik}(1-a_{jk})=1$ 当且仅当 $a_{ik}=1$ 且 $1-a_{jk}=1$，即 $x_k\in X_i$，$x_k\notin X_j$，即 $x_k\in X_i-X_j$. 而 w_{ij} 是 1，2，…，n 中使 $a_{ik}(1-a_{jk})=1$ 的 k 的个数，也即 X_i-X_j 中元素 x_k 的个数. 因此 $w_{ij}=|X_i-X_j|$.

10.2.2 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 元集，$\mathscr{P}(X)$ 是 X 的所有子集的集合. 求 $|\mathscr{P}(X)|$.

解 设 $Y\in\mathscr{P}(X)$，即 Y 是 X 的一子集. Y 关于 X 的关联矩阵记作 A_Y. 注意，A_Y 是一个 $1\times n$ 的 (0，1) 矩阵. 所有 $1\times n$ (0，1) 矩阵的集合记作 $\mathscr{A}$. 建立 $\mathscr{P}(X)$ 到 $\mathscr{A}$ 的映射 φ 为：对任意 $Y\in\mathscr{P}(X)$，令 $\varphi(Y)=A_Y$. 易知，对 Y，$X\in$

$\mathscr{P}(X)$，$Y\neq X$，有 $A_Y\neq A_X$，即 $\varphi(Y)\neq\varphi(X)$．因此 φ 是单射．又对任意 $A=[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}]\in\mathscr{A}$，当 $a_{1j}=1$ 时令 $x_j\in Y$，当 $a_{1j}=0$ 时令 $x_j\notin Y$．如此得到的 $Y\in\mathscr{P}(X)$，且 $\varphi(Y)=A_Y=A$．因此 φ 是双射．于是 $|\mathscr{P}(X)|=|\mathscr{A}|$．由于 $A=[a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}]\in\mathscr{A}$ 是一个 $1\times n$ (0, 1) 矩阵．对每个 a_{1j}，只能取 0 或 1，因此每个 a_{1j} 只有两种可能取值．而 $j=1, 2, \cdots, n$，所以 $|\mathscr{A}|=2^n$．于是 $|\mathscr{P}(X)|=2^n$．

注　10．2．2 是说，每个 n 元集 X 共有 2^n 个子集．这是一个基本结论．

10．2．3　证明：n 元集 X 的 2^n 个子集可以编号为 $X_1, X_2, \cdots, X_{2^n}$，使得相邻的两个子集恰有一个不同的元素．

证　考虑 $n=2$ 的情形．此时设 $X=\{x_1, x_2\}$，Y 是 X 的一个子集，Y 关于 X 的关联矩阵 $A_Y=[a_1, a_2]$ 是一个 1×2 (0, 1) 矩阵，其中 a_1，a_2 只能取 0 或 1．1×2 (0, 1) 矩阵有 4 个：

$$A_1=[0, 0],\ A_2=[1, 0],$$
$$A_3=[1, 1],\ A_4=[0, 1].$$

记 A_i 所相应的 X 的子集为 X_1, X_2, X_3, X_4，则其中相邻的两个子集恰有一个不同的元素．

考虑 $n=3$ 的情形．此时设 $X=\{x_1, x_2, x_3\}$，Y 是 X 的一个子集，Y 关于 X 的关联矩阵 $A_Y=[a_1, a_2, a_3]$ 是一个 1×3 (0, 1) 矩阵，1×3 (0, 1) 矩阵共有 8 个：

$$B_1=[0, 0, 0],\ B_2=[1, 0, 0],$$
$$B_3=[1, 1, 0],\ B_4=[0, 1, 0],$$
$$B_5=[0, 1, 1],\ B_6=[1, 1, 1],$$
$$B_7=[1, 0, 1],\ B_8=[0, 0, 1].$$

它们相应的 X 的子集为 $X_1, X_2, \cdots, X_8$，其中相邻的两个子集恰有一个不同元素．

比较 $n=3$ 和 $n=2$ 的情况，可知

$$B_1=[A_1, 0],\ B_2=[A_2, 0],$$
$$B_3=[A_3, 0],\ B_4=[A_4, 0],$$
$$B_5=[A_4, 1],\ B_6=[A_3, 1],$$
$$B_7=[A_2, 1],\ B_8=[A_1, 1].$$

由此即可对一般 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 2^n 个子集编号．设 $n-1$ 元集 $Y=\{x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}\}$ 的 2^{n-1} 个子集为 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{2^{n-1}}$，其中相邻的两个子集恰有一个元素不同．记它们的关联矩阵依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_{2^{n-1}}$．它们都是 $1\times(n-1)$ (0, 1) 矩阵．考虑 2^n 个 $1\times n$ (0, 1) 矩阵

$$[A_1, 0], [A_2, 0], \cdots, [A_{2^{n-1}}, 0],$$
$$[A_{2^{n-1}}, 1], \cdots, [A_2, 1], [A_1, 1].$$

它们相应的 X 的 2^n 个子集依次记作 $X_1, X_2, \cdots, X_{2^n}$，则 $X_1, X_2, \cdots, X_{2^n}$ 即合题求．

10．2．4　设 X 是 10 个两位数的集合．证明：存在 X 的两个子集 Y 和 Z，使得 $Y\cap Z=\varnothing$，且 Y 中所有数之和与 Z 中所有数之和相等．

证　集 X 共有 $2^{10}-1=1023$ 个非空子集．对于每个子集 W，W 中所有数之和记作 $\sigma(W)$．当 W 跑遍 X 的所有 1023 个子集时便得到 1023 个和 $\sigma(W)$．由于 W 中每个数都是两位数，而两位数至多有 10 个，因此 $\sigma(W)\leqslant10\times100=1000$．由抽屉原理，这 1023 个和 $\sigma(W)$ 一定有两个相同．因此存在 X 的两个子集 Y' 和 Z'，使得 $\sigma(Y')=\sigma(Z')$．从 Y' 和 Z' 中去掉相同的数，得到的子集记作 Y 和 Z．则 $Y\cap Z=\varnothing$ 且 $\sigma(Y)=\sigma(Z)$．

10．2．5　设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$．对于 $Y\in\mathscr{P}(X)$，Y 中所有数之和记作 $\sigma(Y)$．求 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$．

解　由 10．2．2，可记 $\mathscr{P}(X)=\{X_1, X_1, \cdots, X_{2^n}\}$．$\mathscr{P}(X)$ 关于 X 的关联矩阵记作 $A_{\mathscr{P}(X)}$．$A_{\mathscr{P}(X)}$ 是一个 $2^n\times n$ (0, 1) 矩阵．易知 $A_{\mathscr{P}(X)}$ 的第 k 个列和为 2^{n-1}，即数 k 出现在 X 的 2^{n-1} 个子集中，因此

$$\begin{aligned}\sum_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)&=\sum_{k=1}^{n}k\cdot2^{n-1}\\&=(1+2+\cdots+n)2^{n-1}\\&=n(n+1)2^{n-2}.\end{aligned}$$

10．2．6　设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$．对于 $Y\in\mathscr{P}(X)$，记 $Y=\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$，其中 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 是正整数，且 $1\leqslant x_1<x_2<\cdots<x_k\leqslant n$．记

$$\sigma(Y)=x_k-x_{k-1}+x_{k-2}-x_{k-3}+\cdots+(-1)^{k-1}x_1.$$

求 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$．

解　设 $\mathscr{P}(X)=\{X_1, X_2, \cdots, X_{2^n}\}$，$\mathscr{P}(X)$ 关于 X 的关联矩阵记作 $A_{\mathscr{P}(X)}$．$A_{\mathscr{P}(X)}$ 是一个 $2^n\times n$ (0, 1) 矩阵．对给定的 k，$1\leqslant k<n$，设 $A_{\mathscr{P}(X)}$ 的第 i 行 $\alpha_i=[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}]$ 的第 k 个坐标为 1．则 α_i 相应的子集 X_i 含有 k．记 $\beta_i=[a_{i,k+1}, \cdots, a_{in}]$．如果 β_i 中有偶数个 1，则 k 在 $\sigma(X_i)$ 中出现的是 k；如果 β_i 中有奇数个 1，则 k 在 $\sigma(X_i)$ 中出现的是 $-k$．易知含有偶数个 1 的 (0, 1) 向量 β_i 的个数 $r(k)$ 等于含有奇数个 1 的 (0, 1) 向量 β_i 的个数（见 10．2．3），而 (0, 1) 向量 β_i 的个数为 2^{n-k}．所以 $r(k)=2^{n-k-1}$．记

$\gamma_i=[a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{i,k-1}]$. 作为 (0, 1) 向量 γ_i, 其个数为 2^{k-1}. 对于每个 β_i, 共有 2^{k-1} 个 γ_i, 使得 $\alpha_i=(\gamma_i, a_{ik}, \beta_i)$ 是 $A_{\mathscr{P}(X)}$ 中第 k 个分量为 1 的一个行. 因此, 在

$$\sum_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$$

的展开式中 k 出现的项数为 $2^{k-1}\cdot 2^{n-k-1}=2^{n-2}$, $-k$ 出现的项数也是 2^{n-2}. 因此 k 对 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$ 的贡献为 0. 余下应考虑 n 对 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$ 的贡献. 由于 n 在 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$ 的展开式中总是正的, 而 $A_{\mathscr{P}(X)}$ 的第 n 列和为 2^{n-1}. 即 n 在 $\mathscr{P}(X)$ 的子集 X_1, X_2, $\cdots$, X_{2^n} 中出现 2^{n-1}. 因此 n 在 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$ 的展开式中出现的项数为 2^{n-1}. 所以 n 对 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)$ 的贡献为 $2^{n-1}n$. 于是 $\sum\limits_{Y\in\mathscr{P}(X)}\sigma(Y)=2^{n-1}n$.

10.2.7 设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$. 求 X 中 k 个没有公共元的子集的有序组 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 的个数 g_n.

解 设 $S=(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 是一个无公共元的 k 个子集的有序组. X_1, X_2, $\cdots$, X_k 关于 X 的关联矩阵记作 A_S. 注意, 因为 X_1, X_2, $\cdots$, X_k 无公共元, 因此 $k\times n$ (0, 1) 矩阵 A_S 不含有全 1 的列, 即列上每个元素都是 1. 所有无公共元的 k 个子集有序组的集合记作 $\mathscr{S}$. 所有不含全 1 列的 $k\times n$ (0, 1) 矩阵的集合记 $\mathscr{A}$. 定义 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{A}$ 的映射 φ 如下: 对于 $S\in\mathscr{S}$, 令 $\varphi(S)=A_S$. 易知 φ 是 $\mathscr{S}$ 到 $\mathscr{A}$ 上的双射. 于是 $g_n=|\mathscr{S}|=|\mathscr{A}|$. 现在来计算 $|\mathscr{A}|$. 设 $A_S\in\mathscr{A}$, A_S 是 $k\times n$ (0, 1) 矩阵, 它的第 j 列 α_j 是一个 k 维 (0, 1) 向量, 且不是全 1 列, 如此的 α_j 共有 2^k-1 个. 由于 A_S 有 n 个列, 所以 $|\mathscr{A}|=(2^k-1)^n$. 于是 $g_n=(2^k-1)^n$.

注 10.2.7 的解法之关键在于, 将无公共元的 k 个子集的有序组 $(X_1, X_2, \cdots, X_k)$ 表示为不含全 1 列的 $k\times n$ (0, 1) 矩阵. 因而解法显得异常简捷. 读者无妨尝试一下用其他方法来求 g_n, 即可品味出用 (0, 1) 矩阵来解题的精妙之处.

10.2.8 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 m 个子集, 其中任意两个子集都有公共元, 任意三个子集都无公共元. 证明: $C_m^2\leqslant n$.

证 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 是 X 的符合题意的 m 个子集, A 是 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 关于 X 的关联矩阵. A 显然是一个 $m\times n$ (0, 1) 矩阵. 考察 A 的 $3\times n$ 子矩阵 A_1:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc}1 & 2 & \cdots & k & \cdots & n\end{array}\\ A_1=\begin{array}{c}X_i\\X_j\\X_t\end{array} & \begin{bmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ik} & \cdots & a_{in}\\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{jn}\\ a_{t1} & a_{t2} & \cdots & a_{tk} & \cdots & a_{tn}\end{bmatrix}\end{array}$$

由 10.2.1 (1), $r_i=|X_i|=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{ik}+\cdots+a_{in}$. 由 10.2.1 (2), $s_{ij}=|X_i\cap X_j|=a_{i1}a_{j1}+a_{i2}a_{j2}+\cdots+a_{ik}a_{jk}+\cdots+a_{in}a_{jn}=(\alpha_i, \alpha_j)$, 其中 (α_i, α_j) 是向量 $\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$ 和 $\alpha_j=(a_{j1}, a_{j2}, \cdots, a_{jn})$ 的内积. 由题意可知, $s_{ij}=|X_i\cap X_j|>0$. 因此存在 k, 使得 $a_{ik}=a_{jk}=1$. 由于 $|X_i\cap X_j\cap X_t|=0$, 所以对于使 $a_{ik}=a_{jk}=1$ 的 k, 必有 $a_{tk}=0$. 这说明, 对于给定的 i 和任意 $j\neq i$, 关联矩阵 A 的第 i 行 α_i 和第 j 行 α_j, 必有第 k 个分量 a_{ik} 和 a_{jk} 均为 1, 即必有一个元素 x_k 同属于 X_i, X_j. 而对第 i 行 α_i 和第 t 行 α_t, 也必有第 k' 个分量 $a_{ik'}$ 和 $a_{tk'}$ 均为 1, 即必有一个元素 $x_{k'}$ 同属于 X_i, X_t. 当 $j\neq t$ 时, 元素 x_k 和 $x_{k'}$ 是不同的. 因此 X_i 中同时出现在 X_i 和 X_j 的这类元素至少有 $m-1$ 个 (因为 $j=1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, n$). 所以 $|X_i|\geqslant m-1$. 而 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m$ 中这类同时出现在不同的两个子集的元素的个数至少是 $\frac{1}{2}\cdot m(m-1)$ 个. 由于 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m\subseteq X$, 所以 $\frac{1}{2}m(m-1)\leqslant|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m|\leqslant n$. 因此 10.2.8 成立.

注 10.2.8 的证明之关键在于, X_1, X_2, $\cdots$, X_m 的关联矩阵 A 的任意 $3\times n$ 子矩阵 A_1 不含全 1 列, 而且含有恰有 2 个 1 的列. 又从 10.2.8 可以得到关于 n 元集 X 的一组任意两个子集都相交, 任意三个子集都不交的子集 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 的个数 m 的上界: 由 $C_m^2\leqslant n$ 易得, $m\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{2n+4}$. 当 $n=6$ 时, $m\leqslant 4$. 设 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$, 且 $X_1=\{x_1, x_2, x_3\}$, $X_2=\{x_1, x_4, x_5\}$, $X_3=\{x_2, x_4, x_6\}$, $X_4=\{x_3, x_5, x_6\}$, 则 X_1, X_2, X_3, X_4 是 X 的一组符合题意的子集. 这说明, 当 $n=6$ 时, 上界是可以达到的.

10.2.9 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的子集, 其中任意 r 个子集都有公共元, 而任意 $r+1$ 个子集均无公共元. 证明: $C_m^r\leqslant n$.

证 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 是题设的 m 个子集, A 是 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 关于 X 的关联矩阵. A 的第 i 行记作 α_i. 从 A 的其他行中取出 $r-1$ 行, 和 α_i 构

成一个 $r\times n$ 子矩阵 A_1：

$$A_1=\begin{array}{c}X_i\\X_{i_1}\\\vdots\\X_{i_{r-1}}\end{array}\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{ik}&\cdots&a_{in}\\a_{i_1 1}&a_{i_1 2}&\cdots&a_{i_1 k}&\cdots&a_{i_1 n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i_{r-1}1}&a_{i_{r-1}2}&\cdots&a_{i_{r-1}k}&\cdots&a_{i_{r-1}n}\end{bmatrix}$$

（列标依次为 $1\ \ 2\ \cdots\ k\ \cdots\ n$）

由于 X_1，X_2，…，X_m 中任意 r 个子集都有交，所以 A_1 必含有全 1 列．由于 X_1，X_2，…，X_m 中任意 $r+1$ 个子集均无公共元，因此从 A 中再任取一行 a_{i_r}，和 A_1 组成一个 $(r+1)\times n$ 子矩阵 B：

$$B=\begin{bmatrix}A_1\\a_{i_r}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{array}{c}X_i\\X_{i_1}\\\vdots\\X_{i_r}\end{array}\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{in}\\a_{i_1 1}&a_{i_1 2}&\cdots&a_{i_1 n}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a_{i_r 1}&a_{i_r 2}&\cdots&a_{i_r n}\end{bmatrix}$$

（列标依次为 $1\ \ 2\ \cdots\ n$）

中不含全 1 列．这说明，对于给定的子集 X_i，其中同时出现在其他 $r-1$ 个子集的元素至少有 C_{m-1}^{r-1} 个，而且这些元素都是互异的．从而 $|X_i|\geqslant C_{m-1}^{r-1}$．于是 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m$ 中这种同时出现在 X_1，X_2，…，X_m 中 r 个子集的元素至少有 mC_{m-1}^{r-1} 个．由于每个这种元素同时出现在 r 个子集，因此在对 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m$ 中被重复计算了 r 次．于是有

$$|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m|\geqslant\frac{m}{r}C_{m-1}^{r-1}=C_m^r.$$

而 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_m\subseteq X$．所以 10．2．9 成立．

10．2．10　有一保险库，由 11 个人保管．按规定，必须 6 个人同时在场才能打开保险库，而任意 5 个人则不可能打开保险库．问如何给保险库加锁和分配钥匙，才能保障这一规定得以执行．

解　设给保险库装上 n 把锁，其集合记作 X．11 个人所不能打开的锁的集合分别记作 X_1，X_2，…，X_{11}．依规定可知，X_1，X_2，…，X_{11} 中任意 5 个子集都有公共元，而任意 6 个子集都无公共元．由 10．2．9 可知，$n\geqslant C_{11}^5$．所以至少需装上 C_{11}^5 把锁．

下面说明，装上 C_{11}^5 把锁即可，将 C_{11}^5 把锁编号为 1，2，…，C_{11}^5．11 个人组成的 5 人组共有 C_{11}^5，它们也依次编号为 1，2，…，C_{11}^5．注意每一个人属于 C_{10}^4 个不同的 5 人组，它们各自都有一个号码．只要不将这些编号的锁的钥匙分配给这个人，而将其他所有号码的锁的钥匙都归他掌管即可．易知这种分配钥匙方式一定能保证规定的执行．

10．2．11　设 X_1，X_2，…，X_r 是 n 元集 X 的 r 个 k 元子集，Y_1，Y_2，…，Y_s 是 X 的 s 个 $k+1$ 元子集．对每个 X_i，X 中所有包含 X_i 的 $k+1$ 元子集均在 Y_1，Y_2，…，Y_s 中，而对每个 Y_j，必有某个 X_i，使得 X_i 是 Y_j 的子集．证明：

$$s\geqslant\frac{n-k}{k+1}r.$$

证　定义 Y_1，Y_2，…，Y_s 和 X_1，X_2，…，X_r 的关联矩阵 $A=[a_{ij}]$ 如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & X_j\text{ 是 }Y_i\text{ 的子集},\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

易知 A 是一个 $s\times r$ (0，1) 矩阵．考虑 A 的第 j 列和 $s_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{sj}$．因为 X_j 是 X 的 k 元子集，$X-X_j$ 中每个元素 x 添加到 X_j，得到 X 的一个 $k+1$ 元子集 $Y=X_j\cup\{x\}$．而由题意可知，Y 在 Y_1，Y_2，…，Y_s 中，因此 Y_1，Y_2，…，Y_s 中恰有 $n-k$ 个 $k+1$ 元子集包含 X_j．所以 $s_j=n-k$．于是 $s_1+s_2+\cdots+s_r=r(n-k)$．另一方面，对每个 $k+1$ 元子集 Y_j，必有某个 X_i，使 X_i 是 Y_j 的 k 元子集．而 Y_j 中出现 X_1，X_2，…，X_r 的 k 元子集至多有 $k+1$ 个．所以 Y_1，Y_2，…，Y_s 的 k 元子集在 X_1，X_2，…，X_r 中的个数至多是 $s(k+1)$．于是得到 $r(n-k)\leqslant s(k+1)$．因此 10．2．11 成立．

注　10．2．11 中 Y_1，Y_2，…，Y_s 和 X_1，X_2，…，X_r 的关联矩阵 A 是子集族 X_1，X_2，…，X_m 关于 n 元集 X 的关联矩阵概念的推广．

10．2．12（Sperner 定理）　设 X 是一个 n 元集，其子集的集合 $\mathscr{P}(X)$ 在 X 的子集 Y，Z 之间包含关系下成为一个偏序集．设 $S=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}\subseteq\mathscr{P}(X)$．如果 S 中任意两个元素 X_i 和 X_j 都是无关的，也即 $X_i\nsubseteq X_j$，且 $X_j\nsubseteq X_i$，则 S 称为偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的一个反链．证明：如果 $S=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 是偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的一个反链，则 $m\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$，而且上界是可以达到的．

证　设 $S=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 是偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的一个反链，且 m 是所有反链 S 的宽度 $|S|$ 之最大值，且设 $n=2l$．则有

$$|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_m|=l. \qquad ①$$

为证式①成立，我们用反证法．设 X_1，X_2，…，X_m 中 X_1，X_2，…，X_r 为 k 元子集，$k\geqslant l+1$．X_1，X_2，…，X_r 中所有 $k-1$ 元子集记作 Y_1，Y_2，…，Y_s．定义 X_1，X_2，…，X_r 与 Y_1，Y_2，…，Y_s 的关联矩阵 $A=[a_{ij}]$ 如下：

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & Y_j\text{ 是 }X_i\text{ 的子集},\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

则 A 是一个 $r\times s$ (0, 1) 矩阵. 由于每个 k 元子集 X_i 含有 k 个 $k-1$ 元子集, 因此, A 的第 i 行和 $r_i=k$, $k=1, 2, \cdots, r$. 因而 A 中所含 1 的个数为 $r_1+r_2+\cdots+r_r=kr$. 注意, A 中每个 1 表示 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s 中一个 Y_j 在 X_1, X_2, $\cdots$, X_r 中某个 X_i 中, 因此 kr 是 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s 在 X_1, X_2, $\cdots$, X_r 中重复出现的次数. 另一方面, 每个 $k-1$ 元子集 Y_j 在 X 的所有 k 元子集中出现的次数至多是 $n-k+1$. 因此 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s 在 X 的所有 k 元子集中出现的次数至多是 $s(n-k+1)$. 于是有 $kr\leqslant s(n-k+1)$. 即

$$s\geqslant\frac{kr}{n-k+1}.$$

而 $k\geqslant l+1=\frac{n+2}{2}>\frac{n+1}{2}$, 所以

$$s\geqslant\frac{k}{n-k+1}r>r.$$

现在用 Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_s 取代 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 中之 X_1, X_2, $\cdots$, X_r, 则 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_s, X_{r+1}, \cdots, X_m\}$ 是 $\mathscr{P}(X)$ 中一个反链, 与 m 的最大选取相矛盾. 因此, $|X_i|\leqslant l$, $i=1, 2, \cdots, m$. 如果 $|X_1|=|X_2|=\cdots=|X_{r'}|=k\leqslant l-1$, 则可按 10. 2. 11 构造子集 Y_1, Y_2, $\cdots$, $Y_{s'}$, 并用它们替换 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 中之 X_1, X_2, $\cdots$, $X_{r'}$, 得到子集 Y_1, Y_2, $\cdots$, $Y_{s'}$, $X_{r'+1}$, $\cdots$, X_m. 易知 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{s'}, X_{r'+1}, \cdots, X_m\}$ 是偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的一个反链. 由 10. 2. 11 可知

$$s'\geqslant\frac{n-k}{k+1}r.$$

由于 $k\leqslant l-1=\frac{n-2}{2}<\frac{n-1}{2}$, 所以

$$s'\geqslant\frac{n-k}{k+1}r>r.$$

从而反链 $\{Y_1, Y_2, \cdots, Y_{s'}, X_{r'+1}, \cdots, X_m\}$ 所含元素个数 $s'+m-r'>m$. 与 m 的最大选取相矛盾. 这就证明, 每个 X_i 都是 l 元子集. 易知, 当 $n=2l$ 时, n 元集 X 含有 $C_n^{\frac{n}{2}}$ 个 $\frac{n}{2}$ 元集 X_1, X_2, $\cdots$, $X_{C_n^{\frac{n}{2}}}$, 它们组成偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 中一个反链. 因此, 当 $n=2l$ 时, 结论成立.

至于 $n=2l+1$ 时的情形, 证明是类似的. 从略.

10. 2. 13 设 X_1, X_2, $\cdots$, X_m 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 m 个子集 (允许相同). 如果 X 中有 m 个互异的元素 x_{i_1}, x_{i_2}, $\cdots$, x_{i_m}, 使得 $x_{i_1}\in X_1$, $x_{i_2}\in X_2$, $\cdots$, $x_{i_m}\in X_m$, 则序列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 是子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 的互异代表元序列, 简称 SDR. 而 x_{ij} 称为 X_j 的代表元. 已知 4 元集 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 的 4 个子集 $X_1=\{x_1, x_2\}$, $X_2=\{x_2, x_3, x_4\}$, $X_3=\{x_1, x_2\}$, $X_4=\{x_1, x_3, x_4\}$, 求 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的互异代表元序列.

解 X_1, X_2, X_3, X_4 关于 X 的关联矩阵为

$$A=[a_{ij}]=\begin{array}{c}\\ X_1\\ X_2\\ X_3\\ X_4\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}x_1&x_2&x_3&x_4\end{array}\\ \begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&1&1\\1&1&0&0\\1&0&1&1\end{bmatrix}\end{array}.$$

设 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$ 是 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的一个互异代表元序列, 则 $x_{i_1}\in X_1$, $x_{i_2}\in X_2$, $x_{i_3}\in X_3$, $x_{i_4}\in X_4$, 因此 $a_{1i_1}=1$. $a_{2i_2}=1$, $a_{3i_3}=1$, $a_{4i_4}=1$. 由于 x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4} 是 X 中互异元素, 因此 i_1, i_2, i_3, i_4 是 1, 2, 3, 4 的一个排列. 因此 a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4} 是取自 4×4 矩阵 A 的不同行与不同列上的 4 个 1. 反之, 取自矩阵 A 的不同行不同列上的 4 个 1: a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4}, 则 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$ 是 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的一个互异代表元序列. 因此 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的所有互异代表元序列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}, x_{i_4})$ 的集合 S 与关联矩阵 A 的由不同行不同列的 4 个 1 序列 $(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4})$ 的集合 T 之间存在一个双射. 因此 $|S|=|T|$. 回忆矩阵 A 的行列式 $\det A$ 的定义:

$$\det A=\sum_{i_1i_2i_3i_4}\delta(i_1i_2i_3i_4)\,a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4},$$

其中求和号表示 $i_1i_2i_3i_4$ 遍历 1, 2, 3, 4 的所有排列求和, 而 $\delta(i_1i_2i_3i_4)$ 是排列 $i_1i_2i_3i_4$ 的奇偶性符号. 类似可以定义矩阵 A 的积和式 $\mathrm{per}A$ 如下:

$$\mathrm{per}A=\sum_{i_1i_2i_3i_4}a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}.$$

注意对于矩阵 A 的不同行、不同列的 4 个 1 序列, $(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4})$, $\mathrm{per}A$ 的展开式中相应的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}a_{3i_3}a_{4i_4}$ 应为 1. 即 $(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4})$ 对积和式 $\mathrm{per}A$ 的贡献是 1. 不同的 4 个 1 序列 $(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4})$ 对积和式 $\mathrm{per}A$ 的贡献是不同的 1. 而矩阵 A 的不全为 1 的序列 $(a_{1i_1}, a_{2i_2}, a_{3i_3}, a_{4i_4})$ 对 $\mathrm{per}A$ 的贡献为 0. 因此 $|T|=\mathrm{per}A$. 比较 $\det A$ 和 $\mathrm{per}A$ 的定义可知, 它们相差的是排列 $i_1i_2i_3i_4$ 的奇偶性符号. 因此可以将 $\mathrm{per}A$ 按行作类似的 Laplace 展开来计算 $\mathrm{per}A$ 的值. 例如将 $\mathrm{per}A$ 对第 1 行作 Laplace 展开, 有

$$\mathrm{per}A=a_{11}\mathrm{per}A_{11}+a_{12}\mathrm{per}A_{12}+a_{13}\mathrm{per}A_{13}$$

$+a_{14}\mathrm{per}A_{14}.$

其中 A_{ij} 是矩阵 A 的元素 a_{ij} 的余子矩阵. 于是可以求得

$$\mathrm{per}A=a_{11}\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}+a_{12}\mathrm{per}\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\1&1&0\end{bmatrix}=2+2=4.$$

这表明, (X_1, X_2, X_3, X_4) 有 4 个互异代表元序列, 从上面的计算易知, 它们是 (x_1, x_3, x_2, x_4), (x_1, x_4, x_2, x_3), (x_2, x_3, x_1, x_4), (x_2, x_4, x_1, x_3).

注 在解 10.2.13 中用到了 4 阶矩阵 A 的积和式 $\mathrm{per}A$ 的概念. 对于 n 阶矩阵 $A=[a_{ij}]$, 其积和式 $\mathrm{per}A$ 定义为

$$\mathrm{per}A=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

其中求和号表示 $i_1i_2\cdots i_n$ 遍历 1, 2, …, n 的所有排列求和. $\mathrm{per}A$ 的展开式中共有 $n!$ 项. 它和行列式 $\det A$ 的区别在于, 对行列式 $\det A$ 中每个项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 需带有排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的奇偶性符号 $\delta(i_1i_2\cdots i_n)$, 而积和式 $\mathrm{per}A$ 中相应的项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ 则不带因子 $\delta(i_1i_2\cdots i_n)$. 由于这一区别, 使得对调 $\mathrm{per}A$ 的两行(列), $\mathrm{per}A$ 的值不变, $\mathrm{per}A$ 的两行(列)相同, 其 $\mathrm{per}A$ 的值不一定为 0, 而将 $\mathrm{per}A$ 的一行(列)加到另一行(列), 其 $\mathrm{per}A$ 的值不再保持不变. 正是行列式 $\det A$ 和积和式 $\mathrm{per}A$ 的这种区别, 使得在对积和式 $\mathrm{per}A$ 作 Laplace 展开时, 省去了各项的符号. 例如, 对 $\mathrm{per}A$ 按第 1 行作 Laplace 展开时有

$$\mathrm{per}A=a_{11}\mathrm{per}A_{11}+a_{12}\mathrm{per}A_{12}+\cdots+A_{1n}\mathrm{per}A_{1n},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的余子矩阵.

n 阶方阵 $A=[a_{ij}]$ 的积和式 $\mathrm{per}A$ 的概念可以推广到 $m\times n$ 矩阵 A 上. 记 $m\times n$ 矩阵的第 i_1, i_2, …, i_k 行与第 j_1, j_2, …, j_k 列组成的子矩阵为 $A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_k\\j_1&j_2&\cdots&j_k\end{pmatrix}$, 则当 $m\leqslant n$ 时, $\mathrm{per}A$ 定义为

$$\mathrm{per}A=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_m\leqslant n}\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&m\\j_1&j_2&\cdots&j_m\end{pmatrix}.$$

当 $m>n$ 时,

$$\mathrm{per}A=\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_n\leqslant m}\mathrm{per}A\begin{pmatrix}i_1&i_2&\cdots&i_n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}.$$

$m\times n$ (0, 1) 矩阵 A 的积和式 $\mathrm{per}A$ 是 (0, 1) 矩阵的一类重要的函数. 在组合数学中有许多应用.

10.2.14 X_1, X_2, …, X_m 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 m 个子集, 其关联矩阵为 $A=[a_{ij}]$. 证明: 子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 的互异代表元序列之个数等于积和式 $\mathrm{per}A$.

证 子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 的所有互异代表元序列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 的集合记作 $\mathscr{A}$. 积和式 $\mathrm{per}A$ 的所有非零项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 的集合记作 $\mathscr{T}$. 对于 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})\in\mathscr{A}$, 有 $x_{i_j}\in X_j$, $j=1, 2, \cdots, m$, 因此 $a_{ji_j}=1$, $j=1, 2, \cdots, m$. 因为 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 是互异代表元序列, 因此, $i_1i_2\cdots i_m$ 是 1, 2, …, n 的一个 m 排列, 不妨设 $i_1i_2\cdots i_m$ 是 k_1, k_2, …, k_m 的排列, 其中 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$, 因此 a_{1i_1}, a_{2i_2}, …, a_{mi_m} 这 m 个 1 对应于 $\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&\cdots&m\\k_1&k_2&\cdots&k_m\end{pmatrix}$ 中一个非零项 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$, 由积和式 $\mathrm{per}A$ 的定认, $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 是 $\mathrm{per}A$ 的展开式中一个非零项. 定义 $\mathscr{A}$ 到 $\mathscr{T}$ 的映射 φ 如下: 对给定 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})\in\mathscr{A}$, 令 $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})=a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$. 易知, 如果 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$, $(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m})\in\mathscr{A}$, 且互异, 则 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$ 与 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{mj_m}$ 是 $\mathrm{per}A$ 中不同的非零项, 即 $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})\neq\varphi(x_{j_1}, x_{j_2}, \cdots, x_{j_m})$. 因此, φ 是单射. 又设 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}\in\mathscr{T}$, 即 $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}=1$ 是积和式 $\mathrm{per}A$ 中一个非零项, 则 $a_{1i_1}=a_{2i_2}=\cdots=a_{mi_m}=1$, 从而 $x_{i_j}\in X_j$, $j=1, 2, \cdots, m$. 由积和式 $\mathrm{per}A$ 的定义, $i_1i_2\cdots i_m$ 是 1, 2, …, n 的一个 m 排列, 从而 x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_m} 互异. 所以 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})\in\mathscr{A}$, 且 $\varphi(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})=a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{mi_m}$. 因此 φ 是满射. 从而 $|\mathscr{A}|=|\mathscr{T}|$.

注 尽管 10.2.14 将计算 n 元集 X 的 m 个子集 X_1, X_2, …, X_m 的互异代表元序列的个数转化为计算 X_1, X_2, …, X_m 的关联矩阵 A 的积和式 $\mathrm{per}A$, 似乎很简便, 但计算积和式 $\mathrm{per}A$ 并不容易. 这是应予注意的.

10.2.15 求 5 元集 $X=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ 的子集序列 $X_1=\{x_1\}$, $X_2=X$, $X_3=X_4=\{x_1, x_4\}$ 的互异代表元序列.

解 X_1, X_2, X_3, X_4 的关联矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\1&1&1&1&1\\1&0&0&1&0\\1&0&0&1&0\end{bmatrix}.$$

由积和式的定义，

$$\begin{aligned}\mathrm{per}A&=\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}\\&+\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&5\end{pmatrix}+\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&4&5\end{pmatrix}\\&+\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&5\end{pmatrix}+\mathrm{per}A\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&5\end{pmatrix}\\&=\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}+\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\\&+\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}+\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}\\&+\mathrm{per}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

将上式各积和式按第 2 列作 Laplace 展开得到

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&0&1\\1&0&0&1\end{bmatrix}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&0&1\end{bmatrix}=0,$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix}=0,$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=0,$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\1&0&1&0\\1&0&1&0\end{bmatrix}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&0\end{bmatrix}=0,$$

$$\mathrm{per}\begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}=0.$$

因此 $\mathrm{per}A=0$. 所以不存在序列 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的互异代表元系.

注 可由子集序列的互异代表元序列的定义易知，10. 2. 15 中子集序列 (X_1, X_2, X_3, X_4) 的互异代表元序列不存在. 10. 2. 15 的目的在于加深对 10. 2. 14 的理解.

10. 2. 16（错位排列数） 设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$. $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 如果对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，均有 $i_k\neq k$，则 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为 $1, 2, \cdots, n$ 的错位排列. 其个数记作 D_n. 证明：$D_n=\mathrm{per}(J_n-I_n)$，其中 J_n 和 I_n 分别表示 n 阶全 1 方阵和单位方阵.

证 对每个 $k=1, 2, \cdots, n$，记 $X_k=X-\{k\}=\{1, 2, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n\}$. 考虑 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的互异代表元序列 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$. 因为 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 互异，且均属于 X，所以 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 又 $i_k\in X_k$，而 $k\notin X_k$，因此 $i_k\neq k$. 所以 $i_1i_2\cdots i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个错位排列. 反之设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的错位排列，则 $i_k\neq k$，所以 $i_k\in X_k$，$k=1, 2, \cdots, n$. 又 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 显然是互异的，所以 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的互异代表元序列. 因此，错位排列数 D_n 即是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的互异代表元序列的个数. 易知 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的关联矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}0&1&1&\cdots&1\\1&0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\1&1&1&\cdots&0\end{bmatrix}_{n阶}=J_n-I_n.$$

由 10. 2. 15，$D_n=\mathrm{per}(J_n-I_n)$.

10. 2. 17（夫妻入座数） 设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$. $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，其中 $i_k\neq k, k+1$，$k=1, 2, \cdots, n-1$，而 $i_n\neq n, 1$. 证明：所有这类限位排列之个数 $V_n=\mathrm{per}(J_n-I_n-P_n)$，其中

$$P_n=\begin{bmatrix}0&1&&&\\&0&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&\ddots&1\\1&&&&0\end{bmatrix}_{n\times n}.$$

证 记 $X_k=X-\{k, k+1\}$，$k=1, 2, \cdots, n-1$. $X_n=X-\{n, 1\}$. 易知，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的关联矩阵为 $A=J_n-I_n-P_n$. 由 10. 2. 15，$\mathrm{per}(J_n-I_n-P_n)$ 即是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的互异代表元序列的个数. 现在设 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列，其中 $i_k\neq k, k+1$，$k=1, 2, \cdots, n-1$，而且 $i_n\neq n, 1$. 因此，$i_k\in X_k$，$k=1, 2, \cdots, n$，且 $i_1, i_2, \cdots, i_n$ 互异，所以 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的一个互异代表元序列. 反之设 $(i_1, i_2, \cdots, i_n)$ 是 $(X_1, X_2,$

$\cdots$, X_n) 的一个互异代表元序列，则由 i_1, i_2, $\cdots$, i_n 互异且 i_1, i_2, $\cdots$, $i_n \in X$，所以 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是 1, 2, $\cdots$, n 的一个排列．又因 $i_k \in X_k$, $k=1$, 2, $\cdots$, n，所以 $i_k \neq k$, $k+1$, $k=1$, 2, $\cdots$, $n-1$，而且 $i_n \neq n$, 1．因此 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是符合题意的一个限位排列．于是所求的限位排列之个数 V_n 即是 (X_1, X_2, $\cdots$, X_n)的互异代表元序列的个数．从而 $V_n = \mathrm{per}\ (J_n - I_n - P_n)$．

注　数 V_n 与 n 对夫妻围圆桌入座的计数问题密切相关．当 n 位女士先围圆桌坐定，且每两位女士之间留出一个空位时，要求 n 位男士不在他们妻子身旁入座的就座方式的种数即是 V_n．10．2．17 利用积和式给出了数 V_n 的一种简单明了的表达式．但要求出数 V_n 并不容易．原因是计算积和式 $\mathrm{per}\ (J_n - I_n - P_n)$并不简单．如容斥原理 10．1．20 所指出 $V_n = \mathrm{per}\ (J_n - I_n - P_n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{2n}{2n-k} C_{2n-k}^{k} (n-k)!$ 是 1934 年求得的．至于 $\mathrm{per}\ (J_n - I_n - P_n - P_n^2)$ 和 $\mathrm{per}\ (J_n - I_n - P_n - P_n^2 - P_n^3)$ 的表达式直到 1967 年和 1979 年才分别求得的．

10．2．18　设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_v\}$ 是 v 元集，B_1、B_2、$\cdots$、B_b 是 X 的 k 元子集，其集合记作 $\mathscr{B}$．而每个 k 元子集 B_i 称为区组．如果 X 的任意两个不同元素同时被包含在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 的 λ 个区组中，且 $0<\lambda$, $k<v-1$，则 $D=(X, \mathscr{B})$ 称为一个 (v, k, λ) 设计．设 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 关于 X 的关联矩阵为 A．证明：对于一个 (v, k, λ) 设计 $D=(X, \mathscr{B})$，有

(1) $bk = vr$，其中 r 是 X 中任意一个元素 x 被包含在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 的区组个数；

(2) A 的每个行和均为 k，每个列和均为 r；

(3) 关联矩阵 A 满足

$$A^t A = (r-\lambda) I_n + \lambda J_n,$$

其中 J_n 与 I_n 分别是 n 阶全 1 方阵与单位方阵；

(4) $b \geqslant v$．

证　(1) 设 $x \in X$，且设 B_1, B_2, $\cdots$, B_r 包含 x，而 B_{r+1}, $\cdots$, B_b 不含 x．对于任意 $y \in X$, $y \neq x$，易知 X 的含 x 的 2 元子集 $\{x, y\}$ 恰有 $v-1$ 个．由于 D 是一个 (v, k, λ) 设计，因此每个 2 元子集 $\{x, y\}$ 恰好出现在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 中的 λ 个区组．由于这样的区组必含元素 x，所以每个 2 元子集 $\{x, y\}$ 恰好出现在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_r 的 λ 个区组．于是 B_1, B_2, $\cdots$, B_r 中恰有 $\lambda (v-1)$ 个含 x 的二元子集．另一方面，当 $1 \leqslant i \leqslant r$ 时，B_i 是一个 k 元子集，且含元 x，因此 B_i 中含有 $k-1$ 个含元素 x 的二元子集，所以 B_1, B_2, $\cdots$, B_r 中共有 $r(k-1)$ 个含元素 x 的二元子集．于是得到，$\lambda(v-1) = r(k-1)$．即 $r = \lambda \frac{v-1}{k-1}$．这说明，$X$ 中每个元素 x 在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 中出现的次数 r 不依赖于 x．注意，B_1, B_2, $\cdots$, B_b 关于 X 的关联矩阵 A 的第 i 行和 $r_i = |B_i| = k$, $i=1$, 2, $\cdots$, b，因此 A 中所有 1 的和为 $r_1 + r_2 + \cdots + r_b = bk$．另一方面，$A$ 的第 j 列和 s_j 是元素 x_j 在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 中出现的次数．因此 $s_j = r$, $j=1$, 2, $\cdots$, v．所以 A 中所有 1 的和为 rv．因此 $bk = vr$．

(2) 的证明见 (1)．

(3) 记 $A^t A = [t_{ij}]$．由 10．2．1 (3)，当 $i \neq j$ 时，t_{ij} 是 x_i, x_j 在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 中出现的次数．由于 $D = (X, \mathscr{B})$ 是 (v, k, λ) 设计，所以 $t_{ij} = \lambda$．当 $i = j$ 时，t_{ij} 即是元素 x_i 在区组 B_1, B_2, $\cdots$, B_b 中出现的次数，由 (1)，$t_{ii} = r$．所以 $A^t A = (r-\lambda) I_n + \lambda J_n$．

(4) 反证法．　设 $b<v$．注意 A 是 $b \times v$ (0, 1) 矩阵．记 $O_{(v-b)\times v}$ 是 $(v-b) \times v$ 零矩阵，并记 $\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A \\ O_{(v-b)\times v} \end{bmatrix}$．则

$$\widetilde{A}^t \widetilde{A} = [A^t, O_{(v-b)\times v}] \begin{bmatrix} A \\ O_{(v-b)\times v} \end{bmatrix} = A^t A = (r-\lambda) I_n + \lambda J_n.$$

两边取行列式得到

$$\det \widetilde{A}^t \widetilde{A} = \det \widetilde{A}^t \det \widetilde{A} = 0.$$

而 $\det((r-\lambda) I_n - \lambda J_n) = (r + (v-1)\lambda)(r-\lambda)^{v-1} \neq 0$，矛盾．因此 $b \geqslant v$．

10．2．19　设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 元集，X 的笛卡尔积为

$$X \times X = \{(x_i, x_j) \mid x_i, x_j \in X\}.$$

$X \times X$ 的一个子集 R 称为 X 的一个二元关系．对于 x_i, $x_j \in X$．如果 $(x_i, x_j) \in R$，则记 $x_i R x_j$．设 R 是 X 的一个二元关系，定义关系 R 的关联矩阵 $A_R = [a_{ij}]$ 如下：

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i R x_j, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

显然 A_R 是一个 $n \times n$ (0, 1) 矩阵．对于给定 4 元集 $X = \{1, 2, 3, 6\}$，L 表示 X 中元素间的小于或等于的关系，D 表示 X 中元素间的整除关系．求 L 和 D 的关联矩阵 A_L 和 A_D．

解　易知 $L = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 6), (2, 2), (2, 3), (2, 6), (3, 3), (3, 6),$

(6, 6)}, 所以

$$A_L=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

又 $D=\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,6), (2,2), (2,6), (3,3), (3,6), (6,6)\}$, 所以

$$A_D=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

10.2.20 设 S 和 T 是 n 元集 X 的二元关系，它们的关联矩阵分别是 $A_S=[a_{ij}]$ 和 $A_T=[b_{ij}]$. 证明：对于 X 的二元关系 $S\cup T$, $S\cap T$, 以及 S 与 T 的复合关系 ST 的关联矩阵 $A_{S\cup T}$, $A_{S\cap T}$ 以及 A_{ST}, 有

(1) $A_{S\cup T}=A_S+A_T$, 其中 A_S+A_T 是 n 阶布尔矩阵 A_S 与 A_T 的和；

(2) $A_{S\cap T}=A_S\circ A_T$, 其中 $A_S\circ A_T$ 是 n 阶布尔矩阵 A_S 与 A_T 的 Hadamard 积；

(3) $A_{ST}=A_SA_T$, 其中 A_SA_T 是 n 阶布尔矩阵 A_S 与 A_T 的乘积.

证 (1) 记 $A_{S\cup T}=[c_{ij}]$, $A_S+A_T=[d_{ij}]$. 则 $d_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$. 如果 $d_{ij}=0$, 则 $a_{ij}=0$ 且 $b_{ij}=0$. 因此 $(x_i, x_j)\notin S$, 且 $(x_i, x_j)\notin T$. 所以 $(x_i, x_j)\notin S\cup T$. 从而 $c_{ij}=0$. 即当 $d_{ij}=0$ 时, $d_{ij}=c_{ij}$; 如果 $d_{ij}=1$, 则 a_{ij}与b_{ij}不全为 0. 如果 $a_{ij}=1$, 则 $(x_i, x_j)\in S$, 所以 $(x_i, x_j)\in S\cup T$. 因此 $c_{ij}=1$. 如果 $a_{ij}=0$, 则 $b_{ij}=1$, 所以 $(x_i, x_j)\in T$, 从而 $(x_i, x_j)\in S\cup T$. 因此 $c_{ij}=1$. 即当 $d_{ij}=1$ 时 $d_{ij}=c_{ij}$. 这就证明, $A_{S\cup T}=A_S+A_T$.

(2) 记 $A_{S\cap T}=[c_{ij}]$, $A_S\circ A_T=[d_{ij}]$. 由矩阵的 Hadamard 积的定义有 $d_{ij}=a_{ij}b_{ij}$. 如果 $d_{ij}=1$, 则 $a_{ij}=1$ 且 $b_{ij}=1$. 所以 $(x_i, x_j)\in S$, 且 $(x_i, x_j)\in T$. 因此 $(x_i, x_j)\in S\cap T$. 从而 $c_{ij}=1$ 这说明，当 $d_{ij}=1$ 时, $d_{ij}=c_{ij}$. 如果 $d_{ij}=0$, 则 a_{ij}, b_{ij}必有一个为 0. 若 $a_{ij}=0$, 则 $(x_i, x_j)\notin S$, 所以 $(x_i, x_j)\notin S\cap T$. 因此 $c_{ij}=0$. 如果 $b_{ij}=0$, 则 $(x_i, x_j)\notin T$, 所以 $(x_i, x_j)\notin S\cap T$. 因此 $c_{ij}=0$. 于是当 $d_{ij}=0$ 时 $d_{ij}=c_{ij}$. 这就证明, $A_{S\cap T}=A_S\circ A_T$.

(3) 记 $A_{ST}=[c_{ij}]$, $A_SA_T=[d_{ij}]$. 设 $d_{ij}=0$, 而 $c_{ij}=1$, 则 $(x_i, x_j)\in ST$, 由复合关系的定义, 必有 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 使得 $(x_i, x_k)\in S$, $(x_k, x_j)\in T$. 因此 $a_{ik}=1$, $b_{kj}=1$. 由矩阵乘法的定义, $d_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=1$, 矛盾. 所以当 $d_{ij}=0$ 时 $c_{ij}=0$, 即有 $d_{ij}=c_{ij}$; 如果 $d_{ij}=1$, 则由 $d_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$必有某个 k, $1\leqslant k\leqslant n$, 使得 $a_{ik}b_{kj}=1$, 从而 $a_{ik}=1$ 且 $b_{kj}=1$. 所以 $(x_i, x_k)\in S$, 且 $(x_k, x_j)\in T$. 因此 $(x_i, x_j)\in ST$. 即 $c_{ij}=1$. 所以当 $d_{ij}=1$ 时, $d_{ij}=c_{ij}$. 这就证明 $A_{ST}=A_SA_T$.

10.2.21 设 R 是 n 元集 X 的二元关系, $\overline{R}$ 和 R^c 分别是 R 的补关系与反关系, A_R 是 R 的关联矩阵. 证明: $A_{\overline{R}}=J_n-A_R$, $A_{R^c}=A_R^t$.

证 (1) 记 $A_{\overline{R}}=[b_{ij}]$, $J_n-A_R=[c_{ij}]$, 则 $c_{ij}=1-a_{ij}$. 如果 $c_{ij}=1$, 则 $a_{ij}=0$, 因此 $(x_i, x_j)\notin R$, 从而 $(x_i, x_j)\in\overline{R}$, 所以 $b_{ij}=1$. 即当 $c_{ij}=1$ 时, $c_{ij}=b_{ij}$; 如果 $c_{ij}=0$, 则 $a_{ij}=1$, 因此 $(x_i, x_j)\in R$, 从而 $(x_i, x_j)\notin\overline{R}$, 所以 $b_{ij}=0$. 即当 $c_{ij}=0$ 时, $c_{ij}=b_{ij}$. 这说明 $A_{\overline{R}}=J_n-A_R$.

(2) 记 $A_{R^c}=[b_{ij}]$, 如果 $b_{ij}=1$, 则 $(x_i, x_j)\in R^c$, 所以 $(x_j, x_i)\in R$, 因此 $a_{ji}=1$. 即当 $b_{ij}=1$ 时, $b_{ij}=a_{ji}$; 如果 $b_{ij}=0$, 则 $(x_i, x_j)\notin R^c$, 因此 $(x_j, x_i)\notin R$, 所以 $a_{ji}=0$. 即当 $b_{ij}=0$ 时, $b_{ij}=a_{ji}$. 这就证明 $A_{R^c}=A_R^t$.

10.2.22 设 R 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的二元关系, 其关联矩阵为 $A_R=[a_{ij}]$. 证明:

(1) R 是自反的充要条件是: $A_R=I_n+A_R$, 即 A_R 的主对角元全是 1;

(2) R 是对称的充要条件是: $A_R^t=A_R$, 即 A_R 是对称方阵;

(3) R 是传递的充要条件是: $A_R=A_R+A_R^2$;

(4) R 是反自反的充要条件是: $I_n\circ A_R=0$, 即 A_R 的主对角元全是零;

(5) R 是反对称的充要条件是: $A_R\circ A_R^t$ 的非对角元全是零;

(6) R 是等价关系的充要条件是: A_R 是主对角元全为 1 的对称方阵, 而且 $A_R=A_R+A_R^2$;

(7) R 是相容关系的充要条件是: A_R 是主对角元全为 1 的对称方阵;

(8) R 是偏序关系的充要条件是: A_R 的主对角元全为 1, $A_R\circ A_R^t$ 的非对角元全是零, 而且 $A_R=A_R+A_R^2$;

(9) R 是全序关系的充要条件是: 存在 n 阶置换方阵 P, 使得

$$P^tA_RP=\begin{bmatrix}1&1&\cdots&1\\0&1&\cdots&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}_{n\times n}$$

证 (1) 设 R 是自反的，则任意 $x_i \in X$，有 $(x_i, x_i) \in R$，所以 $a_{ii}=1$. 因此，A_R 的主对角元全是1. 记 $I_n + A_R = [b_{ij}]$，则当 $i \neq j$ 时，$b_{ij} = a_{ij}$，当 $i=j$ 时，$b_{ii} = 1 + a_{ii} = 1+1=1$（布尔加法运算）$= a_{ii}$. 所以，$I_n + A_R = A_R$. 反之设 $I_n + A_R = A_R$，则 $(I_n + A_R)_{ij} = b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, & i \neq j, \\ 1 + a_{ii} & i = j. \end{cases}$ 因此，$a_{ii} = b_{ii} = 1 + a_{ii} = 1$. 所以 A_R 的主对角元全是1，于是对于 $i=1, 2, \cdots, n$，$(x_i, x_i) \in R$. 即 R 是自反的.

(2) R 是对称的充要条件是 $R^C = R$，则由10. 2. 21，即知结论 (2) 成立.

(3) 设 R 是传递的，但 $A_R \neq A_R + A_R^2$，则存在 i, j，使得 $a_{ij} \neq a_{ij} + b_{ij}$，其中 $A_R^2 = [b_{ij}]$. 易知 $a_{ij}=0$，且 $b_{ij}=1$. 因 $b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = 1$，故存在 k，使得 $a_{ik}a_{kj}=1$，从而 $a_{ik}=1$，$a_{kj}=1$，即 $(x_i, x_k) \in R$，$(x_k, x_j) \in R$. 因 R 是传递的，所以 $(x_i, x_j) \in R$，即 $a_{ij}=1$. 矛盾. 因此 $A_R = A_R + A_R^2$. 反之设 $A_R = A_R + A_R^2$，而 R 是非传递的，则存在 $(x_i, x_k) \in R$，$(x_k, x_j) \in R$，使得 $(x_i, x_j) \notin R$. 于是 $a_{ij}=0$，$a_{ik}=1$，$a_{kj}=1$，记 $A_R^2 = [b_{ij}]$，则 $b_{ij} = a_{i1}a_{1j} + a_{i2}a_{2j} + \cdots + a_{in}a_{nj} = 1$. 由 $A_R = A_R + A_R^2$ 得到，$0 = a_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = 0+1=1$，矛盾. 因此 R 是传递的.

(4) 设 R 是反自反的，而 $I_n \circ A_R \neq 0$，则存在 $a_{ii} \neq 0$，因此 $(x_i, x_i) \in R$，与 R 是反自反相矛盾. 反之若 $I_n \circ A_R = 0$，则 A_R 的主对角元全为零，即 $a_{ii}=0$，从而对任意 $x_i \in X$，$(x_i, x_i) \notin R$，所以 R 是反自反的.

(5) 设 R 是反对称的，而 $A_R \circ A_R^t$ 的非对角元不全为零，则存在 i, j，$i \neq j$，使得 $a_{ij}a_{ji}=1$. 因此 (x_i, x_j)，$(x_j, x_i) \in R$，因为 R 是反对称的，所以 $x_i = x_j$，即 $i=j$. 矛盾. 因此 $A_R \circ A_R^t$ 的非对角元全是零. 反之设 $A_R \circ A_R^t$ 的非对角元全是零，而 R 不是反对称的，则存在 i, j，$i \neq j$，使得 (x_i, x_j)，$(x_j, x_i) \in R$. 即 $a_{ij}=1$，$a_{ji}=1$，所以 $a_{ij}a_{ji}=1$. 与 $A_R \circ A_R^t$ 的非对角元全是零相矛盾. 这说明，R 是反对称的.

(6) 由于等价关系是自反、对称和传递的，所以由 (1)，(2)，(3) 即知结论 (6) 成立.

(7) 因为相容关系是自反和对称的，所以由 (1)，(2) 即知 (7) 成立.

(8) 由于偏序关系是自反、反对称和传递的，所以由 (1)，(5)，(3) 即知 (8) 成立.

(9) 设 R 是全序关系，则 $(X, \leqslant)$ 是偏序集，且 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是一个链. 设在此链中，$x_{i_1} \leqslant x_{i_2} \leqslant \cdots \leqslant x_{i_n}$，其中 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 是1，2，…，n 的排列. 将 R 的关联矩阵 A_R 的第 i_1，i_2，…，i_n 行调到第1，2，…，n 行，同时将第 i_1，i_2，…，i_n 列调到第1，2，…，n 列，则 A_R 化为主对角元全是1且上三角元也全是1的方阵. 因此存在 n 阶置换方阵 P，使得

$$P^t A_R P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n}. \qquad ②$$

反之设存在 n 阶置换方阵 P，使式②成立. 注意，式②表明，将 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 n 个元素重新排列为 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}$，则 $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}\}$ 是 X 在关系 R 下的一个链. 从而 R 是 X 的全序关系.

10. 2. 23 证明：n 元集 X 的关系个数为 2^{n^2}.

证 X 的所有关系的集合记作 $\mathscr{R}$. 对于 $R \in \mathscr{R}$，R 的关联矩阵记作 A_R. A_R 是一个 n 阶 (0, 1) 方阵. 所有 n 阶 (0, 1) 方阵的集合记作 $\mathscr{A}$. 定义 $\mathscr{R}$ 到 $\mathscr{A}$ 的映射 φ 如下：对任意 $R \in \mathscr{R}$，令 $\varphi(R) = A_R$. 易知 φ 是 R 到 $\mathscr{A}$ 上的双射. 从而 $|\mathscr{R}| = |\mathscr{A}|$. 设 $A \in \mathscr{A}$，即设 $A = [a_{ij}]$ 是一个 n 阶 (0, 1) 矩阵，A 有 n^2 个元素，每个元素 a_{ij} 的取值为0或1，有两种取值方式. 而不同元素的取值是独立的，所以有 2^{n^2} 个 n 阶 (0, 1) 矩阵. 即 $|\mathscr{R}| = |\mathscr{A}| = 2^{n^2}$.

10. 2. 24 设 R 是 n 元集 X 的一个二元关系. 证明：存在 k 和 l，$0 \leqslant k < l \leqslant 2^{n^2}$，使得 $R^k = R^l$.

证 设 A_R 是 R 的关联矩阵，A_R^0，A_R，A_R^2，…，$A_R^{2^{n^2}}$ 是 $2^{n^2}+1$ 个 n 阶 (0, 1) 矩阵，而 n 阶 (0, 1) 矩阵的个数是 2^{n^2} 个，因此存在 k，l，$0 \leqslant k < l \leqslant 2^{n^2}$，使得 $A_R^k = A_R^l$. 由10. 2. 20 (3)，$A_{R^2} = A_R^2$. 从而 $A_R^k = A_{R^k}$，$A_R^l = A_{R^l}$，由 $A_R^k = A_R^l$ 得到，$A_{R^k} = A_{R^l}$. 所以 $R^k = R^l$.

10. 2. 25 设 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$ 分别是 n 元集 X 的关系 R 的自反、对称和传递闭包，A_R 是 R 的关联矩阵. 证明：

(1) $A_{r(R)} = A_R + I_n$；

(2) $A_{s(R)} = A_R + A_R^t$；

(3) $A_{t(R)} = A_R + A_R^2 + \cdots + A_R^k$，其中 k 是1和 n 之间的一个整数.

证 (1) 记 $I_X = \{(x, x) \mid x \in X\}$. 则 $r(R) = R \cup I_X$. 而 I_X 的关联矩阵为 I_n. 于是由

10. 2. 20 (1)，有 $A_{r(R)}=A_{R\cup I_X}=A_R+I_n$.

(2) 注意 $s(R)=R\cup R^c$. 所以由 10. 2. 20 (1)，有 $A_{s(R)}=A_{R\cup R^c}=A_R+A_R^t$.

(3) 因为 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k$, $1\leqslant k\leqslant n$，所以由 10. 2. 20 (1)，有 $A_{t(R)}=A_{R\cup R^2\cup\cdots\cup R^k}=A_R+A_{R^2}+\cdots+A_{R^k}$. 由 10. 2. 20 (3) 有，$A_{t(R)}=A_R+A_{R^2}+\cdots+A_{R^k}=A_R+A_R^2+\cdots+A_R^k$.

10. 2. 26 设 $X=\{a,b,c,d\}$，$R=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,d)\}$. 求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$.

解 R 的关联矩阵是

$$A_R=\begin{matrix} & a & b & c & d\\ a & 0 & 1 & 0 & 0\\ b & 1 & 0 & 1 & 0\\ c & 0 & 0 & 0 & 1\\ d & 0 & 0 & 0 & 0\end{matrix},$$

则

$$A_{r(R)}=A_R+I_4=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

所以 $r(R)=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(b,c),(c,c),(c,d),(d,d)\}$.

又

$$A_{s(R)}=A_R+A_R^t=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

所以 $s(R)=\{(a,b),(b,a),(b,c),(c,b),(c,d),(d,c)\}$.

最后，

$$A_R^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_R+A_R^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\neq A_R.$$

由 10. 2. 22 (3)，R 非传递. 又由 10. 2. 20 (1)，

$$A_{R\cup R^2}=A_R+A_R^2=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_{(R\cup R^2)^2}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此，

$$A_{R\cup R^2}+A_{(R\cup R^2)^2}\neq A_{R\cup R^2}.$$

由 10. 2. 22 (3)，$R\cup R^2$ 非传递. 计算 A_R^3，得到

$$A_R^3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

因此，

$$A_{R\cup R^2\cup R^3}=A_R+A_R^2+A_R^3=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}. \qquad ③$$

所以

$$(A_{R\cup R^2\cup R^3})^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}.$$

于是，

$$A_{R\cup R^2\cup R^3}+A^2_{R\cup R^2\cup R^3}=A_{R\cup R^2\cup R^3}.$$

由 10. 2. 22 (3)，$R\cup R^2\cup R^3$ 是传递的. 所以 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3$. 由式③得到，$t(R)=\{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,a),(b,b),(b,c),(b,d),(c,d)\}$.

10. 2. 27 设 S 和 T 是 n 元集 X 上相容关系.

(1) $S\cup T$ 是 X 上相容关系吗?

(2) $S\cap T$ 是 X 上相容关系吗?

(3) ST 是 X 上相容关系吗?

解 设 A_S 和 A_T 是 S 和 T 的关联矩阵. 因为 S 和 T 是相容的，所以由 10. 2. 22 (7) 可知 A_S 和 A_T 是主对角元全为 1 的对称方阵. 由 10. 2. 20 (1)，$A_{S\cup T}=A_S+A_T$. 而 A_S+A_T 是主对角全为 1 的对称方阵. 由 10. 2. 22 (7)，$S\cup T$ 是相容的.

又由 10. 2. 20 (2)，$A_{S\cap T}=A_S\circ A_T$. 易知 $A_S\circ A_T$ 是主对角元全为 1 的对称方阵，由 10. 2. 22 (7)，$S\cap T$ 是相容的. 最后由 10. 2. 20 (3)，$A_{ST}=A_SA_T$. 因 A_S 和 A_T 的主对角元全是正的，所以 $A_{ST}=A_SA_T$ 的主对角元也全是正的. 但对称方阵 A_S 与 A_T 的乘积不一定是对称的，因此 ST 不一定是相容的. 反例是：$X=\{a,b,c\}$，$S=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b),(c,c)\}$，$T=\{(a,a),(a,c),(b,b),(c,a),(c,c)\}$. 则

$$A_S=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ A_T=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},$$

$$A_{ST}=A_SA_T=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&0&1\end{bmatrix},$$

则 $ST=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,a),(b,b),(b,c),(c,a),(c,c)\}$ 是自反的，非对称的，因此不是相容的.

10. 2. 28 设 R 是 n 元集 X 上对称和传递关系. 证明：如果对任意 $x\in X$，必有 $y\in X$，使得 $(x,y)\in R$，则 R 是一个等价关系.

证 设 A_R 是 R 的关联矩阵，因为 R 是对称和传递的，所以由 10. 2. 22 (2) 和 (3)，A_R 是对称的，且 $A_R=A_R+A_R^2$. 由题意，A_R 不含零行. 因此 $A_R^2=A_RA_R^t$ 的主对角元全是 1. 由 $A_R=A_R+A_R^2$ 可知，A_R 的主对角元全是 1，即 R 是自反的. 因此 R 是等价关系.

10. 2. 29 设 $R_1, R_2, \cdots, R_m$ 是 n 元集 X 的等价关系. 证明：$\bigcap\limits_{i=1}^{m}R_i$ 是 X 的等价关系.

证 设 A_{R_i} 是 R_i 的关联矩阵，$i=1,2,\cdots,m$. 由 10. 2. 20 (2) 有 $A_{\bigcap_{i=1}^{m}R_i}=A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m}$. 因为 R_i 是等价关系，所以由 10. 2. 22 (6) 可知 A_{R_i} 的主对角元全是 1，A_{R_i} 是对称的，且 $A_{R_i}=A_{R_i}+A_{R_i}^2$，$i=1,2,\cdots,m$. 因此 $A_{\bigcap_{i=1}^{m}R_i}=A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m}$ 的主对角元全是 1，对称. 为证 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}R_i$ 是 X 的等价关系，只须验证

$$A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m}=A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m}+(A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m})^2. \qquad ④$$

记 $A_{R_k}=[a_{ij}^{(k)}]$，$k=1,2,\cdots,m$，$A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m}=[c_{ij}]$，$(A_{R_1}\circ A_{R_2}\circ\cdots\circ A_{R_m})^2=[d_{ij}]$. 则 $[c_{ij}]=a_{ij}^{(1)}a_{ij}^{(2)}\cdots a_{ij}^{(m)}$. 考虑 $c_{ij}+d_{ij}$. 如果 $c_{ij}=1$，则 $c_{ij}+d_{ij}=1$. 从而 $c_{ij}=c_{ij}+d_{ij}$；如果 $c_{ij}=0$，而 $d_{ij}\neq 0$，则

$$d_{ij}=c_{i1}c_{1j}+c_{i2}c_{2j}+\cdots+c_{in}c_{nj}=1.$$

所以存在 k，$1\leqslant k\leqslant n$，使得 $c_{ik}c_{kj}=1$. 因此 $c_{ik}=1$，$c_{kj}=1$. 从而 $a_{ik}^{(1)}a_{ik}^{(2)}\cdots a_{ik}^{(m)}=1$，$a_{kj}^{(1)}a_{kj}^{(2)}\cdots a_{kj}^{(m)}=1$. 于是 $a_{ik}^{(1)}=a_{kj}^{(1)}=1$，$a_{ik}^{(2)}=a_{kj}^{(2)}=1$，$\cdots$，$a_{ik}^{(m)}=a_{kj}^{(m)}=1$. 即 $(x_i,x_k),(x_k,x_j)\in R_t$，$t=1,2,\cdots,m$. 而 R_t 是传递的，所以 $(x_i,x_j)\in R_t$，$t=1,2,\cdots,m$. 因此 $a_{ij}^{(t)}=1$，于是 $c_{ij}=a_{ij}^{(1)}a_{ij}^{(2)}\cdots a_{ij}^{(m)}=1$. 矛盾. 所以当 $c_{ij}=0$ 时，$d_{ij}=0$. 于是 $c_{ij}=c_{ij}+d_{ij}$. 这就证明，式④成立.

10. 2. 30 设 R 是 n 元集 X 的二元关系. 证明：R 是等价关系的充要条件是：存在 n 阶置换方阵 P，使得

$$P^tA_RP=\mathrm{diag}(J_{n_1},J_{n_2},\cdots,J_{n_k}), \qquad ⑤$$

其中 A_R 是 R 的关联矩阵，J_n 是 n 阶全 1 方阵.

证 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$，R 是 X 的等价关系. 则 X 在等价关系的 R 下分划为等价类 $X_1,X_2,\cdots,X_k$. 不妨设 $X_1=\{x_{i_1},x_{i_2},\cdots,x_{i_{n_1}}\}$，$X_2=\{x_{i_{n_1+1}},\cdots,x_{i_{n_1+n_2}}\}$，$\cdots$，$X_k=\{x_{i_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1}},\cdots,x_{i_n}\}$，其中 $n=n_1+n_2+\cdots+n_k$，而 $i_1i_2\cdots i_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的排列. 将 A_R 的第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 行依次调到第 $1,2,\cdots,n$ 行，同时将第 $i_1,i_2,\cdots,i_n$ 列依次调到第 $1,2,\cdots,n$ 列，则 A_R 即化为式⑤右端的矩阵，即存在 n 阶置换方阵 P，使

$$P^tA_RP=\mathrm{diag}(J_{n_1},J_{n_2},\cdots,J_{n_k}).$$

反之，设式⑤成立，则

$$A_R=P\mathrm{diag}(J_{n_1},J_{n_2},\cdots,J_{n_k})P^t.$$

易知 A_R 的主对角元全是 1，A_R 是对称的. 又

$$A_R^2=P\mathrm{diag}(J_{n_1}^2,J_{n_2}^2,\cdots,J_{n_k}^2)P^t,$$

注意，作为布尔矩阵，$J_n^2=J_n$. 所以 $A_R^2=A_R$. 于是 $A_R+A_R^2=A_R+A_R=A_R$（布尔矩阵加法）. 由 10. 2. 22 (6)，R 是等价关系.

10. 2. 31 设 $X=\{0,1,2,3\}$，求 X 上全序关系 R，使得 $(0,3),(2,1)\in R$.

解 设 R 是所欲求的全序关系，其关联矩阵为

$$A_R=\begin{array}{c}\\0\\1\\2\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}0&1&2&3\end{array}\\\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&1\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&1&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{bmatrix}\end{array}.$$

其中除 $a_{14}=1$，$a_{32}=1$ 外其他 a_{ij} 是待求的. 由

10.2.22 (9)，必有 n 阶置换方阵 P，使得

$$P'A_RP=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}.$$

这是解题的根据. 对调 A_R 的第 1，2 行，再对调第 1，2 列，则 A_R 化为

$$A_R\to\begin{array}{c}\\0\\2\\1\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}0&2&1&3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}a_{11}&a_{13}&a_{12}&1\\a_{31}&a_{33}&1&a_{34}\\a_{21}&a_{23}&a_{22}&a_{24}\\a_{41}&a_{43}&a_{42}&a_{44}\end{bmatrix}\end{array}.$$

令右端矩阵的下三角元全为 0，其他元素全为 1，即令

$$A_R\Rightarrow\begin{array}{c}\\0\\2\\1\\3\end{array}\begin{array}{c}\begin{matrix}0&2&1&3\end{matrix}\\\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{array}.$$

也即令

$R=\{(0,0),(0,2),(0,1),(0,3),(2,2),(2,1),(2,3),(1,1),(1,3),(3,3)\}$，

则 R 即是 X 上全序关系.

§10.3 (0，1) 矩阵和图论

(0，1) 矩阵和图论之间有着深刻的内在联系. 一个 n 阶 (0，1) 矩阵是一个 n 阶有向图的表示 (邻接矩阵)，一个 n 阶对称 (0，1) 矩阵是一个 n 阶无向图的表示 (邻接矩阵)，一个 $m\times n$ (0，1) 矩阵是一个 $m\times n$ 二部图的表示 (简化邻接矩阵)，等等. 因此 (0，1) 矩阵的理论、方法和技巧为研究图论提供一种强有力的工具，也为分析和解决图论问题提供一种统一的方法. 当然其中关键是，建立图论的概念与 (0，1) 矩阵有关概念之间的对应关系，这样才能将有关图论的问题正确地翻译成 (0，1) 矩阵的问题，然后用 (0，1) 矩阵的理论、方法和技巧加以解决.

10.3.1 设 $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 是 n 阶有向图 G 的顶点集合，G 的边集合 E 是 V 的笛卡尔积 $V\times V$ 的一个子集，$A(G)=[a_{ij}]$ 是 G 的邻接矩阵. 其中

$$a_{ij}=\begin{cases}1, & 当\ v_i\to v_j\ 时,\\0, & 其他,\end{cases}$$

这里 $v_i\to v_j$ 是 G 中由 v_i 指 v_j 的有向边. 证明：

(1) V 上所有 n 阶有向图 G 的集合 G_n 和所有 n 阶 (0，1) 矩阵的集合 M_n 之间存在双射；

(2) G 的邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]$ 的第 i 行和记作 $r_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$，$i=1,2,\cdots,n$，第 j 列和记作 $s_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}$，$i=1,2,\cdots,n$. G 中顶点 v_i 的出度 (outdegree) 和入度 (indegree) 分别记作 $d^+(v_i)$ 和 $d^-(v_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，则

$$d^+(v_i)=r_i,$$
$$d^-(v_i)=s_i.$$

(3) 设 $e(G)$ 是 G 中所有有向边之边数，$\sigma(A(G))$ 是 $A(G)$ 中所含 1 的个数，则

$$e(G)=\sigma(A(G))=r_1+r_2+\cdots+r_n$$
$$=s_1+s_1+\cdots+s_n.$$

(4) G 中无环 (loop) 的充要条件是：$A(G)$ 的迹 $\mathrm{Tr}(A(G))=0$.

证 (1) 设 $G\in G_n$，令 $\varphi(G)=A(G)$，则 φ 是 G_n 到 M_n 的一个映射. 如果对 $G_1,G_2\in G_n$，$\varphi(G_1)=\varphi(G_2)$，则 $A(G_1)=A(G_2)$. 记 $A(G_1)=[a_{ij}^{(1)}]$，$A(G_2)=[a_{ij}^{(2)}]$，则对任意 i,j，$1\leqslant i,j\leqslant n$，有 $a_{ij}^{(1)}=a_{ij}^{(2)}$. 这说明，对任意 i,j，$1\leqslant i,j\leqslant n$，$(v_i,v_j)$ 要么同时是 G_1 和 G_2 的有向边，要么同时不是 G_1 和 G_2 的有向边，因此 $G_1=G_2$. 所以 φ 是单射. 其次设 $A=[a_{ij}]\in M_n$. 定义 n 阶有向图 G 如下：当 $a_{ij}=1$ 时，令 $v_i\to v_j$ 是 G 中由 v_i 指向 v_j 的有向边；当 $a_{ij}=0$ 时，令 $v_i\to v_j$ 不是 G 的有向边. 易知 $G\in G_n$，且 A 是 G 的邻接矩阵，即 $\varphi(G)=A$. 因此 φ 是满射. 从而 φ 是 G_n 到 M_n 上的双射.

(2) 注意，$a_{ij}=1$ 当且仅当图 G 中有一条由 v_i 指向 v_j 的出边，因此

$$r_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$$

是图 G 中顶点 v_i 所有出边的边数之和，所以 $r_i=d^+(v_i)$；又 $a_{ij}=1$，当且仅当图 G 中有一条由 v_i 指向 v_j 的入边 (终点为 v_j 的入边)，因此

$$s_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}$$

是图 G 中顶点 v_j 所有入边的边数之和，所以 $s_j=d^-(v_j)$.

(3) 注意，G 含有一条由 v_i 指向 v_j 的有向边当且仅当 $a_{ij}=1$. 而 G 中顶点 v_i 的出边数为 $d^+(v_i)=r_i$，所以 G 中所有的边数 $e(G)=d^+(v_1)+d^+(v_2)+\cdots+d^+(v_n)$. 因此由 (2)，

$$e(G)=r_1+r_2+\cdots+r_n.$$

另一方面，G 中所有的边数为 $e(G)=d^-(v_1)+d^-(v_2)+\cdots+d^-(v_n)$. 所以由 (2)，

$$e(G)=s_1+s_2+\cdots+s_n.$$

(4) 注意，G 中顶点 v_i 带环（loop）当且仅当 $a_{ii}=1$，即 $A(G)$ 中第 i 个主对角元为 1．因此，G 中无环当且仅当 $\mathrm{Tr}A(G)=0$．

注 10．3．1 (1) 说明，n 阶 (0，1) 矩阵 $A(G)=[a_{ij}]$是 n 阶有向图 G 的表示．即 n 阶 (0，1) 矩阵和 n 阶有向图之间是一一对应的．对于给定的有向图 G，G 中有向边和 $A(G)$ 中的 1 之间也是一一对应的，即 $v_i\to v_j$ 是 G 中有向边当且仅当 $a_{ij}=1$．另外，G 中顶点 v_i 的出边和 $A(G)$ 第 i 行上的 1 之间是一一对应的，G 中顶点 v_j 的入边和 $A(G)$ 第 j 列上的 1 也是一一对应的．

10．3．2 设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 和 $A(G)=[a_{ij}]$分别是有向图 G 的顶点集合和邻接矩阵．记 $A(G)^k=[a_{ij}^{(k)}]$，$k=1, 2, \cdots, n$．证明：$a_{ij}^{(k)}$是 G 中由 v_i 指向 v_j 的长为 k 的有向路径（walk）的条数．

证 对 k 用归纳法．当 $k=1$ 时，$a_{ij}^{(1)}=a_{ij}$，易知 a_{ij}是 G 中由 v_i 指向 v_j 的长为 1 的有向路径的条数．设结论对 k 成立．即设 $a_{ij}^{(k)}$是 G 中由 v_i 到 v_j 的长为 k 的有向路径的条数．下面证明结论对 $k+1$ 成立．

注意，$A(G)^{k+1}=A(G)^kA(G)$，所以

$$a_{ij}^{(k+1)}=\sum_{t=1}^{n}a_{it}^{(k)}a_{tj}.$$

设对正整数 t，$1\leqslant t\leqslant n$，$a_{it}^{(k)}a_{tj}\neq 0$，则 $a_{it}^{(k)}\neq 0$，$a_{tj}\neq 0$，即 $a_{tj}=1$．由归纳假设，$a_{it}^{(k)}$是 G 中由 v_i 指向 v_t 的长为 k 的有向路径的条数．a_{tj}是 G 中由 v_t 到 v_j 的长为 1 的有向路径的条数．设 l 是 G 中由 v_i 指向 v_t 的长为 k 的有向路径，则 l 接上有向边 $v_t\to v_j$ 即是 G 中由 v_i 指向 v_j 且经过 v_t 同时 $v_t\to v_j$ 的长为 $k+1$ 的有向路径．反之 G 中任何一条由 v_i 指向 v_j 且过 v_t 同时 $v_t\to v_j$ 的长为 $k+1$ 的有向路径都可以由这样的方式得到．于是 $a_{it}^{(k)}a_{tj}$ 即是 G 中由 v_i 指向 v_j 且过 v_t 同时 $v_t\to v_j$ 的长为 $k+1$ 的有向路径的条数．令 $t=1, 2, \cdots, n$，即得到，G 中由 v_i 指向 v_t 且过某一顶点 v_t 再指向 v_j 的所有长为 $k+1$ 的有向路径的条数为 $a_{ij}^{(k+1)}$．注意，G 中每一条由 v_i 到 v_j 的长为 $k+1$ 的有向路径都可以分解为 G 中一条由 v_i 到某一顶点 v_t 的长为 k 的有向路径和一条由 v_t 到 v_j 的长为 1 的有向路径，所以 $a_{ij}^{(k+1)}$是 G 中由 v_i 指向 v_j 的长为 $k+1$ 的有向路径的条数．

10．3．3 设 4 阶有向图 G 如图 10．3 所示．求 G 中由 v_1 到 v_4 的长为 2 和 4 的有向路径的条数．

解 G 的邻接矩阵 $A(G)$为

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix}.$$

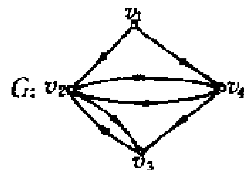


图 10．3

因此

$$A(G)^2=\begin{bmatrix}0&1&2&1\\0&2&1&0\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A(G)^3=\begin{bmatrix}0&3&2&1\\0&1&2&2\\0&2&1&0\\0&2&2&1\end{bmatrix},$$

$$A(G)^4=\begin{bmatrix}0&3&4&3\\0&4&3&1\\0&1&2&2\\0&3&3&2\end{bmatrix}.$$

由于 $a_{14}^{(2)}=1$，$a_{14}^{(4)}=3$．所以 G 有一条由 v_1 指向 v_4 的长为 2 的有向路径（$v_1\to v_2\to v_4$），有 3 条由 v_1 指向 v_4 的长为 4 的有向路径（$v_1\to v_2\to v_4\to v_2\to v_4$，$v_1\to v_2\to v_3\to v_2\to v_4$，$v_1\to v_4\to v_3\to v_2\to v_4$）．

10．3．4 设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 n 阶有向图 G 的顶点集合．G 的可达性矩阵 $W(G)=[w_{ij}]$ 定义如下：对于 v_i，$v_j\in V$，当且仅当 G 中有一条由 v_i 指向 v_j 的有向路径时 $w_{ij}=1$，否则 $w_{ij}=0$．设 4 阶有向图 G 如图 10．3．求 $W(G)$．

解 由图 10．3 可知，G 中含有如下有向路径：

$v_1\to v_2$，$v_1\to v_2\to v_3$，$v_1\to v_2\to v_4$，

$v_2\to v_3\to v_2$，$v_2\to v_3$，$v_2\to v_4$，

$v_3\to v_2$，$v_3\to v_2\to v_3$，$v_3\to v_2\to v_4$，

$v_4\to v_2$，$v_4\to v_3$，$v_4\to v_2\to v_4$．

而 v_1，v_2，v_3，v_4 都不可到达 v_1．因此，

$$W(G)=\begin{bmatrix}0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\\0&1&1&1&1\end{bmatrix}.$$

10．3．5 设 $\mathscr{B}=\{0, 1\}$．对 $\mathscr{B}$ 中元素定义加法"+"和乘法"·"如下：

$$0+0=0,\ 0+1=1=1+0,\ 1+1=1,$$
$$0\cdot 0=0,\ 0\cdot 1=0=1\cdot 0,\ 1\cdot 1=1.$$

则 $\mathscr{B}$ 成为一个 2 元布尔代数．设 $A=[a_{ij}]$ 是 $\mathscr{B}$ 上 n 阶布尔矩阵，即 $a_{ij}\in\mathscr{B}$．$\mathscr{B}$ 上所有 n 阶布尔矩阵的集合记作 $\mathscr{B}_{n\times n}$．对于 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]\in\mathscr{B}_{n\times n}$，定义 $A+B=[a_{ij}+b_{ij}]$，$A\cdot B=[c_{ij}]$，其中 $c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$，则 $A+B$，$A\cdot B\in\mathscr{B}_{n\times n}$．证明：对任意 $A=[a_{ij}]\in\mathscr{B}_{n\times n}$，

(1) $A+A=A$；

(2) $A+O_n=O_n+A$；

(3) $A\cdot I_n=A=I_n\cdot A$；

(4) 记 $A^0=I_n$，$A^1=A$，$A^2=A\cdot A$，…，$A^{m+1}=A^m\cdot A$，…. 则对于 n 阶布尔矩阵序列 A^0，A^1，A^2，…，A^m，…，存在正整数 k 和 p，使得 A，A^2，…，A^k，A^{k+1}，…，A^{k+p-1} 两两不等，而当 $m=k+qp+t$，$0\leqslant t\leqslant p-1$ 时，$A^m=A^{k+t}$.

证 结论 (1)，(2) 和 (3) 是显然的. 只证结论 (4). 因为 n 阶布尔矩阵 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶 (0, 1) 矩阵. 所以 $\mathscr{B}_{n\times n}$ 由 2^{n^2} 个 n 阶布尔矩阵组成. 因此对布尔矩阵序列 $\{A^j\mid j=1, 2, \cdots\}$，存在正整数 k 和 l，$1\leqslant k<l\leqslant 2^{n^2}+1$，使得 $A^k=A^l$. 设 k 是使得 $A^k=A^l$ 之 k 的最小正整数，而 p 是使得 $A^k=A^l$ 之 l 的最小正整数，则 A，A^2，…，A^k，A^{k+1}，…，A^{k+p-1} 两两不同，而且当 $m=k+qp+t$，$0\leqslant t\leqslant p-1$ 时，$A^m=A^{k+t}$.

注 10. 3. 5 中正整数 k 和 p 分别称为布尔序列 $\{A^j\mid j=1, 2, \cdots\}$ 的幂敛指数和周期.

10. 3. 6 设 4 阶有向图 G 如图 10. 3 所示，$A(G)$ 是 G 的邻接矩阵. 求布尔矩阵序列 $\{A(G)^j\mid j=1, 2, \cdots$ 的幂敛指数 k 和周期 p.

解 注意，

$$A(G)=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&0&1&1\\0&1&0&0\\0&1&1&0\end{bmatrix},$$

$$A(G)^2=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A(G)^3=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&0\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

$$A(G)^4=\begin{bmatrix}0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix},$$

且

$$A(G)^4=A(G)^5=A(G)^6=\cdots.$$

所以 $k=4$，$p=1$.

10. 3. 7 设 $A(G)=[a_{ij}]$ 是 n 阶有向图 G 的邻接矩阵，k 和 p 分别是布尔矩阵序列 $\{A(G)^j\mid j=1, 2, \cdots$ 的幂敛指数和周期，$W(G)=[w_{ij}]$ 是 G 的可达性矩阵. 证明：

$W(G)=A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^{k+p-1}$.

证 记 $A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^{k+p-1}=B=[b_{ij}]$. 注意，对任意 $m\geqslant k+p$，有

$$A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^m=B. \qquad ①$$

事实上，设 $m=k+qp+t$，$0\leqslant t\leqslant p-1$，则 $A(G)^m=A(G)^{k+t}$，且

$$\begin{aligned}&A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^m\\=&A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^{k-1}\\&+\{A(G)^k+A(G)^{k+1}+\cdots\\&+A(G)^{k+p-1}\}\\&+\{A(G)^{k+p}+A(G)^{k+p+1}+\cdots\\&+A(G)^{k+2p-1}\}+\cdots+\{A(G)^{k+(q-1)p}\\&+A(G)^{k+(q-1)p+1}+\cdots+A(G)^{k+qp}\}\\&+\{A(G)^{k+qp}+A(G)^{k+qp+1}+\cdots\\&+A(G)^m\}.\end{aligned}$$

由于 $A(G)^{k+jp+t}=A(G)^{k+p+t}$，其中 $0\leqslant t\leqslant p-1$，且由 10. 3. 5 (1)，

$$A(G)^{k+jp+t}+A(G)^{k+p+t}=A(G)^{k+p+t},$$

所以

$$\begin{aligned}&A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^m\\=&A(G)+A(G)^2+\cdots+A(G)^{k+p-1}\\=&B.\end{aligned}$$

现在证明，$W(G)=B$. 事实上，设 $w_{ij}=1$，则由可达性矩阵的定义，G 中必有一条由 v_i 到 v_j 的有向路径 l. 设 l 的长为 m. 记 $A(G)^m=[a_{ij}^{(m)}]$，注意这里 $A(G)^m$ 是布尔矩阵 $A(G)$ 的 m 次幂. 仿 10. 3. 2 可证，由于 G 含有由 v_i 到 v_j 的长为 m 的有向路径 l，所以 $a_{ij}^{(m)}=1$. 如果 $m\leqslant k+p-1$，则由

$$b_{ij}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(m)}+\cdots+a_{ij}^{(k+p-1)}$$

可知 $b_{ij}=1$；如果 $m\leqslant k+p$，则由①，

$$b_{ij}=a_{ij}+a_{ij}^{(2)}+\cdots+a_{ij}^{(m)}=1.$$

因此当 $w_{ij}=1$ 时，$b_{ij}=1$. 现在设 $w_{ij}=0$，则由可达性矩阵的定义，G 中不含由 v_i 到 v_j 的有向路径，因此对任意 m，$a_{ij}^{(m)}=0$. 于是 $b_{ij}=0$. 这就证明，$W(G)=B$.

10. 3. 8 设 A 和 B 是 n 阶 (0, 1) 方阵. 如果矩阵 A 可以经过有限次行和列的同步置换（即对调 A 的第 i 行和第 j 行，再对调 A 的第 i 列和第 j 列，称为对 A 进行一次行和列的同步置换）变为矩阵 B，即存在 n 阶置换方阵 P，使得 $B=P^tAP$，则 A 和 B 称为置换相似的（注意，对置换方阵 P，有 $P^t=P^{-1}$），这里 P^t 是 P 的转置. 设 $A(G)=[a_{ij}]$ 和 $A(H)=[b_{ij}]$ 分别是 n 阶有向图 G 和 H 的邻接矩阵. 证明：G 和 H 同构的充要条件是：$A(G)$ 和 $A(H)$ 是置换相似的.

证 必要性. G 和 H 的顶点集合分别记作 $V(G)$

$=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 和 $V(H)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 设 φ 是 G 到 H 的同构映射. 则 φ 是 $V(G)$到 $V(H)$ 上的双射. 因此 $\varphi(v_1)\varphi(v_2)\cdots\varphi(v_n)$ 是 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 的排列, 记$\varphi(v_i)=u_{\varphi(i)}$, $i=1, 2, \cdots, n$. 由于 φ 是同构映射, 所以 (v_i, v_j) 为 G 的有向边当且仅当$(\varphi(v_i), \varphi(v_j))$是 H 的有向边, 即当且仅当$(u_{\varphi(i)}, u_{\varphi(j)})$ 是 H 的有向边. 于是 $a_{ij}=1$ 当且仅当 $b_{\varphi(i),\varphi(j)}=1$. 记 $P_\varphi=[p_{ij}]$, 其中当 $j=\varphi(i)$ 时, $p_{ij}=1$, 否则 $p_{ij}=0$. 则 p_φ 是 n 阶置换方阵. 设 $C=P_\varphi A(H)P_\varphi^t=[c_{ij}]$, 则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}b_{kl}p_{jl}$$
$$=p_{i,\varphi(i)}b_{\varphi(i),\varphi(j)}p_{j,\varphi(j)}=b_{\varphi(i),\varphi(j)}.$$

由于 $a_{ij}=1$ 当且仅当 $b_{\varphi(i),\varphi(j)}=1$, 所以 $a_{ij}=1$ 当且仅当 $c_{ij}=1$. 因此 $A(G)=P_\varphi A(H)P_\varphi^t$, 即 $A(G)$和 $A(H)$ 置换相似.

充分性. 设 $A(G)$ 和 $A(H)$ 置换相似. 则存在 n 阶置换方阵 $P=[p_{ij}]$, 使得 $A(G)=PA(H)P^t$. 由于 P 是置换方阵, 所以 P 的各行与各列上都恰有一个元素为 1, 其他元素为零. 对于 P 的第 i 行上的元素 $p_{ij}=1$, 其下标 j 记作$\varphi(i)$, 则 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 定义 $V(G)$ 到 $V(H)$ 的映射 φ 为: $\varphi(v_i)=u_{\varphi(i)}$, $i=1, 2, \cdots, n$. 则 φ 是$V(G)$到 $V(H)$ 上的双射. 记 $PA(H)P^t=C=[c_{ij}]$. 则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}p_{ik}b_{kl}p_{jl}$$
$$=p_{i,\varphi(i)}b_{\varphi(i),\varphi(j)}p_{j,\varphi(j)}=b_{\varphi(i),\varphi(j)}.$$

由于 $A(G)=PA(H)P^t=C$, 所以, 对任意 i, j, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, 有 $a_{ij}=c_{ij}=b_{\varphi(i),\varphi(j)}$. 由邻接矩阵的定义, (v_i, v_j) 是 G 的有向边. 当且仅当 $a_{ij}=1$, 即当且仅当 $b_{\varphi(i),\varphi(j)}=1$, 也即当且仅当 $(u_{\varphi(i)}, u_{\varphi(j)})$ 是 H 的有向边, 即当且仅当 $(\varphi(v_i), \varphi(v_j))$ 是 H 的有向边. 这说明, φ 是 $V(G)$到 $V(H)$ 上的保持邻接关系的双射. 所以 G 和H 同构.

10.3.9 设 A 是n 阶 (0, 1) 方阵. 如果存在 n 阵置换方阵P, 使得

$$P^tAP=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix},$$

其中 A_{11}是 k 阶 (0, 1) 方阵, $1\leqslant k<n$, 则 A 称为可约的. 如果 n 阶 (0, 1) 方阵 A 不是可约的, 则 A 称为不可约的. 证明: n 阶有向图G强连通的充要条件是: 它的邻接矩阵 $A(G)$ 是不可约的.

证 必要性. 设 G 强连通, 而 $A(G)=[a_{ij}]$ 是可约的. 则存在 n 阶置换方阵P, 使得

$$P^tA(G)P=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}. \qquad ②$$

其中 A_{11} 是 k 阶 (0, 1) 方阵, $1\leqslant k<n$. 设 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 G 的顶点集合. 由邻接矩阵的定义, $a_{ij}=1$ 当且仅当 (v_i, v_j) 是 G 的有向边. 与 10.3.8 的充分性相仿, 记 $P^t=[p_{ij}]$, 并且当 $p_{ij}=1$ 时, 令 $\varphi(i)=j$, 则 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 记 $P^tA(G)P=[c_{ij}]$, 则对任意 i, j, $1\leqslant i$, $j\leqslant n$, 有

$$c_{ij}=a_{\varphi(i),\varphi(j)}.$$

记 $u_i=v_{\varphi(i)}$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则 $u_1u_2\cdots u_n$ 是$v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的重排. 因此 $V(G)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$. 而 $P^tA(G)P$ 即是 G 在 $V(G)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 下的邻接矩阵. 记 $V=\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$, $W=\{u_{k+1}, \cdots, u_n\}$. V 和W 在 G 中的导出子图分别记作$G[V]$ 和$G[W]$. 由式②可知, G 中不含有由 $G[W]$ 指向 $G[V]$ 的有向边, 因此, $G[W]$ 中的顶点是不能达到 $G[V]$ 中的顶点的. 与 G 强连通矛盾. 所以 $A(G)$ 是不可约的.

充分性. 设 $A(G)$ 是不可约的, 而 G 不是强连通的. 则 $V(G)$ 可按彼此可以互相达到的关系分划为 t 个等价类 $V_1, V_2, \cdots, V_t$, $t>1$. 这 t 个等价类中必有一个, 不妨设为 V_1, 使得 V_2, V_3, $\cdots$, V_t 中任意一个顶点都没有指向 V_1 的顶点的有向边. 记 $V_1=\{u_1, u_2, \cdots, u_k\}$, $1\leqslant k<n$, 且 $V_2\cup V_3\cup\cdots\cup V_t=\{u_{k+1}, \cdots, u_n\}$. 则 G 对于顶点集合$V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的重新编号 $V(G)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ 的邻接矩阵具有如下形式

$$\widetilde{A}(G)=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix},$$

其中 A_{11}是 k 阶 (0, 1) 方阵. 记 $u_i=v_{\varphi(i)}$, $i=1, 2, \cdots, n$, 则 $\varphi(1)\varphi(2)\cdots\varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 另记 $P_\varphi=[p_{ij}]$, 其中当且仅当 $P_{i,\varphi(i)}=1$, $i=1, 2, \cdots, n$. 则容易验证,

$$\widetilde{A}(G)=P_\varphi A(G)P_\varphi^t=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ 0 & A_{22}\end{bmatrix}.$$

因此 $A(G)$ 可约, 矛盾.

注 n 阶有向图G 的邻接矩阵$A(G)$ 依赖于顶点集合 $V(G)$的编号. 对于 $V(G)$ 的不同编号, G 的邻接矩阵是不同的, 但它们却彼此置换相似.

反之，彼此置换相似的两个 n 阶（0，1）方阵 A 和 B 是同一个 n 阶有向图 G 在顶点集合 $V(G)$ 的两种不同编号下的邻接矩阵．易知 n 阶（0，1）矩阵之间的置换相似关系是等价关系．按置换相似关系，n 阶（0，1）矩阵分划为有限个等价类．每一个等价类即是同一个 n 阶有向图 G 在顶点集合 $V(G)$ 的不同编号下的邻接矩阵的集合．于是，对于给定的 n 阶有向图 G，如何寻求其顶点集合 $V(G)$ 的一种编号，使之邻接矩阵具有简单形式，这就是寻求 n 阶（0，1）矩阵在置换相似下的标准形问题．

10．3．10　设 $A(G)$ 是 n 阶有向图 G 的邻接矩阵．证明：G 强连通的充要条件是：布尔矩阵 $A(G)$ 满足 $(I_n+A(G))^{n-1}=J_n$，其中 J_n 是 n 阶全 1 方阵．

证　设 $A(G)^m=[a_{ij}^{(m)}]$．则 G 强连通的充要条件是：对任意 $i,j,1\leqslant i\neq j\leqslant n$，$G$ 中含有由 v_i 到 v_j 的长为 m 的有向路径，$m\leqslant n-1$，即 $a_{ij}^{(m)}=1$．因此 G 强连通，当且仅当 $I_n+A(G)+\cdots+A(G)^{n-1}=J_n$，即当且仅当 $(I_n+A(G))^{n-1}=J_n$．

10．3．11　证明：n 阶有向图 G 为根树的充要条件是：G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的所有主对角元全为 0，而且 $A(G)$ 中含有一个零列，其他各列恰有一个元素为 1．

证　必要性．设 G 是根树，其顶点集合为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$．则 G 不含环(loop)，因此 $A(G)=[a_{ij}]$ 中所有主对角元 $a_{ii}=0$．另外，设 v_j 是 G 的根顶点，则 v_j 的入度 $d^-(v_j)=0$，所以 $A(G)$ 中第 j 列上所有元素全为零，即 $A(G)$ 的第 j 列为零列．对任意 $u\in V(G)$，$u\neq v_j$，即 u 不是根顶点，则 u 的入度 $d^-(v)=1$，因此 $A(G)$ 中与 u 相应的列上恰有一个 1．

充分性．设 $A(G)$ 的主对角元全是 0，且含有零列，其他各列恰有一个 1．对 n 用归纳法证明，G 是根树．当 $n=2$ 时，$A(G)$ 只能是

$$\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}，或\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}.$$

对前者，G 是 2 阶根树 $v_1\to v_2$；对后者，G 是 2 阶根树 $v_2\to v_1$．因此结论对 $n=2$ 成立．设结论对 $n-1$ 成立．下面证明结论对 n 成立．

设 n 阶邻接矩阵 $A(G)=[a_{ij}]$ 的第 i 列是零列．由于 $A(G)$ 中其他各列上恰有一个 1，所以 $A(G)$ 恰有 $n-1$ 个 1．因此 $A(G)$ 必含有零行，设为第 j 行．注意 $j\neq i$，否则 $A(G)$ 将含有主对角元 1．$A(G)$ 的第 j 列上恰有一个 1，设为 $a_{kj}=1$．注意 $k\neq j$，否则主对角元 $a_{jj}=1$．于是 G 中含有边 $v_k\to v_j$．$A(G)$ 中去掉第 j 行、第 j 列的余子矩阵记作 B．易知 B 是 $n-1$ 阶（0，1）方阵，因此 B 是 $n-1$ 阶有向图 H 的邻接矩阵．又易知 B 中第 i 列为 0 列，其他各列上恰有一个 1，而且主对角元全为 0．由归纳假设可知，H 是 $n-1$ 阶根树，其顶点集合为 $V(H)=\{v_1,v_2,\cdots,v_{j-1},v_{j+1},\cdots,v_n\}$．添加顶点 v_j 到 H，使得 $v_k\to v_j$，得到的图即是 G．易知 G 是根树．

注　从 10．3．11 的充分性证明可以看出，如果根树 G 的邻接矩阵为 $A(G)$，则 $A(G)$ 中零行相应于 G 的悬挂点．另外，易知 $A(G)$ 的零列相应于 G 的根顶点．

10．3．12　设 n 阶简单无向图 G 的顶点集合为 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，邻接矩阵为 $A(G)=[a_{ij}]$，其中当 v_i 与 v_j 相邻时 $a_{ij}=1$、否则 $a_{ij}=0$．证明：

（1）$A(G)$ 是主对角元全为 0 的 n 阶对称（0，1）方阵．

（2）$A(G)$ 的第 i 行和 $r_i=a_{i1}+a_{i2}+\cdots+a_{in}$ 等于顶点 v_i 的度 $d(v_i)$，而 $A(G)$ 的第 j 列和 $s_j=a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{nj}$ 等于顶点 v_j 的度 $d(v_j)$，$i,j=1,2,\cdots,n$．

（3）设 G 的边数为 $e(G)$，则

$$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=2e(G).$$

（4）$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 上所有 n 阶简单无向图 G 的集合 G_n 和主对角元全为 0 的 n 阶对称（0，1）方阵的集合 S_n 之间存在双射．

证　（1）因为 G 是简单图，所以 G 不含环(loop)，即对任意 v_i，v_i 和 v_i 不相邻，因此 $a_{ii}=0$，$i=1,2,\cdots,n$，即 $A(G)$ 的主对角元全为 0．又因为 G 是无向图，所以对任意 v_i，$v_j\in V(G)$，$i\neq j$，如果 v_i 和 v_j 相邻，则 v_j 和 v_i 也相邻，因此当 $a_{ij}=1$ 时，$a_{ji}=1$．同样当 $a_{ij}=0$ 时，$a_{ji}=0$．这说明，$A(G)$ 是对称的．

（2）$A(G)$ 的第 i 行和 r_i 即是第 i 行上 1 的个数，也即图 G 中和 v_i 关联的边数，因此 $r_i=d(v_i)$．同理 $s_j=d(v_j)$．

（3）由（2），$d(v_1)+d(v_2)+\cdots+d(v_n)=r_1+r_2+\cdots+r_n=\sigma(A(G))$．其中 $\sigma(A(G))$ 是 $A(G)$ 中所含 1 的个数．注意，$A(G)$ 中一个 1 对应于 G 中一条边，例如，如果 $a_{ij}=1$，则 G 中含有边 v_iv_j．因为 $A(G)$ 是对称的，因此 G 中一条边 v_iv_j 对应 $A(G)$ 中两个 1：$a_{ij}=1=a_{ji}$．所以 $\sigma(A(G))=2e(G)$．从而结

论（3）成立.

（4）定义 G_n 到 S_n 的映射 φ 如下：对于 $G\in G_n$，令 $\varphi(G)=A(G)$. 易见 φ 是单射. 设 $A=[a_{ij}]\in S_n$. 定义顶点集合为 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 的图 G 如下：对于 $v_i, v_j\in V(G)$，当且仅当 $a_{ij}=1$ 时令 v_i 和 v_j 相邻. 由于 A 是主对角元全为0的 n 阶对称（0, 1）方阵，所以 G 是 n 阶简单图，即 $G\in G_n$，而且 A 即是 G 的邻接矩阵. 因此 $\varphi(G)=A$. 这说明，φ 是满射，从而是双射.

注 由10.3.12（4），n 阶简单图即是一个主对角元的 n 阶对称（0, 1）方阵，反之也然. 另外，n 阶简单图 G 的顶点 v_i 对应于邻接矩阵 $A(G)$ 的第 i 行和第 i 列，G 中的一条边 v_iv_j 对应于 $A(G)$ 中一双对称的1，即 $a_{ij}=1=a_{ji}$. 这些基本对应关系是应用（0, 1）方阵解图论问题的依据.

10.3.13 将 n 阶简单图 G 的 n 个顶点记作 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，相应于 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$G$ 的邻接矩阵为 $A(G)=[a_{ij}]$. 将 G 的 n 个顶点重新记作 $u_1, u_2, \cdots, u_n$，相应于 $V(G)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，$G$ 的邻接矩阵为 $B(G)=[b_{ij}]$. 证明：$A(G)$ 和 $B(G)$ 是置换相似的. 反之设 $A=[a_{ij}]$，$B=[b_{ij}]\in S_n$ 是置换相似的，且 A 所确定的 n 阶简单图为 G，则 B 是 G 在顶点的重新编号下的邻接矩阵.

证 易知 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的排列，记 $u_i=v_{\varphi(i)}$，$i=1, 2, \cdots, n$. 则 $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 记 $P_\varphi=[p_{ij}]$，其中当 $j=\varphi(i)$ 时 $p_{ij}=1$，否则 $p_{ij}=0$，$i=1, 2, \cdots, n$. 则 P_φ 是 n 阶置换方阵. 记 $P_\varphi A(G)P_\varphi^t=C=[c_{ij}]$，则对任意 i, j，$1\leqslant i, j\leqslant n$，有

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ik}a_{kl}p_{jl}=p_{i,\varphi(i)}a_{\varphi(i),\varphi(j)}p_{j,\varphi(j)}=a_{\varphi(i),\varphi(j)}.$$

而 $a_{\varphi(i),\varphi(j)}=1$ 当且仅当 $v_{\varphi(i)}v_{\varphi(j)}$ 是 G 的边，即当且仅当 u_iu_j 是 G 的边，也即当且仅当 $b_{ij}=1$. 所以 $B(G)=P_\varphi A(G)P_\varphi^t$.

反之设 $A=[a_{ij}]\in S_n$，则 A 是 n 阶简单图 G 在顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 下的邻接矩阵. 设 $B=[b_{ij}]$ 和 A 置换相似，即存在 n 阶置换方阵 $P=[p_{ij}]$，使得 $B=P^tAP$. 由于 $P=[p_{ij}]$ 是置换方阵，所以对每个 j，必有唯一的下标 $\varphi(j)$，使得 $p_{\varphi(j),j}=1$，$j=1, 2, \cdots, n$，而且 $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列. 由于 $B=P^tAP$，所以对任意 i, j，$1\leqslant i, j\leqslant n$，

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}p_{ki}a_{kl}p_{lj}=p_{\varphi(i),i}a_{\varphi(i),\varphi(j)}p_{\varphi(j),j}=a_{\varphi(i),\varphi(j)}.$$

因此，$b_{ij}=1$ 当且仅当 $a_{\varphi(i),\varphi(j)}=1$，即当且仅当 $v_{\varphi(i)}v_{\varphi(j)}$ 是 G 中的边. 记 $u_i=v_{\varphi(i)}$，$i=1, 2, \cdots, n$，则 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 是 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 的排列. 于是 $b_{ij}=1$ 当且仅当 u_iu_j 是 G 中的边. 因此 B 是 G 在顶点 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 下的邻接矩阵.

注 10.3.12(4)表明，在顶点的一种编号 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 下的 n 阶简单图 G 和主对角元全为0的 n 阶对称(0,1)方阵是一一对应的. 10.3.13说明，同一个 n 阶简单图 G 在顶点的不同编号下的邻接矩阵是置换相似的. 而置换相似的主对角元全为0的 n 阶对称（0, 1）方阵是同一个 n 阶简单图在顶点不同编号下的邻接矩阵. 易知置换相似是所有主对角元全为0的 n 阶对称（0, 1）方阵集合 S_n 中的等价关系，在置换相似关系下 S_n 分划为一些等价类，因此 n 阶简单图（顶点无编号）和 S_n 的等价类是一一对应的.

10.3.14 证明：n 阶简单图 G 和 H 同构的充要条件是：邻接矩阵 $A(G)$ 和 $A(H)$ 置换相似.

证 这是10.3.8的无向图情形. 读者试自证之.

10.3.15 设 $A(G)=[a_{ij}]$ 是 n 阶简单图 G 的邻接矩阵，$V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ 是 G 的顶点集合，记 $A(G)^k=[a_{ij}^{(k)}]$. 证明：$a_{ij}^{(k)}$ 是 G 中连接 v_i 和 v_j 的长为 k 的路径的个数.

证 这是10.3.2的无向图情形. 这里应指出的是，$a_{ii}^{(2)}$ 即是 G 中的 v_i 的度 $d(v_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$.

注 由于简单图 G 是不带环而且各边均为双向边的有向图，因此前面有关有向图的可达性矩阵的结论可以搬到简单图，只须注意简单图的可达性矩阵是对称矩阵即可.

10.3.16 设 $A(G)=[a_{ij}]$ 和 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ 是二部图 G 的邻接矩阵，$X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是 $V(G)$ 的二部分划，其中 $k=m+n$. 证明：$A(G)$ 置换相似于如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} & B_{m\times n}\\ B_{m\times n}^t & 0\end{bmatrix}, \tag{③}$$

其中 $B_{m\times n}$ 是 $m\times n$（0, 1）矩阵.

证 易知 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 的排列. 对于顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_k$ 的重新编号 $x_1, x_2, \cdots, x_m, y_1, y_2, \cdots, y_n$，由于 G 是二部图，所以任意 x_i, x_j 不相邻，$1\leqslant i, j$

$\leqslant m$，任意 y_s，y_t 不相邻，$1 \leqslant s$，$t \leqslant n$，从而 G 在如此编号下的邻接矩阵具有形式③. 由 10. 3. 13，$A(G)$ 和式③中矩阵置换相似.

注 式③中 $m \times n$ (0, 1) 矩阵 $B_{m \times n}$ 称为二部图 G 的简化邻接矩阵，记作 $B(G) = [b_{ij}]$. 易知 $b_{ij} = 1$ 当且仅当 x_iy_j 是 G 的边，$1 \leqslant i \leqslant m$，$1 \leqslant j \leqslant n$. 另外，容易证明，所有二部分划为 X，Y 的二部图的集合与所有 $m \times n$ (0, 1) 矩阵的集合之间存在双射. 这就是 $m \times n$ (0, 1) 矩阵的图论背景.

10. 3. 17 设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ (0, 1) 矩阵. 矩阵 A 的一行或一列统称为矩阵 A 的一条线. A 中一组取自不同线上的 1 称为 A 的一个线无关 1 组. 如果 A 中一个线无关 1 组所含 1 的个数是 A 中所有线无关 1 组所含 1 的个数之最大值，则称这个线无关 1 组是 A 的一个最大线无关 1 组. 最大线无关 1 组中所含 1 的个数称为矩阵 A 的项秩 (term rank)，记作 $\rho(A)$. 如果矩阵 A 中一个 1 在一条线上，则称该线覆盖这个 1. 如果 A 中一组线覆盖 A 中所有的 1，则称这组线为 A 的一个线覆盖. 如果 A 中一个线覆盖所含线的条数是 A 的所有线覆盖所含线的条数之最小值，则称这个线覆盖是 A 的最小线覆盖. A 的最小线覆盖中所含线的条数称为 A 的线秩 (line rank)，记作 $\lambda(A)$. 给定

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

试分别求出它们的项秩与线秩.

解 (1) A_1 的第 1 行覆盖 A_1 中所有的 1，因此 {第 1 行} 是 A_1 的线覆盖，而且是最小线覆盖，所以 $\lambda(A_1) = 1$. 又 A_1 的 1 都在同一线 (第 1 行) 上，因此，$\{a_{11} = 1\}$ 是 A_1 的最大线无关 1 组. 所以 $\rho(A) = 1$. 注意，$\lambda(A_1) = \rho(A_1)$.

(2) A_2 的第 1 行和第 1 列覆盖 A_2 中所有的 1，因此 {第 1 行，第 1 列} 是 A_2 的最小线覆盖，所以 $\lambda(A_2) = 2$. 又 A_2 的所有的 1 在第 1 行或第 1 列上，因此，$\{a_{12} = 1,\ a_{21} = 1\}$ 是 A_2 的最大线无关 1 组. 所以，$\rho(A_2) = 2$. 注意 $\lambda(A_2) = \rho(A_2)$.

(3) A_3 的第 1，2，3 行覆盖 A_3 中所有的 1，而 A_3 中任意两条线都不能覆盖 A_3 中所有的 1. 因此 {第 1，2，3 行} 是 A_3 的最小线覆盖. 所以 $\lambda(A_3) = 3$. 又 A_3 中所有的 1 在第 1，2，3 行上，也在第 1，2，3 列上，因此，$\{a_{11} = 1,\ a_{23} = 1,\ a_{32} = 1\}$ 是 A_3 中一个最大线无关 1 组，所以 $\rho(A_3) = 3$. 注意，$\lambda(A_3) = \rho(A_3)$.

注 10. 3. 17 中 $\lambda(A_i) = \rho(A_i)$，$i = 1, 2, 3$ 决非巧合. 而是对任意 $m \times n$ (0, 1) 矩阵 A 都成立. 10. 3. 19 将证明这一事实.

10. 3. 18 设 A 和 B 是 $m \times n$ (0, 1) 矩阵. 如果 A 可以经过一系列行或列的调换变为 B，即存在 m 阶和 n 阶置换方阵 P 和 Q，使得 $B = PAQ$，则称 A 和 B 是置换相抵. 证明：

(1) 如果 A 和 B 置换相抵，则 $\lambda(A) = \lambda(B)$.

(2) 如果 A 和 B 置换相抵，则 $\rho(A) = \rho(B)$.

证 设 L 是 A 的一个线覆盖. 则易知 L 仍是对调 A 的两行或两列得到的矩阵 C 的线覆盖. 因此 A 的所有线覆盖集合经行或列的对调不变. 于是有 $\lambda(A) = \lambda(B)$.

设 K 是 A 的一个线无关 1 组. 则易知 K 仍是对调 A 的两行或两列得到的矩阵 C 的线无关 1 组. 所以 A 的所有线无关 1 组集合经行或列的对调是不变的. 因此有 $\rho(A) = \rho(B)$.

10. 3. 19 (König 定理) 设 A 是 $m \times n$ (0, 1) 矩阵. 证明：$\lambda(A) = \rho(A)$.

证 设 $\rho(A) = \rho$，且 K 是 A 的一个最大线无关 1 组. 设 L 是 A 的一个线覆盖，则 L 覆盖 K 中所有的 1. 因为 K 中任意两个 1 在不同线上，所以 L 中至少含有 ρ 条线. 因此 $|L| \geqslant \rho$. 从而 $\lambda(A) \geqslant \rho(A)$.

反之设 L 是 A 的一个最小线覆盖，它由 A 中 e 个行和 f 个列组成，即设 $\lambda(A) = e + f$. 将 L 中 e 个行调成第 1，2，…，e 行，f 个列调成第 1，2，…，f 列. 则 A 置换相抵于如下矩阵

$$B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix},$$

其中 B_{11} 是 $e \times f$ (0, 1) 矩阵. 由于 B 的第 1，2，…，e 行与第 1，2，…，f 列覆盖 B 中所有的 1，因此 B_{22} 是 $(m-e) \times (n-f)$ 零矩阵.

如果 $e = m$，则 $f = 0$，$m = \lambda(A)$，即 B 的第 1，2，…，m 行是 B 的最小线覆盖. 因此 B 的第 1 行上至少有一个 1. 将它调到第 1 列上，则 B 置换相抵于如下矩阵：

$$C = \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & C_{22} \end{bmatrix},$$

其中 C_{22} 是 $(m-1)\times(n-1)$ (0, 1) 矩阵. 易知 $\lambda(C_{22})=m-1$. 由前面的证明, $m-1-\lambda(C_{22})\leqslant\rho(C_{22})$. 即有 $\lambda(A)=m\leqslant\rho(C_{22})+1$, 而 $\rho(C_{22})+1=\rho(C)=\rho(A)$. 所以 $\lambda(A)\leqslant\rho(A)$. 从而当 $m=\lambda(A)$ 时, $\lambda(A)=\rho(A)$.

如果 $e<m$, 则 B_{22} 是 $(m-e)\times(n-f)$ 零矩阵. 注意, $\lambda(B_{12})=e$, $\lambda(B_{21})=f$. 由上一段证明, $\rho(B_{12})=\lambda(B_{12})=e$, $\rho(B_{21})=\lambda(B_{21})=f$. 易知 $\rho(A)\geqslant\rho(B_{12})+\rho(B_{21})=e+f$. 所以 $\rho(A)\geqslant\lambda(A)$. 从而 $\rho(A)=\lambda(A)$.

注 König 定理是 1931 年 König 首先发现的, 其论文的标题即是《图与矩阵》. 足见 König 本人已注意到其定理的组合意义. 另外, König 定理可以叙述为, $m\times n$ (0, 1) 矩阵 A 中最小线覆盖所含的线数 $\lambda(A)$ 等于最大线无关 1 组所含 1 的个数 $\rho(A)$. 因此它是一个最小最大型定理.

10. 3. 20 (Frobiuius 定理) 设 A 是 $m\times n$ (0, 1) 矩阵, $m\leqslant n$. 证明下述命题等价:

(1) $\lambda(A)<m$;

(2) $\rho(A)<m$;

(3) A 含有 $r\times s$ 零子矩阵, 其中 $r+s=n+1$.

证 (1) 与 (2) 的等价性是 König 定理的推论. 下面证明 (1) 与 (3) 等价.

设 $\lambda(A)=e+f<m$. 则 A 置换相抵于如下矩阵 B:

$$B=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & O\end{bmatrix},$$

其中 B_{11} 是 $e\times f$ (0, 1) 矩阵, 而 O 是 $(m-e)\times(n-f)$ 零矩阵. 由于 $m-e+n-f=n+(m-e-f)\geqslant n+1$, 所以 B 含有 $r\times s$ 零子矩阵 $O_{r\times s}$, $r+s=n+1$, 从而 A 也含有零子矩阵 $O_{r\times s}$.

反之设 A 含有 $r\times s$ 零子矩阵 $O_{r\times s}$, $r+s=n+1$. 易知 A 置换相抵于如下矩阵 C:

$$C=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12}\\ C_{21} & O_{r\times s}\end{bmatrix}.$$

其中 C_{11} 是 $(m-r)\times(n-s)$ (0, 1) 矩阵. 显然, C 的第 1, 2, …, $m-r$ 行与第 1, 2, …, $n-s$ 列构成 C 的一个线覆盖, 所以 $\lambda(C)\leqslant m-r+n-s=m-1$. 而由 10. 3. 18, $\lambda(A)=\lambda(C)\leqslant m-1$. 这就证明 (1) 与 (3) 等价.

10. 3. 21 设 G 是 $m\times n$ 二部图, $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是图 G 的顶点集合 $V(G)$ 的二部分划. 对于二部图 G, 定义它的简式邻接矩阵 $B(G)=[b_{ij}]$ 如下:

$$[b_{ij}]=\begin{cases}1, & x_i \text{ 和 } y_j \text{ 相邻},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明:

(1) 二部图 G 中所有匹配 (也称对集. 即图 G 中一组两两无公共顶点的边) 的集合 (M) 和 (0, 1) 矩阵 $B(G)=[b_{ij}]$ 的所有线无关 1 组的集合 (L) 之间存在双射;

(2) 二部图 G 中所有点覆盖的集合 (C) 和 (0, 1) 矩阵 $B(G)=[b_{ij}]$ 中所有线覆盖的集合 (K) 之间存在双射;

(3) 二部图 G 的匹配的最大边数 $\gamma(G)$ 等于图 G 的点覆盖的最小点数 $\tau(G)$.

证 首先注意, 图 G 中的边 x_iy_j 对应于 G 的简化邻接矩阵 $B(G)$ 中的一个 $1=b_{ij}$. 图 G 中的顶点 x_i 或 y_j 相应于 $B(G)$ 中的一条线. 因此图 G 中一个匹配, 即图 G 中一组两两无公共顶点的边 $x_{i_1}y_{j_1}$, $x_{i_2}y_{j_2}$, …, $x_{i_m}y_{j_m}$, 对应于 $B(G)$ 中一个线无关 1 组 $b_{i_1j_1}=1$, $b_{i_2j_2}=1$, …, $b_{i_mj_m}=1$. 建立 (M) 到 (L) 的映射 φ 如下: 对任意 $M=\{x_{i_1}y_{j_1}, x_{i_2}y_{j_2}, \cdots, x_{i_m}y_{j_m}\}\in(M)$, 令 $\varphi(M)=L=\{b_{i_1j_1}=1, b_{i_2j_2}=1, \cdots, b_{i_mj_m}=1\}$. 容易验证, φ 是 (M) 到 (L) 上的双射. 因此结论 (1) 成立. 由此可知, 图 G 中匹配的最大边数 $\gamma(G)$ 等于矩阵 $B(G)$ 的线无关 1 组所含 1 的最大个数, 也即矩阵 $B(G)$ 的项秩 $\rho(B(G))$.

其次设 $C\in(C)$, 即 C 是图 G 的一个点覆盖. 则对图 G 中任意一条边 x_iy_j, C 中必有一个顶点 z, 使 x_iy_j 以 z 为一端点. 而 z 对应于矩阵 $B(G)$ 的一条线, 该线覆盖 $B(G)$ 中的 $1=b_{ij}$. 于是 C 中所有顶点对应 $B(G)$ 中一组线 K, 使得 $B(G)$ 中每个 1 都被 K 中一条线所覆盖. 即是说, K 是 $B(G)$ 中一个线覆盖. 建立 (C) 到 (K) 的映射 ψ 如下: 对任意 $C\in(C)$, 令 $\psi(C)=K$, 即 C 中所有顶点所对应的 $B(G)$ 的一组线. 容易验证, ψ 是 (C) 到 (K) 的双射. 因此结论 (2) 成立. 由此即得, 图 G 中点覆盖的最小点数 $\tau(G)$ 等于矩阵 $B(G)$ 的线覆盖的最小线数, 也即矩阵 $B(G)$ 的线秩 $\lambda(B(G))$.

由 König 定理 10. 3. 19 即知结论 (3) 成立.

注 10. 3. 21 (3) 是 König 定理的图论形式.

10. 3. 22 设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的 m 个子集. 证明: 子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 具有互异代表元序列的充要条件是: 子集 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 关于 X 的关联矩阵 A

$=[a_{ij}]$ 的项秩 $\rho(A)=m$.

证 必要性. 设 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 是子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 的互异代表元序列, 则 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 互异, 且 $x_{i_k}\in X_k$, $k=1, 2, \cdots, m$. 因此 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 互异, 且 $a_{ki_k}=1$, $k=1, 2, \cdots, m$. 所以 $\{a_{1i_1}, a_{2i_2}, \cdots, a_{mi_m}\}$ 是关联矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的线无关 1 组. 于是 $\rho(A)\geqslant m$. 易知 $\rho(A)\leqslant m$. 从而 $\rho(A)=m$.

充分性. 设 $\rho(A)=m$, 则关联矩阵 A 含有 m 个线无关的 1, 它们在 A 的不同线上, 特别, 这 m 个 1 在 A 的各行上恰有 1 个, 在 A 的 m 个列上也各恰有 1 个. 因此可设 A 含有线无关 1 组 $\{a_{1i_1}=1, a_{2i_2}=1, \cdots, a_{mi_m}=1\}$, 其中 $i_1, i_2, \cdots, i_m$ 互异. 所以 $x_{i_k}\in X_k$, $k=1, 2, \cdots, m$, 且 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 互异. 于是 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$ 是子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 的一个互异代表元序列.

10. 3. 23 (Hall 定理) 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的子集序列. 证明: $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 具有互异代表元序列 (简称 SDR) 的充要条件是: 对于 $1\leqslant k\leqslant m$,

$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中任意 k 个子集的并至少含有 k 个不同的元素. (H)

证 必要性. 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 具有互异代表元序列 $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m})$, 则 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_m}$ 互异, 且 $x_{i_k}\in X_k$, $k=1, 2, \cdots, m$. 对于 $k=1, 2, \cdots, m$, 设 $X_{j_1}, X_{j_2}, \cdots, X_{j_k}$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中 k 个子集, 则 $x_{i_{j_t}}\in X_{j_t}$, $t=1, 2, \cdots, k$, 于是 $x_{i_{j_1}}, x_{i_{j_2}}, \cdots, x_{i_{j_k}}$ 是并集 $X_{j_1}\cup X_{j_2}\cup\cdots\cup X_{j_k}$ 的 k 个不同的元素. 因此条件 (H) 成立.

充分性. 设条件 (H) 成立, 但子集序列 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 不含有互异代表元序列. 则由 10. 3. 22, $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 关于 X 的关联矩阵 A 的项秩 $\rho(A)<m$. 由 König 定理, A 的线秩 $\lambda(A)=\rho(A)<m$. 由线秩的定义, 关联矩阵 A 具有一个由 e 个行和 f 个列组成的线覆盖, 其中 $e+f=\lambda(A)$. 将这个线覆盖中 e 个行分别调成第 1, 2, $\cdots$, e 行, 并将其中 f 个列调成前 f 个列, 则关联矩阵 A 置换相抵于如下矩阵 B:

$$B=\begin{array}{c} \\ e \\ m-e \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} f & n-f \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \end{array},$$

其中 B_{11} 是 $e\times f$ (0, 1) 子矩阵. 注意 {第 1, 2, $\cdots$, e 行, 第 1, 2, $\cdots$, f 列} 是矩阵 B 的线覆盖, 所以 B_{22} 是一个 $(m-e)\times(n-f)$ 零子矩阵. B_{21} 是 $(m-e)\times f$ (0, 1) 子矩阵. 因此 B 的第 $e+1$, $e+2$, $\cdots$, m 行上至多有 f 个 1, 而且都在 B 的第 1, 2, $\cdots$, f 列上. 由于 B 是 A 经行与列的置换得到的, 因此 B 的一行相应于 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中一个子集, 而一行上 1 的个数相应该行所对应的子集所含元素的个数. 于是对应于 B 的第 $e+1$, $e+2$, $\cdots$, m 行的是 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中 $m-e$ 个子集, 而它们的并集至多含有 f 个不同元素. 而由 $e+f<m$ 可知 $f<m-e$. 与条件 (H) 相矛盾.

注 Hall 定理是 P.Hall 1935 年在研究有限群理论时证明的. 条件 (H) 称为 Hall 条件.

10. 3. 24 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 是 n 元集 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 的子集序列. 证明: 如果存在正整数 k, 使得每个子集 X_i 至少含有 k 个元素, 而每个元素 x_j 至多出现在 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 的 k 个子集, 则 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 具有互异代表元序列.

证 设 Hall 条件 (H) 不成立. 则 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中必有 r 个子集, 不妨设为 $X_1, X_2, \cdots, X_r$, 使得

$$|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r|=r'<r.$$

考察 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 关于 X 的关联矩阵 $A=[a_{ij}]$. A 的前 r 行组成的 $r\times n$ 子矩阵记作 B. 由于每个子集 X_i 至少含有 k 个元素, 因此 B 的每一行上至少有 k 个 1, 即 B 的第 i 行和 $R_i\geqslant k$, $i=1, 2, \cdots, r$. 于是 B 中的 1 的个数 $\sigma(B)\geqslant kr$. 另一方面, 由于 $|X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r|=r'<r$, 所以不妨设 $X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_r=\{x_1, x_2, \cdots, x_{r'}\}$, 则 B 的第 1, 2, $\cdots$, r' 列都是非零列, 而其他各列都是零列. 于是 $\sigma(B)=S_1+S_2+\cdots+S_{r'}$, 其中 S_j 是 B 的第 j 列上所有 1 的和. 由于每个元素 x_j 至多出现在 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 中 k 个子集, 所以 $S_j\leqslant k$, $j=1, 2, \cdots, r'$. 因此

$$kr\leqslant\sigma(B)\leqslant r'k.$$

即 $r\leqslant r'$, 与假设矛盾. 这就证明, Hall 条件 (H) 成立. 由 Hall 定理, $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 具有互异代表元序列.

注 10. 3. 24 的矩阵形式是, 如果 $m\times n$ (0, 1) 矩阵 A 的各个行和都大于或等于 k, 而各个列和都小于或等于 k, k 为正整数, 则项秩 $\rho(A)=m$.

10. 3. 25 (Hall 定理的图论形式) 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_m\}$ 和 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 是

$m\times n$ 二部图 G 的顶点集合 $V(G)$ 的二部分划．证明：图 G 含有一个饱和 X 的每个顶点的匹配 M 的充要条件是：对任意 $S\subseteq X$，有

$$|N(S)|\geqslant|S|. \qquad (H)$$

其中 $N(S)=\{y\in Y|\exists x\in S,\ y\in N(x)\}$，而 $N(x)$ 是顶点 x 的邻域．

证 设 $B(G)=[b_{ij}]$ 是二部图 G 的简化邻接矩阵．显然 $B(G)$ 是一个 $m\times n$ (0，1) 矩阵．由10．3．21可知，图 G 的所有匹配的集合 (M) 和矩阵 $B(G)$ 的所有线无关1组的集合 (L) 之间存在双射，而且图 G 中匹配的最大边数 $\upsilon(G)$ 等于矩阵 $B(G)$ 的项秩 $\rho(G)$．易知图 G 含有一个饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是：$\upsilon(G)=m$．也即 $\upsilon(G)=\rho(G)=m$．

其次将 $m\times n$ (0，1) 矩阵 $B(G)$ 看成是 n 元集 $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ 的 m 个子集 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 的关联矩阵，即当 $b_{ij}=1$ 时，$y_j\in Y_i$；当 $b_{ij}=0$ 时，$y_j\notin Y_i$．由10．3．23的证明可知，子集序列 $Y_1, Y_1, \cdots, Y_m$ 具有互异代表元序列 $(y_{j_1}, y_{j_2}, \cdots, y_{j_m})$ 的充要条件是：矩阵 $B(G)$ 具有线无关1组 $\{b_{1j_1}=1, b_{2j_2}=1, \cdots, b_{mj_m}=1\}$．因此子集序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 具有互异代表元序列的充要条件是：$\rho(B(G))=m$．

于是，图 G 具有饱和 X 的每个顶点的匹配的充要条件是：图 G 的简化邻接矩阵 $B(G)$ 所确定的 n 元集 Y 的子集序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 具有互异代表元序列．

现在考察关于 n 元集 Y 的子集序列 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 的Hall条件 (H)．注意 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 中子集 Y_i 对应于矩阵 $B(G)$ 的第 i 行，也即对应于图 G 的顶点 x_i．子集 Y_i 的元素 y_j 对应于 $B(G)$ 的第 i 行上的 $a_{ij}=1$，即对应于图 G 中与顶点 x_i 相邻的顶点 y_j．因此子集 Y_i 对应于 $B(G)$ 的第 i 行上所有1的集合，也即图 G 中顶点 x_i 的邻域 $N(x_i)$．于是，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 中任意 k 个子集 $Y_{i_1}, Y_{i_2}, \cdots, Y_{i_k}$ 对应于 X 中 k 个顶点 $x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}$ 的邻域 $N(x_{i_1}), N(x_{i_2}), \cdots, N(x_{i_k})$，而并集 $Y_{i_1}\cup Y_{i_2}\cup\cdots\cup Y_{i_k}$ 对应于 $N(x_{i_1})\cup N(x_{i_2})\cup\cdots\cup N(x_{i_k})$，即对应于 $N(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\})$．因此，$Y_{i_1}\cup Y_{i_2}\cup\cdots\cup Y_{i_k}$ 至少含有 k 个不同元素这一事实即对应于 $|N(\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\})|\geqslant k=|\{x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}\}|$．于是Hall定理10．3．23中Hall条件 (H) 等价于10．3．25中Hall条件 (H)．这就证明10．3．25成立．

注 一个 $m\times n$ (0，1) 矩阵 $B(G)$ 既可表示一个二部图 G，又可表示 n 元集 Y 的子集序列 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$．这是证明10．3．25的关键．其对应关系可用下表表示：

G：二部图	$B(G)$	$Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$：Y 的子集
顶点 y_j	j 列	元素 y_j
顶点 x_i	i 行	子集 Y_i
边 x_iy_j	$b_{ij}=1$	$y_j\in Y_i$
∃饱和 X 的匹配	$\rho(B(G))=m$	$\exists Y_1, Y_2, \cdots, Y_m$ 的SDR
邻域 $N(x_i)$	i 行上的1	子集 Y_i 的元素
$N(x_{i_1})\cup N(x_{i_2})\cup\cdots\cup N(x_{i_k})$	$i_1, i_2, \cdots, i_k$ 行上1的下标	$Y_{i_1}\cup Y_{i_2}\cup\cdots\cup Y_{i_k}$

10．3．26 证明：k 正则二部图 G 具有完美匹配，其中 $k>0$．

证 设 X, Y 是二部图 G 的二部分划．计算图 G 的边数 $e(G)$ 得到，$k|X|=e(G)=k|Y|$．因为 $k>0$，所以 $|X|=|Y|=n$．因此为证明图 G 具有完美匹配 M，只需证明图 G 具有饱和 X 中所有顶点的匹配．

方法1．设 $S\subseteq X$．图 G 中分别与 S 中顶点和与 $N(S)$ 中顶点相关联的边集合记作 E_1 和 E_2．由 $N(S)$ 的定义有 $E_1\subseteq E_2$．由于图 G 是 k 正则的，所以 $|E_1|=k|S|\leqslant|E_2|=k|N(S)|$，而 $k>0$，因此 $|N(S)|\geqslant|S|$．由Hall条件 (H)，图 G 具有饱和 X 的所有顶点的匹配．

方法2．设 $B(G)$ 是二部图 G 的简化邻接矩阵．由于 $|X|=|Y|=n$，所以 $B(G)$ 是 n 阶 (0，1)矩阵．由题意，$B(G)$ 的各个行和与各个

列和都是 k. 由 10. 3. 21 (1), 为证明图 G 具有饱和 X 中所有顶点的匹配, 只需证明, 项秩 $\rho(B(G))=n$. 这一事实可由 10. 3. 24 的注直接得到. 也可简单证明如下:

反证法. 设 $B(G)$ 是各行和与各列和均为 $k>0$ 的 n 阶 $(0, 1)$ 矩阵, 而项秩 $\rho(B(G))<n$. 由于项秩 $\rho(B(G))=$ 线秩 $\lambda(B(G))$, 因此可设 $B(G)$ 具有一个由 e 个行和 f 个列组成的最小线覆盖, 其中

$$e+f=\lambda(B(G))=\rho(B(G)).$$

不妨设 $B(G)$ 的第 1, 2, …, e 行与第 1, 2, …, f 列组成 $B(G)$ 的最小线覆盖. 于是 $B(G)$ 具有如下形式:

$$B(G)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & n-f \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ n \quad e \end{array} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & O \end{bmatrix} \end{array}.$$

记 $B(G)$ 中所有元素之和为 $\sigma(B(G))$. 由于 $B(G)$ 的各行和均为 k, 所以 $\sigma(B_{11}, B_{12})=ke$. 又 $B(G)$ 的各列和为 k, 所以 $\sigma(B_{11})+\sigma(B_{21})=kf$. 而

$$\begin{aligned} nk &= \sigma(B(G)) \\ &= \sigma(B_{11})+\sigma(B_{12})+\sigma(B_{21}) \\ &\leqslant ek+fk=(e+f)k. \end{aligned}$$

因 $k>0$, 所以

$$\rho(B(G))<n\leqslant e+f=\rho(B(G)),$$

矛盾.

10. 3. 27 设 X, Y 是 $n\times n$ 二部图 G 的顶点集合 $V(G)$ 的二部分划, $|X|=|Y|=n$, 图 G 的边数 $e(G)\geqslant(k-1)n+1$. 证明: 图 G 含有 k 条边的匹配.

证 设 $B(G)$ 是二部图 G 的关联矩阵. 由 10. 3. 21 (1) 可知, 如果图 G 不含 k 条边的匹配, 则 $B(G)$ 的项秩 $\rho(B(G))<k$. 由 König 定理, $B(G)$ 的线秩 $\lambda(B(G))=\rho(B(G))<k$. 设 $B(G)$ 含有由 e 个行和 f 个列组成的最小线覆盖, 其中 $e+f=\lambda(B(G))<k$, 不妨设为第 1, 2, …, e 行和第 1, 2, …, f 列, 则 $B(G)$ 具有如下形式:

$$B(G)=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} f & n-f \end{array} \\ \begin{array}{c} e \\ n-e \end{array} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & O \end{bmatrix} \end{array}.$$

注意 $e(G)$ 即是 $B(G)$ 中所有元素之和 $\sigma(B(G))$, 即有

$$\begin{aligned} e(G) &= \sigma(B(G)) \\ &= \sigma(B_{11}, B_{12})+\sigma(B_{21}). \end{aligned}$$

由于 $[B_{11}, B_{12}]$ 是 $e\times n$ $(0, 1)$ 矩阵, B_{21} 是 $(n-e)\times f$ $(0, 1)$ 矩阵, 所以 $\sigma(B_{11}, B_{12})\leqslant en$, $\sigma(B_{21})\leqslant f(n-e)$. 于是

$$\begin{aligned} e(G) &= \sigma(B_{11}, B_{12})+\sigma(B_{21}) \\ &\leqslant (e+f)n-ef. \end{aligned}$$

由于 $e+f=\lambda(B(G))<k$, 而由题意 $e(G)\geqslant(k-1)n+1$, 所以

$$\begin{aligned} (k-1)n+1\leqslant e(G) &\leqslant (k-1)n-ef \\ &\leqslant (k-1)n, \end{aligned}$$

矛盾. 这就证明, 图 G 含有 k 条边的匹配.

10. 3. 28 证明: 二部图 G 的匹配的最大边数 $\nu(G)$ 为

$$\nu(G)=|X|-\max_{S\subseteq X}\{|S|-|N(S)|\},$$

其中 X, Y 是 G 的顶点集合 $\nu(G)$ 的二部分划.

证 设 $B(G)$ 是图 G 的关联矩阵. 由 10. 3. 21 (3), $\nu(G)$ 即是图 G 的点覆盖的最小点数 $\tau(G)$. 由 10. 3. 21 (2), $\nu(G)$ 即是矩阵 $B(G)$ 的线覆盖的最小线数, 即线秩 $\lambda(B(G))$. 设矩阵 $B(G)$ 的最小线覆盖 L 由第 i_1, i_2, …, i_e 行和第 j_1, j_2, …, j_f 列组成, 其中 $e+f=\lambda(B(G))$. 将矩阵 $B(G)$ 的第 i_1, i_2, …, i_e 行依次调到第 1, 2, …, e 行, 第 j_1, j_2, …, j_f 列依次调到第 1, 2, …, f 列. 则矩阵 $B(G)$ 置换相抵于如下矩阵:

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} j_1 & \cdots & j_e \quad \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} i_1 \\ \vdots \\ i_e \\ \vdots \end{array} & \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ & \\ A_{21} & O \end{bmatrix} \end{array}.$$

A 的第 1, 2, …, e 行依次对应于 X 中元素 x_{i_1}, x_{i_2}, …, x_{i_e}, 其集合记作 Z. 而 A 的第 1, 2, …, f 列依次对应于 Y 中元素 y_{j_1}, y_{j_2}, …, y_{j_f}. 由于 L 是 $B(G)$ 的最小线覆盖, 所以对于 k, $1\leqslant k\leqslant f$, 必有某个 $l\neq 1, 2, \cdots, e$, 使得 $b_{lk}=1$, 即对于元素 y_{j_k}, 必有 $x\notin Z$, 使得 x 与 y_{j_k} 相邻, 也即 $y_{j_k}\in N(X-Z)$. 于是

$$|Z|=e, \quad |N(X-Z)|=f.$$

而且

$$\begin{aligned} \lambda(B(G)) &= e+f=|Z\cup N(X-Z)| \\ &= |Z|+|N(X-Z)| \end{aligned}$$

这就证明,

$$\lambda(B(G))=\min_{Z\subseteq X}\{|Z|+|N(X-Z)|\}.$$

记 $X-Z=S$, 则

$$\begin{aligned} \nu(G)=\tau(G) &= \lambda(B(G)) \\ &= \min_{Z\subseteq X}\{|Z|+|N(X-Z)|\} \\ &= \min_{S\subseteq X}\{|X|-|S|+|N(S)|\} \end{aligned}$$

$= |X| - \max_{S \subseteq X} \{|S| - |N(S)|\}.$

10. 3. 29　设 G 是 $m \times n$ 二部图，X，Y 是图 G 的顶点集合 $V(G)$ 的二部分划，$|X| = m$，$|Y| = n$，$m \leqslant n$，$B(G) = [b_{ij}]$ 是图 G 的简化邻接矩阵．证明：图 G 的饱和 X 中所有顶点的匹配个数等于 $B(G)$ 的积和式 $\mathrm{per}B(G)$．

证　图 G 的所有饱和 X 中每个顶点的匹配集合记作 (M)．矩阵 $B(G)$ 中所有恰含 m 个 1 的线无关 1 组的集合记作 (L)．设 $M = \{x_1y_{j_1}, x_2y_{j_2}, \cdots, x_my_{j_m}\} \in (M)$，则 $b_{kj_k} = 1$，$k = 1, 2, \cdots, m$．因此 $L = \{b_{1j_1} = 1, b_{2j_2} = 1, \cdots, b_{mj_m}\} \in (L)$．定义 (M) 到 (L) 的映射 φ 如下：对任意 $M = \{x_ky_{j_k} | k = 1, 2, \cdots, m\} \in (M)$，令 $\varphi(M) = L = \{b_{kj_k} | k = 1, 2, \cdots, m\}$．设 $M_1 = \{x_ky_{j_k} | k = 1, 2, \cdots, m\}$，$M_2 = \{x_ky_{l_k} | k = 1, 2, \cdots, m\} \in (M)$，$M_1 \neq M_2$，则 $j_1j_2\cdots j_m$ 和 $l_1l_2\cdots l_m$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的两个不同 m 排列．于是 $L_1 = \{b_{kj_k} | k = 1, 2, \cdots, m\}$ 和 $L_2 = \{b_{kl_k} | k = 1, 2, \cdots, m\}$ 是矩阵 $B(G)$ 的两个不同的线无关 1 组．因此 $\varphi(M_1) = L_1 \neq L_2 = \varphi(M_2)$．即 φ 是单射．反之设 $L = \{b_{kj_k} = 1 | k = 1, 2, \cdots, m\} \in (L)$，则 $j_1j_2\cdots j_m$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的 m 排列．因此 $M = \{x_ky_{j_k} | k = 1, 2, \cdots, m\} \in (M)$，且 $\varphi(M) = L$．所以 φ 是 (M) 到 (L) 上的双射．于是有 $|(M)| = |(L)|$．

现在证明，$|(L)| = \mathrm{per}B(G)$．由积和式的定义，有

$$\mathrm{per}B(G) = \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqslant n} \mathrm{per}B(G)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{pmatrix},$$

其中 $B(G)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{pmatrix}$ 是矩阵 $B(G)$ 的第 $1, 2, \cdots, m$ 行和第 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 列构成的子矩阵，而 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 是满足 $1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqslant n$ 的 m 个整数．而

$$\mathrm{per}B(G)\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ l_1 & l_2 & \cdots & l_m \end{pmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_m} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{mj_m},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_m$ 是 $l_1l_2\cdots l_m$ 的排列．因此

$$\mathrm{per}B(G) = \sum_{1 \leqslant l_1 < l_2 < \cdots < l_m \leqslant n} \sum_{j_1j_2\cdots j_m} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{mj_m} = \sum_{\substack{1,2,\cdots,n \\ \text{的}m\text{排列}j_1j_2\cdots j_m}} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{mj_m}.$$

设 $L = \{b_{kj_k} = 1 | k = 1, 2, \cdots, m\} \in (L)$，则 $j_1j_2\cdots j_m$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的 m 排列，而且 $b_{1j_1} = b_{2j_2} = \cdots = b_{mj_m} = 1$．因此 $b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{mj_m} = 1$，所以对 (L) 中一个线无关 1 组 L，它对 $\mathrm{per}B(G)$ 的贡献是 1．易知，对 (L) 中不同的线无关 1 组 L_1 和 L_2，它们对 $\mathrm{per}B(G)$ 的贡献是 $\mathrm{per}B(G)$ 中不同的项所确定的 1．反之对 $\mathrm{per}B(G)$ 中一个 $1 = b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{mj_m}$，易知它是由 (L) 中线无关 1 组 $\{b_{kj_k} = 1 | k = 1, 2, \cdots, m\}$ 所贡献的．因此 $\mathrm{per}B(G)$ 中等于 1 的项的个数为 $|(L)|$．从而有 $|(L)| = \mathrm{per}B(G)$．

10. 3. 30　求 $n \times n$ 二部完全图 $K_{n,n}$ 的完美匹配个数 $f(n)$．

解　设 X，Y 是图 $K_{n,n}$ 的二部分划，$|X| = |Y| = n$．易知图 $K_{n,n}$ 的饱和 X 中所有顶点的匹配即是图 $K_{n,n}$ 的完美匹配．所以 $f(n)$ 是图 $K_{n,n}$ 的饱和 X 中每个顶点的匹配个数．由 10. 3. 29，有

$$f(n) = \mathrm{per}B(K_{n,n}).$$

显然图 $K_{n,n}$ 的简化邻接矩阵 $B(K_{n,n}) = J_n$，即 n 阶全 1 方阵．因此

$$f(n) = \mathrm{per}J_n = \mathrm{per}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots b_{nj_n},$$

其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的排列．而对任意 $j_1j_2\cdots j_n$ 有，$b_{1j_1} = b_{2j_2} = \cdots = b_{nj_n} = 1$，所以

$$f(n) = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} 1 = n!.$$

10. 3. 31　设 $A = [a_{ij}]$ 是 $m \times n$ $(0, 1)$ 矩阵，S 是矩阵 A 中的一组 1，使得 A 的每条线至少覆盖 S 中一个 1，所有这类 1 组 S 中 1 的最小个数称为矩阵 A 的余项秩（co-term rank），记作 $\rho^*(A)$．已知

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

试求它们的余项秩．

解　记 $A_1 = [a_{ij}^{(1)}]$．取 $S = \{a_{11}^{(1)} = 1, a_{22}^{(1)} = 1, a_{33}^{(1)} = 1\}$．则 S 中的 1 覆盖 A_1 中所有线．而且 S

是所有这类 1 组中含 1 的个数之最小值. 因此 $\rho^*(A_1)=3$.

记 $A_2=[a_{ij}^{(2)}]$. 取 $S=\{a_{12}^{(2)}=1, a_{13}^{(2)}=1, a_{21}^{(2)}=1, a_{31}^{(2)}=1\}$. 则 S 是覆盖 A_2 中所有线的一个 1 组, 且所含 1 的个数为最小. 因此 $\rho^*(A_2)=4$.

记 $A_3=[a_{ij}^{(3)}]$. 取 $S=\{a_{11}^{(3)}=1, a_{23}^{(3)}=1, a_{32}^{(3)}=1\}$. 则 S 是覆盖 A_3 所有线的一个 1 组, 且所含 1 的个数为最小. 因此 $\rho^*(A_3)=3$.

注 和 A 的项秩 $\rho(A)$ 和线秩 $\lambda(A)$ 一样, 矩阵 A 的余项秩 $\rho^*(A)$ 也是矩阵 A 在置换相抵下的一个不变量. 另外, 对于含有零线的 $m\times n$ (0, 1)矩阵 A, 不存在这样的 1 组 S, 它覆盖 A 的所有线, 所以余项秩 $\rho^*(A)$ 是不存在的. 因此余项秩是对不含零线的矩阵而言的.

10. 3. 32 求 $m\times n$ 全 1 矩阵 $J_{m,n}$ 的余项秩 $\rho^*(J_{m,n})$.

解 记 $J_{m,n}=[a_{ij}]$. 设 $m\leqslant n$. 取 $S=\{a_{ii}=1, a_{1j}=1 \mid 1\leqslant i\leqslant m, m+1\leqslant j\leqslant n\}$. 易知 S 是覆盖矩阵 $J_{m,n}$ 的 1 组, 而且是所含 1 的个数为最小. 所以 $\rho^*(J_{m,n})=n$. 同理, 当 $m>n$ 时, $\rho^*(J_{m,n})=m$. 因此 $\rho^*(J_{m,n})=\max\{m, n\}$.

10. 3. 33 设 $A=[a_{ij}]$ 是不含零线的 $m\times n$ (0, 1) 矩阵, $A\neq J_{m,n}$. 证明:

$$\rho^*(A)=\max\{r+s \mid \exists A \text{ 中 } r\times s \text{ 零子矩阵}\}.$$

证 设 $B=O_{r\times s}$ 是矩阵 A 中一个 $r\times s$ 零子矩阵. 将矩阵 A 的行或列作调换, 使得矩阵 A 化为如下形式:

$$C=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & O_{r\times s}\end{bmatrix}.$$

设 S 是 A 中这样一组 1, 它覆盖 A 的所有线. 注意 S 中的 1 如果覆盖矩阵 $O_{r\times s}$ 的行, 则不能覆盖 $O_{r\times s}$ 的列, 反之亦然. 因此 S 中 1 的个数至少是 $r+s$. 从而 $\rho^*(A)\geqslant r+s$. 于是有

$$\rho^*(A)\geqslant\max\{r+s \mid \exists A \text{ 中 } r\times s \text{ 零子矩阵}\}.$$

反之设 B 是 A 中 $r\times s$ 零子矩阵 $O_{r\times s}$, 而且 $r+s$ 是 A 中所有 $r\times s$ 零子矩阵的最大线数. 则矩阵 A 经行或列的置换可以化为如下矩阵:

$$C=\begin{matrix} & \begin{matrix} n-s & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} m-r \\ r \end{matrix} & \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & O_{r\times s}\end{bmatrix} \end{matrix}.$$

由于 $O_{r\times s}$ 是矩阵 A 中线数最大的零子矩阵, 所以 $\rho(C_{12})=m-r$, $\rho(C_{21})=n-s$. 而一个 (0, 1) 矩阵的项秩小于或等于它的行数与列数, 所以 $\rho(C_{12})=m-r\leqslant s$, $\rho(C_{21})=n-s\leqslant r$. 又 $O_{r\times s}$ 是矩阵 A 中线数最大的零子矩阵, 所以

$$\rho(A)=\rho(C)=\rho(C_{12})+\rho(C_{21})$$
$$=m-r+n-s=m+n-(r+s).$$

这说明, 在 C_{12} 中可以选取一个线无关 1 组, 它们覆盖 C_{12} 的所有 $m-r$ 个行. 由于矩阵 A 不含零列, 所以可以在 C_{12} 中余下的 $s-(m-r)$ 个列上各选一个 1. 于是 C_{12} 中含有由 s 个 1 组成的一组 1, 它们覆盖 C_{12} 的所有线. 同理 C_{21} 中含有由 r 个 1 组成的一组 1, 它们覆盖 C_{21} 的所有线. 从而矩阵 C 具有 $r+s$ 个 1, 它们覆盖 C 的所有线. 于是 $\rho^*(A)=\rho^*(C)\leqslant r+s=\max\{r+s \mid \exists A \text{ 的 } r\times s \text{ 零子矩阵}\}$. 这就证明 10. 3. 33 成立.

10. 3. 34 设 $A=[a_{ij}]$ 是不含零线的 $m\times n$ (0, 1) 矩阵. 证明:

$$\rho^*(A)+\rho(A)=m+n.$$

证 如果 $A=J_{m,n}$, $m\times n$ 全 1 矩阵. 则由 10. 3. 32, $\rho^*(A)=\max\{m, n\}$. 另一方面, 易知 $\rho(A)=\min\{m, n\}$. 所以

$$\rho^*(A)+\rho(A)=m+n.$$

设 $A\neq J_{m,n}$. 则由 10. 3. 33, $\rho^*(A)=\max\{r+s \mid \exists A \text{ 的 } r\times s \text{ 零子矩阵}\}$. 设 $O_{r\times s}$ 是 A 中最大线数的 $r\times s$ 零子矩阵. 则 A 置换相抵于如下矩阵:

$$B=\begin{matrix} & \begin{matrix} n-s & s \end{matrix} \\ \begin{matrix} m-r \\ r \end{matrix} & \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & O_{r\times s}\end{bmatrix} \end{matrix}.$$

由于 $O_{r\times s}$ 是 A 的最大线数的零子矩阵, 所以 $\rho(B_{12})=m-r$, $\rho(B_{21})=n-s$, 且 $\rho(A)=\rho(B)=\rho(B_{12})+\rho(B_{21})=m-r+n-s=m+n-(r+s)$. 于是

$$\rho(A)=m+n-\rho^*(A).$$

10. 3. 35 设 S 是 n 阶图 G 的一个边集. 如果对图 G 中每个顶点 x, 必有 S 中一条边 e, 使得 e 和 x 关联. 则 S 称为 G 的一个边覆盖. 图 G 中边数最小的边覆盖称为 G 的最小边覆盖, 它所含的边数称为 G 的最小边覆盖数, 记作 $\varepsilon(G)$. 设 T 是图 G 的一个顶点集, 如果 T 中任意两顶点都不相邻, 则 T 称为图 G 的独立点集. 图 G 中顶点数最大的独立点集称为 G 的最大独立点集, 它所含的顶点数称为图 G 的独立点数, 记作 $\alpha(G)$. 证明: 如果图 G 不含孤立点, 则

$$\varepsilon(G)=\alpha(G).$$

证 设 S 是图 G 的最小边覆盖, 而 T 是图 G 的一个独立点集. 不妨设 $T=\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$,

图 G 的顶点集合 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_m, v_{m+1}, \cdots, v_n\}$. 则图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 为

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ m \\ n-m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} m & n-m \end{array} \\ \begin{bmatrix} O_m & B_{12} \\ B_{12}^t & B_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

对于 $A(G)$ 的第 i 行, $1\leqslant i\leqslant m$, 由于 S 是边覆盖, 所以 S 中必有一条边覆盖顶点 v_i, 也即 B_{12} 的第 i 行上必有一个1. 令 $i=1, 2, \cdots, m$, 则 S 中至少含有 m 条边, 它们覆盖图 G 的顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_m$. 也即 B_{12} 中有一组1, 它至少含有 m 个1, 且覆盖 B_{12} 的所有的行. 因此

$$\varepsilon(G)=|S|\geqslant m.$$

从而

$$\varepsilon(G)\geqslant\alpha(G).$$

其次设 T 是图 G 的最大独立点集. 不妨设 $T=\{v_1, v_2, \cdots, v_a\}$, $a=\alpha(G)$, 且 $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_a, v_{a+1}, \cdots, v_n\}$. 则 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 为

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ \alpha \\ n-\alpha \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & n-\alpha \end{array} \\ \begin{bmatrix} O_a & B_{12} \\ B_{12}^t & B_{11} \end{bmatrix} \end{array}.$$

由于 T 是最大的独立点集, 所以 $\rho(B_{12})=\rho(B_{12}^t)=n-\alpha$, 而且 $\rho(A(G))=\rho(B_{12})+\rho(B_{12}^t)=2(n-\alpha)$. 由于 $\rho(B_{12})=n-\alpha\leqslant\alpha$, 且 B_{12} 不含零行 (因为图 G 不含孤立点), 所以可以从 B_{12} 的前 $n-\alpha$ 行中取到一个由 $n-\alpha$ 个1组成的线无关1组, 再从 B_{12} 余下的 $\alpha-(n-\alpha)$ 个行中各取1个1, 即得到 B_{12} 中一组1, 它含 a 个1且覆盖 B_{12} 的所有的线. 这组1对应于图 G 的一组边 S, 它覆盖图 G 的所有顶点. 因此

$$\alpha(G)=a=|S|\geqslant\varepsilon(G).$$

这就证明了 $\alpha(G)=\varepsilon(G)$.

注 无孤立点的 n 阶简单图 G 的所有边覆盖的集合记作 (E). 设 S 是图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 的一组1, 使得 S 覆盖 $A(G)$ 的所有线. 如此之 S 的集合记作 (S). 易知对任意 $E\in(E)$, E 可确定 $A(G)$ 中一个1组 $S\in(S)$, 而不同的边覆盖 E 所确定的 $A(G)$ 中的1组 S 是不同的. 反之对任意一个1组 S 也可确定一个边覆盖 $E\in(E)$. 即是说, 边覆盖集合 (E) 与 (S) 之间存在一个双射. 所以图 G 的最小边覆盖数 $\varepsilon(G)$ 即是邻接矩阵 $A(G)$ 的余项秩 $\rho^*(A(G))$. 而图 G 中所有独立点集的集合记作 (V), 邻接矩阵 $A(G)$ 中所有零主子矩阵的集合记作 (B). 易知 (V) 和 (B) 之间存在一个双射. 所以图 G 的独立点数 $\alpha(G)$ 即是邻接矩阵 $A(G)$ 的最大零主子矩阵的阶数. 由于无孤立点的 n 阶简单图 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 是一个 n 阶不含零线的主对角元全为零的对称 (0, 1)矩阵, 所以 10. 3. 35的矩阵形式是: 设 A 是一个不含零线的主对角元的 n 阶 (0, 1) 对称矩阵, 则

$$\rho^*(A)=\max\{k\mid\exists A \text{ 的 } k \text{ 阶零主子矩阵}\}.$$

这显然是 10. 3. 33 的特殊情形.

10. 3. 36　设 G 是不含孤立点的 n 阶简单图. 证明:

$$\nu(G)+\varepsilon(G)=n.$$

证　由 10. 3. 35可知, 只需证明, $\nu(G)+\alpha(G)=n$. 设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_a\}$ 是图 G 的最大独立点集, $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_a, v_{a+1}, \cdots, v_n\}$ 是 G 的顶点集合, 则 G 的邻接矩阵 $A(G)$ 具有如下形式:

$$A(G)=\begin{array}{c} \\ \alpha \\ n-\alpha \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \alpha & n-\alpha \end{array} \\ \begin{bmatrix} O_a & A_{12} \\ A_{12}^t & A_{22} \end{bmatrix} \end{array}.$$

由于 V 是最大独立点集, 所以 $\alpha\times(n-\alpha)$ 子矩阵 A_{12} 不含零列, 因此 $\rho(A_{12})=n-\alpha$. 于是 A_{12} 含有一个由 $n-\alpha$ 个1组成的线无关1组 S. 由于 $A(G)$ 是对称的, 所以 $\rho(A_{12}^t)=n-\alpha$, 且 A_{12}^t 含有一个与 S 对称的1组 S'. 而 S 与 S' 一起决定的图 G 的边集合即是 G 的一个匹配. 因此 $\nu(G)\geqslant n-\alpha$. 即有 $\nu(G)+\alpha(G)\geqslant n$.

另一方面, 设 E 是 G 的最大匹配, $|E|=\nu(G)=\nu$. 此时可将图 G 的顶点重排, 使得邻接矩阵 $A(G)$ 具有如下形式:

$$A(G)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12}^t & A_{22} & A_{23} \\ A_{13}^t & A_{23}^t & A_{33} \end{bmatrix},$$

其中 A_{13} 是 ν 阶主对角元全为1的子矩阵. 因此 $A(G)$ 中零主子矩阵的阶数至多是 $n-\nu$. 所以图 G 中独立点集的点数 $a\leqslant n-\nu(G)$. 从而 $\alpha(G)\leqslant n-\nu(G)$. 即有 $\nu(G)+\alpha(G)\leqslant n$. 所以 $\nu(G)+\alpha(G)=n$.

10. 3. 37　设 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 是 n 阶完全图 K_n 的子图, 每个 G_i 都是完全二部图, 任意两个 G_i 和 G_j 是边不交的, $i\neq j$. 而且 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 的边集合之并集为 K_n 的边集合 $E(G)$, 则 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 称为完全图 K_n 的一个二部完全图分解. 证明: 如果完全图 K_n 具有二部完全图分解 $G_1, G_2, \cdots, G_r$, 则

$$r\geqslant n-1.$$

证 易知 K_n 的邻接矩阵 $A(K_n)=J_n-I_n$，其中 J_n 和 I_n 分别是 n 阶全 1 方阵和单位方阵. 设 G_i 在K_n 中的支撑子图为 G_i'，而 G_i' 的邻接矩阵为 A_i'. 由于 $G_1, G_2, \cdots, G_r$ 是 K_n 的边不交的二部完全图分解，所以

$$A_1'+A_2'+\cdots+A_r'=J_n-I_n.$$

注意，G_i 是二部完全图，G_i'是 G_i 在 K_n 中的支撑子图，所以 A_i'置换相抵于如下矩阵：

$$\begin{bmatrix} 0 & J_{m_i\times n_i} & 0 \\ J_{n_i\times m_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

其中 $J_{m_i\times n_i}$是$m_i\times n_i$全 1 矩阵. 易知

$$\operatorname{rank}A_i'=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & J_{m_i\times n_i} & 0 \\ J_{n_i\times m_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$=2.$$

设 A_i''是将A_i'中主对角线以上的 1 换为 0 得到的矩阵. 则

$$\operatorname{rank}A_i''=1.$$

记 $Q_i=A_i'-A_i''$，则 Q_i 是斜对称的，即 $Q_i^t=-Q_i$. 记 $Q=Q_1+Q_2+\cdots+Q_r$，则

$$\begin{aligned} I+Q &= I+Q_1+Q_2+\cdots+Q_r \\ &= I+A_1'+A_2'+\cdots+A_r' \\ &\quad -2(A_1''+A_2''+\cdots+A_r'') \\ &= J_n-2(A_1''+A_2''+\cdots+A_r''), \end{aligned}$$
$$Q^t=-Q.$$

而

$$\begin{aligned}(I+Q)(I+Q)^t &= I+Q+Q^t+QQ^t \\ &= I+QQ^t\end{aligned}$$

是正定的，所以

$$\operatorname{rank}(I+Q)=\operatorname{rank}(I+Q)(I+Q)^t=n.$$

另一方面，

$$\begin{aligned} n &= \operatorname{rank}(I+Q) \\ &= \operatorname{rank}(J_n-2(A_1''+A_2''+\cdots+A_r'')) \\ &\leqslant \operatorname{rank}J_n+\sum_{i=1}^{r}\operatorname{rank}(2A_i'')=1+r. \end{aligned}$$

注 r 的下界 $n-1$ 是可以达到的. 例如图 10. 4 中 $G_1, G_2, \cdots, G_{n-1}$是 n 阶完全图 K_n 的一个二部完全图分解.

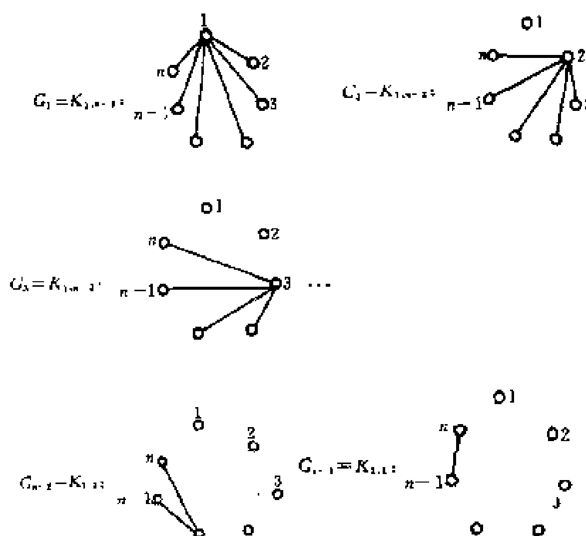


图 10. 4

10. 3. 38 设 G 是 n 阶简单图，其顶点为 $v_1, v_2, \cdots, v_n$，其边为 $e_1, e_2, \cdots, e_m$. 对图 G 的每条边都指定一个方向，得到的图称为图 G 的定向图，仍记作 G. 对于定向图 G，其关联矩阵为 $B=[b_{ij}]$，其中

$$b_{ij}=\begin{cases}1, & v_j\ \text{是边}\ e_i\ \text{的始点}, \\ -1, & v_j\ \text{是边}\ e_i\ \text{的终点}, \\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

易知 G 的定向关联矩阵 B 是一个 $m\times n$ $(-1, 0, 1)$ 矩阵，其各个行和均为零. 设 A 是图 G 的邻接矩阵，证明：

$$B^tB=D-A,$$

其中 $D=\operatorname{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，而 d_i 是顶点 v_i 的度，$i=1, 2, \cdots, n$.

证 记 $C=B^tB=[c_{ij}]$，则

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{m}b_{ki}b_{kj}.$$

注意，当 $i\neq j$ 时，如果 $b_{ki}b_{kj}\neq 0$，则 $b_{ki}\neq 0$，$b_{kj}\neq 0$. 因此 v_i 和v_j 是边e_k 的两个端点，所以 $b_{ki}b_{kj}=-1$. 由于 G 是简单图，所以，当 $i\neq j$ 时，使 $b_{ki}b_{kj}\neq 0$ 的 k 是唯一的. 从而 $c_{ij}=-1=-a_{ij}$. 如果对任意 k，$1\leqslant k\leqslant m$，$b_{ki}b_{kj}=0$，则 $c_{ij}=0$，且顶点 v_i 和v_j 不相邻，所以 $a_{ij}=0$. 因此 $c_{ij}=-a_{ij}$. 当 $i=j$ 时，如果 $b_{ki}b_{ki}\neq 0$，则 $b_{ki}^2=1$，因此 c_{ii}是和顶点 v_i 关联的边数. 所以，$c_{ii}=d_i$. 由于 G 是简单图，所以 $a_{ii}=0$. 于是 $c_{ii}=d_i-a_{ii}$. 因此 10. 3. 38 成立.

注 称 $L(G)=D-A$ 为图 G 的 Laplace 矩阵. 10. 3. 38 表明，图 G 的定向关联矩阵 B 和邻接矩阵 A 之间存在关系：$B^tB=D-A$. 这一关系与图 G

的定向无关．故图 G 的 Laplace 矩阵 $L(G)$ 与图 G 的定向无关．

10．3．39　设 G 是 n 阶简单图，它有 k 个连通分支，$B=[b_{ij}]$ 是图 G 的定向关联矩阵．证明：

$$\mathrm{rank}B=n-k.$$

证　首先考虑 G 连通的情形．记 $B=[\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]$，其中 β_j 是 m 维 $(-1, 0, 1)$ 列向量．注意 B 的各个行和均为零，因此

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n=0.$$

这表明，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 线性相关．因此 $\mathrm{rank}B\leqslant n-1$．设 $\mathrm{rank}B=r\leqslant n-2$，则 B 的列向量的极大线性无关组恰有 r 个向量．不妨设为 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$，而 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r, \beta_{r+1}$ 线性相关．于是存在一组不全为零的数 $b_1, b_2, \cdots, b_{r+1}$，使得

$$b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_r\beta_r+b_{r+1}\beta_{r+1}=0. \quad ④$$

设 $b_k\neq 0$．由于图 G 连通，所以 v_k 不是孤立点，因此

$$\beta_k=\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{bmatrix}$$

中分量不全为零．设 $b_{ik}\neq 0$．即设边 e_i 的一个端点为 v_k．由于 G 是简单图，所以 B 的第 i 行上恰有一个元素 $b_{il}\neq 0$，使得 $b_{ik}+b_{il}=0$．l 一定满足 $1\leqslant l\leqslant r+1$，否则式④不成立．由于 $b_{ik}b_{il}=-1$，所以由式④得到，$b_l=b_k$．这表明，$b_1, b_2, \cdots, b_{r+1}$ 都相等．因此式④化为

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{r+1}=0.$$

上式的图论意义是，图 G 中顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_{r+1}$ 与 $v_{r+2}, \cdots, v_n$ 之间不连通．与图 G 连通的假设相矛盾．所以 $\mathrm{rank}B=n-1$．

其次设 G 有 k 个连通分支是 $G_1, G_2, \cdots, G_k$．将分支 G_i 的顶点记为 $v_{i1}, v_{i2}, \cdots, v_{in_i}$，$i=1, 2, \cdots, k$，则 $V(G)=\{v_{11}, v_{12}, \cdots, v_{1n_1}, v_{21}, v_{22}, \cdots, v_{2n_2}, \cdots, v_{k1}, v_{k2}, \cdots, v_{kn_k}\}$ 是 G 的顶点集合．再将分支 G_i 的边记为 $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{im_i}$，$i=1, 2, \cdots, k$　则 $E(G)=\{e_{11}, e_{12}, \cdots, e_{1m_1}, e_{21}, e_{22}, \cdots, e_{2m_2}, \cdots, e_{k1}, e_{k2}, \cdots, e_{km_k}\}$ 是 G 的边集合．在图 G 的顶点集合 $V(G)$ 与边集合 $E(G)$ 的这种记法下，图 G 的定向关联矩阵具有如下形式：

$$B'=\begin{bmatrix} B(G_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B(G_2) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & \cdots & 0 & B(G_k) \end{bmatrix},$$

其中 $B(G_i)$ 是图 G 的连通分支 G_i 的定向关联矩阵．易知，B 和 B' 是置换相抵的．因此

$$\mathrm{rank}B=\mathrm{rank}B'=\mathrm{rank}B(G_1)+\mathrm{rank}B(G_2)+\cdots+\mathrm{rank}B(G_k).$$

由前面的证明有，$\mathrm{rank}B(G_i)=n_i-1$．所以

$$\mathrm{rank}B=(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_k-1)=(n_1+n_2+\cdots+n_k)-k=n-k.$$

10．3．40　设 $L(G)$ 是 n 阶简单图 G 的 Laplace 矩阵，$\mathrm{adj}L(G)$ 是 $L(G)$ 的伴随矩阵．证明：存在常数 c，使得 $\mathrm{adj}L(G)=cJ_n$，其中 J_n 是 n 阶全 1 方阵．

证　设 B 是图 G 的定向关联矩阵，则由 10．3．38，$L(G)=B^tB=D-A$．其中 A 是图 G 的邻接矩阵，而 $D=\mathrm{diag}(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_i$ 是顶点 v_i 的度，$i=1, 2, \cdots, n$．如果图 G 不连通，则由 10．3．39，

$$\mathrm{rank}L(G)=\mathrm{rank}B\leqslant n-2.$$

这说明，$L(G)$ 中所有 $n-1$ 阶子式都是零，因此其伴随矩阵 $\mathrm{adj}L(G)=O_n=0\cdot J_n$．因此当图 G 不连通时结论成立．

设图 G 连通，则由 10．3．39，$\mathrm{rank}L(G)=n-1<n$．所以 $\det L(G)=0$．由伴随矩阵的性质可知，$L(G)\,\mathrm{adj}L(G)=(\det L(G))I_n=0$．记 $\mathrm{adj}L(G)=[\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n]$，其中 α_i 是 n 维实的列向量．由 $L(G)\,\mathrm{adj}L(G)=O_n$ 得到

$$L(G)\beta_i=0, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

这说明，β_i 是线性方程组 $L(G)x=0$ 的解．由于系数矩阵 $L(G)$ 的秩 $\mathrm{rank}L(G)=n-1$，所以 $L(G)x=0$ 的解空间是一维的．注意，$L(G)=D-A$，所以 $L(G)$ 的各个行和均为 0，因此 n 维全 1 列向量 ε 是方程 $L(G)x=0$ 的非零解．于是 $\beta_i=c_i\varepsilon$，c_i 为实数，$i=1, 2, \cdots, n$，于是

$$\mathrm{adj}L(G)=[c_1\varepsilon, c_2\varepsilon, \cdots, c_n\varepsilon]=J_n\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}.$$

因为 $L(G)=B^tB$，所以 $L(G)$ 是对称的，从而其伴随矩阵 $\mathrm{adj}L(G)$ 也是对称的．因此

$$(\mathrm{adj}L(G))^t=\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}J_n$$

$$-J_n\begin{bmatrix} c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}$$

$$=\mathrm{adj}L\ (G).$$

比较上式两端 (i, j) 元素即得 $c_i=c_j$，$1\leqslant i$，$j\leqslant n$。这就证明，当图 G 连通时，10.3.40 成立。

10.3.41 设 B 是 n 阶简单图 G 的定向关联矩阵，U 是图 G 的 $n-1$ 条边的集合。设 B_U 是 B 中由相应于 U 的 $n-1$ 行与取自 B 的 $n-1$ 个列的 $n-1$ 阶子矩阵，U 中 $n-1$ 条边在图 G 中导出的子图记作 $\langle U\rangle$。证明：$n-1$ 阶矩阵 B_U 可逆的充要条件是 $\langle U\rangle$ 是图 G 中的一个树。

证 必要性。设 B_U 可逆，则 $\mathrm{rank}B_U=n-1$。定向关联矩阵 B 中相应于 U 的 $n-1$ 个行组成的 $(n-1)\times n$ 子矩阵记作 B_1。则 B_1 是导出子图 $\langle U\rangle$ 的定向关联矩阵。由于 $\mathrm{rank}B_1=n-1$（B_U 是 B_1 的一个 $n-1$ 阶子矩阵），所以由 10.3.39，$\langle U\rangle$ 是连通的，且恰有 $n-1$ 条边，从而 $\langle U\rangle$ 是一个树。

充分性。设 $\langle U\rangle$ 是一个树，B_U 是 $\langle U\rangle$ 的定向关联矩阵，它是由 G 的定向关联矩阵 B 的相应于 U 的 $n-1$ 个行组成的 $(n-1)\times n$ 子矩阵。如果 B_U 不可逆，则 B_U 的 $n-1$ 个列 β_1，β_2，…，β_{n-1} 线性相关，即存在不全为零的数 b_1，b_2，…，b_{n-1}，使得

$$b_1\beta_1+b_2\beta_2+\cdots+b_{n-1}\beta_{n-1}=0.$$

与 10.3.39 的证明相仿，可得

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_{n-1}=0.$$

从而 $\langle U\rangle$ 不连通，与 $\langle U\rangle$ 是树相矛盾。所以 B_U 是可逆的。

10.3.42（矩阵树定理） 设 G 是 n 阶简单连通图。如果 G 的子图 T 既是 G 的支撑子图又是一个树，则 T 称为图 G 的支撑树。图 G 的支撑树的个数称为图 G 的复杂度，记作 $c(G)$。证明：

$$\mathrm{adj}L\ (G)=c\ (G)\ J_n,$$

其中 $L(G)$ 是图 G 的 Laplace 矩阵。

证 设 B 是图 G 的定向关联矩阵。将 B 分块为 $B=[B_0, \beta]$，其中 β 是列向量。则

$$L\ (G)=B'B=\begin{bmatrix} B_0' \\ \beta' \end{bmatrix}[B_0,\ \beta]$$

$$=\begin{bmatrix} B_0'B_0 & B_0'\beta \\ \beta'B_0 & \beta'\beta \end{bmatrix}.$$

因此 $L(G)$ 中元素 $\beta'\beta$ 的余子矩阵为 $B_0'B_0$。记 $\mathrm{adj}L(G)=[f_{ij}]$，则 $f_{nn}=\det B_0'B_0$。由 10.3.24 可知，$f_{ij}=c$，所以只需证明 $f_{nn}=\det B_0'B_0=c\ (G)$。由 Cauchy-Binet 公式（例如见李炯生、查建国著《线性代数》，中国科学技术大学出版社，1989 年版第 138 页）得到

$$f_{nn}=\det B_0'B_0=\sum_{(U)}\det B_U'\cdot\det B_U,$$

其中 (U) 表示相应于图 G 中 $n-1$ 条边 U 的下标的集合。由 10.3.41，$\det B_U\neq 0$ 的充要条件是 $\langle U\rangle$ 是图 G 的支撑树。注意，当 $\det B_U\neq 0$ 时，由于 B_U 的各行上至多有两个非零元，且当恰有两个非零时必是一个为 1，另一个为 -1，因此 $\det B_U=\pm 1$。于是

$$f_{nn}=\sum_{(U)}1,$$

其中求和号对图 G 中所有支撑树求和。因而有 $f_{nn}=c\ (G)$。

注 矩阵树定理是 1847 年 Kirchhoff 证明的。

10.3.43（Temperley 定理） 设 G 是 n 阶简单连通图，$L(G)$ 是图 G 的 Laplace 矩阵，$c(G)$ 是图 G 的复杂度。证明：

$$c\ (G)=\frac{1}{n^2}\det\ (J_n+L\ (G)).$$

证 由于 $L(G)=D-A$，其中 A 是图 G 的邻接矩阵，$D=\mathrm{diag}\ (d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_i$ 是顶点 v_i 的度，$i=1, 2, \cdots, n$，所以 $L(G)$ 的各个行和都是零。因此

$$L\ (G)\ J_n=0.$$

另外易知

$$J_n^2=nJ_n.$$

所以

$$(J_n+L\ (G))\ (nI_n-J_n)=nL\ (G).$$

两边取伴随，得到

$$\mathrm{adj}\ (nI_n-J_n)\ \mathrm{adj}\ (J_n+L\ (G))$$
$$=n^{n-1}\mathrm{adj}L\ (G).$$

由 10.3.42 以及 $\mathrm{adj}\ (nI_n-J_n)=n^{n-2}J_n$ 得到

$$n^{n-2}J_n\mathrm{adj}\ (J_n+L\ (G))=n^{n-1}c\ (G)\ J_n.$$

两端同时右乘矩阵 $J_n+L(G)$，则

$$n^{n-2}J_n\ (\mathrm{adj}\ (J_n+L\ (G)))\ (J_n+L\ (G))$$
$$=n^{n-1}c\ (G)\ J_n\ (J_n+L\ (G)).$$

由于 $L(G)$ 的各个列和都是零，所以上式化为

$$n^{n-2}\ (\det\ (J_n+L\ (G)))\ J_n=n^nc\ (G)\ J_n.$$

比较两端 (i, j) 元素，即得

$$\frac{1}{n^2}\det\ (J_n+L\ (G))=c\ (G).$$

10.3.44（Cayley） 证明：n 阶完全图 K_n 的支撑树的个数为 $c\ (K_n)=n^{n-2}$。

证 K_n 的邻接矩阵为 $A=J_n-I_n$。又 K_n 是 $n-1$ 正则的，所以 $D=(n-1)\ I_n$。因此 K_n 的 Laplace

矩阵为

$$L(G)=D-A=nI_n-J_n.$$

由 10.3.43，

$$c(G)=\frac{1}{n^2}\det(J_n+L(G))$$
$$=\frac{1}{n^2}\det(nI_n)=n^{n-2}.$$

§10.4 度分析法

设 G 是 n 阶简单图，其顶点集合记作 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. 对于 $v\in V$，图 G 中所有与 v 相关联的边的数目称为 v 的度，记作 $d(v)$. 记 $d_i=d(v_i)$，$i=1, 2, \cdots, n$. 由于图 G 的结构与图 G 中顶点的编号无关，因此可设 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$. 则 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 称为图 G 的度序列，其中 d_1 和 d_n 分别称为图 G 的最大度和最小度，并分别记作 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$. 设 H 是 n 阶简单图，其度序列为 $\rho=(p_1, p_2, \cdots, p_n)$. 易知如果图 G 和 H 同构，则 $\pi=\rho$. 这说明，图的度序列是图的同构不变量. 反之如果图 G 和 H 具有相同的度序列，则图 G 和 H 不一定同构. 因此图的度序列不是图同构的全系不变量. 由于图的度序列是图的同构不变量，因此它必定反映图结构的某些内在性质. 因此图的度序列，或简单地说，图的度是论证有关图的命题以及解有关图的问题的一种重要不变量. 在论证图论命题和解图的问题时，可以从图的度入手，分析图的度与图结构的联系，从而给出有关命题的证明，或者给出图问题的解，这就是度分析法. 它是一种行之有效的方法，在整个图论中，都可以看到这一方法的应用. 但由于图的度序列不是图同构的全系不变量，它不能完全刻划图的结构，因此不是所有图的命题和问题都能用它加以证明和解决的. 也就是说，度分析法也有它自身的局限性. 不过可以指出，在考虑图问题的解时，无妨先从度分析入手，如果行不通，再找寻其他方法.

10.4.1 设 $G=\langle V, E\rangle$ 是一个图，V 和 E 分别是 G 的顶点集合和边集合，$|V|=\nu(G)$，$|E|=e(G)$. G 的最大度和最小度分别是 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$. 证明：

$$\delta(G)\leqslant\frac{2e(G)}{\nu(G)}\leqslant\Delta(G).$$

证 设 $\nu(G)=n$，且设 $V=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，图 G 的度序列为 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$. 则由图的度边定理有

$$2e(G)=d_1+d_2+\cdots+d_n. \quad ①$$

由于 $\Delta(G)=d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n=\delta(G)$，所以由上式得到

$$n\delta(G)\leqslant 2e(G)\leqslant n\Delta(G).$$

从而

$$\delta(G)\leqslant\frac{2e(G)}{n}=\frac{2e(G)}{\nu(G)}\leqslant\Delta(G).$$

注 度边定理①是图论的一个基本定理. 它是关于图的度的一个基本恒等式，十分有用.

10.4.2 证明：图 10.5 所示的两个 5 阶图是同构的.

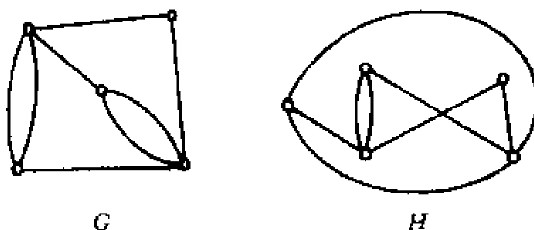


图 10.5

证 易知图 G 的度序列为 $\pi=(4, 4, 3, 3, 2)$，图 H 的度序列也是 $\rho=(4, 4, 3, 3, 2)$. 分别记 G 和 H 的最小度顶点为 v_5 和 u_5. G 中其他 4 个顶点记作 v_1, v_2, v_3, v_4（图 10.6）. 由于图 G 中 4 度顶点 v_1 和 3 度顶点 v_3 之间有重边，而 4 度顶点 v_2 与 3 度顶点 v_3 之间无重边，而图 H 中 4 度顶点 u 与 3 度顶点 x 之间有重边，4 度顶点 y 与 3 度顶点 x 之间无重边，因此将 u，y 和 x 分别记作 u_1，u_2 和 u_3，并将 w 记作 u_4（图 10.7）.

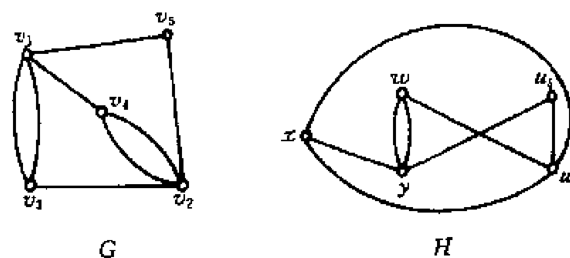


图 10.6

现在建立 $V(G)=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ 到 $V(H)=\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}$ 上的映射 φ：$v_i\to u_i$，$i=1, 2, \cdots, 5$. 显然 φ 是双射. 由于

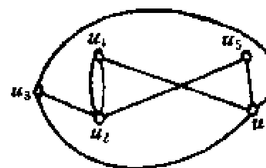


图 10.7

$$\varphi(v_1v_3)=u_1u_3,\ \varphi(v_1v_5)=u_1u_5,$$
$$\varphi(v_2v_3)=u_2u_3,\ \varphi(v_1v_4)=u_1u_4,$$

$$\varphi(v_2v_4)=u_2u_4,\ \varphi(v_2v_5)=u_2u_5,$$

即 φ 是保相邻关系的，因此 φ 是图 G 到图 H 上的同构映射．所以图 G 和 H 是同构的．

注 证明图同构，关键在建立图同构映射．由于度序列是图同构的不变量，所以在建立图同构映射时首先令度相同的顶点彼此对应，再根据顶点相邻关系对所建立的映射进行调整．使之成为保相邻关系的双射．最后再验证它是同构映射．

10．4．3 设 x_1，x_2，…，x_n 是平面上任意给定的 n 个点，其中任意两点的距离至少是 1．证明：其中至多有 $3n$ 对点，每对点的距离恰是 1．

证 设 $V=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，视 x_1，x_2，…，x_n 为图 G 的 n 个顶点，对于图 G 中顶点 x_i，x_j，当且仅当 x_i 和 x_j 的距离为 1 时，令 x_i 和 x_j 相邻，得到的图即是 G．现在考虑 $x\in V$ 的度 $d(x)$．由相邻的定义，图 G 中所有与 x 相邻的顶点应在以 x 为圆心的单位圆周 C 上．由于 x_1，x_2，…，x_n 中任二点距离至少是 1，所以 C 上至多有 6 个给定的点，即 $d(x)\leqslant 6$．因此最大度 $\Delta(G)\leqslant 6$．由 10．4．1，$2e(G)\leqslant n\Delta(G)=6n$，从而 $e(G)\leqslant 3n$．因此至多有 $3n$ 对点，每对点的距离为 1．

注 10．4．3 的结论 $3n$ 可以改进为 $3n-6$．为此只需证明，上面证明中的图 G 是平面图，从而由平面图的必要条件，即可得 $e(G)\leqslant 3n-6$．下面证明图 G 是平面图．设图 G 不是平面图，则存在两条边 xy 和 uv，它们相交于点 O（图 10．8）．由定义，$|xy|=|uv|=1$．设 xy 和 uv 的夹角为 θ．不妨设 $|Oy|\leqslant\frac{1}{2}$，$|Ou|\leqslant\frac{1}{2}$，则

$$\begin{aligned}|uy|^2&=|Ou|^2+|Oy|^2-2|Ou||Oy|\cos\theta\\&=(|Ou|-|Oy|)^2+2|Ou||Oy|(1-\cos\theta).\end{aligned}$$

图 10．8

于是

$$\begin{aligned}1\leqslant|uy|^2&\leqslant(|Ou|-|Oy|)^2+2|Ou||Oy|\\&=|Ou|^2+|Oy|^2\leqslant\frac{1}{2},\end{aligned}$$

矛盾．因此 G 是平面图．

10．4．4 证明：当 $n\geqslant 2$ 时，任意一个 n 阶简单图 G 中一定有两个顶点，它们的度相同．

证 考虑图 G 的度序列 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n$．因为 G 是简单图，所以 $d_1\leqslant n-1$．如果 $d_1=n-1$，则 v_1 和其他 $n-1$ 个顶点都相邻，从而 $d_n\geqslant 1$．即 n 个度 d_1，d_2，…，d_n 只能在 $n-1$ 个数 1，2，…，$n-1$ 中．所以一定有两个度相同．如果 $d_1\leqslant n-2$，则 d_1，d_2，…，d_n 只能在 $n-1$ 个数 0，1，…，$n-2$ 中取值，所以一定有两个度相同．

注 注意最大度在 10．4．4 的证明中的关键作用．

10．4．5 分别求出所有 5 阶 3 条边和 7 条边的不同构简单图的个数 f 和 g．

解 (1) 设 G 是一个 5 阶简单图，$e(G)=3$．设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_5)$ 是 G 的度序列．由于 $e(G)=3$，而 d_1 是以顶点 v_1 为端点的边数，所以 $d_1\leqslant 3$．由度边定理，有

$$5d_1\geqslant d_1+d_2+\cdots+d_5=2e(G)=6.$$

因此 $2\leqslant d_1\leqslant 3$．设 $d_1=3$，则由 $d_1+d_2+\cdots+d_5=6$ 得到，π 只能是 (3，3，0，0，0)，(3，2，1，0，0)，(3，1，1，1，0)．易知前两个不是 5 阶简单图的度序列，而 $\pi=(3, 1, 1, 1, 0)$ 的 5 阶简单图只能是图 10．9 中的 G_1；设 $d_1=2$，则由 $d_1+d_2+\cdots+d_5=6$ 可知，π 只能是 (2，2，2，0，0)，(2，2，1，1，0)，(2，1，1，1，1)．它们的 5 阶简单图只能依次是图 10．9 中的图 G_2，G_3，G_4．注意，同构的图的度序列相同，因此 G_1，G_2，G_3 和 G_4 互不同构．因此 $f=4$．

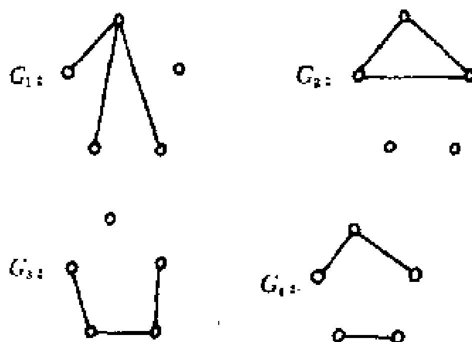


图 10．9

(2) 设 G 是 5 阶简单图，$e(G)=7$，它的度序列是 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_5)$．由度边定理有

$$5d_1\geqslant d_1+d_2+\cdots+d_5=2e(G)=14\geqslant 5d_5.$$

所以 $4\geqslant d_1\geqslant 3>2\geqslant d_5\geqslant 1$．设 $d_1=4$，则由 $d_1+d_2+\cdots+d_5=14$ 得到，π 只能是 (4，4，4，2，0)，(4，4，3，2，1)，(4，4，2，2，2)，(4，3，3，2，2)，(4，3，3，3，1)．前两个不是 5 阶简单图的度序列．度序列为 $\pi=(4, 4, 2, 2, 2)$ 的 5 阶简单图只能是图 10．10 中的图 H_3，度序列为 $\pi=(4, 3, 3, 2, 2)$ 的 5 阶简单图只能是图 10．10 中的图 H_2，度序列为 $\pi=(4, 3, 3, 3, 1)$ 的 5 阶简单图只能是图 10．10 中 H_1．设 $d_1=3$，则由 d_1

$+d_2+\cdots+d_5=14$ 可知，$\pi=(3,3,3,3,2)$. 它是图 10. 10 中的图 H_4 的度序列（注意在同构意义下 H_4 是唯一的）. 由于同构的图的度序列相同，因此图 H_1，H_2，H_3，H_4 不同构. 所以 $g=4$.

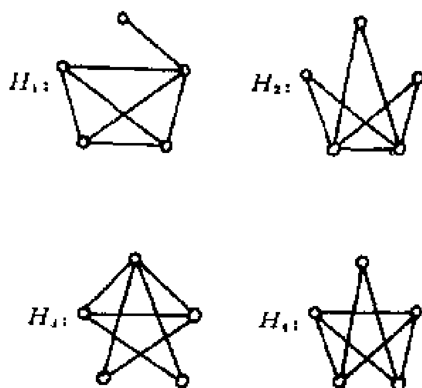


图 10. 10

注 5 阶完全图 K_5 有 10 条边，因此 7 条边 5 阶简单图 H_1，H_2，H_3，H_4 可以从图 G_1，G_2，G_3，G_4 的补图得到.

10. 4. 6 一高尔夫俱乐部有1982个会员，其中每 4 个会员中至少有一人认识其他 3 个会员. 问该俱乐部中认识其他每个会员的会员最少有多少个?

解 该俱乐部的会员视为顶点，其集合记作 V. 对任意 u，$v\in V$，当且仅当会员 u 和 v 认识时令顶点 u 和 v 相邻，得到 1982 阶简单图 G. 题中已知条件"每 4 个会员中至少有一人认识其他 3 个会员"相当于"图 G 的任意 4 个顶点中一定有一顶点和其他三顶点都相邻"，而"俱乐部中认识其他每个会员的会员"相当于"图 G 中度为 1981 的顶点". 于是 10. 4. 6 即是：设 1982 阶简单图 G 中每四个顶点一定有一顶点和其他三顶点相邻，求图 G 中度为 1981 的顶点个数之最小值.

如果 1982 阶简单图 G 是完全图，则对任意顶点 v，$d(v)=1981$. 此时度为 1981 的顶点之个数为 1982.

如果 1982 阶简单图 G 不是完全图，则一定有两个顶点 u 和 v 不相邻. 此时 $d(u)\leqslant 1980$，$d(v)\leqslant 1980$. 考虑图 G 的子图 G-u-v. 如果子图 G-u-v 中有两个顶点 x 和 y 不相邻，则图 G 中 4 个顶点 u，v，x 和 y 不存在一顶点和其他三顶点都相邻，和图 G 的已知条件相矛盾. 所以子图 G-u-v 是一个 1980 阶完全图. 如果子图 G-u-v 中每一顶点 x 和 u，v 都相邻，则图 G 中度为 1981 的顶点个数为 1980. 设子图 G-u-v 中有一顶点 x 和 u，v 不都相邻，不妨设 x 和 u 不相邻，则由已知条件，子图 G-u-v 中任一顶点 $y\neq x$ 都和 u，v 相邻. 因此图 G 中度为 1981 的顶点个数为 1979. 这就是所求的最小值.

注 在图论中在定义图的概念时，只是要求，图的顶点间存在相邻或不相邻关系. 然后即抽象地论证图的有关命题. 但在具体应用图论知识去解决实际问题时，如何正确地规定图的相邻关系，则是关键的一步. 务请留意.

10. 4. 7 n 人聚会，其中有些人是相互认识的. 已知其中任意两个互不认识的人都恰有两个共同的熟人，任意两个相互认识的人都没有共同的熟人. 证明：每个与会者所认识的人数都相同.

证 先把命题转化为图论语言. 视与会者为顶点，其集合记作 V. 对于 u，$v\in V$，当且仅当 u 和 v 所代表的两个人相互认识时令 u 和 v 相邻. 得到 n 阶简单图，记作 G. 已知条件"任意两个互不认识的人都恰有两个共同的熟人"相当于 G 中"任意两个不相邻的顶点都恰有两个公共邻点"，而"任意两个相互认识的人都无共同的熟人"相当于 G 中"任意两个相邻的顶点都无公共邻点". 所欲证明的结论"每个与会者所认识的人数都相同"相当于 G 中"每个顶点的度都相同". 于是 10. 4. 7 的图论形式是：如果 n 阶简单图 G 中满足：(1) 任二不相邻顶点都恰有二个公共邻点，(2) 任二相邻顶点都无公共邻点，则 G 是正则图.

首先因为条件 (1)，G 不是零图. 因此 G 中必有两顶点 u 和 v 相邻. 所有与 u 和 v 相邻的顶点集合分别记作 $N(u)$ 和 $N(v)$. 设 $x\in N(u)-\{v\}$. 则由 (2)，$x\notin N(v)$. 由 (1)，存在唯一 $y\in N(v)-\{u\}$，使得 x 和 y 相邻 (图 10. 11). 定义 $N(u)-\{v\}$ 到 $N(v)-\{u\}$ 的映射 φ：设 $x\in N(u)-\{v\}$，令 $\varphi(x)=y$.

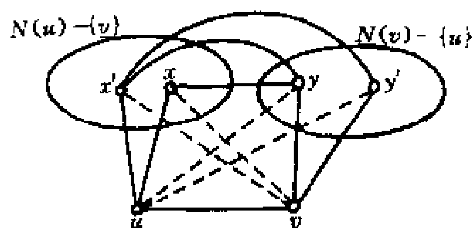


图 10. 11

对于 $x'\in N(u)-\{v\}$，$x'\neq x$，如果 $\varphi(x')=\varphi(x)=y$，则不相邻顶点 u 和 y 有三个公共邻点 v，x，x'，矛盾. 因此 $\varphi(x')\neq\varphi(x)$. 这表示，$\varphi$ 是单射. 设 $z\in N(v)-\{u\}$，则由 (2)，z 和 u 不相邻，由 (1)，存在 $x''\in N(u)-\{v\}$，

使得 $\varphi(x'')=z$. 这表明，φ 是满射，从而 φ 是双射. 于是 $|N(u)-\{v\}|=|N(v)-\{u\}|$. 即有 $|N(u)|=|N(v)|$. 换言之，图 G 中若 u 和 v 相邻，则 $d(u)=d(v)$.

现在设图 G 中顶点 x 和 y 不相邻，由条件 (1)，存在顶点 u 和 x 与 y 都相邻. 由上面的证明，$d(x)=d(u)=d(y)$. 这就证明图 G 是正则的.

注 1 在用度分析法证明图论命题时，考虑顶点 u 的邻域 $N(u)$ 是自然的，因为有 $d(u)=|N(u)|$.

注 2 一个 n 阶简单图 G 称为 (k,λ,μ) 强正则的，如果 G 是 k 正则的，而且相邻两顶点恰有 λ 个公共邻点，不相邻两顶点恰有 u 个公共邻点. 10.4.7 是强正则图的特殊情形. 强正则图是图论研究的一个重要课题. 至今仍有一些难题尚在困扰图论工作者.

10.4.8 有1000名来自世界各地的代表参加一个国际会议，每位代表都能讲若干种语言. 已知其中任意三位代表之间都可以进行交谈而无需其他人帮助（可能其中有一人充当另两人的翻译）. 证明：可以安排与会代表住进 500 个双人房间，使得同一房间的两位代表可以彼此交谈.

证 先将命题转化为图论语言. 视 1000 名代表为 1000 个顶点，其集合记作 V. 对于 $u, v\in V$，当且仅当 u 和 v 这两位代表能够彼此交谈时令顶点 u 和 v 相邻，得到一个 1000 阶简单图 G. 已知条件"任意三位代表都可以进行交谈而无需其他人帮助"相当于"图 G 任意三顶点之间至少连有两条边". 所要证明的是"图 G 具有完美匹配（即图 G 具有 500 条边，其中任意两条边都无公共端点）".

因为图 G 的任意三顶点中必有一顶点和其他两顶点相邻，因此图 G 一定含有一条边 e_1，考虑删边子图 G-e_1. G-e_1 仍满足已知条件，因此 G-e_1 一定含有一条边 e_2，使得 e_1 和 e_2 无公共顶点. 考虑删边子图 G-e_1-e_2. G-e_1-e_2 仍满足已知条件，所以 G-e_1-e_2 一定含有一条边 e_3. 如此继续. 则 G 含有一组匹配 $e_1, e_2, \cdots, e_{498}$. 删边子图 $H=G$-e_1-e_2-$\cdots$-e_{498}是一个 4 阶简单图，且满足已知条件. 设 4 阶图 H 的 4 个顶点为 x, y, z, w. H 中顶点 x, y, z 中一定有两条边，不妨设为 xy, xz（图 10.12）. 顶点 y, z, w 之间也一定有两条边，因此 w 一定和 y, z 中一顶点相邻，不妨设 w 和 y 相邻. 于是取 $xz=e_{499}$，$yw=e_{500}$. 则 $\{e_1, e_2, \cdots, e_{500}\}$ 即是图 G 的一个完美匹配.

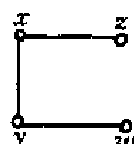


图 10.12

注 10.4.8尽管未用到度分析法，但它说明如何将一个实际问题转化为图论命题，对解具体问题仍有参考意义.

10.4.9 一纱厂有六种颜色的纱，用于生产双色布. 在生产过程中，每种颜色的纱至少和其他三种颜色的纱搭配. 证明：可以选出三种不同的双色布，它们包含所有六种颜色的纱.

证 先把 10.4.9 转化为图论命题. 视六种颜色的纱为 6 个顶点，其集合记作 V，对于 $u, v\in V$，当且仅当 u 和 v 所表示的两种颜色的纱可以搭配生产出一种双色布时，令 u 和 v 相邻. 得到一个 6 阶简单图 G. 图 G 中每条边表示一种双色布. 已知条件"每种颜色的纱至少和其他三种颜色的纱搭配"相当于图 G 中"每个顶点的度至少是 3."所欲证的结论"可以选出三种不同的双色布，它们包含所有六种颜色的纱"相当于图 G 中"有 3 条边，它们饱和图 G 中所有 6 个顶点"，即相当于图 G 含有一个完美匹配. 于是所要证明的图论命题是：如果对 6 阶简单图 G 中每个顶点 x，均有 $d(x)\geqslant 3$，则 G 含有完美匹配. 现证明如下：

设 $x_1\in V(G)$，因为 $d(x_1)\geqslant 3$，所以 x_1 和某个顶点 x_2 相邻，其边记作 x_1x_2. 设 $x_3\in V(G)$-x_1-x_2. 因为 $d(x_3)\geqslant 3$，所以 x_3 和 $V(G)$-x_1-x_2 中某个顶点 x_4 相邻，其边记作 x_3x_4. 图 G 中余下两个顶点记作 x_5，x_6. 如果 x_5 和 x_6 相邻，则边 x_1x_2，x_3x_4 和 x_5x_6 即是 G 的一个完美匹配（图 10.13 (1)）.

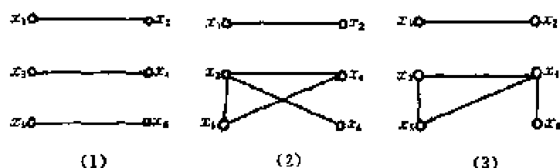

(1) (2) (3)

图 10.13

设 x_5 和 x_6 不相邻. 因为 $d(x_5)\geqslant 3$，$d(x_6)\geqslant 3$，所以 $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ 与 $\{x_5, x_6\}$ 之间至少有 6 条边. 它们分布在边 x_1x_2 和 x_3x_4 上，因此 x_1x_2 和 x_3x_4 中至少有一条边，不妨设边 x_3x_4 分布有由 x_5 或 x_6 引出的 3 条边. 这 3 条边分布在两个顶点 x_5 和 x_6 上，因此必有顶点 x_5 引出两条边. 由于 $d(x_6)\geqslant 3$，所以必有一条由 x_6 引出的边，它和 x_3 或 x_4 相关联. 如果 x_6 和 x_3 相邻（图 10.13 (2)），则 x_1x_2，x_3x_6，x_4x_5 即是 G 的一个完美匹配. 如果 x_6 和 x_4 相邻（图 10.13 (3)），则 x_1x_2，x_3x_5，x_4x_6 即是 G 的一个完美匹配. 这就证明，图 G 含有完

美匹配.

注 10.4.9 的证明充分应用了度分析法.

10.4.10 设 H 是由两个恰有一个公共顶点的 3 圈构成的 5 阶简单图（图 10.14）. 证明：在所有不含子图 H 的 5 阶简单图 G 中，图 G 的最大边数为 7.

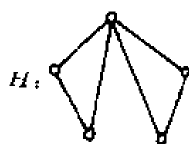


图 10.14

证 所有不含子图 H 的 5 阶简单图的最大边数记作 g. 首先证明 $g\leqslant 7$. 为此只需证明，任意一个 $e(G)=8$ 的 5 阶简单图 G 一定含有子图 H. 由度边定理，有

$$d_1+d_2+\cdots+d_5=16,$$

其中 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_5)$ 是图 G 的度序列. 由于 $d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_5$，所以 $5d_1\geqslant 16$. 因此 $d_1\geqslant 4$. 由于 G 是简单图，所以 $d_1=4$. 设 G 中顶点 v_1 的度 $d(v_1)=d_1=4$. 考虑删点子图 $G\text{-}v_1$，它是一个 4 阶简单图，其度序列记作 $\pi'=(d_1', d_2', \cdots, d_4')$，其边数为 $8-4=4$. 由度边定理有

$$4d_1'\geqslant d_1'+d_2'+d_3'+d_4'=8.$$

所以 $3\geqslant d_1'\geqslant 2$. 如果 $d_1'=2$，则 $\pi'=(2, 2, 2, 2)$，此时 $G\text{-}v_1$ 是一个 4 圈，因此 G 为图 10.15 (1) 所示的图. 显然 G 含有一个子图 H；如果 $d_1'=3$，则 $\pi'=(3, 2, 2, 1)$ 或 $(3, 3, 1, 1)$. 后者不是某个 4 阶简单图的度序列. 对于 $\pi'=(3, 2, 2, 1)$，图 G 同构于图 10.15 (2) 所示的图. 易知图 G 含有子图 H. 这就证明，8 条边的 5 阶简单图 G 一定含有子图 H.

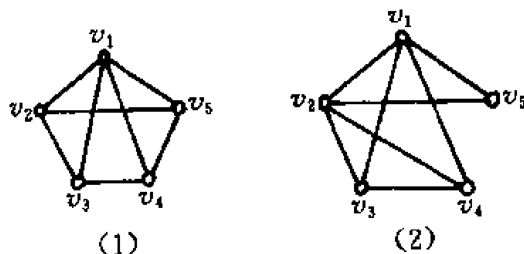


图 10.15

下面证明，$g\geqslant 7$. 为此只需证明，存在一个 7 条边的 5 阶简单图 G，它不含子图 H. 考虑图 10.15 (2) 中的 5 阶图 G. 易知其删边子图 $G\text{-}v_3v_4$ 含有 7 条边，不含子图 H. 因此 $g\geqslant 7$. 从而 $g=7$.

注 设 G 是一个 n 阶简单图，H 是一个 k 阶简单图，$k\leqslant n$. 在所有不含子图 H 的 n 阶简单图 G 中图 G 的最大边数记作 ex $(H; n)$. 具有 ex $(H; n)$ 条边且不含子图 H 的 n 阶简单图 G 称为关于 ex $(H; n)$ 的极端图，H 称为禁用子图. 在 10.4.10 中图 10.14 所示的图 H 为禁用子图. 所求的是 ex $(H; 5)=7$. 而图 10.15 (2) 中图 G 的删边子图 $G\text{-}v_3v_4$ 即是关于 ex $(H; 5)$ 的极端图. 对给定的 k 阶图 H，求 ex $(H; n)$ 是极端图论中一个重要课题. 在处理这类极端图论问题中，度分析法是一种重要而基本的方法.

10.4.11 设 C_4 是一个 4 圈. 求 ex $(C_4; 8)$.

解 所求的 ex $(C_4; 8)=11$. 为证明这一结论，首先注意，不含 4 圈 C_4 的 8 阶简单图 G 具有以下两个简单的性质：

(1) 图 G 不含 4 圈 C_4 的充要条件是：G 中任意两个顶点至多有一个公共邻点；

(2) 如果 G 不含 4 圈 C_4，则对 G 中任意一个顶点 u，$d(u)=d$，图 G 中所有与 u 相邻的顶点 $v_1, v_2, \cdots, v_d$ 和 u 的导出子图 K 至多有 $d+[\frac{d}{2}]$ 条边.

现在证明，ex $(C_4; 8)\leqslant 11$. 为此只需证明，任意一个含有 12 条边的 8 阶简单图 G 中一定含有 4 圈 C_4. 用反证法. 因为 G 有 12 条边，所以由度边定理有

$$d_1+d_2+\cdots+d_8=24,$$

其中 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_8)$ 是 G 的度序列，$d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_8$. 因此 $7\geqslant d_1\geqslant 3$. 考虑以下情形：

情形 1：$d_1=3$. 易知 $\pi=(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$. 设 $d(v_1)=3$，且 v_1 与 u_2, u_3, u_4 相邻. 由 (2)，$\{v_1, u_2, u_3, u_4\}$ 的导出子图至多有 $d+[\frac{d}{2}]=3+[\frac{3}{2}]=4$ 条边. G 中其他 4 个顶点记作 u_5, u_6, u_7, u_8. 由于 $d(v_1)=3$，所以 v_1 和 $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ 之间没有边. 由 (1)，G 中由 $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ 导出的子图至多有 4 条边，而且 $\{u_2, u_3, u_4\}$ 与 $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ 之间至多有 4 条边. 而 $e(G)=12$，所以由 $\{u_5, u_6, u_7, u_8\}$ 导出的子图 H 恰有 4 条边. 而 G 不含 4 圈 C_4，因此 H 必有一个一度点，不妨设 u_5 在 H 中是一度点. 由 (1)，u_5 和 v_1, u_2, u_3, u_4 之间至多有一条边. 所以 u_5 在 G 中的度至多为 2. 与 $\pi=(3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$ 矛盾.

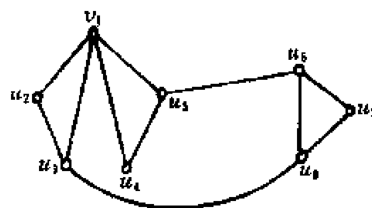


图 10.16

情形 2：$d_1=4$．此时设 v_1 和 u_2，u_3，u_4，u_5 相邻（图 10．16）．由性质（2），v_1 和 u_2，u_3，u_4，u_5 之间至多连有 6 条边．由性质（1），u_2，u_3，u_4，u_5 和其他 3 顶点 u_6，u_7，u_8 之间至多连 3 条边．而顶点 u_6，u_7，u_8 之间至多连 3 条边．由于图 G 恰有 12 条边，因此顶点 v_1，u_2，u_3，u_4，u_5 之间恰有 6 条边，顶点 u_2，u_3，u_4，u_5 和 u_6，u_7，u_8 之间恰有 3 条边，而顶点 u_6，u_7，u_8 之间恰有 3 条边．因图 G 不含 4 圈 C_4，所以不妨设 u_2 和 u_3 相邻，u_4 和 u_5 相邻．考虑 u_2，u_3，u_4，u_5 和 u_6，u_7，u_8 之间的三条边．因 G 不含 4 圈 C_4，所以由性质（1），顶点 u_6 只能连一条边．不妨设 u_5 和 u_6 相邻．同理顶点 u_8 只能连一条边．因图 G 不含 4 圈 C_4，所以 u_8 只能和 u_2 或 u_3 相邻．不妨设 u_8 和 u_3 相邻．同理，顶点 u_7 只能连一条边．由性质（1），u_7 和 u_5 不相邻，因图 G 不含 C_4，所以 u_7 和 u_2，u_3，u_4 都不相邻．矛盾．

情形 3：$d_1\geqslant5$．此时设顶点 v_1 和 u_1，u_2，…，u_{d_1} 相邻．设其他顶点为 u_{d_1+1}，…，u_7．则由性质（2），v_1，u_1，u_2，…，u_{d_1} 之间至多连有 $d_1+[\frac{d_1}{2}]$ 条边．由性质（1），v_1，u_1，…，u_{d_1} 和 u_{d_1+1}，…，u_7 之间至多有 $7-d_1$ 条边．而 u_{d_1+1}，…，u_7 之间至多连有 $C_{7-d_1}^2$ 条边．因此图 G 至多有

$$f(d_1)=d_1+[\frac{d_1}{2}]+(7-d_1)+C_{7-d_1}^2$$
$$=7+[\frac{d_1}{2}]+C_{7-d_1}^2$$

条边．容易验证，当 $5\leqslant d_1\leqslant7$ 时，$f(d_1)\leqslant10$．矛盾．

至此证明了 12 条边的 8 阶简单图 G 一定含有 4 圈 C_4．

图 10．16 给出了 11 条边且不含 4 圈 C_4 的 8 阶简单图．因此 $\mathrm{ex}(C_4;8)\geqslant11$．从而 $\mathrm{ex}(C_4;8)=11$．

10．4．12 设 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是一个非负整数序列，其中 $n-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant0$．记 $\pi'=(d_2-1,d_3-1,\cdots,d_{d_1+1}-1,d_{d_1+2},\cdots,d_n)$．证明：$\pi$ 是可图序列（即 π 是某个 n 阶简单图 G 的度序列）的充要条件是：π' 是可图序列．

证 必要性．设 π 是可图序列，即设 π 是一个 n 阶简单图 G 的度序列，且顶点 v_i 的度为 $d(v_i)=d_i$，$i=1,2,\cdots,n$．如果顶点 v_1 和 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 相邻，则删点子图 $H=G-v_1$ 的度序列即是 π'．从而 π' 是可图序列．于是设顶点 v_1 和 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 不都相邻，而且设 i 是 v_1 和 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 中不相邻的顶点 v_i 的最小下标．由于 $d(v_i)$

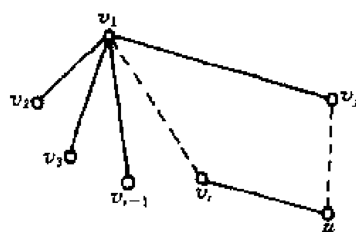


图 10．17

$=d_1$，因此存在下标 j，$d_1+1<j\leqslant n$，使得顶点 v_1 和 v_j 相邻（图 10．17）．由于 $i\leqslant d_1+1<j$，所以 $d_i\geqslant d_j$．如果 $d_i=d_j$，则将顶点 v_i 和 v_j 重新记作 v_j 和 v_i．这和下标 i 的选取矛盾．因此设 $d_i>d_j$．由于 v_1 和 v_i 不相邻，和 v_j 相邻，因此 G 中必有顶点 u，使得 v_i 和 u 相邻，而 v_j 和 u 不相邻．从 G 中去掉边 v_1v_j，v_iu，然后添加边 v_1v_i 和 v_ju．得到的图记作 H．易知，图 H 的度序列仍是 π，而且图 H 中顶点 v_1 和 v_2，v_3，…，v_i 都相邻．如此继续，即可得到一个 n 阶图 $\widetilde{G}$，其度序列即是 π，而且其中顶点 v_1 和 v_2，…，v_{d_1+1} 都相邻．于是删点子图 $\widetilde{G}-v_1$ 的度序列即是 π'，从而 π' 是可图序列．

充分性．设 π' 是可图序列，则存在一个 $n-1$ 阶简单图 H，其度序列即是 π'．设图 H 的顶点为 v_2，v_3，…，v_n，使得

$$d(v_i)=\begin{cases}d_i-1, & 2\leqslant i\leqslant d_1+1,\\ d_i, & d_1+2\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

添加新顶点 v_1，并令 v_1 和 v_2，v_3，…，v_{d_1+1} 都相邻，得到一个 n 阶图 $G=H+v_1$．易知，图 G 的度序列即为 π．从而 π 是可图序列．

注 10．4．12 称为 Havel-Hakimi 定理．根据 10．4．12 可以给出一个判别非负整数序列 $\pi=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$，$n-1\geqslant d_1\geqslant d_2\geqslant\cdots\geqslant d_n\geqslant0$ 是否为可图序列以及当 π 是可图序列时构造一个以 π 为度序列的 n 阶简单图 G 的算法．这种算法并不困难，读者无妨自己给出．还应指出的是，10．4．12 的证明中，图 G 中的部分边结构的变换（图 10．18）

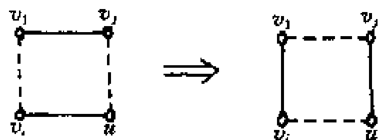


图 10．18

称为对图 G 施行的内部变换（interchange）．在内部

变换下，图的度序列保持不变．这种变换是论证有关度序列的命题的一种基本技巧．

10．4．13　设 n 阶简单图 G 的 n 个顶点为 v_1，v_2，…，v_n，它们的度依次为 d_1，d_2，…，d_n，$d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$．证明：如果对每个 k，$k \leqslant n-d_n-1$，均有 $d_k \geqslant k$，则图 G 是连通的．

证　用反证法．设 G 不连通，则 G 具有连通分支 C，它包含 v_n．由于 $d(v_n)=d_n$，所以 C 包含 G 中与 v_n 相邻的 d_n 个顶点．因 G 不连通，所以 G 含有另一个连通分支 C_1，其顶点集合记作 $V(C_1)$．显然 C_1 不含 v_n 以及和 v_n 相邻的 d_n 个顶点，因此

$$|V(C_1)| \leqslant n-(d_n+1) \leqslant n-d_n-1.$$

记 $|V(C_1)|=k$，且 $V(C_1)=\{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_k}\}$．其中 $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$．因为 C_1 是图 G 的连通分支，所以 $d_{i_k} \leqslant |V(C_1)|-1=k-1$．由于 $d_1 \leqslant d_2 \leqslant \cdots \leqslant d_n$，所以 $d_k \leqslant d_{i_k} \leqslant k-1$．与当 $k \leqslant n-d_n-1$ 时有 $d_k \geqslant k$ 的假设相矛盾．因此图 G 是连通的．

注　用度分析法证明 10．4．13 时关键在于从图 G 的最大度 d_n 入手．这是应用度分析法常见的手法．

10．4．14　设 $\pi=(d_1, d_2, \cdots, d_n)$ 是非负整数序列，$n-1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_n \geqslant 1$，且 $n \geqslant 2$．证明：π 是某个 n 阶树的度序列的充要条件是：

$$d_1+d_2+\cdots+d_n=2n-2. \qquad ②$$

证　必要性．设 π 是 n 阶树 T 的度序列．注意，n 阶树 T 是连通的，而且无圈，从而 T 有 $n-1$ 条边．由度边定理，式②成立．

充分性．设式②成立．对 n 用归纳法证明，π 是某个 n 阶树 T 的度序列．当 $n=2$ 时，由式②，$d_1+d_2=2$，由 $1 \geqslant d_1 \geqslant d_2 \geqslant 0$ 得到，$d_1=d_2=1$．此时 $\pi=(1, 1)$ 是 2 阶完全图 K_2（即是 2 阶树）的度序列．现在设结论对 $n-1$ 成立．下面证明结论对 n 成立．

由于 $n-1 \geqslant d_1 > d_2 > \cdots > d_n \geqslant 0$ 且式②成立，所以

$$nd_1 \geqslant 2(n-1) \geqslant nd_n.$$

于是 $d_1 \geqslant 2 > 1 \geqslant d_n \geqslant 1$．因此 d_n-1．考虑

$$\pi'=(d_1-1, d_2, \cdots, d_{n-1}).$$

显然，$(d_1-1)+d_2+\cdots+d_{n-1}=2(n-1)-2$．如果 $d_1-1 \geqslant d_2 \geqslant \cdots \geqslant d_{n-1}$，则因 $d_1-1 \leqslant n-2$，$d_{n-1} \geqslant d_n \geqslant 1$，故由归纳法假设，$\pi'$ 是某个 $n-1$ 阶树 T' 的度序列．设 T' 的顶点为 v_1，v_2，…，v_{n-1}，且 $d(v_1)=d_1-1$，$d(v_i)=d_i$，$2 \leqslant i \leqslant n-1$．则添加顶点 v_n 到 T'，使 v_n 和 v_1 相邻，但和 v_2，…，v_{n-1} 都不相邻，得到的图记作 $T=T'+v_n$．易知 T 是一个 n 阶树，且其度序列即是 π；如果 $d_1-1 < d_2$，则因 $d_1 \geqslant d_2$ 得到 $d_1=d_2$．设 $d_1=n-1$，则由 $d_1=d_2=n-1$ 和式②可知，$d_3=\cdots=d_n=0$．与 $d_n=1$ 相矛盾．所以 $d_1=d_2 \leqslant n-2$．不妨设 $d_1=d_2=\cdots=d_t > d_{t+1} \geqslant \cdots \geqslant d_r \geqslant 1$．此时将 π' 重新由大到小排成为

$$\pi''=(d_2, d_3, \cdots, d_t, d_1-1, d_{t+1}, \cdots, d_{n-1}).$$

则 $n-2 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \cdots \geqslant d_t \geqslant d_1-1 \geqslant d_{t+1} \geqslant \cdots \geqslant d_{n-1} \geqslant 1$．由于

$$d_2+d_3+\cdots+d_t+d_1-1+d_{t+1}+\cdots+d_{n-1} = 2(n-1)-2,$$

故由归纳假设，π'' 是某个 $n-1$ 阶树 T'' 的度序列，其顶点 u_1，…，u_{t-1}，u_t，u_{t+1}，…，u_{n-1} 的度依次为 d_2，…，d_t，d_1-1，d_{t+1}，…，d_{n-1}．添加顶点 v 到 T'' 上，使 v 和 u_t 相邻，但和 u_1，…，u_{t-1}，u_{t+1}，…，u_{n-1} 都不相邻．得到的图 $T=T''+v$ 显然是一个 n 阶树，且其度序列即是 π．

10．4．15　有 $2n$ 个城市，每个城市至少和其中 n 个城市开通直达航班．证明：对于这 $2n$ 个城市中任意两个城市，必可乘飞机从一个城市飞往另一个城市（允许中转）．

证　视 $2n$ 个城市为 $2n$ 个顶点，其集合记作 V．对任意 u，$v \in V$，当且仅当城市 u 和 v 之间有直达航班时令顶点 u 和 v 相邻，得到一个 n 阶简单图 G．已知条件“每个城市至少和其他 n 个城市有直达航班”相当于“对任意 $u \in V$，顶点 u 的度 $d(u) \geqslant n$”．欲证明的结论“任意两个城市中必可从一城市乘飞机飞往另一城市（允许中转）”相当于“对任意 u，$v \in V$，顶点 u 和 v 之间有一条路”，即“图 G 是连通的”．于是所欲证明的图论命题是：如果对 n 阶简单图 G 中每个顶点 u，其度 $d(u) \geqslant n$，则 G 是连通的．现证如下：

用反证法．设 G 不连通，则 G 可以分解为 k 个连通分支，$k \geqslant 2$．因此必有一个连通分支 C，它所含的顶点个数 $\leqslant n$．而分支 C 中的顶点和其他分支的顶点都不相邻，所以对于分支 C 中每个顶点 u，有 $d(u) \leqslant n-1$．矛盾．

10．4．16　证明：如果 n 阶简单图 G 的阶数 n 和边数 $e(G)$ 满足 $e(G) \geqslant n+4$，则图 G 中一定有两个边不交的圈．

证　显然，只需证明，如果 $e(G)=n+4$，则结论成立．设图 G 是阶数最小的反例．则图 G 具有以下性质：

（1）图 G 的腰围（即最短圈的长）$g \geqslant 5$．否则

设 $g\leqslant4$. 则图 G 具有一个圈 C_1，它含有 g 条边 e_1，e_2，…，e_g，G 中删边子图 $H=G-e_1-e_2-\cdots-e_g$ 的边数 $e(H)$ 满足 $e(H)=e(G)-g=n+(4-g)\geqslant n$. 因此子图 H 含有一个圈 C_2，于是图 G 含有两个边不交的圈 C_1 和 C_2. 与图 G 是反例的假设矛盾.

(2) 图 G 的最小度 $\delta(G)\geqslant3$. 否则 $\delta(G)\leqslant2$. 设 $\delta(G)=2$，则图 G 含有 2 度顶点 u. 不妨设 uv_1 和 uv_2 是图 G 的边. 于是 $H=G-u+v_1v_2$ 的边数 $e(H)=e(G)-1=n+4-1=(n-1)+4$. 由于图 G 是阶数最小的反例，所以图 H 含有两个边不交的圈 C_1 和 C_2. 如果 v_1v_2 不在圈 C_1 和 C_2 上，则图 G 含有两个边不交的圈，与图 G 为反例相矛盾. 如果 v_1v_2 在圈 C_1 上，则从圈 C_1 上去掉边 v_1v_2、并添加边 v_1u，uv_2，得到的圈记作 C_1'. 则图 G 含边不交的圈 C_1' 和 C_2，矛盾. 同理，如果 v_1v_2 在圈 C_2 上，也将导致矛盾. 若 $\delta(G)=1$，则 G 含有一度顶点 u，其删点子图 $H=G-v$ 满足：$e(H)=e(G)-1=(n-1)+4$. 由于图 G 是阶数最小的反例，所以图 H 从而图 G 含边不交的两个圈 C_1 和 C_2. 矛盾. 同理可证 $\delta(G)=1$ 也不可能.

于是由性质 1，图 G 含有最短圈 C_1，其长 $g\geqslant5$. 圈 C_1 上的顶点集合记作 V_1. 则 $|V_1|\geqslant5$. V_1 的导出子图记作 H. 因为 C_1 是最短圈，所以 H 即是圈 C_1. 由性质 2，任意 $u\in V_1$，其度 $d(u)\geqslant3$. 因此，必有 $v\in V(G)$，使得 u 和 v 相邻. 图 $G-H$ 中所有与 H 中顶点相邻的顶点集合记作 V_2. 注意对任意 $v\in V_2$，V_1 中有且仅有一个顶点 u 和 v 相邻. 否则设 v 和 V_1 中顶点 u_1 和 u_2 相邻（图 10.19），则圈 C_1 上由 u_1 到 u_2 的路长和由 u_2 到 u_1 的路长必有一个 $\leqslant[\frac{g}{2}]$. 于是图 G 将含有长 $\leqslant[\frac{g}{2}]+2$ 的圈 C，而 $g\geqslant5$，所以圈 C 的长 $\leqslant g$. 与 C_1 是最短圈相矛盾. 这就证明，$|V_1|=|V_2|$. 于是 $n=|V(G)|\geqslant|V_1|+|V_2|=2g\geqslant10$.

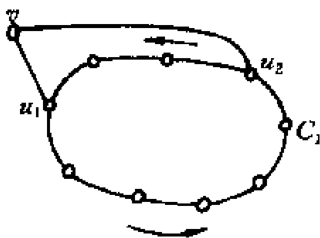


图 10. 19

另一方面，由度边定理，有

$$2(n+4)=2e(G)=d_1+d_2+\cdots+d_n\geqslant n\delta(G)\geqslant3n.$$

所以 $n\leqslant8$. 与 $n\geqslant10$ 矛盾.

注 用度分析法既可从最大度入手，也可从最小度入手. 10. 4. 16 即是从最小度入手的.

10. 4. 17（Fubini 原理） 设 X 是 m 元集，Y 是 n 元集，R 是 X 到 Y 的二元关系. 对任意 $x\in X$，记 $R(x,\cdot)=\{(x,y)\in R|y\in Y\}$；对任意 $y\in Y$，记 $R(\cdot,y)=\{(x,y)\in R|x\in X\}$. 证明：

$$\sum_{x\in X}|R(x,\cdot)|=\sum_{y\in Y}|R(\cdot,y)|.$$

证 设 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$. 将 X 和 Y 的元素看成顶点. 对任意 $x\in X$，$y\in Y$，当且仅当 $(x,y)\in R$ 时令 x 和 y 相邻，得到一个 $m\times n$ 二部图，记作 G，G 即是 R 的关系图. X，Y 是二部图 G 的顶点集合的二部分划. 对于任意 $x\in X$，$R(x,\cdot)$ 是图 G 中所有与顶点 x 相邻的顶点集合，即顶点 x 的邻域，因此 $|R(x,\cdot)|$ 即是顶点 x 的度，也即图 G 中与顶点 x 关联的边数. 同理，对于 $y\in Y$，$|R(\cdot,y)|$ 是顶点 y 的度，也即图 G 中与顶点 y 关联的边数. 现在计算 R 的关系图 G 的边数 $e(G)$，即关系 R 的基数 $|R|$. 一方面，由于 $|R(x,\cdot)|$ 是顶点 x 的度，即与顶点 x 关联的边数. 而 X，Y 是图 G 的顶点集合的二部分划，因此，当 x 遍历 X 的顶点时，即得 $\sum_{x\in X}|R(x,\cdot)|=e(G)$. 同理，因为 $|R(\cdot,y)|$ 是顶点 y 的度，即与顶点 y 关联的边数，所以当 y 遍历 Y 的顶点时即得 $\sum_{y\in Y}|R(\cdot,y)|=e(G)$. 于是

$$\sum_{x\in X}|R(x,\cdot)|=\sum_{y\in Y}|R(\cdot,y)|.$$

注 Fubini 原理 10. 4. 17 是组合计数的一个基本原理，它是测度论中关于积分换序的 Fubini 定理的离散形式. 它的图论形式是，设 X，Y 是 $m\times n$ 二部图 G 的顶点集合的二部分划，对于 $x\in X$，$y\in Y$，$d(x)$ 和 $d(y)$ 分别是顶点 x 和 y 的度，而 $e(G)$ 是图 G 的边数，则

$$\sum_{x\in X}d(x)=e(G)=\sum_{y\in Y}d(y).$$

如果将 $m\times n$ 二部图 G 看成是 X 到 Y 的关系 R 的关系图，则有

$$\sum_{x\in X}|R(x,\cdot)|=|R|=\sum_{y\in Y}|R(\cdot,y)|.$$

由此可知，所谓 Fubini 原理是指，用两种途径来计算关系 R 的基数 $|R|$，一是先对 X 中每个元素 x，求出 Y 中所有与元素 x 具有关系 R 的元素 y 的个数 $|R(x,\cdot)|$，然后再求出所有 $|R(x,\cdot)|$ 之和；另一是对 Y 中每个元素 y，求出 X 中所有与元素 y 具有关系 R 的元素 x 的个数 $|R(\cdot,y)|$，再求出所有 $|R(\cdot,y)|$ 之和. 所以 Fubini 原理也称为算两次原理.

10. 4. 18 有 5 个人在玩桥牌，每一次都是两个

人对两个人．每个人都想和其他每个人搭挡玩一轮，即打对家两次．问他们共需玩几轮？试排出一种玩的方案．

解 设5个人是 m_1，m_2，m_3，m_4，m_5，他们组成的二人对子（即二元子集）的集合记作 X，易知 $|X|=C_5^2$．设这5个人共需玩 k 次，其场次编号为1，2，…，k，其集合记作 Y．将二人对子和场次视为顶点，对任意 $x\in X$ 和 $y\in Y$，当且仅当二人对子 x 参加第 y 场比赛时令 x 和 y 相邻，得到一个二部图 G，X，Y 是图 G 的二部分划．现在用两种方式求图 G 的边数 $e(G)$．一方面，对于任意 $x\in X$，由题意，二人对子 x 打对家两次，因此 $d(x)=2$．于是

$$e(G)=\sum_{x\in X}d(x)=2|X|=2C_5^2=20.$$

另一方面，对于任意 $y\in X$，因第 y 场必有两个对子参加，所以 $d(y)=2$．于是

$$20=e(G)=\sum_{y\in Y}d(y)=2|Y|=2k.$$

所以 $k=10$．也即共需玩10场，即共玩5轮．下面是符合题求的一种安排：

m_1，m_2 对 m_3，m_4；	m_1，m_2 对 m_3，m_5；
m_1，m_3 对 m_2，m_5；	m_1，m_3 对 m_4，m_5；
m_1，m_4 对 m_2，m_3；	m_1，m_4 对 m_2，m_5；
m_1，m_5 对 m_2，m_4；	m_1，m_5 对 m_2，m_3；
m_2，m_3 对 m_4，m_5；	m_2，m_4 对 m_3，m_5．

注 设计符合题求的安排时要扣紧题意：每玩一次必有一人不出场，而每两人需打对家两次，因此10场中每个人恰有两场不出场．依此即可给出上面的安排．

10．4．19 直角坐标平面上的直线 l 如果与 x 轴、y 轴或 x 轴与 y 轴的角平分线之一平行，则 l 称为规范直线．已知直角坐标平面上有6个点，其中过每两点都连一直线．问这些直线中最多有几条规范直线？

解 平面上给定的6个点的集合记作 X．过 X 中任意两点的所有规范直线的集合记作 Y，设 $|Y|=k$．将 X 中的点 x 和 Y 中的规范直线 l 视为顶点．对于任意 $x\in X$，$y\in Y$，当且仅当点 x 在规范直线 y 上时令顶点 x 与 y 相邻，得到一个 $6\times k$ 二部图 G．现在用两种方法求图 G 的边数 $e(G)$．一方面，对于任意 $x\in X$，易知过点 x 至多有4条规范直线，因此顶点 x 的度 $d(x)\leqslant 4$．于是

$$e(G)=\sum_{x\in X}d(x)\leqslant 4|X|=4\cdot 6=24.$$

另一方面，对任意 $y\in Y$，由于规范直线 y 上至少过 X 中两个点，因此顶点 y 的度 $d(y)\geqslant 2$．于是

$$24\geqslant e(G)=\sum_{y\in Y}d(y)\geqslant 2|Y|=2k.$$

由此即得 $k\leqslant 12$．

下面证明，k 的上界12是不能达到的．否则由

$$24\geqslant\sum_{x\in X}d(x)=e(G)=\sum_{y\in Y}d(y)\geqslant 24$$

可知，对于任意 $x\in X$，$d(x)=4$，对于任意 $y\in Y$，$d(y)=2$．换言之，过 X 中的每个点 x 恰有4条规范直线，而 Y 中每条规范直线 y 上恰有 X 中2个点．由于 X 是有限点集，因此平面上必有一个矩形区域 D，它的两边平行于 x 轴，另两边平行于 y 轴，使得区域 D 的各边上都有 X 中的点．注意，区域 D 必有一个顶点 a 在 X 中，否则区域 D 的各边都是规范直线，且过 X 中的顶点，因此各边都有2个 X 中的点，所以 $|X|\geqslant 8$，矛盾．而过点 a 的规范直线应有4条（$d(a)=4$），其中必有一条规范直线 $l\in Y$，l 上恰有 X 中一个点 a．与 $d(l)=2$ 矛盾．所以 $k\leqslant 11$．

k 的上界11是可以达到的，见图10．20．

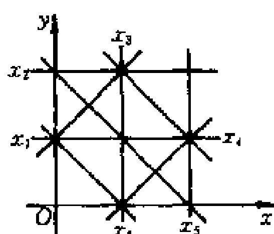


图10．20

注 在应用Fubini原理解题时，关键在于选择适当的集合 X 和 Y，并确定 X 中顶点与 Y 中顶点的相邻关系，由此确定二部图 G．至于用两种方法计算二部图 G 的边数 $e(G)$，几乎是形式而机械的．

10．4．20（Sperner定理） 设 $\mathscr{P}(X)$ 是 n 元集 X 的所有子集的集合．在子集间的包含关系下 $\mathscr{P}(X)$ 是一个偏序集．证明：偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 中反链的最大规模为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$．

证 设 $A=\{X_1, X_2, \cdots, X_m\}$ 是偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 中的一个反链．B 是 n 元集 X 的 n 个元素的所有排列之集合．对于任意 $X_i\in A$，任意 $b\in B$，当且仅当排列 b 的前 $|X_i|$ 个元素构成的集合即为 X_i 时，令 X_i 与 b 相邻，得到一个二部图 G，G 的顶点集合的二部分划即是 A 和 B．现在用两种方式来计算图 G 的边数 $e(G)$．一方面，对任意 $X_i\in A$，将 X_i 中 $|X_i|$ 个元素的一个排列和 $\overline{X_i}$ 中 $n-|X_i|$ 元素的一个排列并在一起，即得 B 中一个排列 b，而且在图 G 中顶点 X_i 和顶点 b 相邻．由于 X_i 和 $\overline{X_i}$ 各有 $|X_i|$ 和 $n-|X_i|$ 个元素，因此如此的顶点 b 有 $|X_i|!\times(n-|X_i|)!$ 个．所以顶点 X_i 的度为 $d(X_i)=|X_i|!(n-|X_i|)!$．于是

$$e(G)=\sum_{i=1}^{m}d(X_i)=\sum_{i=1}^{m}|X_i|!(n-|X_i|)!.$$

另一方面，对于任意 $b\in B$，如果 A 中 X_i 与 X_j 和 b 相邻，$X_i\neq X_j$，则由相邻的定义，X_i 和 X_j 分别是排列 b 的前 $|X_i|$ 和前 $|X_j|$ 个元素构成的集合．如果

$|X_i|=|X_j|$，则 $X_i=X_j$，矛盾：如果 $|X_i|\neq|X_j|$，不妨设 $|X_i|<|X_j|$，则 $X_i\subset X_j$，与 A 是 $\mathscr{P}(X)$ 的反链相矛盾．这说明，在图 G 中顶点 b 至多和 A 中一个顶点 X_i 相邻，即顶点 b 的度 $d(b)\leqslant 1$．于是

$$\sum_{i=1}^{m}|X_i|!\,(n-|X_i|)!=e(G)$$
$$=\sum_{b\in B}d(b)\leqslant|B|.$$

而 B 是 X 中 n 个元素的所有排列的集合，所以 $|B|=n!$．因此

$$\sum_{i=1}^{m}|X_i|!\,(n-|X_i|)!\leqslant n!,$$

即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\dfrac{n!}{|X_i|!\,(n-|X_i|)!}}\leqslant 1,$$

也即

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|X_i|}}\leqslant 1.$$

由二项系数 C_n^0，C_n^1，…，C_n^n 的单峰性可知，$C_n^{|X_i|}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$．于是

$$\frac{m}{C_n^{[\frac{n}{2}]}}\leqslant\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_n^{|X_i|}}\leqslant 1,$$

从而得到

$$m\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

设 A 是 n 元集 X 中所有 $[\frac{n}{2}]$ 元子集的集合．易知 A 是偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的一个反链，且 $|A|=C_n^{[\frac{n}{2}]}$．因此上界 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 是可以达到的．

注 10．4．20 是组合集合论的一个基本定理，是 Sperner1928 年首先证明的．定理证明的关键是，构造以偏序集 $\mathscr{P}(X)$ 的反链 $A=\{X_1,X_2,\cdots,X_m\}$ 和 n 元集 X 中 n 个元素的所有排列集合 B 为二部分划的二部图 G，然后应用 Fubini 原理对图 G 的边数 $e(G)$ 进行计数．这一证明是 Lubell1966 年给出的，极为出色．Lubell 发表其证明的文章只有一页长，被著名组合数学家 Rota 收入到其编纂的名著《组合论中经典论文集（Classic Papers in Coubinatorics, Quinn-Woodbine 出版社 1987 年版）》，足见证明之精采．

10．4．21 设 p_1，p_2，…，p_n 是 n 个互异的素数，$N=p_1p_2\cdots p_n$．证明：N 的一组两两互不整除的因数的最大规模是 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$．

证 设 $d=p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}$ 是 N 的一个因数，$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$．记 $X=\{1,2,\cdots,n\}$，$A=\{i_1,i_2,\cdots,i_k\}$．这说明，N 的所有因数集合 D_N 与 n 元集 X 的所有子集集合 $\mathscr{P}(X)$ 之间存在一个双射．易知 N 的一组两两互不整除的因数对应于 $\mathscr{P}(X)$ 中一个反链．由 10．4．20 即得 10．4．21．

10．4．22 设 x_1，x_2，…，x_n 是 n 个大于 1 的实数．设 $N=\{1,2,\cdots,n\}$．对任意给定的 $A\subseteq N$，记

$$x_A=\sum_{i\in A}x_i.$$

由于 N 共有 2^n 个子集 A，所以共有 2^n 个和数 x_A．设 I 是一个单位长的闭区间．证明：I 至多含有 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个 x_A．

证 设 A_1，A_2，…，A_m 是 N 的子集，使得 x_{A_1}，x_{A_2}，…，$x_{A_m}\in I$．记 $S=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$．如果对 A_i，$A_j\in S$，有 $A_i\neq A_j$，$A_i\subseteq A_j$，则 $x_{A_j}-x_{A_i}=\sum_{k\in A_j-A_i}x_k>1$．与 x_{A_i}，$x_{A_j}\in I$ 矛盾．这表明，$S=\{A_1,A_2,\cdots,A_m\}$ 是偏序集 $\mathscr{P}(N)$ 的一个反链．由 Sperner 定理 10．4．20，$m\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}$．

注 1945 年 Erdös 首先对绝对值大于 1 的实数 x_1，x_2，…，x_n 证明 10．4．22 成立．1965 年 Kleitman 和 1966 年 Katona 分别独立地证明 1943 年 Littlewood 和 Offord 提出的下述猜想成立：设 z_1，z_2，…，z_n 是 n 个绝对值大于 1 的复数，D 是复平面 Z 上单位闭圆盘，则 D 中至多含有 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 个形如 $z_A=\sum_{i\in A}z_i$，$A\subseteq N$ 的和．

10．4．23 证明：如果正则二分树 T 的悬挂点个数为 t，则 T 的边数 $e(T)=2(t-1)$．

证 设 T 有 n 个顶点．因为 T 是正则二分树，且有 t 个悬挂点，所以 T 中恰有一个 2 度顶点，$n-t-1$ 个 3 度顶点，t 个 1 度顶点，且 T 的边数 $e(T)=n-1$．由度边定理有

$$2+3(n-t-1)+t=2(n-1).$$

因此，$t=\frac{1}{2}(n+1)$．从而

$$2(t-1)=n-1=e(T).$$

10．4．24 证明：如果正则 m 分树 T 有 t 个悬挂点，i 个分枝点，则 $(m-1)i=t-1$．

证 因为 T 是正则 m 分树，且有 t 个悬挂点，i 个分枝点，所以 T 中顶点个数为 $i+t$，其边数 $e(T)=i+t-1$．i 个分枝点中有一个是根，其度为 m，余下 $i-1$ 个分枝点的度均为 $m+1$，而 t 个悬挂点的度均为 1．于是由度边定理有

$$m+(i-1)(m+1)+t=2(i+t-1).$$

由此即得 $(m-1)i=t-1$．

§10．5 图论方法

图论的主要研究对象是图，而图则是描述有限

集合中元素之间的关系的一种数学模型．经过长期的研究，图论已经发展成数学中相对独立的一门学科，形成了自己的理论和处理问题的方法和技巧．由于它的研究对象是离散的组合结构，因而图论是离散数学的主要组成部分．在离散数学中除图论外的其他内容也经常会遇到有关有限集合中元素之间的种种关系，所以图论也是处理离散数学中有关问题的一种重要方法和技巧．

10．5．1 设 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 是 n 元集，$X\times X=\{(x_i, x_j)\mid x_i, x_j\in X\}$ 是 X 的笛卡尔积，设 $R\subseteq X\times X$ 是 X 上的一个二元关系．将 X 中元素看成顶点，当且仅当 $x_i, x_j\in R$ 时连一条由顶点 x_i 指向顶点 x_j 的有向边，得到有向图记作 D_R．D_R 称为 R 的关系图，其顶点集合 $V(D_R)=X$，其边集合 $E(D_R)=R$．证明：

(1) R 是自反的充要条件是：D_R 的每个顶点都含有环 (loop)；

(2) R 是对称的充要条件是：D_R 是无向图，即 D_R 中每条边都是双向边；

(3) R 是传递的充要条件是：D_R 是传递的，即对任意 $x, y, z\in X$，当 $x\rightarrow y$，$y\rightarrow z$ 时一定有 $x\rightarrow z$，其中 $x\rightarrow y$ 表示 D_R 中一条由 x 指向 y 的有向边；

(4) R 是反自反的充要条件是：D_R 不含环 (loop)；

(5) R 是反对称的充要条件是：D_R 中除环外，其他的边都是单向边；

(6) R 是相容的充要条件是：D_R 是每个顶点都有环的无向图；

(7) R 是等价关系的充要条件是：D_R 是各顶点都带环的若干个不交的无向完全子图的并；

(8) R 是偏序关系的充要条件是：D_R 是每个顶点都有环而其他边均为单向边的传递有向图；

(9) R 是全序关系的充要条件是：D_R 是各顶点都有环的传递竞赛图；

(10) R 是严格序关系的充要条件是：D_R 是无环的传递定向图．

证 (1) 因 R 是自反的，故对任意 $x\in X$，$(x, x)\in R$．因此 D_R 中任意顶点 $x\in X$，x 均带环 (x, x)．反之也然．

(2) 因 R 是对称的，故对任意 $x, y\in X$，若有 $(x, y)\in R$，则必有 $(y, x)\in R$．因此在 D_R 中当 $x\rightarrow y$ 时必有 $y\rightarrow x$．所以 D_R 中每条边都是双向边，从而 D_R 是无向图．反之若 D_R 是无向图，则对任意 $x, y\in X$，必有 $x\rightarrow y$ 和 $y\rightarrow x$ 同时成立，即 $(x, y), (y, x)$ 同时属于 R．故 R 是对称的．

(3) 设 R 是传递的，则对任意 $x, y, z\in X$，当 (x, y)，$(y, z)\in R$ 时必有 $(x, z)\in R$．所以在 D_R 中当 $x\rightarrow y$，$y\rightarrow z$ 时必有 $x\rightarrow z$．因此 D_R 是传递有向图．反之倒推即可．

(4) 因为 R 是反自反的，故对任意 $x\in X$，$(x, x)\notin R$．因此 D_R 中无环．反之若 D_R 无环，则 R 显然是反自反的．

(5) 设 R 是反对称的，则对任意 $x, y\in X$，当 $(x, y), (y, x)\in R$ 时必有 $x=y$．因此如果 D_R 存在双向边 $x\rightarrow y$，$y\rightarrow x$，$x\neq y$，则因 R 是反对称的，故必有 $x=y$，矛盾．所以 D_R 除环外，其他的边都是单向边．反之是显然的．

(6) 设 R 是相容的，则 R 是自反且对称的．由 (1) 和 (2)，D_R 是各顶点都带环的无向图．反之是显然的．

(7) 设 R 是等价关系，则 R 是相容且传递的．由于 R 是相容的，所以 D_R 是各顶点都带环的无向图．设 D_R 具有 k 个连通分支，其中连通分支 C 至少有三个顶点．设 x, y 是 C 中不相邻顶点，则因 C 连通，故有由 x 到 y 的路 $xu_1u_2\cdots u_ky$．因 R 是传递的，故 x 与 $u_2, u_3, \cdots, u_k, y$ 相邻，矛盾．因此 C 是完全图．反之若 D_R 是若干个完全子图之并，则易证 R 是等价关系．

(8) 设 R 是偏序关系，则 R 是自反的、反对称和传递的．由 (1)，(5) 和 (3) 即知 D_R 是各顶点都带环而其他各边都是单向边的传递图．反之是显然的．

(9) 设 R 是全序关系，则 R 是偏序关系，而且 X 中任意两个元素 x 和 y 都是可比较的．因此 D_R 中各顶点都带环，而且对 D_R 中任二顶点 x, y，要么 $x\rightarrow y$，要么 $y\rightarrow x$，二者只居其一，即若不考虑环，D_R 是顶点集合为 X 的 n 阶完全图 K_n 的一个定向图，即是 n 阶竞赛图．而 R 是传递的，所以除环外，D_R 是 n 阶传递竞赛图．这就证明，D_R 是各顶点都带环的传递竞赛图．反之倒推即可．

(10) 设 R 是严格序关系，则 R 是反自反、反对称和传递的．因此由 (4)、(5) 和 (3) 可知，D_R 是无环、无对称边的传递图．无双向边的图称为定向图，所以 D_R 是无环的传递定向图．反之倒推即可．

注 10．5．1 给出了各种类型的关系的图刻划．由于图是关系的一种数学模型，所以特定类型的关系的图一定有特殊性质．10．5．1 即是将关系的性质与关系图的性质对应起来的基本结论．因而可以从关系图的性质来判定关系的性质．

10．5．2 设 $X=\{1, 2, 3, 6\}$，L 表示关系

"小于或等于"，D 表示关系"整除". 试判定 L 和 D 各是那一种关系.

解 易知 L 和 D 的关系图 D_L 和 D_D 分别如图 10. 21所示.

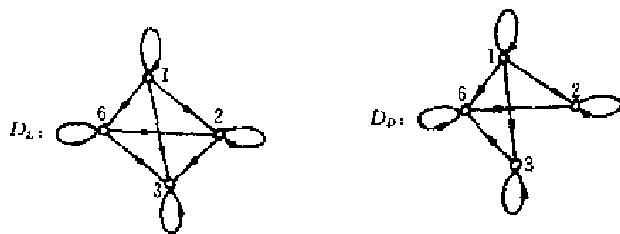


图 10. 21

显然 D_L 中各顶点都有环，其他各边都是单向边，而且任意两顶点都有边，因此 D_L 除环外是 4 阶完全图 K_4 的定向图，即 D_L 是各顶点带环的 4 阶竞赛图. 注意 D_L 中任意三顶点都是一个三角形的顶点，而该三角形不是有向 3 圈，所以 D_L 是传递的. 这说明，D_L 是各顶点带环的传递竞赛图. 因此 L 是 X 上全序关系.

其次 D_D 中各顶点都带环，故关系 D 是自反的. 又 D_D 中非环的边都是单向边，故关系 D 是反对称的. 又 D_D 中长为 2 的有向路恰有两条：$1\to2\to6$，$1\to3\to6$. 它们构成两个 3 阶传递图 $1\to2$，$2\to6$，$1\to6$ 和 $1\to3$，$3\to6$，$1\to6$. 因此关系 D 是传递的. 从而 D 是偏序关系.

10. 5. 3 试确定下述有限集 X 上二元关系 R 的关系图 D_R. 并判定关系 R 是那种关系.

(1) $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$R_1=\{(x, y)\mid 0\leqslant x\leqslant 4,\ 0\leqslant y\leqslant 3\}$;

(2) $X=\{n\in \mathbf{N}\mid 1\leqslant n\leqslant 10\}$,

$R_2=\{(x, y)\mid 2\leqslant x,\ y\leqslant 7$，且 x 整除 $y\}$;

(3) $X=\{0, 1, 2, 3, 4\}$,

$R_3=\{(x, y)\mid 0\leqslant x-y<3\}$;

(4) $X=\{2, 3, 4, 5, 6\}$,

$R_4=\{(x, y)\mid x, y$ 互素$\}$.

解 (1) 易知 $R_1=\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$. 关系图 D_{R_1} 如图 10. 22 (1). 从 D_{R_1} 可知，R_1 不具有 10. 5. 1 中所列的关系性质.

(2) 易知 $R_2=\{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)\}$，它的关系图 D_{R_2} 如图 10. 22 (2). 从 D_{R_2} 可知，R_2 是反对称的.

(3) 易知 $R_3=\{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3), (4, 4)\}$. D_{R_3} 如图 10. 22 (3) 所示. D_{R_3} 中各顶点都带环，其他各边都是单向边，所以 R 是自反和反对称的.

(4) 易知 $R_4=\{(2, 3), (2, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 3), (4, 5), (5, 2), (5, 3), (5, 6), (6, 5)\}$, D_{R_4} 如图 10. 22 (4). 因为 D_{R_4} 是无向图，所以 R_4 是对称的.

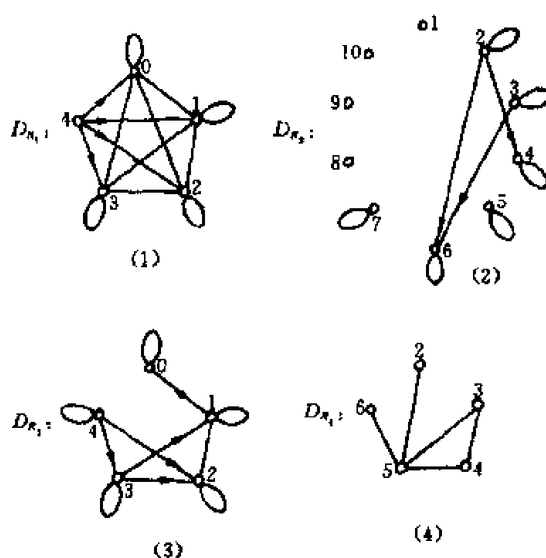


图 10. 22

10. 5. 4 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{(1, 2), (4, 3), (2, 2), (2, 1), (3, 1)\}$ 是 X 上二元关系. 则 R 是非传递的. 求 X 上二元关系 $R_1\supseteq R$，使 R_1 是传递的. 如此的 R_1 是否唯一？为什么？

解 易知 R 的关系图 D_R 如图 10. 23. 设 $R_1\supseteq R$ 是传递的，则 D_{R_1} 含子图 D_R. 由于 D_{R_1} 中含长为 2 的有向路 $4\to3\to1$，故 D_{R_1} 应含 $4\to1$. 又 D_{R_1} 含长为 2 的有向路 $3\to1\to2$. 故 D_{R_1} 应含 $3\to2$. 在 D_R 中添加边 $4\to1$ 和 $3\to2$，则得到 D_{R_1} 是传递的（图 10. 24）. 因此

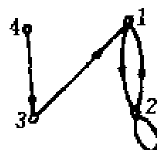


图 10. 23

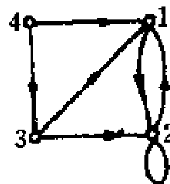


图 10. 24

$$R_1 = R \cup \{(4, 1), (3, 2)\}$$

是传递的．易知在 D_{R_1} 中不带环的顶点添加环，得到的图 D_{R_2} 仍是传递的，因此如此的 R_1 不是唯一的．

10．5．5 设 $X = \{a, b, c\}$ 上二元关系 $R = \{(a, a), (a, b), (b, c), (c, b)\}$．求 R 的自反闭包、对称闭包和传递闭包．

解 R 的关系图 D_R 如图 10．25．为求 R 的自反闭包 $r(R)$，只需在 D_R 中令不带环的顶点都带环，得到的即是 $D_{r(R)}$．因此 $r(R) = R \cup \{(b, b), (c, c)\}$．为求得关系 R 的对称闭包 $s(R)$，只需将 D_R 中的单向边变成双向边即可得 $s(R)$ 的关系图 $D_{s(R)}$．因此 $s(R) = R \cup \{(b, a)\}$．在 D_R 中只有一条长为 2 的有向路 $a \to b \to c$．为求得 R 的传递闭包 $t(R)$，只需在 D_R 中添加一条边 $a \to c$ 即得 $D_{t(R)}$．因此 $t(R) = R \cup \{(a, c)\}$．

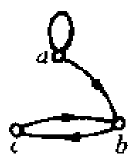


图 10．25

10．5．6 求 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 上的等价关系 R，使之能产生 X 的分划 $X_1 = \{1, 2\}$，$X_2 = \{3\}$，$X_3 = \{4, 5\}$．

解 设 X 是任意一个 n 元集，R 是 X 上一个等价关系，D_R 是 R 的关系图．则由 10．5．1 (7)，D_R 是若干个顶点均带环（loop）的完全子图之并．易知 D_R 的各完全子图的顶点集合即是顶点集合 D_R 的一个分划．因此，若 R 是题设 X 上的等价关系，则 D_R 如图 10．26 所示．所以 $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (4, 5), (5, 4), (5, 5)\}$．

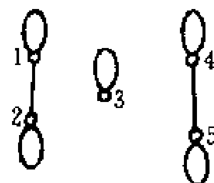


图 10．26

注 设 X 是 n 元集，R 是 X 上一个等价关系，关系图 D_R 是各顶点都带环的若干个不交的完全子图之并．而 D_R 的各完全子图的顶点集合即是 D_R 的顶点集合 X 的一个分划．易见 X 上等价关系 R 的集合与关系图 D_R 所确定的 X 的分划之间存在双射．因此 X 上等价关系的个数等于 X 的分划个数．

10．5．7 设 $X = \{0, 1, 2, 3\}$．求出 X 上所有包含序偶 $(0, 3)$ 和 $(2, 1)$ 的全序关系．

解 设 R 是 X 上包含 $(0, 3)$ 和 $(2, 1)$ 的一个全序关系．由 10．5．1 (9)，R 的关系图 D_R 是各顶点都带环的传递竞赛图．考虑 4 阶传递竞赛图 T_4 的结构．设 T_4 的顶点是 u_1，u_2，u_3，u_4．所谓 T_4 是竞赛图，是指它是对顶点 u_1，u_2，u_3，u_4 的完全图 K_4 的每一条边都指定一个方向得到的定向图．设顶点 u_1，u_2，u_3，u_4 在 T_4 中的出度分别是 d_1^+，d_2^+，d_3^+，d_4^+（它们也分别称为 u_1，u_2，u_3，u_4 的得分（score）），其中 $0 \leqslant d_1^+ \leqslant d_2^+ \leqslant d_3^+ \leqslant d_4^+ \leqslant 3$．由于 K_4 有 $C_4^2 = 6$ 条边，因此

$$d_1^+ + d_2^+ + d_3^+ + d_4^+ = 6.$$

将上式视为 d_1^+，d_2^+，d_3^+，d_4^+ 的方程，求其非负整数解 $(d_1^+, d_2^+, d_3^+, d_4^+)$，$d_1^+ \leqslant d_2^+ \leqslant d_3^+ \leqslant d_4^+$．易知其解为

$S_1 = (0, 1, 2, 3)$，$S_2 = (1, 1, 1, 3)$，

$S_3 = (0, 2, 2, 2)$，$S_4 = (1, 1, 2, 2)$．

和它们相应的 4 阶竞赛图分别如图 10．27 所示（图中顶点旁边的数字是该顶点的得分）：

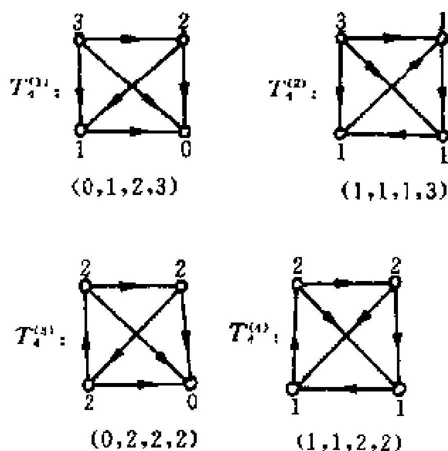


图 10．27

易验证，其中 $T_4^{(1)}$ 是传递的．现在将序偶 $(0, 3)$ 和 $(2, 1)$（即边 $0 \to 3$ 和 $2 \to 1$）嵌入到 $T_4^{(1)}$ 中，得到顶点编号的传递竞赛图 $T_4^{(1)}$，如图 10．28 所示（其中相应于各顶点带环的 4 阶传递竞赛图 $T_4^{(1)}$ 的 Hasse 图位于 $T_4^{(1)}$ 的右边）．于是所求的全序关系是

$R_1 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 3), (0, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 3), (3, 1), (1, 1)\}$，

$R_2 = \{(2, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 3), (0, 0), (0, 1), (0, 3), (1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$，

$R_3 = \{(0, 0), (0, 3), (0, 2), (0, 1), (3, 3), (3, 2), (3, 1), (2, 2), (2, 1), (1, 1)\}$，

$R_4 = \{(2, 2), (2, 1), (2, 0), (2, 3), (1, 1), (1, 0), (1, 3), (0, 0), (0, 3), (3, 3)\}$，

$R_5 = \{(0, 0), (0, 2), (0, 1), (0, 3), (2, 2), (2, 1), (2, 3), (1, 1), (1, 3), (3, 3)\}$，

$R_6 = \{(2, 2), (2, 0), (2, 3), (2, 1), (0, 0), (0, 3), (0, 1), (3, 3), (3, 1), (1, 1)\}$．

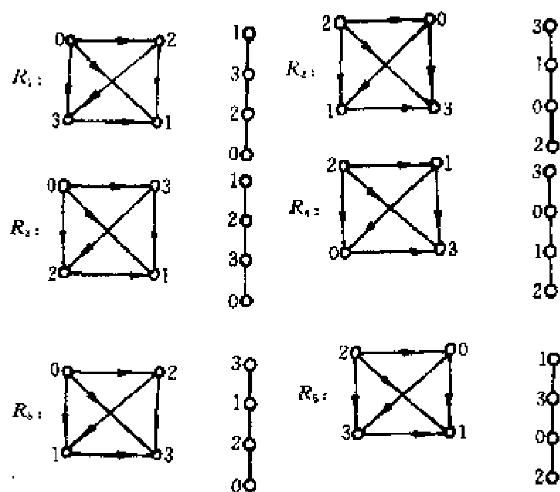


图 10. 28

10. 5. 8 n 阶完全图 K_n 的每一条边都指定一个方向，得到的有向图称为 n 阶竞赛图. 设 T_n 是一个 n 阶竞赛图，如果对于 T_n 中的任意三个顶点 x，y，z，当 $x \to y$，$y \to z$ 时必有 $x \to z$，则 T_n 称为传递的. 设 x 是 T_n 的顶点，它的出度 $d^+(x)$ 称为 x 的得分. 将 T_n 的 n 个顶点标记为 v_1，v_2，…，v_n，它们的得分依次记作 s_1，s_2，…，s_n，$s_1 \leqslant s_2 \leqslant \cdots \leqslant s_n$，则 $S=(s_1, s_2, \cdots, s_n)$ 称为 T_n 的得分向量. 证明：当 $n \geqslant 3$ 时，T_n 是传递的充要条件是：$S=(0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

证 由于竞赛图 T_n 是完全图 K_n 的一个定向图，所以每个得分 s_i 均满足 $0 \leqslant s_i \leqslant n-1$.

必要性. 设 T_n 是传递的. 如果 T_n 中顶点 u，v 的得分 $d^+(u)=d^+(v)$，则 u 和 v 的外邻域 $N^+(u)$ 和 $N^+(v)$ 所含顶点个数相同. 由于 T_n 是竞赛图，故必有 $u \to v$ 或 $v \to u$. 不妨设 $u \to v$ (图 10. 29) 由于 $|N^+(u)-\{v\}|<|N^+(v)|$，所以存在 $w \in N^+(v)$，使得 $w \notin N^+(u)$，且 $w \in N^+(v)$，即有 $u \to v$，$v \to w$，$w \to u$，与 T_n 是传递的相矛盾. 这就证明，T_n 中 n 个顶点的得分各不相同. 于是 T_n 的得分向量是 $S=(0, 1, 2, \cdots, n-1)$.

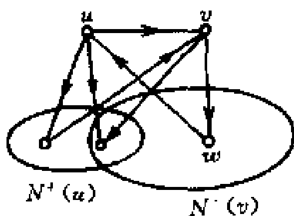


图 10. 29

充分性. 对 n 用归纳法. 当 $n=3$ 时，设 T_3 的得分向量是 $S=(0,1,2)$. 易知 T_3 如图10. 30所示.

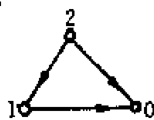


图 10. 30

因此 T_3 是传递的. 设结论对 $n-1$ 成立. 并设 T_n 的得分向量为 $S=(0, 1, 2, \cdots, n-1)$. 设 v_n 在 T_n 中的得分 $d^+(v_n)=n-1$. 易知删点子图 $T_{n-1}=T_n-v_n$ 的得分向量是 $(0, 1, 2, \cdots, n-2)$. 由归纳假设 T_{n-1} 是传递的. 如果 T_n 不是传递的，则存在 3 顶点 x，y，z，使得 $x \to y$，$y \to z$，$z \to x$. 因 T_{n-1} 是传递的，故 x，y，z 中必有一个顶点不在 T_{n-1} 中. 不妨设 $x=v_n$，则因 $z \to x$，故 v_n 的得分 $d^+(v_n) \leqslant n-2$. 与 $d^+(v_n)=n-1$ 矛盾. 从而 T_n 是传递的.

注 由 10. 5. 8 可知，当 $n \geqslant 3$ 时，传递竞赛图 T_n 的得分向量一定是 $S=(0, 1, 2, \cdots, n-1)$. 而得分向量为 $(0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 的 n 阶竞赛图在同构意义下是唯一的，如图 10. 31 所示，其中的边都是由位于上方的顶点指向下方的顶点的. 因此，对于竞赛图 T_n 的顶点集合 $X=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 中顶点的一种编号，即得一个传递竞赛图. 所以以 X 为顶点集合的编号传递竞赛图共有 $n!$ 个. 对于 X 上编号传递竞赛图 T_n，让它的各顶点都带环，得到的是 X 上各顶点都带环的传递竞赛图 D_R，由此即得 X 上一个全序关系 (见 10. 5. 1 (9)). 因此 n 元集 X 上全序关系共有 $n!$ 个. 10. 5. 8 即是 $n=4$ 的情形.

v_n
v_{n-1}
⋮
v_2
v_1

图 10. 31

10. 5. 9 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 上二元关系 R_1，R_2，R_3 和 R_4 分别为

$R_1=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (4, 3), (4, 2)\}$，

$R_2=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$，

$R_3=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 1), (3, 4), (3, 2), (1, 2), (4, 2), (4, 1)\}$，

$R_4=\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (3, 1), (4, 3), (4, 1), (4, 2)\}$.

其中哪些是偏序关系，哪些是全序关系. 若是偏序关系，试画出它们的 Hasse 图.

解 易知 R_1，R_2，R_3，R_4 的关系图 D_{R_1}，D_{R_2}，D_{R_3}，D_{R_4} 分别如图 10. 32 所示.

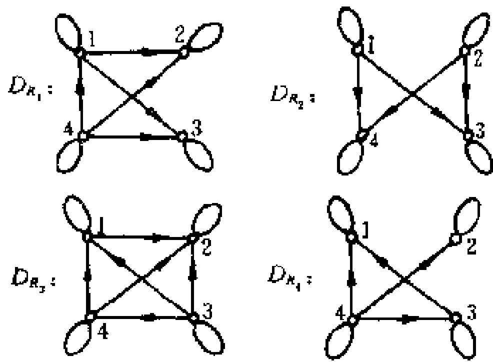


图 10. 32

由于 D_{R_i} 中各顶点都带环，其他边都是单向边，所以由 10. 5. 1 (1) 和 (5)，R_i 是自反、反对称的. 又容易验证，D_{R_i} 是传递的，所以 R_i 是传递的. 因此 R_i 是偏序关系，$i=1, 2, 3, 4$. 又 D_{R_3} 中除环外是一个 4 阶竞赛图，故由 10. 5. 1 (9)，R_3 是全序关系.

考虑 D_{R_3} 的 Hasse 图. 去掉 D_{R_3} 中所有环，得到的是一个 4 阶传递竞赛图 T_4，其中顶点 3, 4, 1, 2 的得分分别是 3, 2, 1, 0. T_4 中从顶点 3 到顶点 2 有一条长为 3 的路 3→4→1→2. 因此在关系 R_3 中含有链 $3\leqslant 4\leqslant 1\leqslant 2$. 从而得到 R_3 的 Hasse 图 (图 10. 33). 再如 D_{R_1}. 去掉 D_{R_1} 中各顶点所带的环，得到一个 4 阶定向图，其顶点 4, 1, 2, 3 的出度依次是 3, 2, 0, 0，它含有长为 2 的路 4→1→2, 4→1→3. 因此 R_1 中含有链 $4\leqslant 1\leqslant 2$, $4\leqslant 1\leqslant 3$. 由此即得 R_1 的 Hasse 图 (图 10. 33).

同理可得关于 R_2, R_4 的 Hases 图 (图 10. 33).

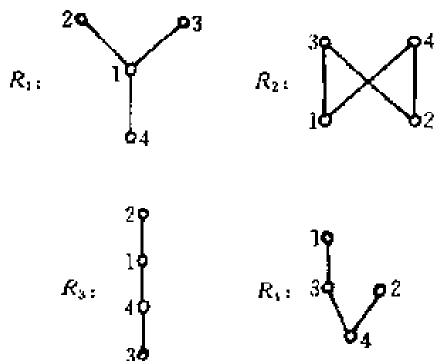


图 10. 33

注 设 R 是 n 元集 X 的偏序关系，则 (X, R) 称为一个偏序集. 对偏序集 (X, R)，容易从 R 的关系图 D_R 得到偏序集 (X, R) 的 Hasse 图. 其方法是将关系图 D_R 的顶点集合 X 的顶点用平面上的点表示，对于不同的 x, $y\in X$，当 x 覆盖 y，即 D_R 中由顶点 y 指向顶点 x 的所有有向路的最大路长为 1 时，点 x 位于 y 的上方，并用一条直线段从 x 向下连到 y，得到的就是偏序集 (X, R) 的 Hasse 图. 反之利用 Hasse 图可以确定一个偏序集 (X, R). 应当指出的是，有的图貌似 Hasse 图，其实并非 Hasse 图.

10. 5. 10 图 10.34 所示的图是否是 Hasse 图，为什么?

解 设图 10.34 是一个 Hasse 图，则由 Hasse 图的构造可知，其中 y 覆盖 x，而 x 覆盖 w. 另一方面，图 10. 34 中含有由 y 向下到 w 的直线段，所以 y 覆盖 w，矛盾. 因此图 10.34 不是 Hasse 图.

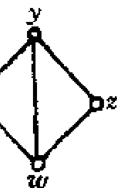


图 10. 34

10. 5. 11 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$，$\mathscr{P}(X)$ 是 X 的所有子集的集合，R 是 $\mathscr{P}(X)$ 的子集间的包含关系. 画出偏序集 $(\mathscr{P}(X), R)$ 的 Hasse 图.

解 显然 $\mathscr{P}(X)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. 易知偏序集 $(\mathscr{P}(X), X)$ 的 Hasse 图如图 10. 35 所示.

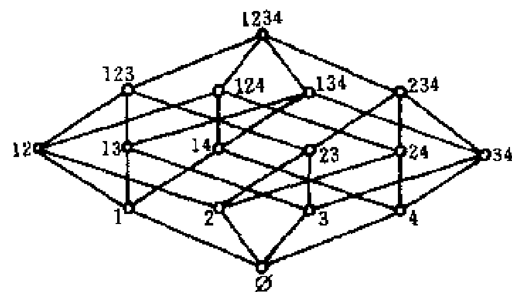


图 10. 35

10. 5. 12 设 X 是 n 元集，π 和 ρ 是 X 的两个分划. 如果 π 的每个子集都是 ρ 的某个子集的子集，则称 π 是 ρ 的一个加细，记作 $\pi\leqslant\rho$. X 的所有分划的集合记作 $\mathscr{B}(X)$. 易知 $(\mathscr{B}(X), \leqslant)$ 是偏序集. 当 $X=\{1, 2, 3, 4\}$ 时画出偏序集 $(\mathscr{B}(X), \leqslant)$ 的 Hasse 图.

解 设 $X=\{1, 2, 3, 4\}$，则 $X_1=\{1\}$, $X_2=\{2, 4\}$, $X_3=\{3\}$ 是 X 的一个分划，记之为 24|1|3. 易知 $\mathscr{B}(X)=\{1|2|3|4, 12|3|4, 13|2|4, 14|2|3, 23|1|4, 24|1|3, 34|1|2, 12|34, 13|24, 14|23, 123|4, 124|3, 134|2, 234|1, 1234\}$. 图 10. 36 即是 $\mathscr{B}(X)$ 的 Hasse 图.

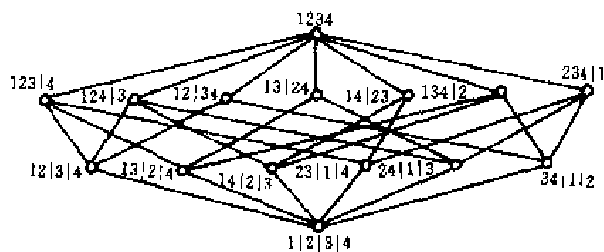


图 10. 36

10. 5. 13 设 D_n 是所有整除正整数 n 的正整数集合，R 是 D_n 中整数间的整除关系. 易知 (D_n, R) 是格. 定义笛卡尔积 $D_4 \times D_9$ 上的二元关系 T 如下：对任意 (a, b), $(c, d) \in D_4 \times D_9$，则当 $a|c$ 且 $b|d$ 时 $((a, b), (c, d)) \in T$. 易知 $(D_4 \times D_9, T)$ 也是格. 证明：格 (D_{36}, R) 与 $(D_4 \times D_9, T)$ 同构.

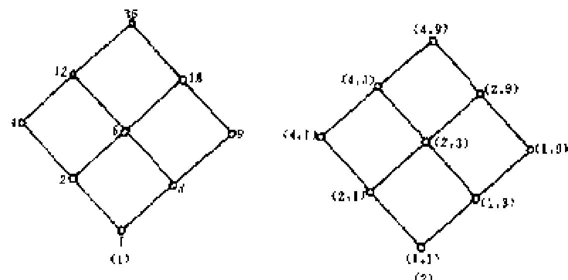


图 10. 37

证 易知 $D_{36} = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$. 格 (D_{36}, R) 的 Hasse 图如图 10. 37 (1) 所示. 而 $D_4 = \{1, 2, 4\}$，$D_9 = \{1, 3, 9\}$. 所以 $D_4 \times D_9 = \{(1, 1), (1, 3), (1, 9), (2, 1), (2, 3), (2, 9), (4, 1), (4, 3), (4, 9)\}$. 格 $(D_4 \times D_9, T)$ 的 Hasse 图如图 10. 37 (2) 所示. 比较格 (D_{36}, R) 和 $(D_4 \times D_9, T)$ 的 Hasse 图，可以建立格 $(D_4 \times D_9, T)$ 到格 (D_{36}, R) 的映射 φ：对任意 $(a, b) \in D_4 \times D_9$，令 $\varphi(a, b) = ab$. 易见 φ 是双射. 从 Hasse 图 10. 37 (2) 可知，对于格 $(D_4 \times D_9, T)$ 的任意两个元素 (a, b), (c, d)，有

$$(a, b) \vee (c, d) = (\mathrm{LCM}(a, c), \mathrm{LCM}(b, d)),$$

$$(a, b) \wedge (c, d) = (\mathrm{GCD}(a, c), \mathrm{GCD}(b, d)).$$

因此

$$\begin{aligned}\varphi((a, b) \vee (c, d)) &= \mathrm{LCM}(a, c)\ \mathrm{LCM}(b, d)\\ &= \mathrm{LCM}(ab, cd) = ab \vee^* cd\\ &= \varphi(a, b) \vee^* \varphi(c, d),\end{aligned}$$

其中 $x \vee^* y$ 是格 (D_{36}, R) 中元素 x 和 y 的最小上界. 而

$$\begin{aligned}\varphi((a, b) \wedge (c, d)) &= \mathrm{GCD}(a, c)\ \mathrm{GCD}(b, d)\\ &= \mathrm{GCD}(ab, cd)\\ &= ab \wedge^* cd\\ &= \varphi(a, b) \wedge^* \varphi(c, d),\end{aligned}$$

其中 $x \wedge^* y$ 是格 (D_{36}, R) 中元素 x 和 y 的最大下界. 这表明，φ 是保持格 $(D_4 \times D_9, T)$ 的并运算和交运算的. 因此 φ 是代数系统 $(D_4 \times D_9, T, \vee, \wedge)$ 到代数系统 $(D_{36}, R, \vee^*, \wedge^*)$ 的同构映射，从而 $(D_4 \times D_9, T)$ 和 (D_{36}, R) 是同构的.

注 证明格 (X, R) 和格 (Y, T) 同构的关键是建立集合 X 到集合 Y 上的保持序关系、并运算和交运算的双射 φ. 利用格 (X, R) 和格 (Y, T) 的 Hasse 图即可容易找到格同构映射 φ.

10. 5. 14 设 $(X_1, \leqslant_1)$ 和 $(X_2, \leqslant_2)$ 是偏序集，$X_1 \times X_2$ 是 X_1 和 X_2 的笛卡尔积. 对任意 (x_1, x_2), $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$，当且仅当 $x_1 \leqslant_1 y_1$，$x_2 \leqslant_2 y_2$ 时令 $(x_1, x_2) \leqslant (y_1, y_2)$，则 $(X_1 \times X_2, \leqslant)$ 是偏序集，称为 $(X_1, \leqslant_1)$ 和 $(X_2, \leqslant_2)$ 的直积. 当 $X_1 = X_2 = X$，且 $\leqslant_1 = \leqslant_2$ 时，$(X_1 \times X_2, \leqslant)$ 简记为 $(X^2, \leqslant)$. 设 $X = \{0, 1\}$，取关系 $\leqslant$ 为通常意义下的小于或等于的关系，即"$\leqslant$". 画出 $(X^2, \leqslant)$ 和 $(X^3, \leqslant)$ 的 Hasse 图.

解 易知偏序集 $(X, \leqslant)$ 的 Hasse 图是图 10. 38 (1). 图 10. 38 (2) 和图 10. 38 (3) 分别是 $(X^2, \leqslant)$ 和 $(X^3, \leqslant)$ 的 Hasse 图.

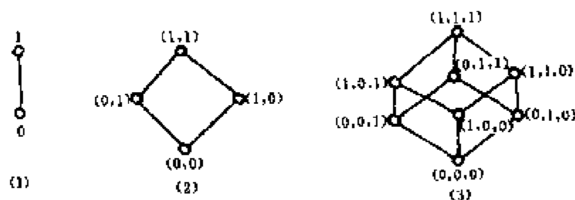


图 10. 38

10. 5. 15 设 X 是下述正整数集合，取 X 中二元关系 $\leqslant$ 为整除关系. 对哪些 X，$(X, \leqslant)$ 是格？

(1) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$；

(2) $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 14\}$；

(3) $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

解 (1) 偏序集 $(X, \leqslant)$ 的 Hasse 图如图 10. 39 (1) 所示. 从其 Hasse 图容易验证，对任意

x, $y\in X$, x 和 y 都有最小上界和最大下界. 因此 $(X, \leqslant)$ 是格.

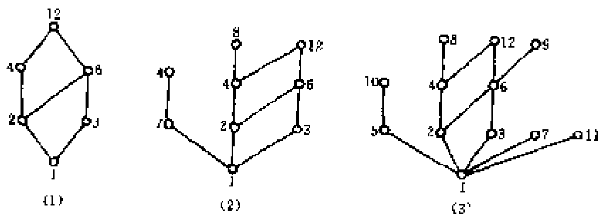


图 10. 39

(2) 偏序集 $(X, \leqslant)$ 的 Hasse 图如图 10. 39 (2) 所示. 易见其中 8 和 14 没有最小下界. 因此 $(X, \leqslant)$ 不是格.

(3) 偏序集 $(X, \leqslant)$ 的 Hasse 图如图 10. 39 (3) 所示. 其中 9 和 10 无最大上界, 因此 $(X, \leqslant)$ 不是格.

注 从偏序集 $(X, \leqslant)$ 的 Hasse 图容易直观地判定偏序集 $(X, \leqslant)$ 所具有的特殊性质. Hasse 图在研究偏序集中的作用和平面几何中几何图形在论证几何命题所起的作用是相仿的.

10. 5. 16 证明: 分别以图 10. 40 (1) 和 (2) 作为 Hasse 图的格 $(X, \leqslant, \vee, \wedge)$ 都不是分配格.

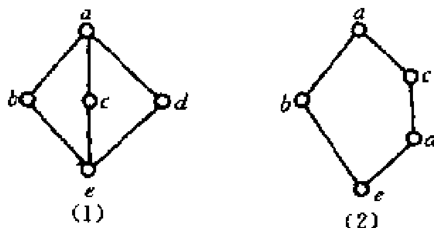


图 10. 40

证 (1) 设格 $(X, \leqslant, \vee, \wedge)$ 的 Hasse 图是图 10. 40 (1), 则 $c\vee d=a$. 因此 $b\wedge(c\vee d)=b\wedge a=b$. 另一方面, $b\wedge c=b\wedge d=e$, 所以 $(b\wedge c)\vee(b\wedge d)=e$. 因此

$$b\wedge(c\vee d)\neq(b\wedge c)\vee(b\wedge d).$$

这就证明, $(X, \leqslant, \vee, \wedge)$ 不是分配格.

(2) 设图 10. 40 (2) 是格 $(X, \leqslant, \vee, \wedge)$ 的 Hasse 图, 则 $b\wedge d=e$. 所以 $c\vee(b\wedge d)=c\vee e=c$. 另一方面, $c\wedge b=e$, $c\wedge d=d$. 因此 $(c\wedge b)\vee(c\wedge d)=e\vee d=d$. 所以

$$c\vee(b\wedge d)=c\neq d=(c\wedge b)\vee(c\wedge d).$$

从而 $(X, \leqslant, \vee, \wedge)$ 不是分配格.

10. 5. 17 证明: 格 $(X, \leqslant)$ 为分配格的充要条件是: 格 $(X, \leqslant)$ 的每个子格都不同构于图 10. 40 (1)或 (2) 确定的格.

证 必要性. 由 10. 5. 16, 图 10. 40 (1) 或 (2) 确定的格都不是分配格. 而任何一个分配格的子格一定是分配格, 从而不能同构于图 10. 40 (1) 或 (2) 确定的格.

充分性. 设格 $(X, \leqslant)$ 不含同构于图 10. 40 (1) 或 (2) 确定的格的子格. 由于格 $(X, \leqslant)$ 不含同构于图 10. 40 (2) 的子格, 因此格 $(X, \leqslant)$ 是模格. 现在设模格 $(X, \leqslant)$ 是非分配的. 如能证明非分配的模格 $(X, \leqslant)$ 含有同构于图 10. 40 (1) 的子格, 则结论即成立. 为了在非分配的模格 $(X, \leqslant)$ 找出如图 10. 40 (1) 的子格, 我们分析 Hasse 图 10. 40 (1) 的特征. 首先它含有 5 个不同元素 a, b, c, d, e, 其中 a 和 e 分别是全上界和全下界, 其次 b, c, d 是相互不可比的, 且任意两个元素的并和交分别是 a 和 e. 因为模格 $(X, \leqslant)$ 是非分配的, 因此存在三个元素 a_1, a_2, a_3, 它们不满足分配律. 如果将 a_1, a_2, a_3 视为 b, c, d, 则 $a_1\vee a_2$, $a_2\vee a_3$, $a_3\vee a_1$ 似应相等. 但实际上未必能如此. 因此必须作适当的变化. 为此记

$$u=(a_1\vee a_2)\wedge(a_2\vee a_3)\wedge(a_3\vee a_1),$$
$$v=(a_1\wedge a_2)\vee(a_2\wedge a_3)\vee(a_3\wedge a_1),$$
$$e_1=(a_2\wedge a_3)\vee(a_1\wedge(a_2\vee a_3)),$$
$$e_2=(a_3\wedge a_1)\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1)),$$
$$e_3=(a_1\wedge a_2)\vee(a_3\wedge(a_1\vee a_2)).$$

现在证明, u, v, e_1, e_2, e_3 形成的子格与图 10. 40 (1)的格同构.

首先, 因为 $a_1\wedge a_2\leqslant a_1\vee a_2$, $a_1\wedge a_2\leqslant a_2\leqslant a_2\vee a_3$, $a_1\wedge a_2\leqslant a_1\leqslant a_1\vee a_3$, 所以,

$$a_1\wedge a_2\leqslant(a_1\vee a_2)\wedge(a_2\vee a_3)\wedge(a_3\vee a_1)=u.$$

同理, $a_2\wedge a_3\leqslant u$, $a_3\wedge a_1\leqslant u$. 于是

$$v=(a_1\wedge a_2)\vee(a_2\wedge a_3)\vee(a_3\wedge a_1)\leqslant u.$$

因为 $(X, \leqslant)$ 是模格, 所以, 如果 $v=u$, 则有

$$a_1\vee(a_2\wedge a_3)=(a_1\vee a_2)\wedge(a_1\vee a_3),$$
$$a_1\wedge(a_2\vee a_3)=(a_1\wedge a_2)\vee(a_1\wedge a_3).$$

即 a_1, a_2, a_3 满足分配律, 与 a_1, a_2, a_3 的选取相矛盾. 所以 $v\leqslant u$, 但 $v\neq u$.

其次,

$$\begin{aligned}e_1\vee e_2&=((a_1\wedge a_3)\vee(a_1\wedge(a_2\vee a_3)))\\&\quad\vee((a_3\wedge a_1)\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1)))\\&=(a_2\wedge a_3)\vee(a_1\wedge(a_2\vee a_3))\\&\quad\vee(a_3\wedge a_1)\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1))\\&=(a_1\wedge(a_2\vee a_3))\vee(a_3\wedge a_1)\\&\quad\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1))\vee(a_2\wedge a_3)\\&=(a_1\wedge(a_2\vee a_3))\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1)).\end{aligned}$$

因为 $a_2\wedge(a_3\vee a_1)\leqslant a_2\leqslant a_2\vee a_3$，而且（$X$，$\leqslant$）是模格，所以

$$e_1\vee e_2=(a_2\vee a_3)\wedge(a_1\vee(a_2\wedge(a_3\vee a_1))).$$

而 $a_1\leqslant a_3\vee a_1$，（X，$\leqslant$）是模格，所以

$$e_1\vee e_2=(a_2\vee a_3)\wedge(a_3\wedge a_1)\wedge(a_1\wedge a_2)=u.$$

同理可证，$e_2\vee e_3=e_3\vee e_1=u$．即 e_1，e_2，e_3 中任意两个元素之并都是 u．

类似可证，e_1，e_2，e_3 中任意两个元素之交都是 v．

最后证明，u，v，e_1，e_2，e_3 互异，且 e_1，e_2，e_3 是两两不可比的．为此设 $e_1=e_2$，则由上面证明，有 $v=e_1\wedge e_2=e_1=e_1\vee e_2=u$，矛盾．因此 $e_1\neq e_2$．同理，$e_1\neq e_3$，$e_2\neq e_3$．另设 $u=e_1$，则 $v=e_1\wedge e_2=u\wedge e_2=e_2$，$u=e_2\vee e_3=v\vee e_3=e_3$，从而 $e_1=u=e_3$，矛盾．因此 $u\neq e_1$．同理，$u\neq e_2$，e_3．类似可证 $v\neq e_1$，e_2，e_3．因此，u，v，e_1，e_2，e_3 是五个互异的元素．设 $e_1\leqslant e_2$，则 $u=e_1\vee e_2=e_2$，矛盾；若 $e_2\leqslant e_1$，则 $u=e_1\vee e_2=e_1$，矛盾．因此，e_1 和 e_2 是不可比的．同理可证，e_1，e_2，e_3 两两不可比．于是非分配的模格必含有由五个元素 u，v，e_1，e_2，e_3 形成的子格，其 Hasse 图如图 10．41．它显然和图 10．40（1）的格同构．这就证明，不含图 10．40（1）和（2）的格一定是分配格．

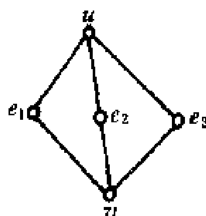


图 10．41

10．5．18 设 $X=\{1$，2，5，10，11，22，55，$110\}$，其上二元关系 R 取为整除关系．则（X，R）是偏序集．对任意 x，$y\in X$，定义 $x\vee y=\mathrm{LCM}(x,y)$，$x\wedge y=\mathrm{GCM}(x,y)$．则（$X$，$R$，$\vee$，$\wedge$）是格．对任意 $x\in X$，定义 $x'=\dfrac{110}{x}$．证明：代数系统（X，R，LCM，GCM$'$）是一个布尔代数．

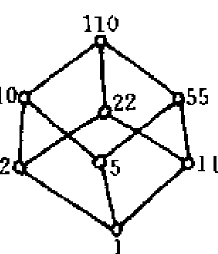


图 10．42

证 图 10．42 是格（X，R，$\vee$，$\wedge$）的 Hasse 图．易知其中不含同构于图 10．40（1）和（2）的子格．由 10．5．16，（X，R，$\vee$，$\wedge$）是分配格．另外从 Hasse 图易知，对每个 $x\in X$，$x'=\dfrac{110}{x}$，满足：

$$x\vee x'=\mathrm{LCM}(x,x')=110,$$
$$x\wedge x'=\mathrm{LCM}(x,x')=1.$$

而 110 和 1 分别是格（X，R，$\vee$，$\wedge$）的全上界和全下界．因此 x' 是 x 的补元．所以（X，R，$\vee$，$\wedge$）是有补分配格，从而是布尔格．视布尔格（X，R）的求元 x 的补元 x' 为 X 上一元运算，则布尔格（X，R）在并运算、交运算与补运算下成为布尔代数．

注 在验证代数系统（X，R，LCM，GCM$'$）是布尔代数时，这里主要是作出偏序集（X，R）的 Hasse 图，然后验证（X，R）是格、分配格和有补的分配格．可见 Hasse 图在证明中的作用．

10．5．19 设 $X=\{a,b,c\}$ 是字母表，由 X 中的字母可以组成 27 个 3 元字．试求 X 上 27 元环状字，使其包含 X 上所有 27 个 3 元字．

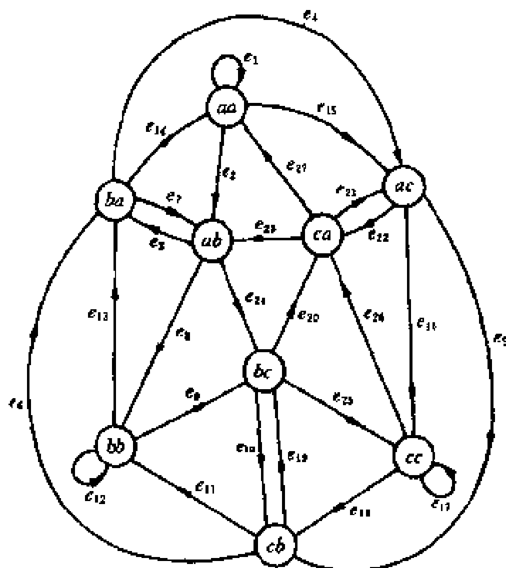


图 10．43

解 设 $W=\odot x_1x_2\cdots x_{27}$ 是 X 上 27 元环状字，而且 X 上每个 3 元字都在 W 中出现一次．因为 W 是环状，且 3 元字 aaa 在 W 中出现，因此不妨设 $x_1x_2x_3=aaa$，而 $x_2x_3x_4=aax_4$ 是 X 上另一个 3 元字，所以 $x_4\neq a$．不妨设 $x_2x_3x_4=aab$．于是 $x_3x_4x_5=abx_5$ 是 X 上 3 元字，$x_5\in\{a,b,c\}$．如此继续．因此如果把 $x_1x_2=aa$，$x_3x_4=ab$，x_5x_6 等等视为一个有向图 D 的顶点，把 $e_1=x_1x_2x_3=aaa$，$e_2=x_2x_3x_4=aab$，$e_3=x_3x_4x_5$ 等等视为有向图 D 的边，则 W 是 D 中由 27 条不同的边 e_1，e_2，…，e_{27} 首尾连接而成的，而且 e_1 是连接顶点 aa 和 aa 的环，e_2 是连接顶点 aa 和 ab 的边，如此继续．因此我们可以定义有向图 D 如下．其顶点集合 $V(D)=\{aa$，bb，cc，ab，ba，ac，

ca，bc，cb}．对任意 xy，$zw \in V(D)$，当且仅当 $y=z$ 时，令 $xy \to zw$，并记此有向边为 xyw．如此定义的 9 阶有向图 D 如图 10．43 所示．注意，对任意 $xy \in V(D)$，必有 $xy \to yw$，其中 $w \in \{a, b, c\}$，因此 D 中顶点 xy 的出度为 3．又对任意 $xy \in V(D)$，必有 $wx \to xy$，其中 $w \in \{a, b, c\}$，因此顶点 xy 的入度也是 3．另外，对任意 xy，$zw \in V(D)$，必有 $xy \to yz$，$yz \to zw$，又有 $zw \to wx$，$wx \to xy$．因此有向图 D 是连通的．由于 D 中各顶点的出度都是 3，因此 D 中有向边数为 27．再因为有向图 D 是 3 正则的，连通的，因此 D 具有有向 Euler 回路 $e_1e_2\cdots e_{27}$．于是

$$W = \odot\, aaabacbabbcbbbaacccbcacabcc$$

即是所求的一个环状字．

注 构造 9 阶有向图 D，使之具有有向 Euler 回路，是解 10．5．19 的关键．请仔细体会构造的原理．无妨先考虑 $n=2$ 的情形，即设 $X=\{a, b\}$．以 X 为字母表的 2 元字共有 4 个，求 X 上 4 元环状字，使之包含 X 上所有的 2 元字．

10．5．20 构造一个与字母 b，d，g，o，y，e 对应的前缀码，画出该前缀码对应的二分树．并用这六个字母构成一个短语，写出该短语的编码信息．

解 令字母 b，d，g，o，y，e 分别对应于码字 {000，001，010，011，10，11}．则 $A=$ {000，001，010，011，10，11} 显然是前缀码．其二分树如图 10．44 所示．设字母 b，d，g，o，y，e 构成短语是 good bye，则其编码信息是 0100110110010001011．

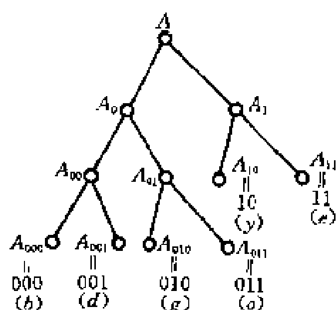


图 10．44

10．5．21 设 a_1，a_2，…，a_n 是 n 个数，$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$，则 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 称为一个数表．设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 和 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$ 是两个数表．取 $c_1=\min\{a_1, b_1\}$ 作为数表 C 的最小数．如果 $c_1=a_1$，则取 $c_2=\min\{a_2, b_1\}$ 作为数表 C 中次小数；如果 $c_1=b_1$，则取 $c_2=\min\{a_1, b_2\}$ 作为数表 C 中次小数．如此继续，得到数表 $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_{n+m}\}$，其中 $c_1 < c_2 < \cdots < c_{n+m}$，且 $C=A\cup B$．则数表 C 称为数表 A 和 B 的合并．易知将数表 A 和 B 合并为数表 C，需经过 $n+m-1$ 次比较．给定 k 个数表 A_1，A_2，…，A_k，为将 A_1，A_2，…，A_k 合并成数表 A，可以采用如下的步骤：从 k 个数表 A_1，A_2，…，A_k 中任取两个数表 A_i 和 A_j，将它们合并成数表 B．再从 $k-1$ 个数表 B，A_1，A_2，…，A_{i-1}，A_{i+1}，…，A_{j-1}，A_{j+1}，…，A_k 中任取两个数表，并将它们合并成一个数表．重复这一步骤，直到只剩下一个数表为止．易知将 k 个数表 A_1，A_2，…，A_k 合并成一个数表，所需比较两数大小的总次数依赖于数表 A_1，A_2，…，A_k 合并的方式．问题是：

（1）设 A_1，A_2，A_3，A_4 是分别具有 73，44，100，55 个数的四个数表．试将 A_1，A_2，A_3，A_4 合并成一个数表 C，使总比较次数为最小；

（2）设数表 A_i 含有 n_i 个数，$i=1, 2, \cdots, k$．试将它们合并成一个数表 C，使总比较次数为最小．

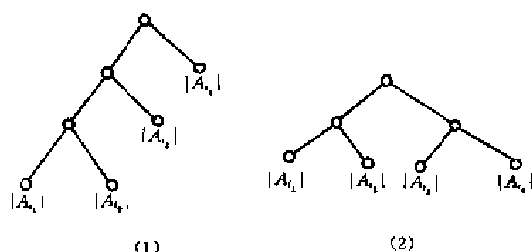


图 10．45

解 （1）将数表 A_1，A_2，A_3，A_4 合并成数表 C，从本质上讲有两种不同方式：一是从 A_1，A_2，A_3，A_4 中任取两个数表 A_{i_1}，A_{i_2}，将它们合并为 (A_{i_1}, A_{i_2})，再将 A_{i_1}，A_{i_2} 与余下两个数表中任意一个数表 A_{i_3} 合并为 $((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3})$．最后将 $((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3})$ 与余下数表 A_{i_4} 合并为 $(((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3}), A_{i_4})=C$．其合并方式可用带权树 T_1 表示（图 10．45（1）），其中悬挂点所带的权即是对应的数表所含数的个数；二是从 A_1，A_2，A_3，A_4 中任取两个数表 A_{i_1}，A_{i_2}，将它们合并为 (A_{i_1}, A_{i_2})，并将余下两个数 A_{i_3} 和 A_{i_4} 合并为 (A_{i_3}, A_{i_4})，再将 (A_{i_1}, A_{i_2}) 和 (A_{i_3}, A_{i_4}) 合并为 $C=((A_{i_1}, A_{i_2}), (A_{i_3}, A_{i_4}))$．其合并方式可用带权树 T_2 表示（图 10．45（2））．

现在考虑按带权树 T_1 的合并方式所需总比较次数 $\sigma(T_1)$．将 A_{i_1} 和 A_{i_2} 合并成 (A_{i_1}, A_{i_2})，所需比较次数为

$$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|-1.$$

将(A_{i_1}, A_{i_2})和A_{i_3}合并成$((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3})$，所需比较次数为

$$|(A_{i_1}, A_{i_2})|+|A_{i_3}|-1$$
$$=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|-1.$$

将$((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3})$与$A_{i_4}$合并为$C=(((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3}), A_{i_4})$，所需比较次数为

$$|((A_{i_1}, A_{i_2}), A_{i_3})|+|A_{i_4}|-1$$
$$=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|-1.$$

因此总比较次数$\sigma(T_1)$为

$$\sigma(T_1)=3|A_{i_1}|+3|A_{i_2}|+2|A_{i_3}|+|A_{i_4}|-3.$$

注意，带权树T_1的权$w(T_1)$为

$$w(T_1)=3|A_{i_1}|+3|A_{i_2}|+2|A_{i_3}|+|A_{i_4}| \qquad ①$$

悬挂点数$n(T_1)$为

$$n(T_1)=4.$$

于是有

$$\sigma(T_1)=w(T_1)-n(T_1)+1.$$

对于不同的带权树T_1，其总比较次数$\sigma(T_1)$是不同的．为使$\sigma(T_1)$最小，必需使$w(T_1)$最小．由式①可知，当$|A_{i_1}|\leqslant|A_{i_2}|\leqslant|A_{i_3}|\leqslant|A_{i_4}|$时相应的带权树$T_1$的权$w(T_1)$为最小，即当$T_1$如图10．46所示时$w(T_1)$为最小，其值为

$$w(T_1)=3\times44+3\times55+2\times73+100$$
$$=543.$$

而

$$\sigma(T_1)=543-4+1=540. \qquad ②$$

再考虑按带权树T_2的合并方式所需总比较次数$\sigma(T_2)$．将A_{i_1}和A_{i_2}合并为(A_{i_1}, A_{i_2})，所需比较次数为

$$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|-1.$$

将(A_{i_3}, A_{i_4})合并为(A_{i_3}, A_{i_4})，所需比较次数为

图10．46

$$|A_{i_3}|+|A_{i_4}|-1.$$

将(A_{i_1}, A_{i_2})和(A_{i_3}, A_{i_4})合并为$C=((A_{i_1}, A_{i_2}), (A_{i_3}, A_{i_4}))$，所需比较次数为

$$|(A_{i_1}, A_{i_2})|+|(A_{i_3}, A_{i_4})|-1$$
$$=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|-1.$$

因此

$$\sigma(T_2)=2|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|-3.$$
$$=2(|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|)-3.$$

注意，带权树T_2的权$w(T_2)$为

$$w(T_2)=2|A_{i_1}|+2|A_{i_2}|+2|A_{i_3}|+2|A_{i_4}|$$
$$=2(|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|).$$

而悬挂点数$n(T_2)$为$n(T_2)=4$，所以

$$\sigma(T_2)=w(T_2)-n(T_2)+1$$
$$=2(73+44+100+55)-3$$
$$=541. \qquad ③$$

比较②和③可知，按合并方式$((A_2, A_4), A_1, A_3)$，总比较次数$\sigma(T_1)$为最小，其值为540．

(2) 将k个数表$A_1, A_2, \cdots, A_k$合并成一个数表C的合并方式是多种多样的．由于每一次合并总是将两个数表合并成一个数表，因此可以用带权二分树T表示合并方式，T的悬挂点的权即是悬挂点表示的数表所含数的个数．图10．47给出了一个k个悬挂点的带权二分树T的示意图．T的根的左子树和右子树分别记作T_1和T_2．T_1含有s个悬挂点$v_1, v_2, \cdots, v_s$，它们的权依次是相应的数表$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$所含数的个数$n_{i_1}, n_{i_2}, \cdots, n_{i_s}$．$T_2$含有$k-s$个悬挂点$v_{s+1}, \cdots, v_k$，它们的权依次是相应的数表$A_{i_{s+1}}, \cdots, A_{i_k}$所含数的个数$n_{s+1}, \cdots, n_k$．

现在对$k\geqslant4$用归纳法证明．按带权二分树T的合并方式，将$A_1, A_2, \cdots, A_k$合并成数表C，所需总比较次数$\sigma(T)$满足

$$\sigma(T)=w(T)-n(T)+1, \qquad ④$$

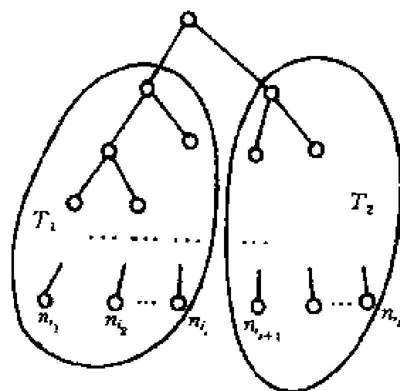


图10．47

其中$w(T)$和$n(T)$分别是T的权和悬挂点个数．当$k=4$时在上一段证明中已证明结论成立．假设结论对$<k$成立．下面证明结论对k成立．注意，按带权二分树T合并时，必须将$A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$按右子树将$A_{i_{s+1}}, \cdots, A_{i_k}$合并成数表$(A_{i_{s+1}}, \cdots, A_{i_k})$．最后再将数表$(A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s})$和$(A_{i_{s+1}}, \cdots, A_{i_k})$合并成数表$C$．由归纳

假设，

$$\sigma(T_1)=w(T_1)-n(T_1)+1,$$

$$\sigma(T_2)=w(T_2)-n(T_2)+1.$$

将数表 $(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s})$ 和 $(A_{i_{s+1}},\cdots,A_{i_k})$ 合并成数表 C，所需比较次数是

$$\begin{aligned}&|(A_{i_1},A_{i_2},\cdots,A_{i_s})|\\&+|(A_{i_{s+1}},\cdots,A_{i_k})|-1\\&=|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_s}|\\&+|A_{i_{s+1}}|+\cdots+|A_{i_k}|-1.\end{aligned}$$

于是总比较次数 $\sigma(T)$ 为

$$\sigma(T)=\sigma(T_1)+\sigma(T_2)+\sum_{i=1}^{k}|A_i|-1.$$

注意，

$$w(T_1)=\sum_{t=1}^{s}(l_t-1)|A_{i_t}|,$$

$$w(T_2)=\sum_{t=s+1}^{k}(l_t-1)|A_{i_t}|,$$

其中 l_t 是从 T 的根到悬挂点 v_t 的路长．因此

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=\sum_{t=1}^{s}(l_t-1)|A_{i_t}|-n(T_1)\\&+1+\sum_{t=s+1}^{k}(l_t-1)|A_{i_t}|-n(T_2)\\&+1+\sum_{i=1}^{k}|A_i|-1\\&=\sum_{t=1}^{k}l_t|A_{i_t}|-(n(T_1)+n(T_2))+1.\end{aligned}$$

而 $w(T)=\sum_{t=1}^{k}l_t|A_{i_t}|$，$n(T)=(n(T_1)+n(T_2))$．所以

$$\sigma(T)=w(T)-n(T)+1.$$

即式④对所有带权二分树 T 成立．

于是问题转化为求带权 $|A_1|$，$|A_2|$，…，$|A_k|$的最优树．可以采用 Huffman 算法如下：首先将$|A_1|$，$|A_2|$，…，$|A_k|$由小到大排列为$|A_{i_1}|\leqslant|A_{i_2}|\leqslant\cdots\leqslant|A_{i_k}|$．并将它们依次视为悬挂点 v_1，v_2，…，v_k 的权．用顶点 u_1 分别和 v_1 与 v_2 相邻，视 v_1 和 v_2 的权$|A_{i_1}|$与$|A_{i_2}|$的和$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|$为 u_1 的权．并将 u_1，v_3，v_4，…，v_k 视为 $k-1$ 个悬挂点．如果 $w(u_1)\leqslant w(v_3)$，则用顶点 u_2 分别和 u_1 和 v_3 相邻，并将 u_1 和 v_3 的权视为 u_2 的权，然后视 u_2，v_4，…，v_k 为 $k-2$ 个悬挂点，再构作权为$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+|A_{i_3}|+|A_{i_4}|+\cdots+|A_{i_k}|$的最优树；如果 $w(u_1)>w(v_3)$，则用顶点 u_2 分别和 u_3 与 v_4 相邻，并令 u_2 的权为$|A_{i_3}|+|A_{i_4}|$，然后视 u_1，u_2，v_5，…，v_k 为 $k-2$ 个悬挂点，再构作权为$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|$，$|A_{i_3}|+|A_{i_4}|$，$|A_{i_5}|+\cdots+|A_{i_k}|$的最优树．如此继续．即可得到权为$|A_{i_1}|+|A_{i_2}|+\cdots+|A_{i_k}|$的最优树 T，然后按最优树 T 的合并方式，将数表 A_1，A_2，…，A_k 合并成数表C，则总比较次数 $\sigma(T)$ 为最小．

10．5．22　有8枚同面值的硬币，其中恰有一枚是假的，而且比真币为重．试用一台天平，利用比较重量的方法，设计出一种寻找假币的方案．

解　将 8 枚硬币编号为 1，2，…，8，并作出决策图（如图 10．48）．第一步：将硬币 1，2，3 放在天平的左盘，将硬币 6，7，8 放在天平的右盘．如果左盘低下，则假币在硬币 1，2，3 中；如果两盘平衡，则假币在硬币 4，5 中；如果右盘低下，则假币在硬币 6，7，8 中．第二步：若假币在硬币 1，2，3 中，则将硬币 1，3 分别放在左盘和右盘．此时若左盘低下，则硬币 1 是假的，若两盘平衡，则硬币 2 是假的，若右盘低下，则硬币 3 是假的；若假币在硬币 4，5 之中，则将硬币 4，5 分别放在左、右盘中，即可辨明假币；若假币在硬币 6，7，8 中，则将硬币 6，8 分别放在左、右盘中，也可辨明假币．

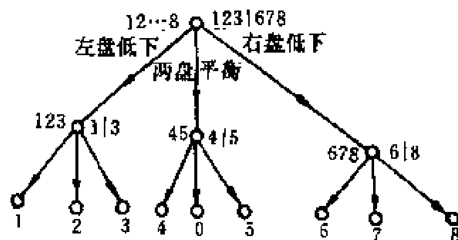


图 10．48

注　10．5．21 中图 10．48 称为决策树，它描述了寻找假币的算法过程．它说明，只要称两次即可找出假币．

第 11 篇　概率论

§ 11.1　古典概率计算中的等效随机化机制

设一试验有 N 个等可能的结果，而事件 B 恰包含其中的 M 个结果．则事件 B 的概率 $P(B)=M/N$．古典概率 $P(B)$ 是以"等可能性"概念为基础，其计算归结于排列组合的方法计算两个数 M（事件 E 的有利场合数）和 N（样本空间的大小）．适当地选定一个等效随机化的机制是正确计算 M 和 N 的有效方法．

11.1.1　设有 n 个小球，每个小球都以等概率 $\frac{1}{m}$ 放于 $m(m\geqslant n)$ 个盒子中的每一个．试求事件 B："某预先指定的 n 个盒中各含有一球"的概率．

解法 1　假定 n 个小球是不同的，即可辨别的；再假定每个盒子能容纳的小球数不限．由于任一小球可放在 m 个盒中的任一盒，有 m 种方法，因而样本空间大小为 m^n．事件 B 的有利场合数，即为 n 个小球在指定 n 个盒中的排列数 $n!$．因而

$$P(B)=\frac{n!}{m^n}.$$

解法 2　假定 n 个小球完全相同，即不可辨别的，且每个盒子仍能容纳任意多个小球．现在来计算样本空间的大小．为此采用下列巧妙的直观想法．先把 m 个盒子从左至右并排成一行，用两个挡板"|"围成的区域记为一个盒子；盒中的小球摆放于两挡板之间，小球用 * 表示；两挡板紧邻，如 ‖，表示对应的盒中无球．如下图是 n 个球的一种放法：

| * * | * ‖ * * * * | …… | * * |.

这表示第一盒中有 2 球，第二盒中有 1 球，第三盒空，……，最后一盒有 2 球．把每个挡板和每一个小球都看作一个位置，则 n 个球的一种放法就等价于 $n+m-1$（不含两端的挡板位置）个位置被 n 个球占领的一种占位法，故共有 $\binom{n+m-1}{n}$ 种放法．事件 B 的有利场合只有一种放法．所以

$$P(B)=\frac{1}{\binom{n+m-1}{n}}=\frac{n!(m-1)!}{(n+m-1)!}.$$

解法 3　假定小球不可辨别的，且假定每个盒子至多只能容纳一个小球．于是任一种放法都必须占用 n 个盒子．因小球不可辨的，故总的放法有 $\binom{m}{n}$ 种．而事件 B 的有利场合数只有一种放法．故

$$P(B)=\frac{1}{\binom{m}{n}}=\frac{n!(m-n)!}{m!}.$$

注 1　由于对小球和盒子所作的假定不同，本题有三种不同的解法．相对于每种假定而言，每种解法都是正确的．这表明在计算古典概率时关键是根据问题的条件区分两种不同的基本事件．

注 2　在解法 2 中，为了计算样本空间的大小，引进了一种等价的机制．这种方法值得细细品味．

注 3　在该例中，我们应用了球和盒子这种形象的语言，但它可以允许有多种不同的实际解释．例如，把 n 个人按其年龄和职业分成类，类相当于盒而人相当于球；把 n 个意外事件按其发生在星期几来分类，类相当于盒而意外事件相当于球．

11.1.2　盒中有 n 个小球，分别标号为 $1,2,\cdots,n$．有放回地摸球 r 次（$r\leqslant n$），依次记下其号码．试求事件 B："这些号码排成一个上升序列（不一定为严格上升）"的概率．

解法 1　因为有放回地摸球，故总的摸取方法有 n^r 种．下面计算事件 B 的有利场合数：

设 r 次摸取到的号码互不相同的有 k 个，$k=1,2,\cdots,r$．事件 B 的有利场合分解为以下两步：

1° 从 $1,2,\cdots,n$ 中选取 k 个不同的数码，按上升列 $a_1<a_2<\cdots<a_k$ 排定（选取方法有 $\binom{n}{k}$ 种）；

2° 第一次摸取号码为 a_1，号码为 $a_2,\cdots,a_k$ 分别在第 $j_2,\cdots,j_k$ 次首次被摸取，其中 $1<j_2<j_3<\cdots<j_k\leqslant r$ 为任意的（这不同的摸法有 $\binom{r-1}{k-1}$ 种）．

综合上述，对固定的 k，摸法有 $\binom{n}{k}\binom{r-1}{k-1}$ 种．因此总的有利场合数为

$$\sum_{k=1}^{r}\binom{n}{k}\binom{r-1}{k-1}=\binom{n+r-1}{r}. \qquad ①$$

于是

$$P(B)=\frac{\binom{n+r-1}{r}}{n^r}.$$

解法 2　总的样本空间大小仍为 n^r．下面引进一

种等效的随机化机制来计算事件 B 的有利场合数：事件 B 的任一有利场合，即从 n 个不同号码中有放回地取出 r 个可重复的上升列号码与在 $\{1,2,\cdots,n+r-1\}$ 中取出 r 个不同数码的取法之间有一一对应.

事实上，设 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 为从 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中有放回摸取的 r 个号码，且 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$，则 $\{a_1,a_2+1,\cdots,a_r+r-1\}$ 互不相同，可视为从 $\{1,2,\cdots,n+r-1\}$ 中取出的 r 个互不相同的数；另一方面，设 $\{b_1,b_2,\cdots,b_r\}$ 为从 $\{1,2,\cdots,n+r-1\}$ 中取出的互不相同数，不妨设 $b_1<b_2<\cdots<b_r$. 设 $a_j=b_j-j+1, j=1,2,\cdots,r$. 则 $1\leqslant a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r\leqslant n$，对应于 B 的一个有利场合.

因此，B 的有利场合数为 $\binom{n+r-1}{r}$. 于是

$$P(B)=\frac{\binom{n+r-1}{r}}{n^r}.$$

注 本例给人的启发是：适当的考虑，引进等效的随机化机制可以得到简洁的解法. 解法 1 较为自然易懂，但若没有组合公式 ①，我们不可能得出理想的形式.

11.1.3 一批产品共有 n 件，其中有 m 件次品 $(m<\frac{n}{2})$，逐件进行检查，求没有连续检查到两件次品的事件 B 的概率.

解法 1 假定 n 件产品是有区别的，即考虑每件产品被检查的先后次序. 总的检查方法有 $n!$ 种.

现在计算有利于事件 B 的检查方法. 它可以分拆为下三步来实现：

1° 从 $n-m$ 个正品中选取 $m-1$ 个作全排列，选取方法有 $\binom{n-m}{m-1}(m-1)!$；

2° 把剩下的 $n-m+1$ 个产品作全排列，排列方法为 $(n-m+1)!$；

3° 把 1° 中作全排列的正品依次紧邻地放在 2° 中全排列序列次品出现的位置之后(每个次品之后只放一个正品). 这种放法是唯一的.

因此，事件 B 的有利场合数为

$$\binom{n-m}{m-1}(m-1)!(n-m+1)!.$$

于是

$$P(B)=\frac{\binom{n-m}{m-1}(m-1)!(n-m+1)!}{n!}=\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

解法 2 假定产品只有正品和次品之分，即所有的正品或所有的次品都是不可辨的. 样本空间的大小易知为 $\binom{n}{m}$. 为计算有利 B 场合数，利用如下等效随机化机制：事件 B 的有利场合与 $\{1,2,\cdots,n-m+1\}$ 取出 m 个互不相同数的取法之间构成一一对应.

事实上，对事件 B 的任一有利场合，设次品分别在第 $j_1,j_2,\cdots,j_m$ 次检查时被发现，则 $1\leqslant j_1<j_2-1<j_3-2<\cdots<j_m-m+1$. 记 $\alpha_i=j_i-i+1, i=1,2,\cdots,m$. 则 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 互不相同，且可视为从 $\{1,2,\cdots,n-m+1\}$ 中无放回抽取的 m 个数码. 另一方面，设 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\}$ 为从 $\{1,2,\cdots,n-m+1\}$ 中抽取的 m 个不同的数码，不妨设 $\alpha_1<\alpha_2<\cdots<\alpha_m$. 记 $j_i=\alpha_i+i-1, i=1,2,\cdots,m$. 则在第 $j_1,j_2,\cdots,j_m$ 次检查时发现次品必为事件 B 的一个有利场合.

因此，事件 B 的有利场合数为 $\binom{n-m+1}{m}$. 于是

$$P(B)=\frac{\binom{n-m+1}{m}}{\binom{n}{m}}.$$

注 1 解法 2 中等效随机化机制和上例 11.1.2 解法 2 中的随机化机制有某种程度的相似，但它们对应的实际解释即原题却有很大的不同. 对具体问题，如何去选定一个适当的实现随机化的机制是要靠对问题的深入分析和经验的积累.

注 2 解法 1 假定了 n 个产品是不同的，面解法 2 中只假定产品有正品和次品之分，两解法得到的结果是一致的. 因此，在解题前我们有必要作一些必要的假定，以保证在计数时既不重算也不漏算.

11.1.4 把20个不同的小球随机地放在16个盒子中. 求"有 6 个盒子空，4 个盒子含 1 球，2 个盒子含 2 球，4 个盒子含 3 球"这一事件 B 的概率(假定每个盒子可容纳的小球数目不限).

解 因为每个球都有 16 种可能的放法，故总的不同方法即样本空间的大小为 16^{20}. 为计算事件 B 的有利放法，分以下两步来分析：

1° 按盒中所含小球的数目不同把 16 盒分成 4 堆，各堆分别含 6,4,2,4 盒. 这不同的方法有 $16!/(6!4!2!4!)$；

2° 把 20 个小球按 16 盒所含小球的数目多少分成 16 堆，各堆小球数目依次为

0,0,0,0,0,0,1,1,1,1,2,2,3,3,3,3.

不同的分法有

$$\frac{20!}{(0!)^6(1!)^4(2!)^2(3!)^4}=\frac{20!}{(2!)^2(3!)^4}.$$

因此，B 的有利场合数即为1°，2°中分法的乘积．于是

$$P(B)=\frac{16!20!}{16^{20}(2!)^3(3!)^4(4!)^2 6!}.$$

11.1.5　若 n 人站成一个横列，其中有 A 和 B 两人，问夹在 A 和 B 之间恰有 r 个人的事件 E 的概率为多少？如果他们不是站成一列而是站成一个圆圈，问事件 E 的概率又为多少？（假定 $r<\frac{n-2}{2}$）

解　若 n 人排成一列，则总的站位法有 $n!$ 种，有利排法如下：

$$A_1B_{r+2},A_2B_{r+3},\cdots,A_{n-r-1}B_n;$$

$$B_1A_{r+2},B_2A_{r+3},\cdots,B_{n-r-1}A_n.$$

其中 A_iB_j 表示 A 站于第 i 号位，B 站于第 j 号位．当 A，B 固定以后，其余的 $n-2$ 人在剩下的 $n-2$ 个位置上作全排列，有 $(n-2)!$ 种排法．于是

$$P(E)=\frac{2(n-r-1)(n-2)!}{n!}=\frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

若 n 人排成一个圆圈，则考虑其对称性，可固定任一人（如 A）的位置作为参照，这时样本空间大小为 $(n-1)!$．为计算有利场合数，注意到 $r<\frac{n-2}{2}$，因而 B 有2个站位法，其余的 $(n-2)$ 人作全排列有 $(n-2)!$ 种排法，故总的有利场合数为 $2(n-2)!$．于是

$$P(E)=\frac{2(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}.$$

注　在解题时，必须注意自己所设想的机制是否真的实现了等可能性．本例中，圆圈的情况和直线有所不同：在直线上实现等可能性的站位法在圆圈上却没有．为了更清楚地说明这点，我们就 $n=4$ 的情形，写出直线上的4种站位法，它们对应于圆圈上本质却是一种站位法．

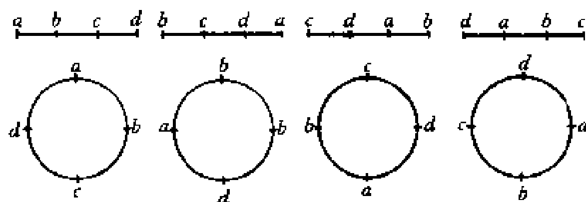


图 11.1

§11.2　概率的一般加法定理

对任意 n 个事件，令

$$S_l=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_l\leqslant n}\cdots\sum P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_l}),$$
$$l=1,2,\cdots,n.$$

概率的一般加法定理是指事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生的概率

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=S_1-S_2+S_3-\cdots+(-1)^{n-1}S_n.$$

该定理也称作容斥原理．

在实际问题中，一个复杂事件的概率常不易直接求出，而一些简单事件的概率易于求出，这时我们可以通过把复杂事件分拆成若干个简单事件的和的形式，再巧妙地利用概率的一般加法定理得到复杂事件的概率．

11.2.1　有 n 张信纸，分别标号为 $1,2,\cdots,n$，另有 n 个信封也同样地标号．一个马虎的秘书随意地将信纸装入信封中，试求“没有一个配对”的事件 E_0 及“恰有 r 个配对”的事件 E_r 的概率分别为多少．这里配对是指装入信封内信纸的号码和信封的号码相同．

解　设 A_j 表示“第 j 号信纸装入第 j 号信封”这一事件，则

$$\overline{E}_0=\bigcup_{j=1}^{n}A_j.$$

于是

$$P(E_0)=1-P(\overline{E}_0)=1-P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j).\qquad ①$$

事件 $\{A_j\}$ 是相容的．对任意不同的 $i,j,k,\cdots$ 有等式

$$P(A_i)=\frac{1}{n},$$
$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j\mid A_i)$$
$$=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}=\frac{(n-2)!}{n!},$$
$$P(A_iA_jA_k)=\frac{(n-3)!}{n!},$$
$$\cdots\cdots$$
$$P(\prod_{j=1}^{n}A_j)=\frac{1}{n!}.$$

对①利用概率一般加法定理得

$$P(E_0)=1-\left[\binom{n}{1}\frac{1}{n}-\binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right]=\sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{j!}.$$

下求 $P(E_r)$．恰配对的信纸和信封的号码可以是 $\{1,2,\cdots,n\}$ 中任意的 r 个，选取的方法有 $\binom{n}{r}$，对于指定 r 个号码的信纸和信封配对的概率为

$$\frac{1}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}=\frac{1}{\binom{n}{r}r!}.$$

其余的 $n-r$ 张信纸没有装入配对的信封中的概率

为$\sum\limits_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$.故

$$P(E_r)=\binom{n}{r}\cdot\frac{1}{\binom{n}{r}r!}\cdot\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{k=0}^{n-r}\frac{(-1)^k}{k!}.$$

注1 本题的解答关键是把$\overline{E}_0$分拆成n个相容简单事件A_j之并,再利用概率的一般加法定理.

注2 本题具有典型意义,它可有种种变形,例如宾客和帽子的配对问题,旅客和行李的配对问题,士兵和枪支的配对问题等等.

11.2.2 一列电火车,共有n节车箱,于某站有$k(k\geqslant n)$个旅客上火车,并随意地选择车厢.求每一节车厢内至少有一个旅客的概率.

解 设A_j表示"没有一个旅客进入第j节车厢"的事件,$j=1,2,\cdots,n$;且设E表示"每一节车厢内至少有一个旅客"这一事件.则

$$\overline{E}=\bigcup_{j=1}^{n}A_j. \qquad ①$$

对于事件A_j,所有的旅客进入到其余$n-1$节车箱内,这样的上车方法共有$(n-1)^k$种.同理预先指定的两个车厢没有进入的上车方法共有$(n-2)^k$种,依此类推.于是有

$$P(A_j)=\frac{(n-1)^k}{n^k}=(1-\frac{1}{n})^k,$$
$$j=1,2,\cdots,n;$$
$$P(A_iA_j)=\frac{(n-2)^k}{n^k}=(1-\frac{2}{n})^k,$$
$$1\leqslant i<j\leqslant n;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_r})=(1-\frac{r}{n})^k,$$
$$1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_r\leqslant n;$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

利用①和概率的一般加法定理得

$$P(E)=1-P(\bigcup_{j=1}^{n}A_j)$$
$$=1-\binom{n}{1}(1-\frac{1}{n})^k+\binom{n}{2}(1-\frac{2}{n})^k-\cdots$$
$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}(1-\frac{n-1}{n})^k.$$

注1 适当地选择A_j,会使解题者豁然开朗,问题迎刃而解.本例A_j是对第j节车厢作某种状态说明,若选取A_j是对第j个旅客作某种状态说明,则问题的条理仍不清楚.

注2 初学者常会给出下面的一种错误解法.他们是从计算样本空间大小和有利于事件E的场合数入手:每个旅客可以选择n节车厢中的任一节,因而总的样本空间大小为n^k;有利于事件E的场合要求每节车厢至少有一个旅客,所以有利场合数为$P_k^n n^{k-n}$.于是

$$P(E)=\frac{P_k^n n^{k-n}}{n^k}=\frac{k!}{n^n(k-n)!}.$$

但这解法是错误的,因如上的有利场合计数中有重复计数现象.如下图对应于同一个有利场合却被计数了六次,其中a,b,c,d,e为五个旅客,矩形表示车厢

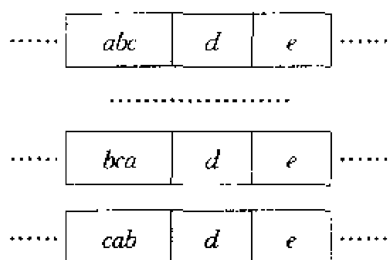


图11.2

11.2.3 两个人作游戏,一直到某人获胜为止.规则是:第一人必须赢得m局获胜,而第二人必须赢得n局才能获胜.第一人在每一局中的赢得率为p,而第二人为$q=1-p$.求"第一人最终获胜"这一事件B的概率.

解 根据规则,游戏进行到$m+n-1$局后之胜负必见分晓.因而事件B发生当且仅当如下的事件之一发生:

$B_0=\{$第一人在前m局中一局未输$\}$;

$B_1=\{$第一人在前$m+1$局中只输一局,但赢得第$m+1$局$\}$;

$B_2=\{$第一人在前$m+2$局中输了两局,但赢得第$m+2$局$\}$;

…………

$B_{n-1}=\{$第一人在前$m+n-1$局输了$n-1$局,但赢得第$m+n-1$局$\}$.

即

$$B=B_0+B_1+B_2+\cdots+B_{n-1}.$$

易求出

$$P(B_j)=\binom{m+j-1}{j}p^mq^j,j=0,1,\cdots,n-1.$$

利用$\{B_j\}$为互斥事件和概率加法定理得

$$P(B)=p^m\sum_{j=0}^{n-1}\binom{m+j-1}{j}q^j.$$

11.2.4 一盒中有a个白球和b个黑球,逐个将球取出,不放回,一直取到盒中只剩下相同颜色的球为止,试求盒中所剩下的为白球的概率.

解 记A表"盒中所剩的同色球为白球"这一事件.则A可表为a个互斥事件之和:

$$A = A_1 + A_2 + \cdots + A_a,$$

其中

$A_j = \{$前 $b+j-2$ 次摸出了 $j-1$ 个白球,第 $b+j-1$ 次摸出黑球$\}$, $j = 1,2,\cdots,a$.

对于任意 j、事件 A_j 又可以分拆为 $\binom{b+j-2}{j-1}$ 个基本事件之和(彼此间互斥),每个基本事件对应了 $j-1$ 个白球在前 $b+j-2$ 次里的一种占位方法,概率都是 $1\Big/\binom{a+b}{a}$.所以

$$P(A_j) = \binom{b+j-2}{j-1}\Big/\binom{a+b}{a}.$$

于是

$$\begin{aligned}P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_a)\\ &= \left[1 + \binom{b}{1} + \binom{b+1}{2} + \cdots + \binom{b+a-2}{a-1}\right]\Big/\binom{a+b}{a}\\ &= \binom{b+a-1}{b}\Big/\binom{a+b}{a} = \frac{a}{a+b}.\end{aligned}$$

注1 本例的另一种简洁证法见例 11.3.11.

注2 在面对一个复杂事件时,主要的方法是冷静地分析,设法分拆成一些互斥简单事件的情况,必须小心确保互斥性而又无遗漏.如上两例是把复杂事件分拆成有限个互斥简单事件之和,有些场合会遇到把复杂事件分拆成可列无穷多个互斥简单事件之和的情况,此时概率加法定理仍成立,即对任意一个互斥事件列 $\{B_j, j \geqslant 1\}$,且

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j,$$

则

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\infty} P(B_j).$$

在例 11.2.3 中,如果我们修改游戏规则如下:第一人连胜三局,而在此之前第二人未连胜二局,则第一人胜;第二人连胜二局,而在此之前第一人未连胜三局,则第二人胜,那么问题的解法可归结为上述后一种情况,我们留给读者去尝试:答案是第一人最终获胜的概率为

$$P(B) = \frac{p^3(1+q)}{1 - pq(1+p)}.$$

§11.3 条件概率和递推公式

条件概率是概率论中的一个基本工具.对于随机事件和随机变量,它有三条重要的定理,这就是,概率乘法定理、全概率公式和贝叶斯(Bayes)公式.这些定理蕴含了深刻的概率论思想,在概率题解中起着重要作用.在实际问题中,适当地对某个(或某些)随机事件或随机变量取条件,可使问题大为简化,许多计算常归结为解带有初始条件的递推公式(线性差分方程).

11.3.1 一盒有 $a(a \geqslant 3)$ 个白球和 b 个黑球,在其中接连取球三次,每次取一球,记下其颜色放回,并再放进 c 个同色球.求三次取出的球皆为白色的概率.

解 设 A_i 表"第 i 次取出白色球"这一事件,$i = 1,2,3$.显然

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}.$$

若 A_1 发生,则在第二次取球前盒中的白球数为 $a+c$ 个,黑球数仍为 b,故

$$P(A_2 \mid A_1) = \frac{a+c}{a+b+c}.$$

同样,若 A_1, A_2 发生,则在第三次取球前,盒中白球有 $a+2c$ 个,黑球数不变,因而

$$P(A_3 \mid A_1A_2) = \frac{a+2c}{a+b+2c}.$$

于是利用概率乘法定理得所求的概率

$$\begin{aligned}&P(A_1A_2A_3)\\ &= P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\\ &= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a+c}{a+b+c}\cdot\frac{a+2c}{a+b+2c}.\end{aligned}$$

注 本例用了随机事件的概率乘法定理:设 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 n 个事件,且 $P(B_1B_2\cdots B_n) > 0$,则

$$\begin{aligned}&P(B_1B_2\cdots B_n)\\ &= P(B_1)P(B_2 \mid B_1)\cdots P(B_n \mid B_1B_2\cdots B_{n-1}).\end{aligned}$$

它的直观意义是:n 个事件 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 同时发生的概率,等于先发生 B_1,在 B_1 发生的条件下 B_2 发生,在 B_1, B_2 发生的条件下 B_3 发生,$\cdots$,在 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ 发生的条件下 B_n 发生的所有这些概率的乘积.许多场合下,我们不自觉地使用了这条定理(思想).

11.3.2 在一盒中有 n 个球,其中每个球的颜色(白或黑)是等可能的,依次取出 k 个球,记下颜色并放回盒中.如果 k 次都没有取到黑球,试求"盒中只装白球"这一事件的概率.

解 设 A 表"k 次都没有取到黑球"的事件,而 B_j 表"盒中装有 j 个白球"的事件,其中 $j = 0,1,2,\cdots,n$.

现在是已知试验结果 A,求 B_n 的事后概率,所以利用 Bayes 公式

$$P(B_n \mid A) = \frac{P(B_n)P(A \mid B_n)}{\sum_{j=0}^{n} P(B_j)P(A \mid B_j)}.$$

因每个球的颜色是等可能的，所以

$$P(B_j)=\frac{1}{2^n},j=0,1,2,\cdots,n.$$

又因为给定事件 B_j，任一次取球取到白球的概率为 j/n，所以事件 A 发生的概率为

$$P(A\mid B_j)=(\frac{j}{n})^k,j=0,1,\cdots,n.$$

于是

$$P(B_n\mid A)=\frac{n^k}{1+2^k+3^k+\cdots+n^k}.$$

11.3.3　投掷均匀硬币 $m+n$ 次，已知至少出现一次正面，求第一次正面出现在第 n 次试验的概率.

解　设 A 表"至少出现一次正面"的事件，B_0 表示"没有出现正面"的事件且 B_j 表"第 j 次投掷首次出现正面"的事件，其中 $j=1,2,\cdots,m+n$. 则 $\{B_0,B_1,\cdots,B_{m+n}\}$ 构成了一个完备事件集，即彼此互斥且至少有一个事件发生. 易求出

$$P(B_0)=\frac{1}{2^{m+n}},P(A\mid B_0)=0,$$

$$P(B_j)=\frac{1}{2^j},P(A\mid B_j)=1,j=1,2,\cdots,m+n.$$

由贝叶斯公式得所求的概率

$$P(B_n\mid A)=\frac{P(B_n)P(A\mid B_n)}{\sum_{j=0}^{m+n}P(B_j)P(A\mid B_j)}=\frac{1/2^n}{\sum_{j=1}^{m+n}1/2^j}=\frac{2^m}{2^{m+n}-1}.$$

注　对贝叶斯公式，有一种看法：完备事件集 $\{B_j\}$ 的概率值 $\{P(B_j)\}$ 是对随机试验的一种初步认识，当随机事件 A 发生时，人们对 $\{B_j\}$ 的发生可能性又有新的认识，反映在后验概率值 $\{P(B_j\mid A)\}$ 之上. 如果把事件 A 看作"结果"，把事件 $\{B_j\}$ 看成是导致该结果的"原因"，那么贝叶斯公式就是"由结果找原因". 这种类型的题目求解并不难，关键是如何选择完备事件集.

11.3.4　投掷一枚面质不均匀的硬币，出现正面的概率为 p. 求在 n 次投掷试验中正面出现偶数次的概率.

解　记 A_k 为"在 k 次投掷中硬币正面出现偶数次"的事件，$\overline{A}_k$ 为 A_k 的对立事件，且记 $p_k=P(A_k)$. 则 $(\overline{A}_k)=1-p_k$，且条件概率

$$P(A_k\mid A_{k-1})=1-p;$$
$$P(A_k\mid \overline{A}_{k-1})=p.$$

按全概率公式（即对前 $k-1$ 次投掷结果取条件）得

$$\begin{aligned}p_k&=P(A_k\mid A_{k-1})P(A_{k-1})\\&\quad+P(A_k\mid\overline{A}_{k-1})P(\overline{A}_{k-1})\\&=(1-p)p_{k-1}+p(1-p_{k-1}),\end{aligned}$$

即

$$p_k=p+p_{k-1}(1-2p).$$

此等式可表成下形式

$$p_k-\frac{1}{2}=(1-2p)(p_{k-1}-\frac{1}{2}).$$

取 $k=1,2,\cdots,n$ 得到 n 个等式，且左右端依次相乘得

$$p_n-\frac{1}{2}=(1-2p)^n(p_0-\frac{1}{2}).$$

因为 $p_0=1$，则所求的概率为

$$p_n=\frac{1}{2}[1+(1-2p)^n].$$

11.3.5　由 $1,2,\cdots,n$ 共 n 个数中有放回地随机取数，如果所取数之和不小于 k 时停止 $(1\leqslant k\leqslant n)$，问抽取次数的数学期望为多少.

解　记 Y 为首次取到的数字值，且 X_k 表所取数之和不小于 k 为止的抽取次数. 给定 $Y=j$ 时，X_k 的条件分布与 $1+X_{k-j}$ 同分布，其中 $X_l=0$，当 $l\leqslant 0$ 时，对 Y 取条件得

$$\begin{aligned}EX_k&=\sum_{j=1}^{n}E(X_k\mid Y=j)\cdot P(Y=j)\\&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(1+EX_{k-j})\\&=1+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k-1}EX_j.\end{aligned}$$

化简得

$$EX_k=\frac{n+1}{n}EX_{k-1},k\geqslant 2.$$

初始条件 $EX_1=1$，递推得

$$EX_k=(\frac{n+1}{n})^{k-1}.$$

11.3.6　有一条 n 个座位的长凳子，一批互不相识的顾客，在某一时刻随机地坐下一个. 因为这批人互不相识，所以他们不愿紧挨另一个坐下（两人之间至少空一个位置）. 问坐在此排座位上的期望人数为多少？

解　从左至右给座位编号 $1,2,\cdots,n$. 设在 n 个座位的长凳上坐下的人数为 X_n，且最先坐下的那个人座号为 Y. 给定 $Y=i$ 时，X_n-1 的值等于在编号 $1,2,\cdots,i-2$ 的空位上坐下的人数 X_{i-2} 与在编号 $i+2,i+3,\cdots,n$ 的空位上坐下的人数 X_{n-i-1} 之和，取期望得

$$E[X_n\mid Y=i]=1+EX_{i-2}+EX_{n-i-1}.$$

于是对 Y 随机变量取条件

$$\begin{aligned}EX_n&=E[E(X_n\mid Y)]\\&=\sum_{i=1}^{n}E[X_n\mid Y=i]\frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(EX_{i-2} + EX_{n-i-1})$$

$$= 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_{i-2}.$$

初始条件为 $EX_{-1} = 0, EX_0 = 0$ 和 $EX_1 = 1$. 递推可得

$$EX_2 = 1;$$

$$EX_3 = \frac{5}{3};$$

$$EX_4 = 2;$$

$$\cdots\cdots$$

注 以上三例都使用了全概率公式，先对某个随机变量取条件，问题最终化为一个差分方程，从而可解. 因随机事件可用0,1取值的随机变量表示，所以全概率公式的一般形式可写成

$$EX = E[E(X \mid Y)]. \qquad ①$$

它可理解为一个"分两步走"去计算期望的方法. 因为在有些情况下，直接计算 EX 比较困难，而在限定 Y 取值之后，条件期望 $E(X \mid Y)$ 的计算相对比较容易，再利用 Y 的概率分布，通过 $E(X \mid Y)$ 可计算出 EX. 用这种方法去解题时，关键是如何选定随机变量 Y，这具有一定的技巧性. 如果 X 是试验进行到第 n 次时具有某种性质的随机变量(或事件)，则 Y 可选定为与试验进行到第 $n-1$ 次时的结果有关的变量(或事件)，如例 11.3.4；Y 亦可选定为与首次试验结果有关的变量(或事件)，如例 11.3.5 和例 11.3.6.

11.3.7 一盒中装有 m 个红球和 n 个黑球，逐个随机地将球取出，直到取出红球为止. 求所取出的球数 X 的期望值.

解法1 设同色球不可辨，且为计算方便，我们不管红色球是否出现，而把试验做到 $m+n$ 次，即把盒中所有球都摸取出来. 此时易求出概率

$$P(X = r) = \binom{m+n-r}{m-1} \Big/ \binom{m+n}{n},$$

$$r = 1,2,\cdots,n+1.$$

根据期望的定义

$$EX = \sum_{r=1}^{n+1} r\binom{m+n-r}{m-1} \Big/ \binom{m+n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{r=k}^{n+1}\binom{m+n-r}{m-1} \Big/ \binom{m+n}{n}$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{m+n+1-k}{m} \Big/ \binom{m+n}{n}$$

$$= \binom{m+n+1}{m+1} \Big/ \binom{m+n}{n}$$

$$= \frac{m+n+1}{m+1}.$$

解法2 令 $EX = \mu_{mn}$ [因 EX 与 m,n 有关]，定义随机变量

$$Y = \begin{cases} 1, & \text{第一次摸取红球;} \\ 0, & \text{第一次摸取黑球.} \end{cases}$$

则

$$P(Y=1) = \frac{m}{m+n}, P(Y=0) = \frac{n}{m+n}.$$

对第一次摸球结果 Y 取条件，得

$$\mu_{mn} = E[E(X \mid Y)]$$

$$= \frac{m}{m+n}E[X \mid Y=1] + \frac{n}{m+n}E[X \mid Y=0]$$

$$= 1 + \frac{n}{m+n}E[X-1 \mid Y=0]$$

$$= 1 + \frac{n}{m+n}\mu_{m,n-1}.$$

递推得到

$$\mu_{mn} = \frac{m+n+1}{m+1}.$$

解法3 假设同解法1，再令 X_1 表第一个红球前面的黑球数，X_{m+1} 表最后一个红球后面的黑球数，且 X_j 表出现在第 $j-1$ 个红球和第 j 个红球间的黑球数，$2 \leqslant j \leqslant m$，则 $\sum_{j=1}^{m+1}X_j = n$，因而

$$\sum_{j=1}^{m+1}EX_j = n. \qquad ①$$

设 $(X_1, X_2, \cdots, X_{m+1}) = (i_1, i_2, \cdots, i_{m+1})$，则 $(i_1, i_2, \cdots, i_{m+1})$ 与 $m+n$ 个球的全排列一一对应，即

$$P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, \cdots, X_{m+1} = i_{m+1})$$

$$= \frac{1}{\binom{m+n}{n}}. \qquad ②$$

而式②式关于 $i_1, i_2, \cdots, i_{m+1}$ 为对称的函数. 所以 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的边际分布相同，进而有 $EX_1 = EX_2 = \cdots = EX_{m+1}$，代入①得

$$EX_1 = \frac{n}{m+1}.$$

于是

$$EX = E(X_1 + 1) = \frac{m+n+1}{m+1}.$$

注 三种解法相比较，不难发现利用条件概率这一有力工具来解题(解法2)的优越性：思路清晰，表达简洁. 解法1较易想，但化简繁杂不易；解法3技巧性较高，只有对问题作深入透彻的分析才能给出. 另一方面，解法1、解法3也给我们一个启发：人为地把随机试验做到底或做到必然能见分晓的地步，有时会给概率解题带来意想不到的效果.

11.3.8 甲乙两人做游戏，每进行一局，胜者得1分，负者不得分. 在任一局中，甲胜的概率为 α，乙为 β

$-1\quad \alpha$. 游戏进行到有一人超过对方 2 分就停止，多得 2 分者为胜. 试分别求甲胜的概率和乙胜的概率.

解 记甲最终胜的概率为 p，乙最终胜的概率为 q，且分别以 E 和 F 表示甲、乙在特定的一局中取胜的事件. 游戏的前两局结果可以分成

$$EE;EF;FE;FF.$$

对游戏的前两局结果取条件(即利用全概率公式)

$p=$

$P(\text{甲最终胜}\mid EE)P(EE)+P(\text{甲最终胜}\mid EF)P(EF)$

$+P(\text{甲最终胜}\mid FE)P(FE)+P(\text{甲最终胜}\mid FF)P(FF)$

$=1\cdot\alpha^2+p\cdot\alpha\beta+p\cdot\beta\alpha+0\cdot\beta^2,$

即

$$p=\frac{\alpha^2}{1-2\alpha\beta}.$$

同理可解出或利用 $p+q=1$ 得

$$q=\frac{\beta^2}{1-2\alpha\beta}.$$

注 本例可用例 11.2.4 注中介绍的方法来解，即把甲(乙)获胜的事件分拆成无限多个互斥简单事件的和，再利用概率加法定理. 但这与上述利用适当取条件的全概率公式解题法相比要繁杂得多.

11.3.9 在某 $2N$ 次独立重复试验中，连续发生事件 A 至少 r 次，则称之为 r 事件. 在任一次试验中，事件 A 发生的概率为 p，即 $p=P(A)$. 求 $2N$ 次试验中至少发生一个 r 事件的概率. $(r\leqslant 2N<2r)$

解 记 $B_n=\{$在前 n 次试验中至少出现一个 r 事件$\}$，且 $p_n=P(B_n)$. 事件 B_{n+1} 可以分拆为以下两个互斥事件之和：

$$B_{n+1}^{(1)}=B_n;$$

$B_{n+1}^{(2)}=\{$前 n 次试验中没有出现 r 事件，仅在第 $n+1$ 次试验后才出现 r 事件$\}$.

即

$$B_{n+1}=B_{n+1}^{(1)}+B_{n+1}^{(2)}.$$

另一方面，$B_{n+1}^{(2)}$ 事件又等价于下面三个事件同时发生：

$F_1=\{$在前 $n-r$ 次试验中没有 r 事件$\}$;

$F_2=\{$在第 $n-r+1$ 次试验中事件 A 未发生$\}$;

$F_3=\{$从第 $n-r+2$ 次到第 $n+1$ 次试验事件 A 都发生$\}$.

因独立重复试验，故 F_1,F_2 和 F_3 三事件相独立，利用概率乘法定理得

$$P(B_{n+1}^{(2)})=P(F_1)P(F_2)P(F_3)=(1-p_{n-r})(1-p)p^r.$$

于是

$$p_{n+1}=P(B_{n+1}^{(1)})+P(B_{n+1}^{(2)})=p_n+(1-p_{n-r})(1-p)p^r.$$

这是一个 $r+1$ 阶差分方程，初始条件为

$$p_0=p_1=\cdots=p_{r-1}=0,p_r=p^r.$$

当 $r\leqslant n<2r$ 时，

$$\begin{aligned}p_n&=p_{n-1}+p^r(1-p)\\&=p_{n-2}+2p^r(1-p)\\&=\cdots\cdots\\&=p^r+(n-r)p^r(1-p),\end{aligned}$$

于是

$$p_{2N}=p^r+(2N-r)p^r(1-p).$$

11.3.10 一大盒中有 m 种颜色的小球，各种颜色的小球数相同，且皆以同等的机会被取出. 现有放回地摸取小球，至少有一种颜色的小球接连被取出 k 次. 求期望摸取次数.

解 设事件 $B_k=\{$至少有一种颜色的小球被取出 k 次$\}$，且 X_k 是使 B_k 发生的总摸取次数.

摸取 X_{k-1} 次时，事件 B_{k-1} 发生，若再摸一次，以概率 $\frac{1}{m}$ 摸取小球的颜色恰好与上次摸取的相同，则事件 B_k 发生；若以概率 $\frac{m-1}{m}$ 摸取的与上次摸取的小球颜色不同，再如同前一阶段进行摸取. 即

$$X_k=\begin{cases}X_{k-1}+1, & \text{以概率}\frac{1}{m};\\ X_{k-1}+X_k', & \text{以概率}\frac{m-1}{m},\end{cases}$$

其中 X_k' 与 X_k 同分布. 故

$$EX_k=\frac{m-1}{m}(EX_{k-1}+EX_k)+\frac{1}{m}E(X_{k-1}+1),$$

即

$$EX_k=mEX_{k-1}+1,k\geqslant 2.$$

初始条件为 $EX_1=1$. 递推得

$$EX_k=\frac{m^k-1}{m-1}.$$

注 递推公式(差分方程)在上述 7 个例子中扮演着重要的角色. 例 3.3.4 至例 3.3.8 的递推公式是直接应用全概率公式，即对适当的随机事件(变量)取条件而获得的；例 3.3.9 和例 3.3.10 的递推公式是利用事件在不同实验次数中出现的概率关系间接地导出的.

11.3.11 同例 11.2.4.

解 记 $p_{a,b}$ 为当盒中有 a 个白球和 b 个黑球，如上述试验结束时盒中所剩为白球的概率. 对第一次取出的球颜色为白或取黑取条件有

$$p_{a,b}=\frac{a}{a+b}p_{a-1,b}+\frac{b}{a+b}p_{a,b-1}. \qquad ①$$

特例，当 $b=1$ 时，

$$p_{a1}-1=\frac{a}{a+1}(p_{a-1,1}-1).$$

初始条件为 $p_{01}=0$,解出 $p_{a1}=\frac{a}{a+1}$.

由 ① 对 a,b 两参数进行归纳证明,得

$$p_{a,b}=\frac{a}{a+b}.$$

11.3.12 r 个人相互传球,每次传球时,传球者随机地传给其余 $r-1$ 个人中之一.首先由其中指定的甲发球.试求"第 n 次传球后,球传回到发球者甲手中"的事件 B_n 的概率.

解 首先给 r 个人进行编号,编号为 $d_1,d_2,\cdots,d_r$,且 d_1 即为发球者甲.记事件

$$B_{nj}=\{第\ n\ 次传球后,此球传给\ d_j\},\quad j=2,\cdots,r.$$

且记 $p_n=P(B_n)$,$q_n=P(B_{nj})$[由对称性,第 n 次传球后,球传到非甲的其余 $r-1$ 个人手中的概率是相同的].利用 $B_n,B_{n2},\cdots,B_{nr}$ 的互斥性及 $B_n+B_{n2}+\cdots+B_{nr}=\Omega$(必然事件)得

$$p_n+(r-1)q_n=1.\qquad ①$$

有利于事件 B_n 的场合,必在第 $n-1$ 次传球后,球传到 $d_2,d_3,\cdots$ 或 d_r 手中,且该人在下次传球时,以概率 $\frac{1}{r-1}$ 传给发球者甲,对第 $n-1$ 次传球结果取条件得

$$p_n=\sum_{j=2}^{r}P(B_n\mid B_{n-1,j})P(B_{n-1,j})=(r-1)\cdot\frac{1}{r-1}\cdot q_{n-1},$$

即

$$p_n=q_{n-1}.\qquad ②$$

由 ①,② 联立得 1 阶差分方程 $p_n+(r-1)p_{n-1}=1$,即

$$p_{n+1}-\frac{1}{r}=\frac{1}{1-r}(p_n-\frac{1}{r}),n\geqslant 1,$$

其中初始条件为 $p_1=0$.递推解出

$$p_n=\frac{1}{r}[1-(\frac{1}{1-r})^{n-1}].$$

注 实际中,递推公式可以多种形式出现,最常见的是关于一个变元的递推关系;也可以是关于两个变元的递推关系,如例 11.3.11,有时这种递推关系是通过联立两个或多个方程来实现的,如例 11.3.12 和下例 11.3.13 及 §11.5 中若干例子.

11.3.13* 甲袋中有 a 个白球和 b 个黑球,乙袋中有 c 个白球和 d 个黑球.从两袋中各摸出一球相交换,这样进行了 n 次之后,再从甲中取出一球,求此球为白色的概率.

解 设 X_n 和 Y_n 分别表示两袋交换第 n 次后甲乙两袋中的白球数,且 p_{n+1} 和 q_{n+1} 分别表示第 $n+1$ 次从甲乙两袋中取出一白球的概率.则

$$EX_n+EY_n=a+c;$$

$$p_{n+1}=\frac{EX_n}{a+b},\quad q_{n+1}=\frac{EY_n}{c+d}.\qquad ①$$

定义两个随机变量 τ_j 和 δ_j:

$$\tau_j=\begin{cases}1,第\ j\ 次从甲袋中取出白球,\\0,第\ j\ 次从甲袋中取出黑球;\end{cases}$$

$$\delta_j=\begin{cases}1,第\ j\ 次从乙袋中取出白球,\\0,第\ j\ 次从乙袋中取出黑球.\end{cases}$$

则

$$EX_1=a-E\tau_1+E\delta_1=a-p_1+q_1,$$

$$EX_2=a-E\tau_1+E\delta_1+(E\delta_2-E\tau_2)=a-(p_1+p_2)+(q_1+q_2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$EX_n=a-\sum_{j=1}^{n}p_j+\sum_{j=1}^{n}q_j=a+\sum_{j=1}^{n}(\frac{EY_{j-1}}{c+d}-\frac{EX_{j-1}}{a+b})=a+\sum_{j=1}^{n}(\frac{a+c-EX_{j-1}}{c+d}-\frac{EX_{j-1}}{a+b}).\qquad ②$$

② 化简即为

$$EX_n=\frac{a+c}{c+d}+(1-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d})EX_{n-1},\quad n\geqslant 1.\qquad ③$$

初始条件为 $EX_0=a$.由 ③ 递推得

$$EX_n=\frac{(a+c)(a+b)}{a+b+c+d}+\frac{ad-bc}{a+b+c+d}\times(1-\frac{1}{a+b}-\frac{1}{c+d})^n.$$

代入 ① 求出 p_{n+1}.

11.3.14 一个随机服务系统于某个时刻来到顾客 N 个,每个顾客接受服务的时间服从同一分布的随机变量.假定所有的随机服务时间及 N 相独立.求该系统提供的总服务时间的期望值和方差.

解 设第 i 个顾客接受的服务时间为 X_i.则系统提供的总服务时间是 $\sum_{j=1}^{N}X_j$.利用条件期望值的关系来进行计算

$$E[\sum_{j=1}^{N}X_j]=E[E(\sum_{j=1}^{N}X_j\mid N)].\qquad ①$$

由于 $E[\sum_{j=1}^{N}X_j\mid N=n]=E[\sum_{j=1}^{n}X_j\mid N=n]$,利用 $\{X_i\}$ 与 N 相独立,因此

$$E[\sum_{j=1}^{N}X_j\mid N=n]=E[\sum_{j=1}^{n}X_j]=nEX_1.$$

代入 ①,可得到

$$E[\sum_{j=1}^{N}X_j]=E[NEX_1]=EX_1\cdot EN.$$

同理

$$E[\sum_{j=1}^{N}X_j]^2 = EN\cdot\mathrm{Var}(X_1)+EN^2\cdot(EX_1)^2.$$

因而

$$\mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{N}X_j)$$
$$=(EX_1)^2\mathrm{Var}(N)+\mathrm{Var}(X_1)\cdot EN.$$

注 本题的关键是利用前面多次提到的全概率公式 $EX=E[E(X\mid Y)]$（又称条件期望的平滑性）. 同样，我们可以用"分两步走"的思想去求一个随机变量 X 的方差，即

$$\mathrm{Var}(X)=E[\mathrm{Var}(X\mid Y)]+\mathrm{Var}(E[X\mid Y]),$$

其中 $\mathrm{Var}(X\mid Y)=E(X^2\mid Y)-(E[X\mid Y])^2$.

§11.4 示性函数

借助示性函数表示事件有意想不到的方便. 它建立起事件发生与否和0,1两值函数间的对应关系. 从而，可以用示性函数间的各种运算来描述复杂的事件之间的联系. 一个集合 A 的示性函数定义为

$$1_A(w)=\begin{cases}1, & \text{当 } w\in A,\\ 0, & \text{当 } w\notin A.\end{cases}$$

11.4.1 N 为非负整数值随机变量，试证：

$$E[N]=\sum_{k=1}^{\infty}P(N\geqslant k)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N>k).$$

若 X 为以 $F(x)$ 为分布函数的非负随机变量，则有

$$EX=\int_0^{\infty}(1-F(x))\mathrm{d}x.$$

证 记 I_l 为集合 $\{N\geqslant l\}$ 的示性函数. 则容易验证当 $l>N, I_l=0$. 于是

$$N=\sum_{l=1}^{\infty}I_l.$$

所以

$$EN=\sum_{l=1}^{\infty}EI_l=\sum_{l=1}^{\infty}P(N\geqslant l)=\sum_{k=0}^{\infty}P(N>k).$$

类似地，取 I_x 为 $\{X>x\}$ 的示性函数. 可以证得

$$EX=E[\int_0^X\mathrm{d}x]=E[\int_0^{\infty}I_x\mathrm{d}x]$$
$$=\int_0^{\infty}P(X>x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_0^{\infty}(1-F(x))\mathrm{d}x.$$

注1 本题证明的关键是引入恰当的示性函数，并有一种看法：X 就是 I_x 在 $(0,\infty)$ 上的积分. 另一个关键点是某一事件的概率就是关于事件示性函数的期望.

注2 类似的方法可以用来证明本例的推广

$$\mathrm{Cov}(X,Y)$$
$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}(F(x,y)-F_X(x)F_Y(y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $F_X(x)$ 和 $F_Y(y)$ 分别是 X 和 Y 的边缘分布函数.

11.4.2 记 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件. 试证

$$P\{\text{恰有 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 中的 } r \text{ 个发生}\}$$
$$=\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{r+i}{r}\times\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_{r+i}}\cdots\sum P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_{r+i}}). \quad ①$$

证 先把 I_k 记为 A_k 的示性函数，并记

$$N=\sum_{k=1}^{n}I_k,$$

其含义为 $\{A_i\}$ 中发生的事件数，而再引入示性函数 $I=1_{\{N=r\}}$，则问题化为求 EI，利用恒等式

$$I=\binom{N}{r}(1-1)^{N-r},$$

即有

$$I=\binom{N}{r}\sum_{i=0}^{N-r}\binom{N-r}{i}(-1)^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n-r}\binom{N}{r}\binom{N-r}{i}(-1)^i$$
$$=\sum_{i=0}^{n-r}\binom{N}{r+i}\binom{r+i}{r}(-1)^i.$$

而又可以求出

$$E\left[\binom{N}{i}\right]$$
$$=E[i\text{ 组事件 }A_{j_1},A_{j_2},\cdots,A_{j_i}\text{ 的发生数}]$$
$$=E[\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i}\cdots\sum I_{j_1}I_{j_2}\cdots I_{j_i}]$$
$$=\sum_{j_1<j_2<\cdots<j_i}\cdots\sum P(A_{j_1}A_{j_2}\cdots A_{j_i}),$$

仍然经过和号求期望即得所证.

注 在一个问题中可以设 n 重示性函数.

11.4.3 晚会上 n 个来宾把帽子混在一起了. 若令每个人从中随机地取一顶，平均有多少人能戴上自己的帽子. 配成对的人数的方差几何?

解 记第 i 位客人选到自己帽子这一事件的示性函数为 I_i，则所求的人数为

$$I=I_1+I_2+\cdots+I_n.$$

因选取是随机的，所以 $EI_i=P(I_i=1)=\frac{1}{n}$，进而

$$EI=\sum_{i=1}^{n}EI_i=1.$$

求方差时要留心 I_i 之间不是独立的. 如果甲把乙的帽子取走了，乙就取不到自己的帽子，于是必先求出

I_i,I_j 之间的协方差. 注意到 I_iI_j 也是 0,1 两值函数，它是第 i 和第 j 两人同时取到自己帽子这件事的示性函数. 所以

$$\begin{aligned}E[I_iI_j] &= P(I_i=1,I_j=1)\\&= P(I_i=1)P(I_j=1\mid I_i=1)\\&= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1},\ i\neq j.\end{aligned}$$

由此不难求出

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(I_i,I_j) &= E[I_iI_j]-EI_i\cdot EI_j\\&= \frac{1}{n^2(n-1)}.\end{aligned}$$

进而有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(I) &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(I_i)+2\sum_{i<j}\mathrm{Cor}(I_i,I_j)\\&= n\cdot\frac{n-1}{n^2}+2\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2(n-1)}=1.\end{aligned}$$

注 本例利用了示件函数相乘的运算来表达两事件同时发生. 本结果如联想到二项分布当 $np_n\to\lambda(n\to+\infty)$ 时趋于泊松分布，而由条件概率 $P(I_i=1\mid I_j=1)=\frac{1}{n-1}\approx\frac{1}{n}=P(I_i=1)$ 可知 I 是近似的 n 个独立变量和，也即近似地当 $np_n=n\cdot\frac{1}{n}=1$ 时趋于参数为 1 的泊松分布. 这样一想 I 的方差为 1 就是很自然的了.

11.4.4 一个袋中有 a 个白球，b 个黑球，从中摸出 c 个 $(c\leqslant a+b)$. 求摸出白球数的期望值.

解法 1 设摸出的白球数为 I. 直接计算

$$P(I=j)=\binom{a}{j}\binom{b}{c-j}\Big/\binom{a+b}{c},$$
$$j=0,1,\cdots,c.$$

根据定义

$$\begin{aligned}EI &= \sum_{j=0}^{c}j\binom{a}{j}\binom{b}{c-j}\Big/\binom{a+b}{c}\\&= a\sum_{j=1}^{c}\binom{a-1}{j-1}\binom{b}{c-j}\Big/\binom{a+b}{c}\\&= a\binom{a+b-1}{c-1}\Big/\binom{a+b}{c}\\&= \frac{ca}{a+b}.\end{aligned}$$

解法 2 设 c 个球是逐个摸取出来的. 记 A_i 表"第 i 次摸出白球"这一事件，对应的示性函数记为 I_i. 则摸出的白球总数为 $I=I_1+I_2+\cdots+I_c$. 利用例 11.3.7 注中的思想假设把所有的球都摸出，易知

$$EI_i=P(A_i)=\frac{a}{a+b},i=1,2,\cdots,c.$$

于是得

$$EI=EI_1+EI_2+\cdots+EI_c=\frac{ac}{a+b}.$$

11.4.5 把 r 个球随机地放入 n 盒中. 以 X 记空盒个数. 求 EX.

解法 1 设 $m_r=EX$. 以 $B_k(r,n)$ 记"r 个球随机地放入 n 盒中恰有 k 个空盒"的事件，且记 $p_k(r,n)=P(B_k(r,n))$. 不妨假设球是逐个随机地放入空盒中.

考虑事件 $B_k(r+1,n)$ 的有利场合，它必为下两种情形：

1° 事件 $B_k(r,n)$ 发生，且第 $r+1$ 次放球只能以概率 $\frac{n-k}{n}$ 放在 $n-k$ 个已有球的盒中之一；

2° 事件 $B_{k+1}(r,n)$ 发生，且第 $r+1$ 次放球只能以概率 $\frac{k+1}{n}$ 放在 $k+1$ 个空盒中之一.

根据概率的加法定理得

$$\begin{aligned}p_k(r+1,n) &= p_k(r,n)\frac{n-k}{n}\\&\quad+p_{k+1}(r,n)\frac{k+1}{n}.\end{aligned}\qquad ①$$

在 ① 两端乘以 $k(k=0,1,\cdots,n)$，并对 k 求和

$$\begin{aligned}m_{r+1} &= \sum_{k=0}^{n}kp_k(r+1,n)\\&= \sum_{k=0}^{n}kp_k(r,n)-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}[k^2p_k(r,n)\\&\quad-k(k+1)p_{k+1}(r,n)]\\&= m_r-\frac{1}{n}m_r=(1-\frac{1}{n})m_r.\end{aligned}$$

利用初始条件 $m_0=n$，递推得

$$m_r=n(1-\frac{1}{n})^r.$$

解法 2 首先给盒子编号 $1,2,\cdots,n$. 记 A_j 表"试验结束后第 j 盒空"这一事件. 引进事件 A_j 的示性函数 I_j. 则总的空盒数

$$X=I_1+I_2+\cdots+I_n.$$

事件 A_j 发生是指 r 个球放于其它的 $n-1$ 个盒中，每个球都有 $n-1$ 种放法. 故

$$EI_j=P(A_j)=(1-\frac{1}{n})^r.$$

于是

$$EX=EI_1+EI_2+\cdots+EI_n=n(1-\frac{1}{n})^r.$$

注 1 以上三例中都用到了随机变量的数学期望线件可加性. 尽管这一性质平淡无奇，但巧妙地应用它，会给概率解题带来很大的好处. 这种思想是：若直接求一个随机变量 X 的数学期望 EX 很困难时，我们可适当地分拆 X 为若干个随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 之和，即 $X=X_1+X_2+\cdots+X_n$，而每个 EX_j 又比较容易求出. 这时利用期望的线性可加性即得 $EX=EX_1+EX_2+\cdots+EX_n$. 该公式只要求所有的 EX_j 存在即

可，而对 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 之间的相依关系没有任何要求. 如果 X 是随机试验中的一个记数随机变量，那么上述这种分解一般较容易看出. [如果 X 是每次试验中具有性质 δ 的试验次数的记数变量，那么 X_j 可取为"第 j 次试验具有性质 δ" 这一事件的示性函数，如例 11.4.4；如果 X 是一个群体中具有性质 δ 的个体个数的记数变量，那么 X_j 可取为"第 j 个个体具有性质 δ" 这一事件的示性函数，如例 11.4.3、例 11.4.5 和下面的例 11.4.6.]

注2 注1中 X 的这种分解还有个好处，可以用来计算 $\mathrm{Var}(X)$. 只需要考虑任意 X_i, X_j 两者之间的协方差，尽管 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 整体间的依赖关系很复杂. 本例解法 2 的方法易求出 $\mathrm{Var}(X)$，读者自行尝试.

[答案是：$\mathrm{Var}(X) = n(1-\frac{1}{n})^r - n^2(1-\frac{1}{n})^{2r} + n(n-1)(1-\frac{2}{n})^r$.]

11.4.6 n 双相异的鞋 $2n$ 只，随机地分成 n 堆，每堆 2 只. 试求恰好成一双的那种堆的数目期望值.

解 把 $2n$ 只鞋从左向右排列，第 1,2 号位置看作第 1 堆，第 3,4 号位置看作第 2 堆，…，第 $2n-1, 2n$ 号位置看作为第 n 堆. 记 A_j 为第 j 堆恰成一双这一事件，对应的示性函数记为 I_j. 则恰成一双的总堆数为 $I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n$. 事件 A_j 的有利场合数为 $2n(2n-2)!$. 因为第 $2j-1$ 号位有 $2n$ 种排法，一旦确定后，第 $2j$ 号位只有一种排法才能与前号位的鞋恰配成一双，其余的 $2n-2$ 只鞋可在剩下的 $(2n-2)$ 个空位作全排列，排法为 $(2n-2)!$ 种. 故

$$EI_j = P(A_j) = \frac{2n(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{1}{2n-1}.$$

于是

$$EI = EI_1 + EI_2 + \cdots + EI_n = \frac{n}{2n-1}.$$

§11.5 母函数

在概率论中，取整数值 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 的离散型随机变量很重要. 母函数刻画了随机变量的许多特征，是研究它们特性的重要工具. 这种方法可以看作是特征函数的一个特殊情况，已在概率论的许多分支领域中得到了广泛的应用. 如果 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$ 是一实数，且

$$S(s) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j s^j$$

在 $s=0$ 的一个领域内收敛，则称 $S(s)$ 为序列 $\{a_j\}$ 的母函数. 特别，当 $\{a_j\}$ 为某个随机变量 ξ 的概率函数时，$S(s)$ 在区间 $[-1,1]$ 中绝对收敛，此时 $S(s)$ 称为 ξ 或 $\{a_j\}$ 的概率母函数.

11.5.1 设 X_1 和 X_2 相互独立，且 X_i 服从负二项分布 $NB(r_i, p)$，即

$$P(X_i = k) = \binom{k + r_i - 1}{r_i - 1} p^{r_i}(1-p)^k,$$
$$k = 0, 1, 2, \cdots$$

其中 $i = 1, 2, r_1 > 0, r_2 > 0, 0 < p < 1$. 证明：$X_1 + X_2$ 服从负二项分布 $NB(r_1 + r_2, p)$.

证 设 X_1 和 X_2 的概率母函数分别为 $S_1(s)$ 和 $S_2(s)$. 则利用负指数二项展开式

$$(1-x)^{-\delta} = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{-\delta}{j}(-x)^j = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+\delta-1}{\delta-1}x^j \qquad ①$$

可得[在 ① 中取 $\delta = r_i$ 和 $x = (1-p)s$]

$$S_i(s) = \sum_{j=0}^{\infty} P(X_i = j)s^j = \sum_{j=0}^{\infty}\binom{j+r_i-1}{r_i-1}p^{r_i}[(1-p)s]^j = \frac{p^{r_i}}{[1-(1-p)s]^{r_i}}, i = 1, 2. \qquad ②$$

因而 $X_1 + X_2$ 的概率母函数为

$$S(s) = S_1(s)S_2(s) = [\frac{p}{1-(1-p)s}]^{r_1+r_2}.$$

再由 ② 知 $X_1 + X_2$ 仍服从负二项分布 $BN(r_1 + r_2, p)$.

注1 本例的关键是利用了母函数的两条性质：(1) 两个独立的非负整值随机变量之和的概率母函数等于两个变量各自的概率母函数的乘积；(2) 非负整值随机变量的分布与概率母函数之间有一一对应关系. 性质 (2) 是用母函数刻画随机变量的理论基础. 本例中性质称为负二项分布的再生性. 具有再生性的分布还有一些，如二项分布、波哇松分布等.

注2 本例中的两参数 r_1, r_2 可取任何实数. 特别，当 r_1 和 r_2 都取正整数时我们可给出本例再生性的直观解释.

考虑一个伯努利试验序列，在任何一次试验中成功的概率为 p，则可以证明 X_i 即表示第 r_i 次成功之前的失败次数的总和(于是 $X_i + r_i$ 为直到出现第 r_i 次成功所需的试验次数). 由于 X_1 和 X_2 相独立，所以 $X_1 + X_2$ 可以理解为第 $r_1 + r_2$ 次成功之前失败的总次数，因而具有负二项分布 $BN(r_1 + r_2, p)$. 另一方面，如假定 Y_j 表示第 $j-1$ 次成功与第 j 次成功之间的失败次数，则由伯努利试验的性质知 $Y_1, Y_2, \cdots$ 独立同分布，共同的分布为几何分布，即 $P(Y_j = k) =$

$(1-p)^k p$. 因而 $X_1 = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{r_1}$(负二项分布是几何分布的若干重卷积).

11.5.2 设甲、乙两人各掷均匀硬币 n 次,试利用母函数方法求甲得正面的次数比乙得正面的次数多 k 次($0 \leqslant k \leqslant n$) 的概率.

解 设甲、乙得到正面的次数分别为 X 和 Y. 由于硬币是均匀的,所以 X 和 Y 同分布,其概率函数是

$$P(X = j) = \binom{n}{j}\frac{1}{2^n},$$
$$j = 0,1,2,\cdots,n.$$

因而 X 的概率母函数为

$$W(x) = \frac{1}{2^n}(1+x)^n.$$

其展开式 x^j 的系数即为甲得正面 j 次的概率. 同样,在函数

$$W(\frac{1}{x}) = \frac{1}{2^n}(1+\frac{1}{x})^n$$

的展开式中 x^{-j} 的系数即为乙得正面 j 次的概率. 因此,在函数

$$S(x) = W(x)W(\frac{1}{x}) = \frac{(1+x)^{2n}}{2^{2n}x^n}$$

的展开式中 x^k 的系数 $\binom{2n}{n+k}/2^{2n}$ 即为甲得正面次数比乙得正面次数多 k 次的概率.

11.5.3 某城市出租车的号码为六位数,并可能取由 000000 到 999999 中的任意一个. 设在街头任意遇到一辆出租车,求其前三位数之和等于后三位数之和的概率.

解 设所遇到的出租车的六位号码为 $X_1X_2X_3X_4X_5X_6$. 对于任意的 j, X_j 等可能地取 0 ~ 9 这 10 个数中之一,所以其母函数为

$$W(x) = \frac{1}{10}\sum_{j=0}^{9} x^j = \frac{1}{10}\cdot\frac{1-x^{10}}{1-x},$$

进而 $X_1 + X_2 + X_3$ 和 $X_4 + X_5 + X_6$ 的母函数都是 $[W(x)]^3$,其展开式中 x^k 的系数即为出租车号码前三位数或后三位之和为 k 的概率. 因此函数

$$S(x) = [W(x)]^3[W(\frac{1}{x})]^3 = \frac{(1-x^{10})^6}{10^6x^{27}(1-x)^6}$$

的展开式中 x^0 的系数(即常数项) 就是所求的概率 p. 由于

$$(1-x^{10})^6 = 1 - \binom{6}{1}x^{10} + \binom{6}{2}x^{20} - \binom{6}{3}x^{30} + \cdots,$$

$$(1-x)^{-6} = 1 + \binom{6}{1}x + \cdots + \binom{12}{7}x^7 + \cdots + \binom{22}{17}x^{17} + \cdots + \binom{32}{27}x^{27} + \cdots,$$

因而

$$p = \frac{1}{10^6}\left[\binom{32}{27} - \binom{6}{1}\binom{22}{17} + \binom{6}{2}\binom{12}{7}\right] = 0.055.$$

注1 从解题中可得到如下结论:出租车号码前三位数之和等于后三位数之和的概率为号码六位数之和等于 27 的概率. 想一想,为什么?

注2 上述两例用到了母函数的另外一条性质:设两相互独立的非负整值随机变量 ζ 和 η 的概率母函数分别为 $Q_1(s)$ 和 $Q_2(s)$,则 $Q_1(s)\cdot Q_2(s^{-1})$ 的展开式中 s^k 的系数即为 $P(\zeta - \eta = k)$.

11.5.4 在伯努利试验中,若试验次数 v 为随机变量,试证:成功的次数和失败的次数这两个随机变量独立的充分必要条件为 v 服从波哇松(Poisson) 分布.

证 首先定义如下的随机变量序列

$$\zeta_j = \begin{cases}1, 第 j 次试验成功;\\ 0, 第 j 次试验失败,\end{cases}$$
$$\eta_j = 1 - \zeta_j, j = 1,2,\cdots.$$

则试验中成功的总次数为 $\zeta = \sum_{j=1}^{v}\zeta_j$,失败的次数总和为 $\eta = \sum_{j=1}^{v}\eta_j$.

设 $P(\zeta_j = 1) = P(\eta_j = 0) = p$, $P(\zeta_j = 0) = P(\eta_j = 1) = q = 1 - p$. 则 ζ_j 和 η_j 的母函数分别为

$$W_1(s) = q + ps, W_2(s) = p + qs.$$

再设随机变量 v 的概率母函数为 $G(s)$,则 ζ, η 的母函数分别为 $G(W_1(s))$ 和 $G(W_2(s))$.

先证必要性. 如果 ζ 和 η 相独立,则利用 $v = \zeta + \eta$ 得

$$G(s) = G(q+ps)G(p+qs). \quad ①$$

令 $x = p + qs$, $y = q + ps$, 由 ① 得

$$G(x+y-1) = G(x)G(y).$$

再令 $T(x-1) = G(x)$,则

$$T((x-1)+(y-1)) = T(x-1)T(y-1).$$

若取 $u = x - 1$, $v = y - 1$,那么上式等价于

$$T(u)T(v) = T(u+v). \quad ②$$

又 $T(u)$ 为连续函数,该泛函方程的解必为

$$T(u) = e^{\lambda u}, \lambda 为某个常数.$$

所以

$$G(x) = T(x-1) = e^{\lambda(x-1)},$$

其中 $\lambda > 0$[因为概率母函数 $G(x) < 1$,当 $x \in (0,1)$ 时]. 由分布函数与概率母函数的一一对应关系知 v 服从波洼松分布.

再证充分性. 假定 υ 服从参数为 λ 的波哇松分布,则上述必要性证明过程中各步可逆,最终 ① 成立,因而 ζ 和 η 相独立.

注 1 本例的关键是利用独立同分布随机变量的随机和的概率母函数的表达形式.

注 2 本例的充分性可直接如下证明:

$$P(\zeta = r) = \sum_{n \geq r}^{\infty} P(\upsilon = n)P(\zeta = r \mid \upsilon = n)$$
$$= \sum_{n \geq r}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} \cdot \binom{n}{r} p^r q^{n-r}$$
$$= \frac{e^{-\lambda p}(\lambda p)^r}{r!}.$$

同理

$$P(\eta = t) = \frac{e^{-\lambda q}(\lambda q)^t}{t!}.$$

因而

$$P(\zeta = r, \eta = t)$$
$$= P(\upsilon = r + t)P(\zeta = r \mid \upsilon = r + t)$$
$$= \frac{e^{-\lambda}\lambda^{r+t}}{(r+t)!}\binom{r+t}{r} p^r q^t$$
$$= P(\zeta = r) \cdot P(\eta = t),$$

即随机变量 ζ 和 η 相独立.

11.5.5 在左右两件同样的仪器中各有两个灯泡,每件仪器工作 100 小时后将以概率 $\frac{1}{4}$ 烧坏 1 个灯泡及以概率 $\frac{1}{16}$ 烧坏两个灯泡. 如果有 n 对这样的仪器,求左边仪器的灯泡至少比右边仪器的灯泡多烧坏 $m(m \leq 2n)$ 个的概率.

解 每次试验(指左右两件同样的仪器工作 100 小时)后,试验的结果有下面五种情形: A_{-2}(右边仪器烧坏两个灯泡)、A_{-1}(右边烧坏一个灯泡)、A_0(左右两边没有烧坏灯泡)、A_1(左边烧坏一个灯泡)、A_2(左边烧坏两个灯泡),并且各事件发生的概率为

$$P(A_1) = P(A_{-1}) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_2) = P(A_{-2}) = \frac{1}{16},$$

$$P(A_0) = \frac{3}{8}.$$

因而 n 次独立试验后,其母函数可写成

$$S(x_1, x_2, x_{-1}, x_{-2}, x_0)$$
$$= \left[\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{16}x_2 + \frac{3}{8}x_0 + \frac{1}{4}x_{-1} + \frac{1}{16}x_{-2}\right]^n,$$

其中 x_k 的记号表示在试验结果中出现事件 A_k, $x_0^{n_0}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_{-1}^{n_{-1}}x_{-2}^{n_{-2}}$ 的系数等于在试验中事件 A_k 发生 n_k 次$(k = -2, -1, 0, 1, 2)$ 的概率. 令 $x_k = x^k(k = -2, \cdots, 2)$, 则

$$x_0^{n_0}x_1^{n_1}x_2^{n_2}x_{-1}^{n_{-1}}x_{-2}^{n_{-2}} = x^{n_1+2n_2-n_{-1}-2n_{-2}},$$

其中 $n_{-2} + n_{-1} + n_0 + n_1 + n_2 = n$, 且 x 的指数等于左边仪器烧坏的灯泡数与右边仪器烧坏的灯泡数的差值. 这样在函数

$$W(x) = S(x, x^2, x^{-1}, x^{-2}, 1)$$
$$= \left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{8} + \frac{1}{4x} + \frac{1}{16x^2}\right)^n$$
$$= \frac{(1+x)^{4n}}{(4x)^{2n}}$$

的展开式中 x^6 的系数即为左边仪器比右边仪器多烧坏 6 个灯泡的概率.

因此,所求的概率值 p 就是 $W(x)$ 的展开式中 x 的指数不小于 m 的各项系数之和,即

$$p = \frac{1}{4^{2n}} \sum_{j=2n+m}^{4n} \binom{4n}{j}.$$

11.5.6 象棋冠军赛,须进行 20 局,如果在每一局中双方的获胜概率均为 0.2,求比赛以 12∶8 的结果结束的概率 p.

解 设甲乙为比赛的双方,12∶8 的比赛结果可能有两种情形:甲胜 12 局,乙胜 8 局;甲胜 8 局,乙胜 12 局. 由于两种结果的概率相同,故仅须求甲胜 12 局,乙胜 8 局的概率 p_1.

考虑每一局比赛,有三种结果: A_1(甲胜)、A_0(平局)、A_{-1}(乙胜),且概率值依次为 0.2,0.6,0.2. 20 局比赛后的母函数为

$$S(x_1, x_0, x_{-1})$$
$$= (0.2x_1 + 0.6x_0 + 0.2x_{-1})^{20}.$$

若令 $x_k = x^k, k = -1, 0, 1$, 则由上例的类似分析知在函数

$$W(x) = S(x, 1, x^{-1}) = \frac{1}{5^{20}}\left(x + \frac{1}{x} + 3\right)^{20}$$

的展开式中 x^4 的系数即为所求的 p_1. 因而易得

$$p = 2p_1 = 2 \cdot \frac{20!}{5^{20}} \sum_{j=0}^{8} \frac{3^{16-2j}}{(4+j)!j!(16-2j)!}$$
$$= 0.104.$$

注 在上述两例中,我们使用了母函数的更一般形式. 具体地说:考虑 n 次独立重复试验,在每一次试验中仅可能出现事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m$ 中的一个,其概率值相应地为 $p_1, p_2, \cdots, p_m$. 则在 n 次试验中事件 A_j 发生 n_j 次$(j = 1, \cdots, m, \sum_{j=1}^{m} n_j = n)$ 的概率为

$$P(n; n_1, n_2, \cdots, n_m)$$
$$= \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!} p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_m^{n_m}. \quad ①$$

定义 $\{P(n; n_1, n_2, \cdots, n_m)\}$ 的母函数为

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_m)$$
$$= (p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_mx_m)^n, \quad ②$$

其中①是②展开式中 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_m^{n_m}$ 的系数.在②中适当地选取 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 的形式可使问题的最终结果有所简化.我们感兴趣的并不是母函数的明确表达式,更富有启发性的是直接从母函数推出有关结论.

11.5.7 在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 p,令 ζ 为首次在成功之后即遇到失败的试验次数.求 ζ 的母函数,并求 $E\zeta$ 和 $\mathrm{Var}(\zeta)$.

解 事件"$\zeta=n$"意为第 $n-1$ 次试验成功,第 n 次试验失败,前 $n-2$ 次试验要么成功,要么经过若干次失败以后,剩下的全为成功.设 $u_n=P(\zeta=n)$,且 $U(s)$ 为 $\{u_n,n\geqslant 0\}$ 的概率母函数.对首次试验结果取条件得

$$u_n=p^{n-1}q+qu_{n-1},q=1-p,n\geqslant 2, \qquad ①$$

初始条件 $u_0=u_1=0$.在①两端同乘 $s^n(n\geqslant 2)$ 并求和得

$$U(s)=\frac{pqs^2}{1-ps}+qsU(s),$$

即

$$U(s)=\frac{pqs^2}{(1-ps)(1-qs)}.$$

易求出

$$U'(1)=\left.\frac{pqs(3-2s)}{(1-ps)^2(1-qs)^2}\right|_{s=1}=\frac{1}{pq},$$

$$U''(1)=\frac{2}{p^2q^2}-\frac{4}{pq},$$

于是

$$E\zeta=U'(1)=\frac{1}{pq},$$

$$\mathrm{Var}(\zeta)=U''(1)+U'(1)-[U'(1)]^2=\frac{1}{p^2q^2}-\frac{3}{pq}.$$

注 若 $U(s)$ 为某随机变量的概率母函数,则 X 的期望及有关高阶矩可由 $U(s)$ 关于 s 的导函数在 $s=1$ 时的值来确定:

$$E\zeta=U'(1),$$

$$\mathrm{Var}(\zeta)=U''(1)+U'(1)-[U'(1)]^2.$$

特别,若令 $Q(s)=(1-U(s))/(1-s)$,则

$$E\zeta=Q(1),$$

$$\mathrm{Var}(\zeta)=2Q'(1)+Q(1)-Q^2(1).$$

有时,后者会给计算带来方便.

11.5.8 在伯努利试验中,每次试验成功的概率为 p.求 n 次试验中成功次数为偶数的概率.$(q=1-p)$

解 设 u_n 为 n 次试验中成功偶数次的概率,v_n 为成功奇数次的概率.同上例对第一次试验结果(成功、失败)取条件得

$$u_n=pv_{n-1}+qu_{n-1},n\geqslant 1, \qquad ①$$

$$v_n=pu_{n-1}+qv_{n-1},n\geqslant 1. \qquad ②$$

初始条件 $u_0=1,v_0=0$.若令 $\{u_n,n\geqslant 0\}$ 和 $\{v_n,n\geqslant 0\}$ 对应的概率母函数为 $U(s)$ 和 $V(s)$,由①,②得[在两边同乘 $s^k(k\geqslant 1)$ 并对 k 求和]

$$U(s)=1+psV(s)+qsU(s), \qquad ③$$

$$V(s)=psU(s)+qsV(s). \qquad ④$$

由③,④易解出

$$U(s)=\frac{1-qs}{(1-s)[1-(q-p)s]}=\sum_{j=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(q-p)^j\right]s^j,$$

即得所求的概率

$$u_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-2p)^n. \qquad ⑤$$

注 本例的目的是说明母函数方法的应用.实际上,可直接由①,②导出 u_n 的解.由①-②得

$$u_n-v_n=(q-p)(u_{n-1}-v_{n-1})=\cdots=(q-p)^n.$$

又由于 $u_n+v_n=1$,故 u_n 即为⑤式.

11.5.9 设 u_n 为 n 次伯努利试验中成功次数能被3除尽的概率.求 $\{u_n\}$ 的概率母函数.

解法1 由分析易知第一次成功次数非0且被3整除的事件必发生在第 $\zeta(\zeta\geqslant 3)$ 次试验中,且概率函数

$$P(\zeta=k)=\begin{cases}0, & 当 k=1,2;\\ \binom{k-1}{2}p^3q^{k-3}, & 当 k\geqslant 3,\end{cases}$$

其中 $q=1-p$.特别定义"$\zeta=n+1$"表示"n 次试验中未出现成功"这一事件,则

$$P(\zeta=n+1)=q^n.$$

为求 $u_n(n\geqslant 3)$ 的递推公式,我们对第三次获成功的试验次数 ζ 取条件得

$$u_n=\sum_{k=3}^{n+1}P(n\text{ 次试验中成功次数和被 3 整除}\mid\zeta=k)\cdot P(\zeta=k)=\sum_{k=3}^{n}u_{n-k}\binom{k-1}{2}p^3q^{k-3}+q^n,\quad n\geqslant 3.$$

由于 $u_0=1,u_1=q$ 和 $u_2=q^2$,因而 $\{u_n,n\geqslant 0\}$ 对应的母函数为

$$U(s)=\sum_{n=0}^{\infty}u_ns^n=1+qs+q^2s^2+\sum_{n=3}^{\infty}q^ns^n+\sum_{n=3}^{\infty}\left(\sum_{k=3}^{n}u_{n-k}\binom{k-1}{2}p^3q^{k-3}\right)s^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} q^n s^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} P(\zeta = k) u_{n-k} \right) s^n$$

$$= \frac{1}{1-qs} + \left(\sum_{k=0}^{\infty} P(\zeta = k) s^k \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n s^n \right)$$

$$= \frac{1}{1-qs} + \left(\frac{ps}{1-qs} \right)^3 U(s),$$

进而得

$$U(s) = \frac{(1-qs)^2}{(1-qs)^3 - (ps)^3}.$$

解法 2 设 A_n, B_n 和 C_n 分别表示 n 次试验中,成功次数和具有形式 $3v, 3v+1$ 和 $3v+2$ 的事件概率,其中 v 为整值变量.再记

$u_n = P(A_n), v_n = P(B_n), w_n = P(C_n), n \geqslant 1$,

且 $U(s), V(s)$ 和 $W(s)$ 分别为 $\{u_n, n \geqslant 0\}$, $\{v_n, n \geqslant 0\}$ 和 $\{w_n, n \geqslant 0\}$ 对应的概率母函数.

若第一次试验为成功,则为使 A_n 事件发生,必须在后面的 $n-1$ 次试验中成功的次数具有 $3v+2$ 的形式;若第一次试验失败,则为使事件 A_n 发生,在后面的 $n-1$ 次试验中成功的次数也应具有 $3v$ 形式.因而对第一次试验的结果(成功、失败)取条件得

$$u_n = pw_{n-1} + qu_{n-1}, \quad n \geqslant 1. \qquad ①$$

同理有

$$v_n = pu_{n-1} + qv_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \qquad ②$$

$$w_n = pv_{n-1} + qw_{n-1}, \quad n \geqslant 1, \qquad ③$$

初始条件 $u_0 = 1, v_0 = 0, w_0 = 0$.

在 ①,②,③ 等式两边同乘以 s^n,并对 n 求和依次得

$$U(s) = psW(s) + qsU(s) - 1, \qquad ④$$

$$V(s) = psU(s) + qsV(s), \qquad ⑤$$

$$W(s) = psV(s) + qsW(s). \qquad ⑥$$

由 ④,⑤,⑥ 联立解方程组得

$$U(s) = \frac{(1-qs)^2}{(1-qs)^3 - (ps)^3}.$$

注 1 上两例告诉我们:适当地引进一些未知量,导出彼此间的递推公式会给解题带来很大的好处(例 11.5.8 中的 ①,② 和例 11.5.9 中的 ①,②,③ 已把题意中的概率含义分别表达得淋漓尽致).这正如同在中学里解应用题时,适当地引入一些未知数,列出方程组,会使解题者条理清晰,表达简洁.

注 2 在 §11.3 中已提到,利用条件概率在许多场合下,问题的求解归化为一个(或多个)递推公式,本节的母函数方法为求递推公式的通解提供一个有效的工具.我们相信牢固地掌握条件概率理论和学会灵活地使用母函数的方法必会使读者的解题能力有较大的提高.

11.5.10 设随机变量 X 服从负二项分布 $NB(r, p)$.其概率函数由例 11.5.1 给出.证明当 $r \to +\infty$,且 $r(1-p) \to \lambda$ 时,X 的分布函数收敛于波哇松分布 $P(\lambda)$.

证 设 X 的母函数为 $S(s; r, p)$,则由例 11.5.1 的证明过程知

$$S(s; r, p) = \left(\frac{p}{1-(1-p)s} \right)^r. \qquad ①$$

当 $r \to +\infty$ 和 $r(1-p) \to \lambda$ 时,有

$$p^r \to e^{-\lambda}, (1-(1-p)s)^r \to e^{-\lambda s}.$$

因而由 ① 得

$$S(s; r, p) \to \exp\{-\lambda + \lambda s\}.$$

而右侧函数是参数为 λ 的波哇松分布 $P(\lambda)$ 的概率母函数.利用概率母函数和分布函数之间的关系即知 X 的分布函数收敛于波哇松分布.

注 这个事实在 r 很大,$1-p$ 很小而 $r(1-p)$ 不太大条件下可将较难计算的负二项分布转化为波哇松分布去计算.

§11.6 特征函数

特征函数是在概率论中有重要应用的分析工具,原因是:

(1) 特征函数与分布函数之间有一一对应关系;

(2) 特征函数是一种有界的连续函数,比分布函数更易于应用分析的工具;

(3) 特征函数比分布函数更易于应用.例如,矩的计算对分布函数是积分而对特征函数则是微分;研究独立随机变量和时,求分布函数是卷积,而特征函数则化为简单的乘积.这就是为什么古典极限问题能在引进特征函数之后能很快地得到解决的原因.

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,则 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 或 F 的特征函数 $f(t_1, t_2, \cdots, t_n)$ 定义为

$$f(t_1, t_2, \cdots, t_n) = E\exp\{i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\sum_{j=1}^{n} t_j X_j\} dF(x_1, \cdots, x_n),$$

其中 $(t_1, t_2, \cdots, t_n) \in R^n, i = \sqrt{-1}$.

11.6.1 设随机变量 X 服从 $N(0,1)$,求 X 的特征函数 $f(t)$.

解 由定义

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx - \frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2} dx. \qquad ①$$

为了求出 ① 式右端的积分,下面利用复变函数中的

Cauchy 定理. 由于 $e^{-\frac{1}{2}z^2}$ 在整个平面上为解析的, 选取如图 11.3 的有向闭合曲线 C(方向由箭头表示), 则

$$\oint_C e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = 0,$$

即对任意 $d > 0$ 有

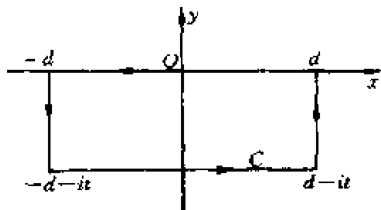


图 11.3

$$\int_{-d-it}^{d-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z = \int_{d}^{d-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z + \int_{-d}^{d} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z + \int_{-d-it}^{-d} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z. \qquad ②$$

由复变函数积分性质得

$$\left|\int_{d}^{d-it} e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\right| = \left|\int_0^t e^{-\frac{1}{2}(d-is)^2}\mathrm{d}s\right| \leqslant te^{-\frac{1}{2}(d^2-t^2)} \to 0 \quad (\text{当 } d \to +\infty).$$

同理

$$\left|\int_{-d-it}^{-d} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z\right| \to 0 \quad (\text{当 } d \to +\infty).$$

故由 ② 式得

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-it)^2}\mathrm{d}x = \lim_{d\to+\infty}\int_{-d-it}^{d-it} e^{-\frac{1}{2}z^2}\mathrm{d}z = \lim_{d\to+\infty}\int_{-d}^{d} e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}.$$

再由 ① 得

$$f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

11.6.2 设随机变量 X 服从 $\Gamma(\alpha,\beta)$ 分布, 其密度函数为

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, x > 0.$$

求 X 的特征函数 $f(t)$.

解

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{itx-\beta x}\mathrm{d}x. \qquad ①$$

下面计算 ① 右端的积分. 由于 $z^{\alpha-1}e^{-z}$ 在复平面上不包括原点和无穷远点的任一区域内解析. 为利用 Cauchy 定理, 选取如下的有向曲线 C(由线段和圆弧组成) 作为积分路径, 则

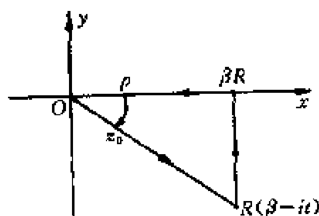


图 11.4

$$\oint_c z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z = 0,$$

即

$$\int_{z_0}^{R(\beta-it)} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z = \int_{\beta R}^{R(\beta-it)} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z + \int_{\rho}^{\beta R} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z + \int_{\substack{z_0 \\ |z|=\rho}}^{\rho} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z. \qquad ②$$

由积分性质得

$$\left|\int_{\substack{z_0 \\ |z|}}^{\rho} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z\right| \to 0 \quad (\text{当 } \rho \to 0),$$

$$\left|\int_{\beta R}^{R(\beta-it)} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z\right| \to 0 \quad (\text{当 } R \to \infty),$$

$$\int_{z_0}^{R(\beta-it)} z^{\alpha-1}e^{-z}\mathrm{d}z = (\beta-it)^\alpha\int_{\rho_0}^{R} x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}\mathrm{d}x,$$

其中 $\rho_0 = z_0(\beta-it)^{-1/2}$. 所以据 ② 得

$$(\beta-it)^\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-(\beta-it)x}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\rho\to0 \\ R\to+\infty}}\int_\rho^{\beta R} x^{\alpha-1}e^{-x}\mathrm{d}x = \Gamma(\alpha).$$

再由 ① 知

$$f(t) = \left(1 - \frac{it}{\beta}\right)^{-\alpha}.$$

注 已知概率密度求特征函数时, 常要用到复变函数论中的 Cauchy 定理和留数定理(见下例), 因此首先必须判定被积函数的解析区域和选择适当的封闭积分路径.

11.6.3 随机变量 X 的特征函数为 $f(t) = (1+t^2)^{-1}$, 求 X 的概率密度 $g(x)$.

解

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itx}}{1+t^2}\mathrm{d}t. \qquad ①$$

函数 $\frac{e^{-ixz}}{1+z^2}$ 在复平面上有两个极点 $\pm i$. 下面分两种情形求 ① 右端的积分.

情形1：当 $x<0$ 时，取积分路径为闭合的上半圆 C' 和直径 $(-R,R)$ 组成(方向如图11.5). 根据留数定理

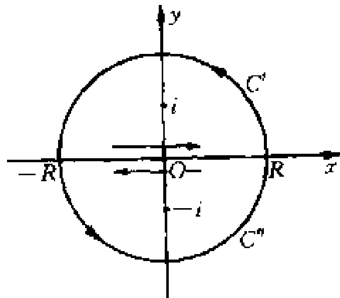


图 11.5

$$\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{e^{-ixz}}{i+z}\right)\Big|_{z=i} = \pi e^{x}, \qquad ②$$

而

$$\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = \int_{C'} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z + \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z,$$

$$\left|\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\pi R}{1+R^2} \to 0 \quad (\text{当 } R\to+\infty),$$

所以由①,②知

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = \frac{e^{x}}{2}.$$

情形2：当 $x>0$ 时，取积分路径为下半圆弧和直径组成的有向封闭曲线(方向由箭头所示). 由留数定理

$$\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\frac{e^{-ixz}}{z-i}\right)\Big|_{z=-i} = -\frac{1}{2}e^{-x}, \qquad ③$$

而

$$\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = \int_{C''} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z - \int_{-R}^{R} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z, \qquad ④$$

$$\int_{C''} \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z \to 0 \quad (\text{当 } R\to+\infty).$$

在④中令 $R\to+\infty$，由①,③知

$$g(x) = -\frac{1}{2\pi}\oint \frac{e^{-ixz}}{1+z^2}\mathrm{d}z = \frac{1}{2}e^{-x}.$$

综合上述两种情形，概率密度为

$$g(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x\in \mathbf{R}.$$

11.6.4 设随机变量 X 服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布. 求 X 的各阶矩.

解 记 $\alpha_j = EX^j$. 由于 $N(0,\sigma^2)$ 的特征函数

$$f(t) = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t^2} = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\frac{\sigma^{2j}}{2^j j!}t^{2j}$$

具有一切阶导数，因而根据特征函数的性质知 X 具有一切阶矩. 再由

$$f^{(2j)}(0) = (-1)^j\frac{(2j)!\sigma^{2j}}{2^j j!}, j = 1,2,\cdots,$$
$$f^{(2j-1)}(0) = 0$$

知

$$\alpha_{2j} = \frac{f^{(2j)}(0)}{i^{2j}} = \frac{(2j)!\sigma^{2j}}{2^j j!},$$
$$\alpha_{2j-1} = 0, j = 1,2,\cdots.$$

注 对特征函数使用微分法可求出随机变量的各阶矩. 它比利用分布函数进行积分求各阶矩的方法在计算上要简单得多. 一般地，若 X 的特征函数 $f(t)$ 于 $t=0$ 点有有限的偶数 $2n$ 阶导数，则对一切 $r(0\leqslant r\leqslant 2n)$ 有 $\beta_r = E|X|^r<\infty$，且 $\alpha_r = EX^r = i^{-r}f^{(r)}(0)$. 此处"偶数 $2n$"的条件改为奇数时，结论不成立. 反例，设 X 的概率密度为

$$g(x) = \begin{cases} 0, \text{当 } |X|\leqslant 2, \\ \dfrac{c}{x^2\log|x|}, \text{当 } |X|>2, \end{cases}$$

其中 c 为正则化常数，使 $\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}x = 1$. 易验证 X 的一阶矩不存在，但其对应的特征函数

$$f(t) = 2c\int_2^{\infty}\frac{\cos tx}{x^2\log x}\mathrm{d}x$$

满足

$$0\leqslant \frac{1-f(t)}{t} = 4c\int_2^{\infty}\frac{\sin^2\frac{tx}{2}}{tx^2\log x}\mathrm{d}x$$

$$\leqslant 4c\int_2^{1/t}\frac{\sin^2\frac{tx}{2}}{tx^2\log x}\mathrm{d}x + 4c\int_{1/t}^{\infty}\frac{1}{tx^2\log x}\mathrm{d}x$$
$$= O(1/\log t), \quad \text{当 } t\to 0 \text{ 时},$$

即 $f'(0) = 0$.

11.6.5 设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为一 n 维随机向量，服从多项分布 $M(N;p_1,p_2,\cdots,p_n)$，其概率函数为

$$P(X_j = k_j, j = 1,\cdots,n) = \frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n},$$

其中 k_j 为非负整数，$p_j>0$ 且 $\sum_{j=1}^n k_j = N$，$\sum_{j=1}^n p_j = 1$. 求(1) $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的特征函数；(2) $(X_1,\cdots,X_{n-2},X_{n-1}+X_n)$ 的分布.

解 (1) 由多项式定理知 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的特征函数

$$f(t_1,t_2,\cdots,t_n) = \sum{}^{*}\frac{N!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}(p_1e^{it_1})^{k_1}\cdots(p_ne^{it_n})^{k_n}$$
$$= (p_1e^{it_1}+p_2e^{it_2}+\cdots+p_ne^{it_n})^N,$$

其中 $\sum^{*}$ 表示求和的范围为：k_j 为非负整数，$\sum_{j=1}^n k_j$

$= N$.

(2) $(X_1,\cdots,X_{n-2},X_{n-1}+X_n)$ 的特征函数为

$\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$

$= f(t_1,\cdots,t_{n-2},t_{n-1},t_{n-1})$

$= [p_1 e^{it_1} + \cdots + p_{n-2}e^{it_{n-2}} + (p_{n-1}+p_n)e^{it_{n-1}}]^N$,

即$(X_1,\cdots,X_{n-2},X_{n-1}+X_n)$ 服从多项分布 $M(N;p_1,\cdots,p_{n-2},p_{n-1}+p_n)$.

11.6.6 设(X_1,X_2) 服从二元正态分布 $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,其概率密度为

$$h(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[(\frac{x_1-\mu_1}{\sigma_1})^2 - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + (\frac{x_2-\mu_2}{\sigma_2})^2\right]\right\}.$$

求(1) (X_1,X_2) 的特征函数;(2) X_1+X_2 的分布.

解 (1) 构造两个新的随机变量

$$Y_1 = \frac{X_1-\mu_1}{\sigma_1} - \rho\frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2},\ Y_2 = \frac{X_2-\mu_2}{\sigma_2},$$

此时逆变换为

$$X_1 = \mu_1 + \sigma_1(Y_1+\rho Y_2),\ X_2 = \sigma_2 Y_2 + \mu_2.$$

该变换的贾可比行列式为

$$J(y_1,y_2) = \left|\frac{\partial(x_1,x_2)}{\partial(y_1,y_2)}\right| = \begin{vmatrix}\sigma_1 & \rho\sigma_1\\ 0 & \sigma_2\end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2.$$

因而(Y_1,Y_2) 的概率密度为

$$\begin{aligned}&l(y_1,y_2)\\ &= |J|f(\mu_1+\sigma_1(y_1+\rho y_2),\sigma_2 y_2+\mu_2)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(1-\rho^2)}}\exp\{-\frac{y_1^2}{2(1-\rho^2)}\}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\{-\frac{y_2^2}{2}\}.\end{aligned}$$

所以 Y_1 和 Y_2 相独立,且 $Y_1 \sim N(0,1-\rho^2)$, $Y_2 \sim N(0,1)$. 利用独立性和正态分布的特征函数表达式得(X_1,X_2) 的特征函数

$$\begin{aligned}&f_{X_1,X_2}(t_1,t_2)\\ &= \exp\{it_1\mu_1 + it_2\mu_2\}\cdot E[\exp\{i\sigma_1 t_1 Y_1\}]\cdot E[\exp\{i(\sigma_1\rho t_1+\sigma_2 t_2)Y_2\}]\\ &= \exp\left\{i(t_1\mu_1+t_2\mu_2) - \frac{1}{2}(1-\rho^2)\sigma_1^2 t_1^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1\rho t_1+\sigma_2 t_2)^2\right\}\\ &= \exp\left\{i(t_1,t_1)\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}(t_1,t_2)\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}t_1\\ t_2\end{pmatrix}\right\}\end{aligned} \quad ①$$

(2) 由 ① 得 X_1+X_2 的特征函数为

$$f_{X_1+X_2}(t) = f_{X_1,X_2}(t,t) = \exp\{it(\mu_1+\mu_2) - \frac{1}{2}(\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)t^2\}.$$

因此 X_1+X_2 服从正态分布 $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2)$.

注 这个结论充分说明了特征函数对分布函数的计算的有效性,读者不难通过亲身的试算得知应用累次积分计算得出这个结论会遭遇到多大的困难.

11.6.7 设 X,Y 为两个独立同分布的随机变量,且二阶矩存在(或概率密度存在不等于零,且有二阶导数). 试证:如果 $X-Y$ 和$X+Y$ 独立,则 $X,Y,X+Y,X-Y$ 均服从正态分布.

证法 1 假设 X 的二阶矩存在. 不失一般性,可令 X,Y 的均值为 0[否则取 $\widetilde{X} = X - EX$, $\widetilde{Y} = Y - EY$, $\widetilde{X}$ 和 $\widetilde{Y}$ 仍独立同分布],且记 $\sigma^2 = \mathrm{Var}(X)$, $\varphi_X(t)$ 为 X 的特征函数. 利用 X 和 Y 独立与 $X+Y$ 和 $X-Y$ 独立的条件得

$$\begin{aligned}\varphi_X(2t) &= \varphi_{2X}(t) = \varphi_{(X+Y)+(X-Y)}(t)\\ &= \varphi_{(X+Y)}(t)\cdot\varphi_{(X-Y)}(t)\\ &= [\varphi_X(t)]^3\varphi_X(-t).\end{aligned} \quad ①$$

在 ① 中取 t 为 $-t$ 得

$$\varphi_X(-2t) = [\varphi_X(-t)]^3\varphi_X(t). \quad ②$$

令 $p(t) = \frac{\varphi_X(t)}{\varphi_X(-t)}$,则 $p'(0) = 0$ 且由 ① 和 ② 左右两端分别相除知 $p(2t) = [p(t)]^2$,进而

$$\begin{aligned}p(t) &= [p(\frac{t}{2})]^2\\ &= [p(\frac{t}{2^2})]^{2^2} = \cdots = [p(\frac{t}{2^n})]^{2^n}\\ &= [p(0) + p'(0)\frac{t}{2^n} + o(\frac{t}{2^n})]^{2^n}\\ &= [1 + o(\frac{t}{2^n})]^{2^n} \to 1(\text{当 } n\to+\infty).\end{aligned}$$

因此 $p(t)\equiv 1$,即 $\varphi_X(t) = \varphi_{-X}(t)$ 对任意 t 成立. ① 可写成

$$\varphi_X(2t) = [\varphi_X(t)]^4. \quad ③$$

多次使用 ③ 得

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= [\varphi_X(\frac{t}{2})]^4 = [\varphi_X(\frac{t}{2^2})]^{4^2}\\ &= \cdots = [\varphi_X(\frac{t}{2^n})]^{4^n}\\ &= [\varphi_X(0) + \varphi_X'(0)\frac{t}{2^n} + \frac{1}{2}\varphi_X''(0)\frac{t^2}{4^n} + o(\frac{t^2}{4^n})]^{4^n}\\ &= [1 - \frac{\sigma^2}{2}\frac{t^2}{4^n} + o(\frac{t^2}{4^n})]^{4^n} \to e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.\end{aligned}$$

当 $n\to+\infty$ 时成立,所以 $\varphi_X(t)=e^{-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$, $t\in\mathbf{R}^1$, X 服从 $N(0,\sigma^2)$ 分布. 利用独立正态随机变量的线性组合仍服从正态分布,于是结论得证.

证法 2 假定 X 的概率密度 $f(x)$ 存在,下用概率密度的性质来证明. 利用独立性知 (X,Y) 的联合密度为 $f(x)f(y)$,因而 $(X+Y,X-Y)$ 的联合密度为

$$f_{X+Y,X-Y}(u,v)=\frac{1}{2}f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right).$$

再令 $X+Y$, $X-Y$ 的边缘密度函数为 $g(u)$, $h(v)$. 由 $X+Y$, $X-Y$ 独立得

$$f\left(\frac{u+v}{2}\right)f\left(\frac{u-v}{2}\right)=2g(u)h(v). \qquad ④$$

因对任意 x, $f(x)\neq0$,所以可令 $m(x)=\log f(x)$. 在 ④ 两端取对数

$$m\left(\frac{u+v}{2}\right)+m\left(\frac{u-v}{2}\right)=\log 2h(v)+\log g(u).$$

对上式两端关于 u,v 各求一阶偏导得

$$\frac{1}{4}m''\left(\frac{u+v}{2}\right)-\frac{1}{4}m''\left(\frac{u-v}{2}\right)=0,\quad \forall u,v.$$

取 $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$,推出 $m''(x)=m''(y)$ 对任意 x,y 成立,故 $m''(x)\equiv$ 常数. 因而存在常数 a,b 和 c 使得 $m(x)=-ax^2+bx+c$,即 f 具有正态密度

$$f(x)=e^{-(ax^2-bx-c)},x\in\mathbf{R},$$

其中 $a>0$ 可根据 $f(x)$ 为密度易推出. 于是结论获证.

注 一提起一组随机变量相独立,我们就应该联想到其充要条件是它们的联合密度等于各自密度的乘积(假定密度存在),或其必要条件是它们和的特征函数等于各自特征函数的乘积(不是充分条件,反例可取 X 服从柯西分布,特征函数为 $e^{-|t|}$,再取 $Y=aX$,其中 $a>0$ 为常数). 证法 2 正是利用了独立随机变量概率密度的这种性质,想起来比较自然. 在利用特征函数性质的证法 1 中,关键是借助于泰勒(Taylor)展开的思想去证明 $p(t)\equiv1$. 更一般地,关于随机变量 X 的特征函数 $f(t)$ 的泰勒展开式有如下结论:如果对某个整数 $n\geqslant1$, $\alpha_n=EX^n$ 存在有限,则

$$f(t)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha_k}{k!}(it)^k+o(|t|^n).$$

这种泰勒展开式在下面几例中扮演重要的角色.

11.6.8 设 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 为一串独立同分布的随机变量序列, $EX_1=\mu$, $\mathrm{Var}(X_1)=\sigma^2<\infty$. 则对任意 $x\in\mathbf{R}^1$,

$$\lim_{n\to+\infty}P\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}X_j-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\leqslant x\right)=\Phi(x),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态 $N(0,1)$ 的分布函数.

证 设 $X_1-\mu$ 和 $\left(\sum_{j=1}^{n}X_j-n\mu\right)/\sqrt{n}\sigma$ 的特征函数分别为 $g(t)$ 和 $f_n(t)$,则由泰勒展开式得

$$g(t)=1-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2),$$

因而根据 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 的独立性,

$$\begin{aligned}f_n(t)&=\left[g\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)\right]^n\\&=\left[1-\frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^2+o\left(\frac{t^2}{n\sigma^2}\right)\right]^n\\&=\left[1-\frac{t^2}{2n}+o\left(\frac{t^2}{n}\right)\right]^n\to e^{-t^2/2}(\text{当 } n\to+\infty).\end{aligned}$$

利用特征函数的收敛定理知本例结论成立.

11.6.9 设 $\{X_n,n\geqslant1\}$ 为独立同分布的对称随机变量,且具有有限的方差 σ^2. 又设 υ 为离散随机变量与 $\{X_j,j\geqslant1\}$ 相独立,其概率函数为

$$P(\upsilon=k)=p(1-p)^{k-1},k=1,2,\cdots,$$

其中 $p\in(0,1)$. 则

$$\lim_{p\to0}P\left(p^{1/2}\sum_{j=1}^{\upsilon}X_j\leqslant x\right)=F(x).$$

这里 $F(x)$ 为拉普拉斯分布函数,其概率密度为

$$F'(x)=\frac{\sqrt{2}}{2\sigma}e^{-\frac{\sqrt{2}}{\sigma}|x|},x\in\mathbf{R}.$$

证 设 X_1 和 $p^{1/2}\sum_{j=1}^{\upsilon}X_j$ 的特征函数分别为 $g(t)$ 和 $f_p(t)$,则对 υ 取条件并利用 $\{X_j,j\geqslant1\}$ 独立性

$$\begin{aligned}f_p(t)&=\sum_{k=1}^{\infty}p(1-p)^{k-1}g^k(p^{1/2}t)\\&=\frac{pg(p^{1/2}t)}{1-(1-p)g(p^{1/2}t)}.\end{aligned}$$

又由于 X_1 均值为 0,方差为 σ^2,所以

$$g(t)=1-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2).$$

因而

$$\begin{aligned}&\lim_{p\to0}f_p(t)\\&=\lim_{p\to0}\frac{p\left[1-\frac{\sigma^2}{2}t^2p+o(pt^2)\right]}{1-(1-p)\left[1-\frac{\sigma^2}{2}t^2p+o(t^2p)\right]}\\&=\frac{1}{1+\frac{\sigma^2}{2}t^2}.\end{aligned}$$

据例 11.6.3 的结论易知上式右端的函数即为 $F'(x)$ 对应的特征函数. 故由特征函数收敛定理得证.

注 1 用类似的方法可证明如下结论:在本例中,如果 $EX_1=\mu>0$, $EX_1^2<\infty$,则 $F(x)$ 为指数分布 $\mathrm{Exp}(\mu)$ 的分布函数,即

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-x/\alpha}, & \text{当 } x\geqslant 0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } x<0 \text{ 时}.\end{cases}$$

注 2 特征函数的收敛定理是指在分布函数依分布收敛的意义下的极限分布与特征函数的极限函数之间存在着对应关系.因此,由特征函数的极限函数可以推知随机变量序列的极限分布.熟记一些常用随机变量的特征函数有利于辨别和刻画不同的随机变量.

11.6.10 设 $X_0,X_1,X_2,\cdots$ 为一串独立同分布对称随机变量,具有非退化的特征函数 $f(t)$.设 ν 为例11.6.9中定义的随机变量且与 $\{X_j,j\geqslant 1\}$ 相独立.假定存在某个常数 $\alpha\in(0,2)$ 使得

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-f(t)}{|t|^{\alpha}} \qquad ①$$

存在且有限,则随机变量 X_0 与 $p^{1/2}\sum_{j=1}^{\nu}X_j$ 同分布的充要条件是 $f(t)$ 具有形式

$$f(t)=\frac{1}{1+\lambda|t|^{\alpha}},\lambda \text{ 为某正常数}.$$

证 同上例,由 X_0 与 $p^{1/2}\sum_{j=1}^{\nu}X_j$ 同分布等价于

$$f(t)=\frac{pf(p^{1/2}t)}{1-(1-p)f(p^{1/2}t)}. \qquad ②$$

令

$$f(t)=\frac{1}{1+|t|^{\alpha}U(t)}, \qquad ③$$

由 X_0 为对称随机变量知 $f(t)$(因而 $U(t)$)为实值对称的,再由条件 ① 得 $U(t)$ 为连续函数.

把 ③ 代入 ② 化简得

$$U(t)=U(p^{1/2}t),\quad t\in(-\infty,\infty). \qquad ④$$

往证 $U(t)\equiv$ 常数 λ.任取 $T>0$,令

$$a_0=\min_{t\in[0,T]}U(t),$$

$$x_0=\inf\{x:x\in[0,T] \text{ 且 } U(x)=a_0\}.$$

由 $U(t)$ 的连续性知 $U(x_0)=a_0$,而由 ④

$$U(p^{1/2}x_0)=U(x_0)=a_0.$$

所以 $p^{1/2}x_0\geqslant x_0$,因而 $x_0=0$.

另一方面,令

$$a_1=\max_{t\in[0,T]}U(t),$$

$$x_1=\inf\{x:x\in[0,T] \text{ 且 } U(x)=a_1\},$$

则 $U(x_1)=a_1$,且 $U(p^{1/2}x_1)=U(x_1)=a_1$.所以 $p^{1/2}x_1\geqslant x_1$,因而 $x_1=0$.

注意到 x_0,x_1 的定义有

$$U(0)=\min_{t\in[0,T]}U(t)=\max_{t\in[0,T]}U(t),$$

即 $U(t)$ 于 $[0,T]$ 上为常数.由 T 为任意的和 $U(t)$ 的对称性得证.

注 在分布函数刻画中,有相当多的一类问题最终化为证明一个泛函方程(关于特征函数或拉普拉斯变换的)解的唯一性,而解的存在性一般容易证明.经过适当的变换后,原泛函方程可化为 $(AU)(t)=U(t),t\in[0,T]$,其中 T 为某个常数,A 为由 $[0,T]$ 上连续函数的全体 $C[0,T]$ 的子集 $\mathscr{E}$ 到 $[0,T]$ 的一个映射,即

$$A:\mathscr{E}\to C[0,T].$$

如本例中 $(AU)(t)=U(p^{1/2}t)$.利用映射 A 的性质可以给出满足 $(AU)(t)=U(t),t\in[0,T]$ 的函数 $U(t)$ 的刻画.特别,当 A 满足下两条:

(i) 对 $\forall f_1,f_2\in\mathscr{E},f_1(t)\geqslant f_2(t),\forall t\in(0,\tau)$ 可推出 $(Af_1)(t)\geqslant(Af_2)(t),\forall t\in(0,\tau)$;

(ii) 对 $\forall f_1,f_2\in\mathscr{E},f_1(t)>f_2(t),\forall t\in(0,\tau)$,则 $(Af_1)(\tau)>(Af_2)(\tau)$.

类似于本例的后半部证明可以证得满足 $(AU)(t)=U(t),t\in[0,T]$ 的函数必为常值函数.

11.6.11 设随机变量 V 服从参数为1的指数分布,U 服从(0,1)区间上的均匀分布,且非负随机变量 X 满足:

$$X=U^{\beta}(V+X),$$

其中 $\beta=\frac{1}{r}>0$ 为一个常数.假定 X,U,V 相互独立.证明 X 服从伽玛分布 $\Gamma(r,1)$.

证 设 $\phi_X(s)$ 为随机变量 X 的拉普拉斯变换,即

$$\phi_X(s)=E[e^{-sX}],\quad s\geqslant 0.$$

首先易求出 V 的拉普拉斯变换为 $\phi_V(s)=(1+s)^{-1}$,且 U^{β} 的概率密度函数为 $ru^{r-1},0<u<1$.对 U^{β} 取条件并利用 U,V,X 之间的独立性得

$$\begin{aligned}\phi_X(s)&=E[e^{-sX}]\\&=E\{E[\exp(-sU^{\beta}(V+X))\mid U^{\beta}]\}\\&=\int_0^1\frac{1}{1+us}\phi_X(su)ru^{r-1}\mathrm{d}u\\&=rs^{-r}\int_0^s\frac{1}{y(1+y)}\phi_X(y)y^r\mathrm{d}y,\end{aligned} \qquad ①$$

其中最后一等式由作变量代换 $y=us$ 得到.在 ① 左右两端同乘以 s^r,并令 $g(s)=s^r\phi_X(s)$ 得

$$g(s)=r\int_0^s\frac{1}{y(1+y)}g(y)\mathrm{d}y. \qquad ②$$

因而

$$\frac{g'(s)}{g(s)}=\frac{r}{s(1+s)}=r\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{1+s}\right), \qquad ③$$

即

$$\frac{\mathrm{d}g(s)}{g(s)}=r\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{1+s}\right)\mathrm{d}s.$$

积分得

$$g(s)=C\left(\frac{s}{1+s}\right)^r,\text{其中 } C \text{ 为常数}.$$

由于 $\phi_X(0)=1$,所以 $\phi_X(s)=(1+s)^{-r}$,即 X 服从 $\Gamma(r,1)$ 分布.

注1 本例的关键是要看出由 ① 可变形为 ②.② 推 ③ 则较为自然.

注2 概率母函数、拉普拉斯变换和特征函数都可以用来刻画一个随机变量的分布律,但前两者有其局限性,即概率母函数仅适用于非负整值随机变量,拉普拉斯变换适用于非负随机变量;另外这两者函数的解析性质皆不及特征函数.然而有时概率母函数和拉普拉斯变换更为方便和合适,如在随机服务系统、马尔科夫过程论等中已成为一种基本的工具.

§11.7 概率不等式

不等式是涉及数量之间大小的比较,通过比较常能显示出变量之间变化的相互制约关系.从某种意义上说,不等式的探讨在概率论的极限理论、统计学大样本理论等领域中比等式的推演更为重要.概率不等式和近代分析学中的解析不等式密切相关.透过解析不等式有助于我们发现概率不等式;反过来,概率不等式又可以让我们从另一个侧面进一步认识和掌握解析不等式.

本节介绍在概率论中常用的几个经典概率不等式,它们证法可资进一步熟练不等式的技巧之用.

11.7.1 设 X 为随机变量,$g(x)$ 为非负偶函数且在 $[0,\infty)$ 上为非减的,则对任意 $a>0$ 且 $g(a)\neq 0$,有

$$P(|X|>a)\leqslant\frac{Eg(X)}{g(a)}.$$

证 记 X 的分布函数为 $F(x)$.则

$$\begin{aligned}P(|X|>a)&=\int_{|x|>a}\mathrm{d}F(x)\\&\leqslant\int_{|x|>a}\frac{g(x)}{g(a)}\mathrm{d}F(x)\\&\leqslant\frac{1}{g(a)}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{d}F(x)=\frac{Eg(X)}{g(a)}.\end{aligned}$$

注 这里的放缩法在概率不等式的证明中经常使用.在研究随机变量序列的收敛性时,估计尾概率 $P(|X|\geqslant\varepsilon)$ 具有基本的重要性,而该例的不等式是有效的方法之一.$g(x)$ 取不同的函数形式,可得到(假定有关矩存在)

马尔可夫不等式:$P(|X|>\varepsilon)\leqslant\dfrac{E|X|}{\varepsilon}$.

切比雪夫不等式:$P(|X-EX|>\varepsilon)\leqslant\dfrac{\mathrm{Var}(X)}{\varepsilon^2}$.

11.7.2 设 I 为实数集 $\mathbf{R}$ 上的有限或无限的区间,$g(x),h(x)$ 为 I 上两个同为非增(或同为非减)的函数.又设 X 为以概率 1 取值于 I 的随机变量,则

$$E[g(X)h(X)]\geqslant E[g(X)]\cdot E[h(X)],\qquad ①$$

假定所有的数学期望存在.

证 构造随机变量 Y,使得 X 和 Y 独立同分布.由 $g(x)$ 和 $h(x)$ 的同向单调性有

$$(g(X)-g(Y))(h(X)-h(Y))\geqslant 0,$$

因而

$$E[(g(X)-g(Y))(h(X)-h(Y))]\geqslant 0.$$

展开上式,并利用 $E[g(X)h(X)]=E[g(Y)h(Y)]$,$E[g(X)h(Y)]=Eg(X)\cdot Eh(X)=E[g(Y)h(X)]$ 化简得 ① 式.

注1 如果把 ① 式改写成 $\mathrm{Cov}(g(X),h(X))\geqslant 0$,即 $g(X)$ 和 $h(X)$ 的相关系数非负,那么可看出本例结论的直观解释:因为 $g(X)$ 和 $h(X)$ 为同向单调函数,所以 $g(X)$ 和 $h(X)$ 有同时取较大值或同时取较小值的趋势,两者之间存在一定的正向线性相关,而相关系数是衡量两随机变量之间线性相关联的程度,于是自然有 ① 式成立.

注2 设 g,h 为定义于 $I\subset\mathbf{R}^n$ 上的关于每个变量同向单调的有界函数,又设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为独立的随机变量.则利用本例的结论,通过取条件期望,用数学归纳法可证:

$$\begin{aligned}&E[g(X_1,X_2,\cdots,X_n)h(X_1,X_2,\cdots,X_n)]\\&\geqslant E[g(X_1,X_2,\cdots,X_n)]E[h(X_1,X_2,\cdots,X_n)].\end{aligned}$$

注意本例的证明方法此时已不再适用.想一想,为什么?

注3 设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n,b_1\geqslant b_2\geqslant\cdots\geqslant b_n$.又设 X 是以等概率取值 $1,2,\cdots,n$ 的随机变量.取 $g(j)=a_j,h(j)=b_j$(或 $-b_{n-j+1}$),$j=1,2,\cdots,n$.由 ① 式得

$$n\sum_{j=1}^{n}a_jb_{n-j+1}\leqslant\left(\sum_{j=1}^{n}a_j\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j\right)\leqslant n\sum_{j=1}^{n}a_jb_j.$$

11.7.3 (Jensen不等式)设 $g(x)$ 为在 $\mathbf{R}$ 上的有限或无限开区间 I 内连续的凸函数,又设 X 是以概率 1 取值于区间 I 的随机变量.如果数学期望 EX 和 $Eg(X)$ 存在,则有

$$Eg(X)\geqslant g(EX).\qquad ①$$

证 由 $g(x)$ 的凸性知对任意 $x_0\in I$,必存在常数 c_0 使得对任意 $x\in I$,

$$g(x)\geqslant g(x_0)+c_0(x-x_0).$$

取 $x=X,x_0=EX$,得

$$g(X)\geqslant g(EX)+c_0(X-EX).$$

两边同时取数学期望即得 ① 式.

注 凸性函数的方法是研究不等式的重要方法之一,Jensen 不等式和下例的 Hölder 不等式的证法是这种方法的两个代表.如果在 ① 式里取特殊的函数 g

或随机变量 X.那么可以得许多有用的不等式.例如

1° 设 $\alpha < \beta$ 且不为 0. 如果随机变量 Y 满足 EY^α, EY^β 存在,则当 $\beta > 0$ 时,取 $g(x) = x^{\beta/\alpha}$, $X = |Y|^\alpha$;当 $\beta < 0$ 时,取 $g(x) = x^{\alpha/\beta}$, $X = |Y|^\beta$. 由①得 $(E|Y|^\alpha)^{1/\alpha} \leqslant (E|Y|^\beta)^{1/\beta}$.

特别,当 Y 等概率取正值 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 时,有

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j^\alpha\right)^{1/\alpha} \leqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j^\beta\right)^{1/\beta}.$$

2° 设随机变量 $X > 0$,取 $g(x) = x\log x$. 则由①得 $E(X\log X) \geqslant (EX)\log(EX)$. 特别,当 Y 等概率取正值 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 时,有

$$\prod_{j=1}^n a_j^{a_j} \geqslant \left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j\right)^{\sum_1^n a_i}.$$

3° 在 2° 中的假设下,取 $g(x) = -\log x$,则可得

$$E\log X \leqslant \log(EX)$$

和

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j \geqslant \left(\prod_{j=1}^n a_j\right)^{1/n}.$$

11.7.4 (Hölder 不等式) 设 $r > 1$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$,则对任意随机变量 X, Y,有

$$E|XY| \leqslant (E|X|^r)^{1/r}(E|Y|^s)^{1/s} \qquad ①$$

(假定所有的数学期望存在),且等号成立当且仅当存在不全为零的常数 c_1, c_2,使 $c_1|X|^r + c_2|Y|^s$ 几乎处处为 0.

证 不妨假定 $0 < E|X|^r < \infty$, $0 < E|Y|^s < \infty$(否则,X 或 Y 几乎处处为 0 时,①显然成立). 记

$$U = \frac{|X|^r}{E|X|^r}, V = \frac{|Y|^s}{E|Y|^s},$$

则 $EU = EV = 1$,且①式等价于

$$E[U^{1/r}V^{1/s}] \leqslant 1. \qquad ②$$

注意到 $-\log x$ 为严格凸函数,由定义

$$-\log\left(\frac{1}{r}U + \frac{1}{s}V\right) \leqslant -\frac{1}{r}\log U - \frac{1}{s}\log V,$$

即

$$U^{1/r}V^{1/s} \leqslant \frac{1}{r}U + \frac{1}{s}V, \qquad ③$$

且等号成立当且仅当 U 与 V 几乎处处相等. 在③两边同时取数学期望即得②式.

注 不等式①的左右两端都是 X 或 Y 的一次齐次式,因此在不等式的两端分别乘以适当的常数,并将其中一端化为 1. 这种将不等式的一端化为 1 的过程,称为不等式的"标准化过程",标准化过程常能将证明的推演变得简单. 另外,Hölder 不等式有广泛的应用,两个共轭参数 r, s 的选取给应用带来了更大的灵活性(见下例 Minkowski 不等式).

11.7.5 (Minkowski 不等式) 设 $r > 1$, X 和 Y 为随机变量,则

$$(E|X+Y|^r)^{1/r} \leqslant (E|X|^r)^{1/r} + (E|Y|^r)^{1/r}. \qquad ①$$

当所有数学期望有限时,等号成立当且仅当存在不全为 0 的常数 c_1, c_2 使 $c_1c_2 \leqslant 0$, $c_1X + c_2Y$ 几乎处处等于 0.

证 当 $E|X|^r = \infty$ 或 $E|Y|^r = \infty$ 时,①显然成立;当 $E|X+Y|^r = \infty$ 时,利用下例 C_r—不等式可得 $E|X|^r = \infty$ 或 $E|Y|^r = \infty$,因而①也成立. 于是假定所有数学期望有限,且利用不等式的标准化过程不妨再设①式右端为 1. 利用 Hölder 不等式

$$\begin{aligned} E|X+Y|^r &\leqslant E(|X|\cdot|X+Y|^{r-1}) \\ &\quad + E(|Y|\cdot|X+Y|^{r-1}) \\ &\leqslant (E|X|^r)^{1/r}(E|X+Y|^{(r-1)/(1-\frac{1}{r})})^{1-\frac{1}{r}} \\ &\quad + (E|Y|^r)^{1/r}(E|X+Y|^{(r-1)/(1-\frac{1}{r})})^{1-\frac{1}{r}} \\ &= [(E|X|^r)^{1/r} + (E|Y|^r)^{1/r}] \\ &\quad \cdot (E|X+Y|^r)^{1-\frac{1}{r}} \\ &= (E|X+Y|^r)^{1-\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

得证①式,且等号成立的条件(利用 Hölder 不等式)为 X 与 Y 同号且存在常数 c_1', c_1'' 和 c_2', c_2'' 使

$$c_1'|X|^r + c_2'|X+Y|^r = 0,$$
$$c_1''|Y|^r + c_2''|X+Y|^r = 0$$

几乎处处成立,亦即存在不全为 0 异号常数 c_1, c_2,使 $c_1X + c_2Y = 0$ 几乎处处成立.

11.7.6 (C_r—不等式) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为随机变量,$r > 0$,则

$$E\left|\sum_{j=1}^n X_j\right|^r \leqslant C_r\left(\sum_{j=1}^n E|X_j|^r\right),$$

其中

$$C_r = \begin{cases} 1, & \text{当 } 0 < r \leqslant 1, \\ n^{r-1}, & \text{当 } r > 1. \end{cases}$$

证 只需要证明

$$\left(\sum_{j=1}^n |X_j|\right)^r \leqslant C_r\sum_{j=1}^n |X_j|^r. \qquad ①$$

当 $r > 1$ 时,利用例 11.7.3 注中应用 1° 易证. 当 $r \leqslant 1$ 时,若①左端为 0,则①显然成立;若①左端不为 0,注意到①左右两端皆为 $|X_1|, |X_2|, \cdots, |X_n|$ 的一次齐次式,把①左端标准化 1,即取 $Y_j = |X_j| / \sum_{j=1}^n |X_j|$,欲证

$$\sum_{j=1}^n Y_j^r \geqslant 1,$$

而这是显然的,因为对任意 j, $Y_j^r \geqslant Y_j$,且 $\sum_{j=1}^n Y_j = 1$.

11.7.7 (Kolmogrov 不等式) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为

独立的随机变量，$EX_k = 0, EX_k^2 < \infty$. 则对任给 $\varepsilon > 0$,

$$P(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |S_k| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{n} EX_j^2,$$

其中 $S_k = \sum_{j=1}^{k} X_j$.

证 记

$A_k = \{\max_{1 \leqslant j \leqslant k} |S_j| < \varepsilon\}, k = 1, \cdots, n,$

$B_1 = \{|S_1| \geqslant \varepsilon\},$

$B_k = A_{k-1} - A_k$

$= \{|S_j| < \varepsilon, 1 \leqslant j \leqslant k-1; |S_k| \geqslant \varepsilon\}$

$k = 2, \cdots, n.$

显然，$B_1, B_2, \cdots, B_n$ 彼此不交为互斥事件，且事件 B_k 是由 $S_1, S_2, \cdots, S_k$ 的取值决定的，因而由 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 确定，与 $X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots, X_n$ 相独立. 于是 $S_k I_{B_k}$ 与 $S_n - S_k$ 独立. 由此我们有

$$\begin{aligned} & E[S_n^2 I_{B_k}] = E\{[(S_n - S_k) + S_k]^2 I_{B_k}\} \\ & = E[(S_n - S_k)^2 I_{B_k}] + E[S_k^2 I_{B_k}] \\ & \geqslant E[S_k^2 I_{B_k}] \geqslant \varepsilon^2 P(B_k). \end{aligned}$$

注意到 $\overline{A}_n = \bigcup_{k=1}^{n} B_k, I_{\overline{A}_n} = \sum_{k=1}^{n} I_{B_k}$，由上式对 k 求和即得

$$\varepsilon^2 P(\overline{A}_n) \leqslant E[S_n^2 I_{\overline{A}_n}] \leqslant ES_n^2 = \sum_{j=1}^{n} EX_j^2,$$

从而得证.

注 本例不等式在用子序列方法研究概率极限定理有重要应用，其证明方法具有一定的代表性. 如果我们定义一个随机变量 τ

$$\tau(w) = \begin{cases} k, & 当\ w \in B_k, k = 1, 2, \cdots, n, \\ n+1, & 否则, \end{cases}$$

则 $\{\tau = k\}$ 只与 $X_1, X_2, \cdots, X_k$ 有关而与 $\{X_{k+1}, X_{k+2}, \cdots, X_n\}$ 独立. 具有这种性质的 τ 称之为“停时”，S_n^2 是一个“下鞅”序列. 这些都超出我们的讨论范围，不便作更深入的介绍.

§ 11.8 极限定理研究中的几种常用方法

大家都可能有这样的体会：在数学分析中，有时求一个有限项的和很难，但一经取极限过渡到无穷项之和，反而容易解决. 在概率论中也存在这种现象，对随机现象进行有限次的观察时很难发现规律，如精确地求有限个随机变量和的分布，但是对大量随机现象的考察却易发现其规律. 这就引导了极限定理的研究，其中最基本又是最重要的内容有两种：大数定律和中心极限定理. 常用的几种随机变量收敛定义为：

(1) ζ_n 几乎处处收敛于 ζ，记为 $\zeta_n \xrightarrow{a.e.} \zeta$，是指 $P\{\lim_{n\to+\infty} \zeta_n = \zeta\} = 1$; (2) ζ_n 依概率收敛于 ζ，记为 $\zeta_n \xrightarrow{P} \zeta$，是指对任给 $\varepsilon > 0$ 有 $\lim_{n\to+\infty} P(|\zeta_n - \zeta| > \varepsilon) = 0$; (3) ζ_n r 次平均收敛于 ζ，记为 $\zeta_n \xrightarrow{r} \zeta$，是指 $\lim_{n\to+\infty} E|\zeta_n - \zeta|^r = 0$; (4) ζ_n 依分布收敛于 ζ，记为 $\zeta_n \xrightarrow{D} \zeta$，是指 ζ_n 的分布函数弱收敛于 ζ 的分布函数.

大数定律说明了许多随机现象具有稳定性. 设 $\{X_n\}$ 为随机变量序列，令 $\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$. 若存在常数序列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 使 $\frac{\eta_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{P} 0$，则称序列 $\{X_n\}$ 服从大数定律；若 $\frac{\eta_n - a_n}{b_n} \xrightarrow{a.e.} 0$，则称序列 $\{X_n\}$ 服从强大数定律.

中心极限定理是研究相互独立随机变量序列 $\{X_n\}$ 的部分和 $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ 的分布，在适当的条件下向正态分布收敛的问题.

本节主要介绍在大数定律和中心极限定理研究中的常用几种方法，其中包括特征函数法、截尾法、子序列方法.

11.8.1 (Borel-Contelli 引理) 如果 $\{A_n\}$ 为一串随机事件，$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$，则 $P(A_n, \text{i.o.}) = 0$，其中 $\{A_n, \text{i.o.}\}$ 表示事件 $\{A_n\}$ 有无穷多个发生.

证 利用事件

$$(A_n, \text{i.o.}) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$$

得

$$\begin{aligned} P(A_n, \text{i.o.}) &= P(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \\ &\leqslant P(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k). \end{aligned}$$

于是利用 $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$，当 $n \to +\infty$ 时，上式右端趋于 0，亦即 $P(A_n, \text{i.o.}) = 0$.

注 Borel-Contelli 引理是概率论极限理论中一块重要的基石，也是一个重要的工具.

11.8.2 (收敛等价引理) 如果 $\{X_n\}$ 和 $\{Y_n\}$ 为两串随机变量序列且满足

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq Y_n) < \infty. \qquad ①$$

则对任一趋于 ∞ 的常数列 $\{b_n\}$，$\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{\infty}X_j$ 与 $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{\infty}Y_j$ 收敛性等价.

证 记 $A=\{X_n\neq Y_n,\ \text{i.o.}\}$. 则由 Borel-Contelli 引理得 $P(A)=0$. 再记 C 和 C' 为 $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{\infty}X_j$ 和 $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{\infty}Y_j$ 的收敛域. 对任意 $w\in C\cap\overline{A}$，则必存在 $n(w)$，当 $n>n(w)$ 时，$X_n(w)=Y_n(w)$. 因而 $\frac{1}{b_n}\sum_{j=1}^{\infty}Y_j(w)$ 必收敛，即 $w\in C'\cap A$. 注意到 $b_n\to+\infty$，易知两个序列收敛的值相同. 类似可证 $C'\cap\overline{A}\subset C\cap\overline{A}$.

注 在研究随机变量序列的极限性质时，常常借助于另一个与已知序列具有同样性质的随机变量序列来得到. 这里研究所说的具有相同极限性质主要是基于对随机变量"尾"的性质研究. 这种方法称为截尾法. 在研究 $\{X_n\}$ 的强大数定理时，要求 $\{X_n\}$ 的截尾随机变量序列 $\{Y_n\}$ 满足 ① 式；在研究弱大数定律时，不必要求截尾随机变量序列满足 ① 式.

11.8.3 设 $\{X_k\}$ 为独立同分布的随机变量序列. 如果均值 $\mu=EX_k$ 存在有限，则 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{p}\mu$，其中 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$.

证法1 以 $f(t)$ 表 X_j 的特征函数，利用特征函数的 Taylor 展开式

$$f(t)=1+i\mu t+o(t),$$

所以 $\frac{S_n}{n}$ 的特征函数 $f_n(t)$ 为

$$f_n(t)=\left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[1+i\mu\frac{t}{n}+o\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n$$
$$\to e^{i\mu t}\quad(\text{当 } n\to+\infty \text{ 时}),$$

但 $e^{i\mu t}$ 为单点分布函数

$$G(x)=\begin{cases}1 & x\geqslant\mu,\\ 0 & x<\mu\end{cases}$$

的特征函数，因而 $\frac{S_n}{n}$ 的分布函数 $G_n(x)$ 当 $n\to+\infty$) 时弱收敛于 $G(x)$. 于是对任意 $\varepsilon>0$，有

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|\geqslant\varepsilon\right)$$
$$=P\left(\frac{S_n}{n}\geqslant\mu+\varepsilon\right)+P\left(\frac{S_n}{n}\leqslant\mu-\varepsilon\right)$$
$$=1-G_n(\mu+\varepsilon-0)+G_n(\mu-\varepsilon)\to0,$$

从而得证.

证法2 我们分两步来讨论：

首先假定 $\sigma^2=\text{Var}(X_k)$ 存在有限. 易知 $\text{Var}(S_n)=n\sigma^2$. 于是利用切比雪夫不等式，对于任意 $\delta>0$，当 $n\to+\infty$ 时，

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\delta\right)\leqslant\frac{1}{\delta^2}\text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{\sigma^2}{n\delta^2}\to0,$$

从而得证.

其次假定 $\text{Var}(X_k)$ 不存在. 这种情形可用截尾法化为前面所讨论的情况. 定义新的随机变量序列 $\{X_k^*\}$ 如下：

$$X_k^*=\begin{cases}X_k, \text{当 } |X_k|\leqslant\varepsilon n,\\ 0, \text{当 } |X_k|>\varepsilon n,\end{cases}$$
$$k=1,2,\cdots,$$

其中 ε 为任意固定的正数. 记 $\mu_n^*=EX_k^*$，F 为 X_1 的分布函数，则

$$\mu_n^*=EX_k1_{|X_k|\leqslant\varepsilon n}\to EX_k=\mu\quad(\text{当 } n\to+\infty),$$

$$\text{Var}(X_k^*)\leqslant\int_{|x|<\varepsilon n}x^2\text{d}F(x)$$
$$\leqslant\varepsilon n\int_{|x|<\varepsilon n}|x|\text{d}F(x)\leqslant\varepsilon nE|X_1|.$$

根据切比雪夫不等式，对任意 $\delta>0$，我们有

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^*-\mu_n^*\right|>\delta\right)$$
$$\leqslant\frac{\text{Var}(X_1^*)}{n\delta^2}\leqslant\frac{\varepsilon E|X_1|}{\delta^2}.$$

另一方面，

$$P(X_k\neq X_k^*)=\int_{|x|>\varepsilon n}\text{d}F(x)$$
$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon n}\int_{|x|>\varepsilon n}|x|\text{d}F(x).$$

上式右端积分项当 $n\to+\infty$ 时趋于 0，因而存在 n_1，当 $n>n_1$ 时，

$$|\mu_n^*-\mu|<\delta,$$
$$P(X_k\neq X_k^*)\leqslant\frac{\varepsilon}{n}.$$

于是

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>2\delta\right)$$
$$\leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^*-\mu\right|>2\delta\right)$$
$$+P\left(\sum_{j=1}^{n}(X_j-X_j^*)\neq0\right)$$
$$\leqslant P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_j^*-\mu_n^*\right|>\delta\right)+\sum_{j=1}^{n}P(X_j\neq X_j^*)$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon E|X_1|}{\delta^2}+\varepsilon.$$

由于 ε 为任意的，于是得证.

证法3 不妨假定均值 $\mu=EX_1=0$. 定义截尾随机变量 $\{X_k^*\}$ 如下

$$X_k^*=\begin{cases}X_k, \text{当 } |X_k|\leqslant k,\\ 0, \text{当 } |X_k|>k,\end{cases}\quad k=1,2,\cdots.$$

利用 $E|X_1|<\infty$ 和同分布的假定

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X_k\neq X_k^*)=\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_k|>k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}P(|X_1|>k)$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}P(l<|X_1|\leqslant l+1)$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}lP(l<|X_1|\leqslant l+1)$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^{\infty}\int_{l<|x|\leqslant l+1}|x|\,\mathrm{d}F(x)$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x)<\infty,$$

其中 $F(x)$ 为 X_1 的分布函数. 故由例11.8.2知, 欲证 $S_n/n\xrightarrow{p}0$, 只需要证 $S_n^*/n\xrightarrow{p}0$ 即可, 其中 $S_n^*=\sum_{j=1}^{n}X_j^*$. 设 $\{a_n\}$ 为整数序列满足 $0<a_n<n, a_n\to+\infty$ 但 $a_n=o(n)$. 于是有

$$\mathrm{Var}(S_n^*)=\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j^*)\leqslant\sum_{j=1}^{n}E(X_j^*)^2$$
$$=\Big(\sum_{j\leqslant a_n}+\sum_{a_n<j\leqslant n}\Big)\int_{|x|\leqslant j}x^2\mathrm{d}F(x)$$
$$\leqslant\sum_{j\leqslant a_n}a_n\int_{|X|\leqslant a_n}|x|\,\mathrm{d}F(x)$$
$$+\sum_{a_n<j\leqslant n}a_n\int_{|X|\leqslant a_n}|x|\,\mathrm{d}F(x)$$
$$+\sum_{a_n<j\leqslant n}n\int_{a_n<|X|\leqslant n}|x|\,\mathrm{d}F(x)$$
$$\leqslant na_n\int_{-\infty}^{\infty}|x|\,\mathrm{d}F(x)+n^2\int_{|x|>a_n}|x|\,\mathrm{d}F(x).$$

第一项为 $o(na_n)=o(n^2)$; 第二项为 $o(1)n^2=o(n^2)$, 因为其中的积分当 $n\to+\infty$ 时趋于0. 因此

$$\mathrm{Var}(S_n^*)=o(n^2).$$

根据切比雪夫不等式易证

$$\frac{S_n^*}{n}-\frac{ES_n^*}{n}\xrightarrow{p}0.$$

显然, 当 $n\to+\infty$ 时, $EX_n^*\to EX_n=0$, 进而有 $\frac{ES_n^*}{n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}EX_j^*\to0$. 因此 $\frac{S_n^*}{n}\xrightarrow{p}0$, 于是结论得证.

注 证法1是特征函数方法的代表, 关于特征函数方法在极限理论中的应用可参见 §11.6. 证法2、证法3使用的是截尾法, 截尾法是一种重要的标准方法. 两种证法中所得截尾随机变量 $\{X_k^*\}$ 性质不同: 证法3中 $\{X_k\}$ 和 $\{X_k^*\}$ 满足

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X_k\neq X_k^*)<\infty, \qquad ①$$

而证法2中的 $\{X_k\}$ 和 $\{X_k^*\}$ 并不满足①式. 一般满足①式的两随机序列称为等价序列.

11.8.4 设 $\{X_n\}$ 为独立同分布的随机变量序列, 其共同的分布 F 的概率函数为

$$P(X_1=n)=P(X_1=-n)$$
$$=\frac{c}{n^2\log n}, n=3,4,\cdots,$$

其中 c 为常数, $c=\frac{1}{2}\Big(\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2\log n}\Big)^{-1}$. 证明

$$S_n/n\xrightarrow{p}0, \text{其中 } S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j.$$

证 对任意 $n\geqslant1$, 定义截尾随机变量

$$X_j^*=\begin{cases}X_j, & \text{当 }|X_j|\leqslant n,\\ 0, & \text{当 }|X_j|>n,\end{cases}$$

记 $T_n=\sum_{j=1}^{n}X_j^*$, 则

$$\sum_{j=1}^{n}P(X_j\neq X_j^*)=n\int_{|x|>n}\mathrm{d}F(x)$$
$$=n\sum_{k>n}\frac{c}{k^2\log k}\sim\frac{c}{\log n},$$
$$\mathrm{Var}\Big(\frac{T_n}{n}\Big)=\frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Var}(X_j^*)\leqslant\frac{1}{n}E(X_1^*)^2$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=3}^{n}\frac{ck^2}{k^2\log k}\sim\frac{c}{\log n}.$$

根据切比雪夫不等式, 对任意 $\delta>0$, 有

$$P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}\Big|>\delta\Big)\leqslant P\Big(\Big|\frac{T_n}{n}\Big|>\delta\Big)+P(S_n\neq T_n)$$
$$\leqslant\frac{1}{\delta^2}\mathrm{Var}\Big(\frac{T_n}{n}\Big)+\sum_{j=1}^{n}P(X_j\neq X_j^*)$$
$$\sim\frac{c}{\delta^2\log n}+\frac{c}{\log n}\to0\quad(\text{当 }n\to+\infty),$$

亦即 $\frac{S_n}{n}\xrightarrow{p}0$.

注 本例的一阶矩并不存在, 但弱大数定律成立. 证明的关键是使用截尾法. 用类似的方法可以证明下面的弱大数定律准则:

设 $\{X_n\}$ 是独立随机变量的一个序列, 其分布函数为 $\{F_n\}$, 记 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j$. 设 $\{b_n\}$ 为实数列且 $b_n\to+\infty$. 假定

(i) $\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>b_n}\mathrm{d}F_j(x)=o(1)$;

(ii) $\frac{1}{b_n^2}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\leqslant b_n}x^2\mathrm{d}F_j(x)=o(1)$,

如果令

$$a_n=\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\leqslant b_n}x\mathrm{d}F_j(x),$$

则$\frac{1}{b_n}(S_n - a_n) \xrightarrow{p} 0$.

11.8.5 （几乎处处收敛判别条件）如果$\{\eta_n\}$为一串随机变量序列，对任意$\varepsilon > 0$，

$$\sum_{j=1}^{n} P(|\eta_n| \geqslant \varepsilon) < \infty, \qquad ①$$

则$\eta_n \xrightarrow{a.e.} 0$.

证 根据收敛的定义，$\eta_n \xrightarrow{a.e.} 0$的充分必要条件为对任意$\varepsilon > 0$，

$$P(|\eta_n| > \varepsilon \text{ i.o.}) = P(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}(|\eta_k| > \varepsilon)) = 0,$$

而这由条件①根据 Borel-Contelli 引理推出，从而得证.

注 有些场合直接证明$\eta_n \xrightarrow{a.e.} 0$比较困难.为此，我们引进概率论中的另一种重要的方法——子序列的方法.子序列方法的具体思想是：首先寻找随机变量序列$\{\eta_n\}$的子序列$\{\eta_{n_k}\}$，使其具有性质$\eta_{n_k} \xrightarrow{a.e.} 0$，再把这个子序列性质扩展到整个序列上去.本例给我们提供了寻找子列$\{\eta_{n_k}\}$的一种方法，即选择$\{n_k\}$，使$n_k \to \infty$且

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|\eta_{n_k}| > \varepsilon) < \infty.$$

11.8.6 设$\{X_n\}$为随机变量序列，均值为0，二阶矩一致有界且相互独立.则$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.e.} 0$，其中$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

证 因为二阶矩一致有界，所以必存在$M > 0$，使得

$$\sup_{n \geqslant 1} EX_n^2 \leqslant M,$$

因而

$$E(\frac{S_n}{n})^2 = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} EX_j^2 \leqslant \frac{M}{n}.$$

根据切比雪夫不等式，对每个$\varepsilon > 0$，我们有

$$P(|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}E(\frac{S_n}{n})^2 \leqslant \frac{M}{n\varepsilon}.$$

如将上式对n求和，则右侧所得级数发散.考虑上式的子列$\{k: k = n^2, n \geqslant 1\}$，并将子列对$k$求和得

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\frac{S_{n^2}}{n^2}| > \varepsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2\varepsilon} < \infty.$$

利用例 11.8.5 的结论知

$$\frac{S_{n^2}}{n^2} \xrightarrow{a.e.} 0. \qquad ①$$

对每个$n \geqslant 1$，令

$$D_n = \max_{n^2 < k \leqslant (n+1)^2} |S_k - S_{n^2}|,$$

根据 Kolmogrov 不等式（见例 11.7.7）

$$P(\frac{D_n}{n^2} \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{n^4\varepsilon^2}\sum_{j=n^2+1}^{(n+1)^2} EX_j^2 \leqslant \frac{2M}{n^3\varepsilon^2}.$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\frac{D_n}{n^2} \geqslant \varepsilon) < \infty.$$

再由例 11.8.5 得

$$\frac{D_n}{n^2} \xrightarrow{a.e.} 0. \qquad ②$$

对任意k，必存在n使$n^2 \leqslant k < (n+1)^2$，且

$$\frac{|S_k|}{k} \leqslant \frac{|S_{n^2}| + D_n}{n^2}.$$

结合①，②可推出$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{a.e.} 0$.

注 1 在使用子序列方法时，把子序列的结果扩展到整个序列上去的过程，就是证明原序列随机变量和子序列中最靠近的随机变量之间的差别不至造成任何实质的差异.这里 Kolmogrov 不等式常扮演十分重要的角色.

注 2 如果本例中随机变量独立同分布，那么二阶矩一致有界这一条件可取消，结论仍成立.

11.8.7 设$\{X_n\}$是均值为0的独立随机变量序列，且$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty$.则$S_n$几乎处处收敛，其中$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$.

证法 1 对任给$\varepsilon > 0$，根据切比雪夫不等式

$$P(|S_m - S_n| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{j=n+1}^{m} EX_j^2 \to 0$$

（当$m \geqslant n \to \infty$），

最后一步利用条件$\sum_{n=1}^{\infty} EX_n^2 < \infty$得到.因而$\{S_n\}$为依概率收敛的基本序列，必存在随机变量$S$，使$S_n \xrightarrow{p} S$.根据依概率收敛的定义，可选取趋于无穷的实数列$\{n_k\}$使

$$P(|S_{n_k} - S| \geqslant \frac{1}{2^k}) < \frac{1}{2^k}.$$

故对任意的$\varepsilon > 0$，总有

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(|S_{n_k} - S| \geqslant \varepsilon) < \infty.$$

根据例 11.8.5 结论得

$$S_{n_k} \xrightarrow{a.e.} S. \qquad ①$$

下面证明S_j与最近的S_{n_k}之间的差别不至造成任何实质的差异.由 Kolmogrov 不等式得

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{n_k < j \leqslant n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \geqslant \varepsilon\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k}^{\infty} \sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} EX_j^2 \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{j=1}^{\infty} EX_j^2 < \infty.$$

由此由 Borel-Contelli 引理，当 $k \to +\infty$ 时

$$\max_{n_k < j \leqslant n_{k+1}} |S_j - S_{n_k}| \xrightarrow{\text{a.e.}} 0 \qquad ②$$

结合 ① 和 ② 即得证 $S_n \xrightarrow{\text{a.e.}} S$.

证法 2 因为

$$\{S_n \text{不收敛}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\},$$

所以

S_n 几乎处处收敛

$$\Leftrightarrow P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } k, P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{对任意 } k, \lim_{n \to +\infty} P\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\}\right) = 0.$$

事实上，由于

$$\bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\}$$

$$= \bigcup_{v=1}^{\infty} \{\max_{j \leqslant v} |S_{n+j} - S_n| > \frac{1}{k}\} \qquad ③$$

是一列不降集序列之并，由此并利用 Kolmogrov 不等式

$$P\left(\bigcup_{v=1}^{\infty} \{|S_{n+v} - S_n| > \frac{1}{k}\}\right)$$

$$= \lim_{v \to +\infty} P\left(\max_{j \leqslant v} |S_{n+j} - S_n| > \frac{1}{k}\right)$$

$$\leqslant \lim_{v \to +\infty} k^2 \sum_{j=n+1}^{n+v} EX_j^2 \leqslant k^2 \sum_{j=n+1}^{\infty} EX_j^2.$$

由于 $\sum_{k=1}^{\infty} EX_k^2 < \infty$，当 $n \to +\infty$ 时上式右端趋于 0. 从而得证.

注 证法 1 使用子序列方法；证法 2 充分利用随机变量收敛的定义，把收敛域或其对立事件非收敛域具体表达出来，证明的关键是式 ③.

§ 11.9 概率论的若干应用——概率思维

概率论是一门应用性很强的学科，各个领域中的科技工作者都能从中得到启发，发现一些有用的模型. 单纯地照搬模型比较容易，难的是在实际问题中简化条件提炼出恰当的随机模型，把具体问题和概率论的思想和方法巧妙地结合起来，我们称之为概率思维. 学习概率论的一个目的就是要锻炼这种概率思维.

我们不可能穷举概率论所有可能的应用领域，而只是介绍概率论在下面三个方面的应用：(1) 证明组合恒等式；(2) 近似计算（包含著名的 Monte-Carlo 方法）；(3) 证明数学分析中的若干经典结果. 另外，概率论在不等式中的应用可参见 § 11.7.

11.9.1 证明恒等式

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

$$= \binom{m+n}{r},$$

其中 $m \geqslant r, n \geqslant r$ 且为正整数.

证 考虑概率模型：一个盒子中装有 m 个白球，n 个黑球. 现从盒子中无放回随机摸取 r 个球，每个球被摸取到的机会相同. 计算摸取方法种数（同种颜色球不可辨）.

显然摸取方式共有 $\binom{m+n}{r}$ 种. 另一方面，每种摸取的结果必使得下面互斥事件 $\{A_j, j = 0, 1, \cdots, r\}$ 之一发生：

$$A_j = \{\text{摸取的 } r \text{ 个球中有 } j \text{ 个白球和 } r-j \text{ 个黑球}\},$$

$$j = 0, 1, \cdots, r.$$

事件 A_j 的有利场合数为 $\binom{m}{j}\binom{n}{r-j}$. 因而总的摸取方式总数为

$$\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

$$= \binom{m+n}{r}.$$

11.9.2 证明：当 $n > m$ 且为整数时，

$$1 + \frac{n-m}{n-1} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{(n-1)(n-2)} + \cdots$$

$$+ \frac{(n-m)\cdots 2 \cdot 1}{(n-1)(n-2)\cdots(m+1)m} = \frac{n}{m}.$$

证 首先构造概率模型：一盒中有 n 个球，其中白球数 m 个. 不放回抽取小球. 记 η 为首次取出白球的抽取次数，则 η 取值为 $\{1, 2, \cdots, n-m+1\}$，且

$$P(\eta = 1) = \frac{m}{n};$$

$$P(\eta = k)$$

$$= \frac{(n-m)(n-m+1)\cdots(n-m-k+2)m}{n(n-1)\cdots(n-k+2)(n-k+1)},$$

$$k \geqslant 2.$$

把上述的概率函数代入 $\sum_{k=1}^{n-m+1} P(\eta = k) = 1$，化简后即得欲证的恒等式.

11.9.3 证明：当整数 $n \geqslant r$ 时，

$$\sum_{k=1}^{r}\binom{n}{k}\binom{r-1}{k-1}=\binom{n+r-1}{r}.$$

证 利用例11.1.2解法1和解法2中有利场合数的相同性立得.

注 上述几例直接证明并非易事，然而适当地选择概率模型，通过从不同的角度或侧面对模型中同一事件的有利场合数或概率进行分析却给出了巧妙的解答. 在选择概率模型之前有必要对所考虑的对象进行化简（如例11.9.2中，在等式两边同乘以$\frac{m}{n}$），这样有利于我们进行概率思维. 或许有人认为这种概率思维方法只不过是一种游戏而已. 这种观点未免太片面. 游戏是智慧的象征，概率游戏更能发展智慧，充分表现了概率论的有趣的一面. 概率游戏所带来的效益往往不在于内容，而在于游戏过程本身，它要求参加者综观全局并衡量各种因素，不断地作出聪明的决策. 我们探寻的是从概率游戏到概率理论进而应用概率理论到其它学科领域的途径.

11.9.4 证明当 n, m 为正整数时，

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{n-1+k}{k}=\binom{n+m}{n}.$$

证 构造概率模型如下：某数学家有两盒火柴，每盒有 n 根，每次用火柴时，他在两盒中任取一盒并随机地抽出一根. 求事件 A"某次他发现取出的那一盒已空，而此时另一盒中恰好有 m 支火柴"的概率.

首先来考察最初 $2n+1-m$ 次抽取情况. 每次抽取有2种方法，故总的不同抽法有 2^{2n+1-m} 种. 记两盒火柴为甲、乙. 事件 A 和甲盒先空的有利抽法为 $\binom{2n-m}{n}$ 种（因第 $2n+1-m$ 次必抽取甲盒发现已空，在前 $2n-m$ 次中，抽取甲盒的次数为 n 次）. 类似地，事件 A 和乙盒先空的有利抽法也为 $\binom{2n-m}{n}$. 故

$$P(A)=\frac{2\binom{2n-m}{n}}{2^{2n+1-m}}=\frac{\binom{2n-m}{n}}{2^{2n-m}}. \qquad ①$$

另一方面，考察必然能见分晓的前 $2n+1$ 次抽取情况. 总的抽法为 2^{2n+1} 种. 关键是计算事件 A 的有利抽法数. 以甲盒第 n 根火柴被抽取的时间来分，事件 A 和甲盒先空同时发生必然对某个 $r, r=0,1,\cdots, n-m$，以下情况同时发生：

(1) 第 $n+r$ 次抽取甲盒，且取出最后一根火柴；

(2) 在前 $n+r-1$ 次抽取中，乙盒被抽 r 次，不同的抽法为 $\binom{n+r-1}{r}$；

(3) 第 $2n+1-m$ 次抽取甲盒，且在此之前的 $n-m-r$ 次全抽取乙盒；

(4) 最后 m 次抽取任意，共有 2^m 种抽法. 因而事件 A 和甲盒先空同时发生的有利场合数为

$$\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}2^m,$$

该数亦为事件 A 和乙盒先空同时发生的有利场合数. 于是

$$P(A)=\frac{\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}}{2^{2n-m}} \qquad ②$$

比较 ①，②，得

$$\sum_{r=0}^{n-m}\binom{n-1+r}{r}=\binom{2n-m}{n} \qquad ③$$

再将 ③ 中的 m 改为 $n-m$ 即得所欲证的恒等式.

注 在本例的概率模型中，如果设事件 B_m 表示"该数学家用完一盒（即拿出最后一根）时，另一盒还有 m 根（$1\leqslant m\leqslant n$）"的这一事件，那么用类似的方法可以给出 $P(B_m)$ 的两个不同表达式，通过比较可能给出本例的另一种证法. 注意到

$$P(B_m)=\binom{2n-m-1}{n-1}\Big/2^{2n-m-1}$$

和 $\sum_{m=1}^{n}P(B_m)=1$，我们可以证明恒等式：

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+k-1}{k}\frac{1}{2^k}=2^{n-1}.$$

11.9.5 证明：$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n=n!$.

证 考虑例11.2.2中的概率模型. 特别当 $n=k$ 时，已求出事件 E"每节车厢内至少有一个旅客"的概率为

$$\begin{aligned}P(E)&=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{(n-j)^n}{n^n}\\&=\frac{1}{n^n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}j^n.\end{aligned} \qquad ①$$

另一方面，可以直接求出 $P(E)$. 因为旅客数与车厢数相同，所以事件 E 的有利场合数为 $n!$；每个旅客有 n 节车厢可以选择，故总的样本空间的大小为 n^n. 于是

$$P(E)=\frac{n!}{n^n}. \qquad ②$$

比较 ①，② 得证.

注 数学分析中证明这一恒等式是利用组合变换的互逆公式：设 $g(k)$ 为任一函数，定义函数 $f(n)$ 如下：

$$f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k g(k),\ n=0,1,2,\cdots,$$

则

$$g(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k f(k),n=0,1,2,\cdots$$

(应特别注意 $g(k)$ 是不依赖于 n 的,否则结论未必成立). 这一公式在概率论中亦有一定的应用,不妨在此利用该公式给出例 11.2.2 的另一种解法:

设事件 E 的有利场合数为 S_{kn}, 所求的概率 $P(E)$ 为 P_{kn}. 因任一旅客可以选择 n 节车厢中之一,有 n 种选择,故总的样本空间大小为 n^k. 因而

$$p_{kn}=\frac{S_{kn}}{n^k}. \qquad ③$$

k 个旅客选择 n 节车厢的最终结果必使以下互斥事件 $\{D_v, v=1,2,\cdots,n\}$ 之一发生,其中

$D_v=\{$有 v 节车厢至少有一个旅客,其余 $n-v$ 节车厢没有旅客$\}$

先从 n 节车厢中任选 v 个,选法有 $\binom{n}{v}$; k 个旅客选择这 v 个车厢,使得每节车厢至少有一个旅客,按定义选法应为 S_{kv}, 因而事件 D_v 的有利场合数为 $\binom{n}{v}S_{kv}$, 且

$$\begin{aligned}n^k&=\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}S_{kv}\\&=\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}(-1)^v[(-1)^vS_{kv}].\end{aligned}$$

利用组合变换的互逆公式

$$S_{kn}=\sum_{v=1}^{n}\binom{n}{v}(-1)^{n-v}v^k,$$

代入 ③ 得

$$p_{nk}=\sum_{v=1}^{n}(-1)^{n-v}\binom{n}{v}\left(\frac{v}{n}\right)^k.$$

11.9.6 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数,用概率方法求定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

解法 1 不失一般性,可设 $[a,b]=[0,1]$, $f(x)\in[0,1]$. 构造一个几何概率模型: n 次独立重复试验,每次向平面区域 $[0,1]\times[0,1]$ 上随机地掷点 (X_j,Y_j), 即 X_j,Y_j 独立且服从 $[0,1]$ 区间上的均匀分布. 定义随机变量

$$\eta_j=\begin{cases}1 & 当\ Y_j\leqslant f(X_j);\\0 & 当\ Y_j>f(X_j),\end{cases}$$
$$j=1,2,\cdots,n,$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 独立同分布,且

$$\begin{aligned}E\eta_j&=P(\eta_j=1)=P(Y_j\leqslant f(X_j))\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由强大数定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j=E\eta_1=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad (\text{a.s.}),$$

即当 n 较大时,可用 $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j$ 作为所求定积分的近似值.

解法 2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立,且都服从 $[a,b]$ 区间上的均匀分布,则 $f(X_1),f(X_2),\cdots,f(X_n)$ 独立同分布,且有有限的多阶绝对矩,因为 $f(X_j)$ 为有界的.

由强大数定理得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(X_j)&=Ef(X_1)\\&=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因此当 n 较大时, $\frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n}f(X_j)$ 可作为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值.

注 近年来由于电子计算机的发展,利用适当的概率模型进行数值模拟已成为一种有效的计算方法——蒙特卡罗(Monte-Carlo)方法. 这种方法的基本思想是:为了计算某些量,先构造适当的概率模型,使模型中的某些数字特征,恰好与所要计算的量相同或有某种关联,而这些数字特征用概率统计的方法又易于求出.

11.9.7 设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 为 R^r 中有界闭域 D 上的连续函数,试用概率方法求积分

$$\Delta=\int\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_r.$$

解法 1 因 D 为有界闭域,必存在常数 a,b,m 和 M 使得 $D\subset[a,b]^r\subset R^r$, 且对 $\forall x\in D, m\leqslant f(x)\leqslant M$.

构造一列随机变量 $X_{ij}, 1\leqslant i\leqslant r, j\geqslant 1$, 彼此独立,服从 $[a,b]$ 上的均匀分布. 另有一列随机变量 $X_{r+1,j}, j\geqslant 1$, 服从 $[m,M]$ 上的均匀分布. 假定所有的随机变量相互独立. 定义

$$\eta_j=\begin{cases}1, & 当(X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{rj})\in D\\ & 且\ X_{r+1,j}\leqslant f(X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{rj});\\0, & 其它,\end{cases}$$

则 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 独立同分布,且

$E\eta_j=P(X_{r+1,j}\leqslant f(X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{rj})$ 且 $(X_{1j},\cdots,X_{rj})\in D)$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{(b-a)^r(M-m)}\int\cdots\int_D[f(x_1,x_2,\\&\qquad\cdots,x_r)-m]\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_r\\&=\frac{1}{(b-a)^r(M-m)}[\Delta-m|D|],\end{aligned}$$

其中 $|D|$ 表示区域 D 的体积.

由强大数定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j = E\eta_1,$$

即当 n 较大时，$m\,|D| + \frac{(b-a)^r(M-m)}{n}\sum_{j=1}^{n}\eta_j$ 近似于所求的积分 Δ.

解法2 同解法1假设 $D\subset[a,b]^r$. 对 $\forall(x_1,x_2,\cdots,x_r)\in[a,b]^r\setminus D$，约定 $f(x_1,x_2,\cdots,x_r)=0$. 这样 f 于 $[a,b]^r$ 上有定义.

构造一列独立同分布的 r 维随机向量 $\mathbf{X}_j=(X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{rj})$，$j\geqslant 1$，且分量 $X_{1j},X_{2j},\cdots,X_{rj}$ 也独立同分布于 $[a,b]$ 上的均匀分布. 则 $f(\mathbf{X}_1)$，$f(\mathbf{X}_2)$，$\cdots$，$f(\mathbf{X}_n)$ 独立同分布，且为有界的. 由强大数定理

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}f(\mathbf{X}_j) = Ef(\mathbf{X}_1) = \frac{1}{(b-a)^r}\times\int\cdots\int_D f(x_1,x_2,\cdots,x_r)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_r.$$

因而当 n 较大时，$\frac{1}{n}(b-a)^r\sum_{j=1}^{n}f(\mathbf{X}_j)$ 可作为定积分 Δ 的近似值.

注1 一个近似计算的方法好坏，取决于计算的精度(估值的方差越小越好)和计算的可实施程度及计算速度(耗时越少越好). 在解法1中，如果区域 D 不规则，那么体积 $|D|$ 不易求出，而判断一个点是否属于区域 D 相对要容易得多，故解法2比解法1的方法更易于实现.

注2 在用 Monte-Carlo 方法近似计算多重积分时，应先利用数学分析的工具去尽量降低积分的重数. 这样有利于提高计算的精度和速度.

11.9.8 对任意 $R>0$，求

$$T_n = \int\cdots\int_{D_n(R)}\exp\{-(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)\}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

其中 $D_n(R)=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n):|x_1+\frac{x_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{x_n}{\sqrt{n}}|\leqslant R\}$.

解 设随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，服从 $N(0,\frac{1}{2})$ 分布. 记

$$\eta = X_1+\frac{X_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{X_n}{\sqrt{n}},$$

则 $E\eta=0$，且

$$\mathrm{Var}(\eta)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\mathrm{Var}(X_k)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

(记为 σ_n^2).

由正态分布的再生性得 $\eta\sim N(0,\sigma_n^2)$. 因此

$$\begin{aligned}T_n &= \pi^{\frac{n}{2}}\int\cdots\int_{D_n(R)}\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x_j^2}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n\\ &= \pi^{\frac{n}{2}}P(|X_1+\frac{X_2}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{X_n}{\sqrt{n}}|\leqslant R)\\ &= \pi^{\frac{n}{2}}P(|\eta/\sigma_n|\leqslant R/\sigma_n)\\ &= \pi^{\frac{n}{2}}[2\Phi(\frac{R}{\sigma_n})-1].\end{aligned}$$

注 本例的关键是要看出被积函数可改写成独立随机变量的联合概率密度.

11.9.9 求证：$\lim_{n\to\infty}e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$.

证 构造随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$，独立且服从参数为1的波哇松分布 $P(1)$. 则 $S_n=\sum_{j=1}^{n}X_j\sim P(n)$.

由中心极限定理得

$$\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\text{ 依分布收敛于 }\Phi,$$

因此

$$e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=P(S_n\leqslant n)=P(\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant 0)\to\Phi(0)=\frac{1}{2}.$$

注 本例的关键是要看出求和的每一项是参数为 n 的波哇松分布的概率函数.

11.9.10 (外尔斯特拉斯定理) 设 $f(x)$ 为闭区间 $[a,b]$ 上的任一连续函数，则必存在多项式序列 $\{Q_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

证 不妨假定 $[a,b]=[0,1]$，否则可取 $g(t)=f(a+(b-a)t)$，$t\in[0,1]$. 记 $M=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$，则 M 必有限，令

$$Q_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(\frac{k}{n}),\ n\geqslant 1.$$

显然 $Q_n(0)=f(0)$，$Q_n(1)=f(1)$. 以下证明：对 $\forall\varepsilon>0$，存在整数 N，当 $n>N$ 时，

$$\sup_{x\in(0,1)}|f(x)-Q_n(x)|<\varepsilon. \qquad ①$$

由于 $f(x)$ 对于闭区间连续必为一致连续，因而必存在 $\delta>0$，使得对 $\forall x_1,x_2\in(0,1)$ 满足 $|x_1-x_2|<\delta$，则必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

构造一个随机模型：在 n 次独立重复试验中，每次试验成功的概率为 x，$x\in(0,1)$，记 Y_n 为 n 次试验中成功的次数. 则由切比雪夫不等式得

$$P(|Y_n/n-x|\geqslant\delta)\geqslant\frac{1}{\delta^2}\mathrm{Var}(Y_n/n)=\frac{nx(1-x)}{n^2\delta^2}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

任取 $N > M/(\delta^2\varepsilon)$，则当 $n > N$ 时，对 $\forall x \in (0,1)$，有

$$
\begin{aligned}
&|f(x) - Q_n(x)| \\
&= \left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left[f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\right| \\
&\leqslant E|f(x) - f(Y_n/n)| \\
&= E(|f(x) - f(Y_n/n)|1_{\{|x-Y_n/n|<\delta\}}) \\
&\quad + E(|f(x) - f(Y_n/n)|1_{\{|x-Y_n/n|\geqslant\delta\}}) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2MP(|x - Y_n/n| \geqslant \delta) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2M\cdot\frac{1}{4n\delta^2} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

即 ① 成立.

注 本例给我们的启发是有一些用纯分析方法证得的结论，若充分利用概率思维，有时证明可以简化.

11.9.11* 用概率方法证明 Stirling 公式：

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\Gamma(n+1)} = 1.$$

证 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立且具有共同分布 Exp(1)，参数为 1 的指数分布. 则 $EX_j = 1, \mathrm{Var}(X_j) = 1$. 利用特征函数或拉普拉斯变换易知 $S_n = \sum_{j=1}^{n}X_j$ 服从 $\Gamma(n,1)$ 分布，其概率密度为

$$g(x) = \begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x}, & \text{当 } x \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } x < 0,\end{cases}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&E\left|\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right| \\
&= \int_0^{\infty}\left|\frac{x-n}{\sqrt{n}}\right|\frac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}\Gamma(n)}\left[\int_0^n (n-x)x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x\right. \\
&\quad \left.+ \int_n^{\infty}(x-n)x^{n-1}e^{-x}\mathrm{d}x\right] \\
&= \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n}\Gamma(n)}\left[\int_0^1 (1-u)u^{n-1}e^{-nu}\mathrm{d}u\right. \\
&\quad \left.+ \int_1^{\infty}(u-1)u^{n-1}e^{-nu}\mathrm{d}u\right] \\
&= \frac{n^{n+1}}{\sqrt{n}\Gamma(n)}\left[\frac{1}{n}u^n e^{-nu}\Big|_0^1 - \frac{1}{n}u^n e^{-nu}\Big|_1^{\infty}\right] \\
&= \frac{2n^n e^{-n}}{\sqrt{n}\Gamma(n)}.
\end{aligned}
\qquad ①
$$

另一方面，利用中心极限定理得

$$T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \text{ 依分布收敛于 } N,$$

其中 $N \sim N(0,1)$，且 $ET_n^2 = EN^2 = 1$. 对 $\forall 0 < r < 2, A > 0$，定义函数

$$d_A(x) = \begin{cases}|x|^r, & \text{当 } |x| \leqslant A \text{ 时}, \\ A^r, & \text{当 } |x| > A \text{ 时}.\end{cases}$$

由 Helley 定理得

$$\lim_{n\to\infty}Ed_A(T_n) = Ed_A(N). \qquad ②$$

又

$$
\begin{aligned}
&|E|T_n|^r - Ed_A(T_n)| \\
&\leqslant \int_{|x|>A}|x|^r\mathrm{d}F_{T_n}(x) \\
&\leqslant \frac{1}{A^{2-r}}\int_{|x|>A}|x|^2\mathrm{d}F_{T_n}(x) \leqslant \frac{1}{A^{2-r}},
\end{aligned}
$$

其中 $F_{T_n}(x)$ 为 T_n 的分布函数，所以当 $A \to +\infty$ 时，$Ed_A(T_n)$ 一致收敛于 $E|T_n|^r$. 类似可证 $Ed_A(N)$ 对 A 也一致收敛于 $E|N|^r$. 因而根据累级限交换定理由 ② 得

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}E|T_n|^r &= \lim_{n\to+\infty}\lim_{A\to+\infty}Ed_A(T_n) \\
&= \lim_{A\to+\infty}\lim_{n\to+\infty}Ed_A(T_n) \\
&= \lim_{A\to+\infty}Ed_A(N) = E|N|^r.
\end{aligned}
$$

特别当 $r = 1$ 时，

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}E|T_n| = E|N| \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}|x|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.
\end{aligned}
\qquad ③
$$

由 ①，③ 得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{2\pi n}n^n e^{-n}}{\Gamma(n+1)} = 1.$$

注 事实上，本例后半部分的方法可证明一条定理：如果 $\{Y_n\}$ 依分布收敛于 Y，且对某个 $p > 0$，$\sup_n E|Y_n|^p < \infty$，则对任意常数 $r < p$

$$\lim_{n\to+\infty}E|Y_n|^r = E|Y|^r.$$

读者不妨试用该定理和强大数定理证明：当 $q > p > 0$ 时，

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1\cdots\int_0^1\frac{x_1^q + x_2^q + \cdots + x_n^q}{x_1^p + x_2^p + \cdots + x_n^p}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n = \frac{p+1}{q+1}.$$

另一解法为设随机变量 Y 服从以整数 n 为参数的 Poisson 分布，即 $Y \sim \mathrm{Poisson}(n)$ 或

$$P\{Y = n\} = \frac{n^n e^{-n}}{n!},$$

而 Y 是 n 个独立的以 1 为参数的 Poisson 随机变量之和. 由中心极限定理知它将逼近于以 n 为均值和方差的正态随机变量 X. 而 $Z = \dfrac{X-n}{\sqrt{n}}$ 为标准正态分布. 于是

$$
\begin{aligned}
P\{Y = n\} &\doteq P\left\{|X - n| \leqslant \frac{1}{2}\right\} \\
&\doteq P\left\{|Z| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2n}}\right\}
\end{aligned}
$$

$$= \Phi(\frac{1}{2\sqrt{n}}) - \Phi(-\frac{1}{2\sqrt{n}}).$$

当 n 很大时上述正态曲线所覆盖的面积近似于矩形面积 $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \phi(0)$，其中 $\phi(0)$ 为标准正态密度，于是又有

$$P\{Y = n\} \doteq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}},$$

也即

$$\frac{n^n e^{-n}}{n!} \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

所以有 Stirling 公式

$$n! \doteq \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n.$$

由此可见概率解法的巧妙.

参考文献

[1] Feller, W., An Introduction to Probability Theory and its Applications, John Wiley, 1957(中译本：第一分册，胡迪鹤、林向清译；第二分册，刘文译，概率论及其应用，科学出版社，1979).

[2] 陈希孺，概率论与数理统计，中国科学技术大学出版社，1992.

[3] 王梓坤，概率论基础及其应用，科学出版社，1976.

[4] Chow, Y. S. and Teicher, H., Probability Theory, Springer-Verlag, New York, 1988.

第 12 篇　计算方法

§12.1　向量和矩阵范数

为了研究线性方程组的数值解的误差，使方程组的条件定量化以及讨论方程组的迭代法的收敛性，我们需要向量和矩阵的一个大小度量．这种大小度量就是向量和矩阵的范数．

设 R^n 是所有 n 维实向量构成的线性空间，$x=[x_1,x_2,\cdots,x_n]^T\in R^n$．常用的向量范数有 l_1 范数：

$$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|;$$

l_2 范数（Euclid 范数）：

$$\|x\|_2=(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2)^{\frac{1}{2}};$$

l_∞范数：

$$\|x\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|.$$

空间 R^n 中，序列 $x_k=[x_1^{(k)},\cdots,x_n^{(k)}]^T$，$k=1,2,\cdots$，收敛于 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$，记作

$$\lim_{k\to\infty}x_k=x,$$

是指

$$\lim_{k\to\infty}x_i^{(k)}=x_i,i=1,\cdots,n.$$

它的充分必要条件是对某一种范数 $\|\cdot\|$，

$$\lim_{k\to\infty}\|x_k-x\|=0.$$

设 $R^{n\times n}$是所有 n 阶实矩阵构成的 n^2 维线性空间，$A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$，$x\in R^n$．最常用的矩阵范数是

$$\|A\|=\max_{\|x\|=1}\|Ax\|.$$

特别地，

$$\|A\|_1=\max_{\|x\|_1=1}\|Ax\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2=\sqrt{\lambda_1},$$

其中 λ_1 是 A^TA 的最大特征值，

$$\|A\|_\infty=\max_{\|x\|_\infty=1}\|Ax\|_\infty$$
$$=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

$\|A\|_2$ 又称为 A 的谱范数．这些矩阵范数都与其相应的向量范数相容，即 $\forall A\in R^{n\times n}$，$x\in R^n$，恒有

$$\|Ax\|\leqslant\|A\|\|x\|,$$

它是讨论线性方程组的迭代解法的误差估计和收敛性的一个常用的基本不等式．

另外还有一种常用的范数是 Frobenius 范数：

$$\|A\|_F=(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2)^{\frac{1}{2}},$$

它与向量的 l_2 范数相容（见 12.1.7 证明）．

设 $A\in R^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值，A 的谱半径为

$$\rho(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|.$$

对于任何一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，恒有

$$\rho(A)\leqslant\|A\|.$$

$R^{n\times n}$中的矩阵序列 $A_k=[a_{ij}^{(k)}]$，$k=1,\cdots$，收敛于矩阵 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$，记作

$$\lim_{k\to\infty}A_k=A,$$

是指

$$\lim_{k\to\infty}a_{ij}^{(k)}=a_{ij},i,j=1,\cdots,n.$$

它的充分必要条件是对某一种矩阵范数 $\|\cdot\|$，

$$\lim_{k\to\infty}\|A_k-A\|=0.$$

$\lim_{k\to\infty}A^k=O$ 的充分必要条件是

$$\rho(A)<1.$$

有限维线性空间中的范数之间关于收敛性具有等价性．这就不致于在极限概念中出现对某种范数来说是收敛的而对另一种范数不收敛的情形．因此，可以根据问题的需要和研究简便而采用什么范数．

12.1.1　设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，且其列向量线性无关．在 R^m 中取定一种范数 $\|\cdot\|_\alpha$，试验证

$$g(x)=\|Ax\|_\alpha,x\in R^n$$

是 R^n 的一种向量范数．

解　(1) 由假设 A 的列向量线性无关，$\mathrm{rank}A=n$，因此齐次线性方程组 $Ax=0$ 只有零解．这样，$\forall x\in R^n$，$x\neq 0$，必然 $Ax\neq 0$，因此

$$g(x)=\|Ax\|_\alpha>0;$$

(2) $\forall\lambda\in R,x\in R^n$，

$$g(\lambda x)=\|A(\lambda x)\|_\alpha=\|\lambda Ax\|_\alpha$$
$$=|\lambda|\|Ax\|_\alpha=|\lambda|g(x);$$

(3) $\forall x,y\in R^n$，

$$g(x+y)=\|A(x+y)\|_\alpha$$
$$=\|Ax+Ay\|_\alpha$$
$$\leqslant\|Ax\|_\alpha+\|Ay\|_\alpha$$

$$=g(\boldsymbol{x})+g(\boldsymbol{y}).$$

故 $g(\boldsymbol{x})$ 是 R^n 中的一种向量范数.

12.1.2 设 A 是一个 n 阶正定实对称矩阵,试验证

$$\|\boldsymbol{x}\|_A=(\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}},\boldsymbol{x}\in R^n$$

是 R^n 中的一种向量范数.

解 (1) 因 A 正定,因此 $\forall\boldsymbol{x}\in R^n,\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{0}$,实二次型 $\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x}>0$,从而

$$\|\boldsymbol{x}\|_A>0;$$

(2) $\forall\lambda\in R,\boldsymbol{x}\in R^n$,恒有

$$\begin{aligned}\|\lambda\boldsymbol{x}\|_A&=(\lambda\boldsymbol{x}^TA(\lambda\boldsymbol{x}))^{\frac{1}{2}}\\&=(\lambda^2\boldsymbol{x}^TA\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=|\lambda|\|\boldsymbol{x}\|_A;\end{aligned}$$

(3) 因 A 正定,因此存在一个同阶非奇异矩阵 P,使得

$$A=PP^T.$$

于是

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}\|_A&=(\boldsymbol{x}^TPP^T\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}\\&=((P^T\boldsymbol{x})^TP^T\boldsymbol{x})^{\frac{1}{2}}=\|P^T\boldsymbol{x}\|_2,\end{aligned}$$

从而,$\forall\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$,恒有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|_A&=\|P^T(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})\|_2\\&=\|P^T\boldsymbol{x}+P^T\boldsymbol{y}\|_2\\&\leqslant\|P^T\boldsymbol{x}\|_2+\|P^T\boldsymbol{y}\|_2\\&=\|\boldsymbol{x}\|_A+\|\boldsymbol{y}\|_A.\end{aligned}$$

故 $\|\boldsymbol{x}\|_A$ 是 R^n 中的一种向量范数.

12.1.3 设 $A=[a_{ij}]\in R^{n\times n}$,试验证

$$\|A\|_M=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$$

是一种矩阵范数.

解 (1) 设 $A\neq O$,,由 A 含非零元素,因此

$$\|A\|_M=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|>0;$$

(2) $\forall\lambda\in R$,恒有

$$\begin{aligned}\|\lambda A\|_M&=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|\lambda a_{ij}|\\&=|\lambda|n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|\\&=|\lambda|\|A\|_M;\end{aligned}$$

(3) $\forall A=[a_{ij}],B=[b_{ij}]\in R^{n\times n}$,恒有

$$\begin{aligned}\|A+B\|_M&=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}+b_{ij}|\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}(|a_{ij}|+|b_{ij}|)\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|+n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{ij}|\\&=\|A\|_M+\|B\|_M;\end{aligned}$$

(4) $\forall A=[a_{ij}],B=[b_{ij}]\in R^{n\times n}$,由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\Big|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big|\leqslant\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^n|b_{kj}|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

我们有

$$\begin{aligned}\|AB\|_M&=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big|\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}\Big|\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big[\Big(\sum_{k=1}^n|a_{ik}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{k=1}^n|b_{kj}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big[\sqrt{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|a_{ik}|\cdot\sqrt{n}\max_{1\leqslant k\leqslant n}|b_{kj}|\Big]\\&\leqslant n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|\cdot n\max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|b_{ij}|\\&=\|A\|_M\cdot\|B\|_M.\end{aligned}$$

因此 $\|A\|_M$ 是一种矩阵范数.

12.1.4 设

$$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\-1&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix},$$

计算 $\|A\|_1,\|A\|_\infty,\|A\|_M,\|A\|_F,\|A\|_2$ 以及 $\rho(A)$.

解 由于

$$\sum_{i=1}^3|a_{i1}|=2+1+0=3,$$

$$\sum_{i=1}^3|a_{i2}|=1+2+1=4,$$

$$\sum_{i=1}^3|a_{i3}|=0+1+2=3,$$

因此

$$\|A\|_1=\max_{1\leqslant j\leqslant 3}\sum_{i=1}^3|a_{ij}|=4.$$

因 A 为对称的,因此

$$\|A\|_\infty=\|A\|_1=4.$$

$$\|A\|_M=n\max_{1\leqslant i,j\leqslant 3}|a_{ij}|=3\times2=6,$$

$$\|A\|_F=\Big(\sum_{i=1}^3\sum_{j=1}^3|a_{ij}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{16}=4.$$

由于

$$\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&0\\-1&2-\lambda&-1\\0&-1&2-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda+2),$$

因此 A 的三个特征值为 $2,2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}$. 于是

$$\rho(A)=\max(2,2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})=2+\sqrt{2}.$$

因 A 是对称的,因此

$$\|A\|_2=\rho(A)=2+\sqrt{2}.$$

注 12.1.5证明了,若 A 是实对称矩阵,则

$$\|A\|_2=\rho(A).$$

12.1.5 设 A 是 n 阶实对称矩阵.证明

$$\|A\|_2=\rho(A).$$

又若 $g_m(t)$ 是 t 的任一 m 次实系数多项式,则

$$\|g_m(A)\|_2=\rho(g_m(A)).$$

证明 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的 n 个特征值. 因 A 是对称的,因此 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数. 不妨设 $|\lambda_1|\geqslant|\lambda_2|\geqslant\cdots\geqslant|\lambda_n|$. 由于 $A^T=A$, 因此 $A^TA=A^2$, 而 $\lambda_1^2,\lambda_2^2,\cdots,\lambda_n^2$ 是 A^2 的特征值. 故

$$\|A\|_2=\sqrt{\lambda_1^2}=|\lambda_1|=\rho(A).$$

又设

$$g_m(t)=a_mt^m+a_{m-1}t^{m-1}+\cdots+a_1t+a_0,$$

则

$$g_m(A)=a_mA^m+a_{m-1}A^{m-1}+\cdots+a_1A+a_0I,$$

其中 I 为 n 阶单位阵,且 $g_m(A)$ 也是 n 阶实对称矩阵. 故

$$\|g_m(A)\|_2=\rho(g_m(A)).$$

12.1.6 设 $A\in R^{n\times n}$. 试证明

$$\|A\|_2^2\leqslant\|A\|_1\|A\|_\infty.$$

证明

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2&=\rho(A^TA)\leqslant\|A^TA\|_\infty\\&\leqslant\|A^T\|_\infty\|A\|_\infty\\&=\|A\|_1\|A\|_\infty.\end{aligned}$$

注 $\|A^T\|_\infty=\|A\|_1$.

12.1.7 设 $A\in R^{n\times n}$. 证明

$$\|A\|_2\leqslant\|A\|_F\leqslant\sqrt{n}\|A\|_2.$$

证明 设 $A=[a_{ij}]$, $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\leqslant\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right),$$

我们有

$$\begin{aligned}\|Ax\|_2^2&=\sum_{i=1}^n\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right|^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)\\&=\left(\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n|a_{ij}|^2\right)\left(\sum_{j=1}^n|x_j|^2\right)\\&=\|A\|_F^2\|x\|_2^2,\end{aligned}$$

即有

$$\|Ax\|_2\leqslant\|A\|_F\|x\|_2$$

因此

$$\begin{aligned}\|A\|_2&=\max_{\|x\|_2=1}\|Ax\|_2\\&\leqslant\|A\|_F\max_{\|x\|_2=1}\|x\|_2\\&=\|A\|_F.\end{aligned}$$

因此左边不等式成立. 其次,由于 A^TA 为半正定矩阵,它的特征值 $\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n$ 均非负,因此

$$\begin{aligned}\|A\|_2^2&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\mu_i\\&\geqslant\frac{1}{n}(\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n)\\&=\frac{1}{n}\mathrm{tr}(A^TA)=\frac{1}{n}\|A\|_F^2,\end{aligned}$$

$\mathrm{tr}(A^TA)$ 是 A^TA 的迹. 这就证得右边不等式.

注 矩阵

$$A^TA=\left[\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{kj}\right]$$

的迹 $\mathrm{tr}(A^TA)$ 为 A^TA 的主对角元素之和,即有

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(A^TA)&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}a_{ki}\right)\\&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{k=1}^n a_{ki}^2\right)=\|A\|_F^2.\end{aligned}$$

12.1.8 设

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

试证明

$$\lim_{k\to\infty}A^k=O.$$

证明 由于 A 的两个特征值都是 $\frac{1}{2}$, 因此 $\rho(A)=\frac{1}{2}<1$, 故 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=O$.

或证:由于

$$A^2=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}&0\\\frac{1}{4}&\frac{1}{4}\end{bmatrix},\quad A^3=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&0\\\frac{3}{16}&\frac{1}{8}\end{bmatrix},$$

$$A^4=\begin{bmatrix}\frac{1}{16}&0\\\frac{1}{8}&\frac{1}{16}\end{bmatrix},$$

一般地,

$$A^k=\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}\right)^k&0\\\frac{k}{2^{k+1}}&\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{bmatrix},$$

因此

$$\begin{aligned}\|A^k-O\|_\infty&=\max\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k,\frac{k}{2^{k+1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\\&=\frac{k}{2^{k+1}}+\left(\frac{1}{2}\right)^k\to0\ (k\to\infty).\end{aligned}$$

这就证得 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=O$. 或者,也可从 A^k 的诸元素当 $k\to\infty$ 时均趋于 0 看出 $\lim\limits_{k\to\infty}A^k=O$.

12.1.9 设 $A_k\in R^{n\times n}$. 试证对任意的 $x\in R^n$, $\lim\limits_{k\to\infty}A_kx=0$ 的充分必要条件是 $\lim\limits_{k\to\infty}A_k=O$.

证明 必要性. 设 $\forall x\in R^n$,

$$\lim_{k\to\infty}A_kx=\mathbf{0}.$$

特别,当 $x=e_j$(其第 j 个分量是 1,其余分量均为 0), $j=1,\cdots,n$ 时,有

$$\lim_{k\to\infty} A_k e_j = \mathbf{0}.$$

由于 $A_k e_j$ 是 A_k 的第 j 列向量，因此上式表明 A_k 的每一列向量的极限都是 $\mathbf{0}$，故

$$\lim_{k\to\infty} A_k = O.$$

充分性．设

$$\lim_{k\to\infty} A_k = O,$$

则

$$\lim_{k\to\infty} \| A_k \|_\infty = 0.$$

由于 $\forall\, x \in R^n$ 都有

$$\| A_k x \|_\infty \leqslant \| A \|_\infty \| x \|_\infty,$$

因此

$$\lim_{k\to\infty} \| A_k x \|_\infty = 0.$$

故证得

$$\lim_{k\to\infty} A_k x = \mathbf{0}.$$

12.1.10　设 $x \in R^n$，$A \in R^{n\times n}$，Q 为 n 阶正交矩阵．证明

(1) $\| Qx \|_2 = \| x \|_2$；

(2) $\| QAQ^T \|_2 = \| A \|_2$；

(3) $\| QAQ^T \|_F = \| A \|_F$.

证明　(1) 因 Q 是正交阵，即 $Q^TQ = I$，因此

$$\| Qx \|_2^2 = (Qx)^TQx = x^TQ^TQx = x^Tx = \| x \|_2^2,$$

从而

$$\| Qx \|_2 = \| x \|_2.$$

(2) 由于 $Q^TQ = I$，因此 $\| Q^T \|_2 = \| Q \|_2 = 1$，从而

$$\| QAQ^T \|_2 \leqslant \| Q \|_2 \| A \|_2 \| Q^T \|_2 = \| A \|_2.$$

同理有

$$\| A \|_2 = \| Q^TQAQ^TQ \|_2 \leqslant \| QAQ^T \|_2.$$

故得

$$\| QAQ^T \|_2 = \| A \|_2.$$

或证：由于 $(QAQ^T)^TQAQ^T = QA^TAQ^T$ 与 A^TA 相似，因此它们的特征值相同，从而

$$\rho((QAQ^T)^TQAQ^T) = \rho(A^TA).$$

故

$$\| QAQ^T \|_2 = \| A \|_2.$$

(3) 设 $A = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$，$a_j$ 是 A 的第 j 列向量，$j = 1, \cdots, n$，则有

$$QA = [Qa_1, Qa_2, \cdots, Qa_n].$$

据(1)有

$$\| Qa_j \|_2^2 = \| a_j \|_2^2,$$

于是

$$\| A \|_F^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n | a_{ij} |^2 = \sum_{j=1}^n \| a_j \|_2^2 = \sum_{j=1}^n \| Qa_j \|_2^2 = \| QA \|_F^2.$$

从而

$$\| A \|_F^2 = \| A^T \|_F^2 = \| QA^T \|_F^2 = \| (QA^T)^T \|_F^2 = \| AQ^T \|_F^2 = \| QAQ^T \|_F^2$$

故

$$\| QAQ^T \|_F = \| A \|_F.$$

注　本题结论是求线性方程组的最小二乘解和计算矩阵特征值的直交化方法的基本依据．

§12.2　解线性方程组的直接方法

解线性方程组 $Ax = b$ 的直接方法有 Gauss 消去法和矩阵三角分解法．基本的 Gauss 消去法中可能出现绝对值很小的元素作为主元(它在计算过程中作为除数)，其绝对值愈小，引起的舍入误差就愈大．因此，常用 Gauss 部分选主元消去法(如按列选主元)．甚至 Gauss 按比例部分选主元消去法．矩阵三角分解法是先将矩阵 A 作三角分解

$$A = LU,$$

其中 L 为下三角阵，U 为上三角阵．这样解方程组 $Ax = b$ 便化成解一个下三角形方程组

$$Ly = b$$

和一个上三角形方程组

$$Ux = y.$$

特别，若 L 为单位下三角阵(其主对角元均为 1)时，则 $A = LU$ 称为 Doolittle 分解；若 U 为单位上三角阵时，则 $A = LU$ 称为 Crout 分解．如果 A 为实对称正定矩阵，那么分解式 $A = LU$ 就化为

$$A = LL^T.$$

12.2.1　应用 Gauss 列主元消去法，用准确算术运算解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3. \end{cases}$$

解　增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_1 \leftrightarrow r_2]{\text{主元为 } a_{21} = -3} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2+\frac{1}{3}r_1}\begin{bmatrix}3 & 1 & 2 & 2\\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & -1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1+\frac{3}{7}r_2]{}\begin{bmatrix}-3 & 1 & 2 & 2\\ 0 & \frac{7}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{5}{3}\\ 0 & 0 & \frac{20}{7} & \frac{40}{7}\end{bmatrix}.$$

由回代得

$$x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 1 .$$

注　r_1, r_2 和 r_3 分别表示矩阵的第 1,2 和 3 行.若应用基本 Gauss 消去法,则第一步消元取 $a_{11} = 1$ 为主元.

12.2.2　用 Gauss 列主元消去法解方程组

$$\begin{cases}0.1x_1+0.2x_2+0.4x_3=1.1,\\ 4x_1+x_2-x_3=6,\\ 2x_1+5x_2+2x_3=3.\end{cases}$$

计算结果取三位小数(用四位数进行计算),并写出每步消元的乘子.

解　增广矩阵

$$\begin{bmatrix}0.100 & 0.200 & 0.400 & 1.100\\ 4.000 & 1.000 & -1.000 & 6.000\\ 2.000 & 5.000 & 2.000 & 3.000\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_1\leftrightarrow r_2]{\text{主元为 } a_{21}=4}\begin{bmatrix}4.000 & 1.000 & 1.000 & 6.000\\ 0.100 & 0.200 & 0.400 & 1.100\\ 2.000 & 5.000 & 2.000 & 3.000\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_2-m_{21}r_1\\ r_3-m_{31}r_1}]{\substack{m_{21}=0.1/4\\ =0.025\\ m_{31}=2/4=0.5}}\begin{bmatrix}4.000 & 1.000 & -1.000 & 6.000\\ 0 & 0.175 & 0.425 & 0.950\\ 0 & 4.500 & 2.500 & 0.000\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2\leftrightarrow r_3]{\text{主元为 } 4.5}\begin{bmatrix}4.000 & 1.000 & -1.000 & 6.000\\ 0 & 4.500 & 2.500 & 0.000\\ 0 & 0.175 & 0.425 & 0.950\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-m_{32}r_2]{\substack{m_{32}=0.175/4.5\\ =0.039}}\begin{bmatrix}4.000 & 1.000 & -1.000 & 6.000\\ 0 & 4.500 & 2.500 & 0.000\\ 0 & 0 & 0.328 & 0.950\end{bmatrix}.$$

回代得

$$x_3=\frac{0.950}{0.328}=2.896 ,$$

$$x_2=-\frac{2.500\times 2.896}{4.500}=-1.609 ,$$

$$x_1=\frac{6+1.609+2.896}{4.000}=2.626 .$$

12.2.3　分别用 Gauss 消去法和 Gauss 列主元消去法解方程组

$$\begin{cases}0.005x_1+x_2=0.5,\\ x_1+x_2=1.\end{cases}$$

计算结果取三位小数,并比较它们的精确度.

解　若用 Gauss 消去法,则第一步主元为 $a_{11}=0.005$.增广矩阵

$$\begin{bmatrix}0.005 & 1 & 0.5\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-200r_1]{}\begin{bmatrix}0.005 & 1 & 0.5\\ 0 & -199 & -99\end{bmatrix}.$$

由回代得

$$x_2=\frac{-99}{-199}=0.497,$$

$$x_1=\frac{0.5-0.497}{0.005}=0.600.$$

若用 Gauss 列主元消去法,则第一步主元为 $a_{21}=1$.交换增广矩阵的第一行与第 2 行得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0.005 & 1 & 0.5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2-0.005r_1]{}\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0.995 & 0.495\end{bmatrix}.$$

回代得

$$x_2=\frac{0.495}{0.995}=0.497,$$

$$x_1=1-0.497=0.503.$$

方程组的准确解为

$$\boldsymbol{x}^*=\left[\frac{100}{199},\frac{99}{199}\right]^T,$$

因此,用 Gauss 消去法得到的近似解 $\boldsymbol{x}=[0.497, 0.600]^T$ 的误差为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty<10^{-1},$$

而用 Gauss 列主元消去法得到的近似解 $\boldsymbol{x}=[0.497, 0.503]^T$ 的误差为

$$\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^*\|_\infty<10^{-3}.$$

Gauss 列主元消去法得到的近似解较 Gauss 消去法得到的精确.

12.2.4　计算用 Crout 方法解 n 阶线性方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的乘除法运算次数.

解　设 $A=[a_{ij}], L=[l_{ij}], U=[u_{ij}]$($u_{ii}=1, i=1,\cdots,n$).据 Crout 分解 $A=LU$ 的计算公式

$$\left.\begin{aligned}l_{ik}&=a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk}, i=k,\cdots,n\\ u_{kj}&=(a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj})/l_{kk}, j=k+1,\cdots,n\end{aligned}\right\}k=1,\cdots,n,$$

计算 l_{ik}, u_{kj} 总共需乘除运算次数:

$$\sum_{k=1}^{n}[(k-1)(n-k+1)+k(n-k)]$$
$$=\sum_{k=1}^{n}[2kn+2k-n-1-2k^2]$$
$$=2n\sum_{k=1}^{n}k+2\sum_{k=1}^{n}k-n^2-n-2\sum_{k=1}^{n}k^2$$
$$=n^2(n+1)+n(n+1)-n^2-n-\frac{n(n+1)(2n+1)}{3}$$
$$=\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}.$$

解方程组 $Ly=b$,需乘除运算次数:

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}.$$

解方程组 $Ux=y$,需乘除运算次数:

$$\sum_{k=1}^{n-1}k=\frac{n(n-1)}{2}.$$

故解方程组 $Ax=b$ 共需乘除运算次数为

$$\frac{n^3}{3}-\frac{n}{3}+\frac{n(n+1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2}$$
$$=\frac{n^3}{3}+n^2-\frac{n}{3}.$$

注 Crout 方法所需的乘除运算次数和 Gauss 消去法所需的相同.

12.2.5 先将正定对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&20&26\\3&26&70\end{bmatrix}$$

作分解式 $A=LL^T$,然后求方程组 $Ax=b$ 的解,其中 $b=[2,8,47]^T$.

解 据 LL^T 分解的计算公式

$$l_{ij}=\begin{cases}(a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1}l_{ik}^2)^{\frac{1}{2}}, i=j,\\(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1}l_{ik}l_{jk})/l_{jj}, i>j,\end{cases}$$

我们有

$$l_{11}=\sqrt{a_{11}}=1,$$
$$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=\frac{2}{1}=2,$$
$$l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=\frac{3}{1}=3,$$
$$l_{22}=(a_{22}-l_{21}^2)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{20-4}=4,$$
$$l_{32}=(a_{32}-l_{31}l_{21})/l_{22}=(26-3\times2)/4=5,$$
$$l_{33}=(a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2)^{\frac{1}{2}}=(70-9-25)^{\frac{1}{2}}=6,$$

因此

$$L=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&4&0\\3&5&6\end{bmatrix}.$$

这样,解方程组 $Ax=b$ 就化为解方程组 $Ly=b$ 和 $L^Tx=y$. 解方程组 $Ly=b$,即

$$\begin{cases}y_1=2,\\2y_1+4y_2=8,\\3y_1+5y_2+6y_3=47.\end{cases}$$

由(向后)回代得

$$y_1=2,$$
$$y_2=(8-2\times2)/4=1,$$
$$y_3=(47-3\times2-5\times1)/6=6.$$

解方程组 $L^Tx=y$,即

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=2,\\4x_2+5x_3=1,\\6x_3=6,\end{cases}$$

由(向前)回代得

$$x_3=1,$$
$$x_2=(1-5\times1)/4=-1,$$
$$x_1=2-2\times(-1)-3\times1=1.$$

12.2.6 试对正定实对称矩阵

$$A=\begin{bmatrix}6&2&1&-1\\2&4&1&0\\1&1&4&-1\\-1&0&-1&3\end{bmatrix}$$

作出 Doolittle 分解 $A=LU$,再将 A 分解为 $A=LDL^T$,其中 D 是一个主对角元素取正的对角矩阵.

解 据 Doolittle 分解的算法,对 $i=1,2,\cdots,n$ 进行如下计算:

(1) 对 $k=i,i+1,\cdots,n$,

$$a_{ik}\leftarrow u_{ik}=a_{ik}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}u_{jk};$$

(2) 对 $k=i+1,\cdots,n$,

$$a_{ki}\leftarrow l_{ki}=(a_{ki}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{kj}u_{ji})/u_{ii}.$$

现在 $n=4$. 分解过程可按下面格式进行:

$$A=\begin{bmatrix}6&2&1&-1\\2&4&1&0\\1&1&4&-1\\-1&0&-1&3\end{bmatrix}$$
$$\xrightarrow{i=1}\begin{bmatrix}6&2&1&-1\\\frac{1}{3}&4&1&0\\\frac{1}{6}&1&4&-1\\-\frac{1}{6}&0&-1&3\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{i=2}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 4 & -1 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{i=3}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{37}{10} & \frac{9}{10} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{i=4}\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & \frac{37}{10} & \frac{9}{10} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & \frac{191}{74} \end{bmatrix}.$$

于是

$$L=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & -\frac{9}{37} & 1 \end{bmatrix},$$

$$U=\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{10}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & -\frac{9}{10} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{bmatrix}.$$

因

$$U=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{9}{37} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

令

$$D=\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{10}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{37}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{191}{74} \end{bmatrix},$$

则

$$A=LDL^T.$$

12.2.7　试证正定实对称矩阵 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 的分解 $A=LL^T$ 中的 L 的元素满足关系式：

$$|l_{ij}|\leqslant\sqrt{a_{ii}},j=1,2,\cdots,i.$$

证明　据 $A=LL^T$ 分解的计算公式

$$l_{ii}=(a_{ii}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}^2)^{\frac{1}{2}},$$

两边平方得

$$l_{ii}^2=a_{ii}-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}^2,$$

即

$$l_{i1}^2+l_{i2}^2+\cdots+l_{ii}^2=a_{ii}.$$

因此

$$l_{ij}^2\leqslant a_{ii},j=1,2,\cdots,i.$$

从而得

$$|l_{ij}|\leqslant\sqrt{a_{ii}},j=1,2,\cdots,i.$$

12.2.8　设 $A=[a_{ij}]$ 为 n 阶正定实对称矩阵，对 A 作分解

$$A=LL^T,$$

其中 L 为下三角矩阵. 试证 L 的主对角元素 l_{ii} 满足下列不等式：

(1) $l_{ii}^2\geqslant\min\limits_{x\neq0}\dfrac{x^TAx}{x^Tx}=\dfrac{1}{\|L^{-T}\|_2^2},i=1,2,\cdots,n$；

(2) $\|L^T\|_2^2=\max\limits_{x\neq0}\dfrac{x^TAx}{x^Tx}\geqslant l_{ii}^2,i=1,2,\cdots,n$；

(3) $K(L^T)\geqslant\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}\dfrac{|l_{ii}|}{|l_{jj}|}$，其中 $K(L^T)=\|(L^T)\|_2\,\|(L^{-T})\|_2$ 是 L^T 的谱条件数.

证明　(1) 由于 $A=LL^T=L_1DL_1^T$，其中 D 为对角阵：$D=\mathrm{diag}(l_{ii}^2)$，$L_1$ 为单位下三角阵，因此

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{x^TL_1DL_1^Tx}{x^Tx}.$$

取 $x=L_1^{-T}e_i$，e_i 是第 i 个分量是 1，其余分量为 0 的 n 维向量，则

$$\frac{x^TAx}{x^Tx}=\frac{e_i^TDe_i}{e_i^T(L_1^{-1}L_1^{-T})e_i}=\frac{l_{ii}^2}{(L_1^{-1}L_1^{-T})_{i,i}}$$

$$\geqslant\min_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

由于 L_1^{-1} 仍为单位下三角阵，因此

$$(L_1^{-1}L_1^{-T})_{i,i}\geqslant1.$$

故

$$l_{ii}^2\geqslant\min_{x\neq0}\frac{x^TAx}{x^Tx}.$$

又因

$$\| L^{-T} \|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\| L^{-T}x \|_2}{\| x \|_2}$$

$$= \max_{y \neq 0} \frac{\| y \|_2}{\| L^T y \|_2},$$

因此

$$\frac{1}{\| L^{-T} \|_2} = \min_{y \neq 0} \frac{\| L^T y \|_2}{\| y \|_2}.$$

把上式右端中的 y 换成 x，则得

$$\frac{1}{\| L^{-T} \|_2^2} = \min_{x \neq 0} \frac{\| L^T x \|_2^2}{\| x \|_2^2} = \min_{x \neq 0} \frac{x^T L L^T x}{x^T x}$$

$$= \min_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x} \leqslant l_{ii}^2, i = 1, \cdots, n.$$

(2) $\| L^T \|_2^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\| L^T x \|_2^2}{\| x \|_2^2}$

$$= \max_{x \neq 0} \frac{x^T L L^T x}{x^T x} = \max_{x \neq 0} \frac{x^T A x}{x^T x}.$$

若令 $x = e_i$，则

$$\frac{e_i^T A e_i}{e_i^T e_i} = a_{ii}, i = 1, \cdots, n.$$

据 12.2.7，有

$$l_{ii}^2 \leqslant a_{ii} \leqslant \| L^T \|_2^2, i = 1, \cdots, n.$$

(3) 由(1)和(2)有

$$\frac{1}{| l_{jj} |} \leqslant \| L^{-T} \|_2, j = 1, \cdots, n$$

和

$$| l_{ii} | \leqslant \| L^T \|_2, i = 1, \cdots, n,$$

因此

$$K(L^T) = \| L^T \|_2 \| L^{-T} \|_2 \geqslant \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{| l_{ii} |}{| l_{jj} |}.$$

注 设 $A \in R^{n \times n}$，则

$$\| A \| = \max_{\| x \| = 1} \| Ax \| = \max_{x \neq 0} \frac{\| Ax \|}{\| x \|}.$$

§ 12.3 迭代法

迭代法是数值计算中一种常用方法．求解线性方程组用到迭代法，求非线性方程和方程组的解一般要用迭代法．迭代法是从问题的一个解的一个或更多个初始估计出发，由它们按一定规律生成一个序列，使之收敛于解．在迭代法中，我们要研究的是迭代公式的构造、收敛性和收敛速度问题．

解 $n \times n$ 阶线性方程组

$$Ax = b$$

的许多迭代法是把它化为同解的方程组

$$x = Gx + g.$$

取初始近似解 x_0，由迭代公式

$$x_k = Gx_{k-1} + g, k = 1, 2, \cdots$$

生成近似解序列 $x_0, x_1, \cdots, x_k, \cdots$．为了构造迭代矩阵 G，可将非奇异矩阵 A 分裂成

$$A = Q - R,$$

其中矩阵 Q 非奇异．令

$$G = Q^{-1}R = I - Q^{-1}A, g = Q^{-1}b,$$

其中 I 为 n 阶单位阵，则方程组 $Ax = b$ 与 $x = Gx + g$ 同解．例如，设 $A = [a_{ij}]$ 非奇异，且 $a_{ii} \neq 0, i = 1, \cdots, n$．将 A 分裂成

$$A = D - (D - A),$$

其中 $D = \mathrm{diag}(a_{11}, \cdots, a_{nn})$ 为对角阵，则得到 Jacobi 迭代法．若将 A 分裂成

$$A = D(I - L) + DU,$$

其中

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & \cdots & -\frac{a_{n,n-1}}{a_{nn}} & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \cdots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -\frac{a_{n-1,n}}{a_{n-1,n-1}} \\ & & & 0 \end{bmatrix},$$

它们分别为下和上三角阵，则得到 Gauss-Seidel 迭代法．

若对任意的初始近似 $x_0 \in R^n$，$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*$，$x^*$ 是 $x = Gx + g$ 的解，从而是 $Ax = b$ 的解，则说迭代法收敛．迭代法 $x_k = Gx_{k-1} + g$ 收敛的充分必要条件是迭代矩阵 G 的谱半径小于 1，即

$$\rho(G) < 1.$$

令 $e_k = x^* - x_k$ 表示误差向量，则有

$$e_k = G^k e_0.$$

从而

$$\| e_k \| \leqslant \| G^k \| \| e_0 \|.$$

$\| G^k \|$ 的大小决定误差向量收敛于零的速度．

求非线性方程

$$f(x) = 0$$

的解的迭代法的迭代序列，通常是先将它化为等价方程

$$x = g(x),$$

然后选取 $f(x) = 0$ 的一个解(根)的近似值 x_0，令

$$x_k = g(x_{k-1}), k = 1, 2, \cdots$$

以产生迭代序列 $\{x_k\}$．这类迭代法称为 Picard 迭代．

例如,设 $f'(x)\neq 0$,令

$$g(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)},$$

则得到迭代公式

$$x_k=x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f'(x_{k-1})},k=1,2,\cdots.$$

这就是 Newton 法.

更一般地,我们将解方程 $f(x)=0$ 的迭代公式写成

$$x_{k+1}=\varphi(x_{k-r},x_{k-r+1},\cdots,x_k),k=r,r+1,\cdots,$$

其中 $x_0,x_1,\cdots,x_r$ 为方程 $f(x)=0$ 的一个解的初始近似值,由它产生迭代序列 $\{x_k\}$,φ 为迭代函数. 设 x^* 是方程 $f(x)=0$ 的一个解. 迭代序列 $\{x_k\}$ 是否收敛于 x^*,通常与初始近似值的选取范围有关. 如果存在包含 x^* 的某邻域 $\delta(x^*)$,对任何一组初始近似值 $x_0,x_1,\cdots,x_r\in\delta(x^*)$,迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛于 x^*,则说该迭代法是局部收敛的,例如 Newton 法;如果从任何一组可取初始近似值 $x_0,x_1,\cdots,x_r$ 出发,迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛于 x^*,则说该迭代法是大范围收敛的,例如区间分半法. 收敛速度的一种度量是收敛阶. 设迭代法收敛,$\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$. 令

$$e_k=x_k-x^*,$$

若存在实数 p 和非零常数 C,使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=C,$$

则说迭代法是 p 阶收敛的,或说迭代法的收敛阶为 p. 若 p 是正整数,则上式可改写成

$$\lim_{k\to\infty}\frac{e_{k+1}}{e_k^p}=C',$$

p 的大小反映收敛速度的快慢. 若 $p=1$,则说迭代法是线性收敛;若 $p>1$,则说迭代法是超线性收敛. 例如,若 x^* 是 $f(x)$ 的单重根,则 Newton 法至少是 2 阶收敛,而若 x^* 是重根,则 Newton 法是线性收敛的.

12.3.1 设 n 阶矩阵 A 的主对角元 $a_{ii}\neq 0,i=1,\cdots,n$,令 $D=\mathrm{diag}(a_{11},\cdots,a_{nn})$ 为对角阵. 试将 A 分裂成

$$A=\frac{1}{\omega}D-\frac{1}{\omega}D(I-\omega D^{-1}A),\omega\neq 0,$$

以构造解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代法,并给出迭代法收敛的充分必要条件.

解 将 A 分裂成

$$A=\frac{1}{\omega}D-\frac{1}{\omega}D(I-\omega D^{-1}A),\omega\neq 0,$$

则线性方程组 $Ax=b$ 化为

$$\left[\frac{1}{\omega}D-\frac{1}{\omega}D(I-\omega D^{-1}A)\right]\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},$$

或

$$\frac{1}{\omega}D\boldsymbol{x}=\frac{1}{\omega}D(I-\omega D^{-1}A)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}.$$

因此有

$$\boldsymbol{x}=(I-\omega D^{-1}A)\boldsymbol{x}+\omega D^{-1}\boldsymbol{b}.$$

这样,我们得到解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代法

$$\boldsymbol{x}_k=(I-\omega D^{-1}A)\boldsymbol{x}_{k-1}+\omega D^{-1}\boldsymbol{b},k=1,2,\cdots.$$

迭代法收敛的充分必要条件为

$$\rho(I-\omega D^{-1}A)<1.$$

12.3.2 试将 n 阶矩阵 A(其主对角元 $a_{ii}\neq 0,i=1,\cdots,n$)分裂成

$$A=\frac{1}{\omega}(D-\omega DL)-\frac{1}{\omega}((1-\omega)D+\omega DU),\quad \omega\neq 0,$$

构造解线性方程组 $Ax=b$ 的 SOR 方法的迭代公式. 并证明 SOR 方法收敛的必要条件是 $0<\omega<2$.

解 将 A 分裂成

$$A=\frac{1}{\omega}(D-\omega DL)-\frac{1}{\omega}((1-\omega)D+\omega DU),\quad \omega\neq 0,$$

则线性方程组 $Ax=b$ 化为

$$\frac{1}{\omega}(D-\omega DL)\boldsymbol{x}=\frac{1}{\omega}((1-\omega)D+\omega DU)\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},$$

即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}&=(D-\omega DL)^{-1}((1-\omega)D+\omega DU)\boldsymbol{x}\\&\quad+\omega(D-\omega DL)^{-1}\boldsymbol{b}\\&=(I-\omega L)^{-1}((1-\omega)I+\omega U)\boldsymbol{x}\\&\quad+\omega(I-\omega L)^{-1}D^{-1}\boldsymbol{b}.\end{aligned}$$

从而得到 SOR 方法的迭代公式

$$\boldsymbol{x}_k=G_\omega\boldsymbol{x}_{k-1}+\omega(I-\omega L)^{-1}D^{-1}\boldsymbol{b},$$

其中

$$G_\omega=(I-\omega L)^{-1}((1-\omega)I+\omega U).$$

由于矩阵 $(I-\omega L)^{-1}$ 为单位下三角阵,它的行列式 $\det(I-\omega L)^{-1}=1$,因此

$$\begin{aligned}\det G_\omega&=\det(I-\omega L)^{-1}((1-\omega)I+\omega U)\\&=\det(I-\omega L)^{-1}\cdot\det((1-\omega)I+\omega U)\\&=\det((1-\omega)I+\omega U)\\&=(1-\omega)^n,\end{aligned}$$

从而 SOR 方法的迭代矩阵 G_ω 的所有特征值之积等于 $(1-\omega)^n$. 于是

$$\rho(G_\omega)\geqslant|1-\omega|.$$

若 SOR 方法收敛,则 $\rho(G_\omega)<1$. 因此 $|1-\omega|>1$. 由于 ω 取实数,故 SOR 方法收敛的必要条件为

$$0<\omega<2.$$

12.3.3 用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{bmatrix}-8&1&1\\1&-5&1\\1&1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\16\\7\end{bmatrix},$$

取初始近似 $x_0=[0,0,0]^T$. 要求相邻两次结果的相对误差小于 10^{-3}, 并讨论方法的收敛性.

解 Jacobi 迭代法的迭代矩阵为

$$G=D^{-1}(D-A)=I-D^{-1}A$$

$$=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8}\\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\end{bmatrix}.$$

由于

$$\|I-D^{-1}A\|_\infty=\max\left\{\frac{1}{4},\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{2}<1,$$

因此, 据收敛性定理知, Jacobi 和 Gauss-Seidel 方法均收敛.

由 Jacobi 迭代法计算 $x_k=[x_1^{(k)},x_2^{(k)},x_3^{(k)}]^T$ 的各分量公式

$$x_i^{(k)}=\frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{3}a_{ij}x_j^{(k-1)}\Big),$$

$$i=1,2,3,\ k=1,2,\cdots,$$

我们有

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{-8}(1-x_2^{(0)}-x_3^{(0)})=-0.1250,$$

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{-5}(16-x_1^{(0)}-x_3^{(0)})=-3.2000,$$

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{-4}(7-x_1^{(0)}-x_2^{(0)})=-1.7500;$$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{-8}(1-x_2^{(1)}-x_3^{(1)})=-0.7438,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{1}{-5}(16-x_1^{(1)}-x_3^{(1)})=-3.5750,$$

$$x_3^{(2)}=\frac{1}{-4}(7-x_1^{(1)}-x_2^{(1)})=-2.5813,$$

等等.

Gauss-Seidel 迭代法计算 x_k 的各分量的公式为

$$x_i^{(k)}=\frac{1}{a_{ii}}\Big(b_i-\sum_{j=1}^{i-1}a_{ij}x_j^{(k)}-\sum_{j=i+1}^{3}a_{ij}x_j^{(k-1)}\Big),$$

$$i=1,2,3,\quad k=1,2,\cdots,$$

因此

$$x_1^{(1)}=\frac{1}{-8}(1-x_2^{(0)}-x_3^{(0)})=-0.1250,$$

$$x_2^{(1)}=\frac{1}{-5}(16-x_1^{(1)}-x_3^{(0)})=-3.2250,$$

$$x_3^{(1)}=\frac{1}{-4}(7-x_1^{(1)}-x_2^{(1)})=-2.5875;$$

$$x_1^{(2)}=\frac{1}{-8}(1-x_2^{(1)}-x_3^{(1)})=-0.8516,$$

$$x_2^{(2)}=\frac{1}{-5}(16-x_1^{(2)}-x_3^{(1)})=-3.8878,$$

$$x_3^{(2)}=\frac{1}{-4}(7-x_1^{(2)}-x_2^{(2)})=-2.9349,$$

等等. 这两种方法迭代得到的结果见表 12.1.

表 12.1

	Jacobi			Gauss-Seidel		
x_0	0	0	0	0	0	0
x_1	−0.1250	−3.2000	−1.7500	−0.1250	−3.2250	−2.5875
x_2	−0.7438	−3.5750	−2.5813	−0.8516	−3.8878	−2.9349
x_3	−0.8945	−3.8650	−2.8297	−0.9778	−3.9825	−2.9901
x_4	−0.9618	−3.9448	−2.9399	−0.9966	−3.9973	−2.9985
x_5	−0.9816	−3.9803	−2.9767	−0.9995	−3.9996	−2.9998
x_6	−0.9946	−3.9925	−2.9915	−0.9999	−3.9999	−3.0000
x_7	−0.9980	−3.9972	−2.9968			
x_8	−0.9993	−3.9990	−2.9988			
x_9	−0.9997	−3.9996	−2.9996			
x_{10}	−0.9999	−3.9999	−2.9998			

方程组的准确解为 $x=[-1,-4,-3]^T$. 用 Jacobi 方法迭代 10 次得到

$$\frac{\|x_{10}-x_9\|_\infty}{\|x_{10}\|_\infty}=\frac{3\times10^{-4}}{3.9999}<10^{-4},$$

$$\|x_{10}-x\|_\infty=0.0002.$$

用 Gauss-Seidel 方法迭代 6 次得到

$$\frac{\|x_6-x_5\|_\infty}{\|x_6\|_\infty}=\frac{4\times10^{-4}}{3.9999}<10^{-3},$$

$$\|x_6-x\|_\infty=0.0001.$$

注 若 $\|I-D^{-1}A\|_\infty<1$, 则 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都收敛. 在这种情况下, 从它们的误差估计式可以看出, Gauss-Seidel 迭代法通常比 Jacobi 迭代法收敛得快.

12.3.4 设 $A=[a_{ij}]$ 为 n 阶矩阵, 且 $a_{ii}\neq0$, $i=1,\cdots,n$. 证明

$$\|I-D^{-1}A^T\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\left|\frac{a_{ji}}{a_{ii}}\right|<1$$

是解线性方程组 $Ax=b$ 的 Jacobi 迭代法收敛的一个充分条件.

证明 只要证明

$$\rho(I-D^{-1}A)<1,$$

便证得 Jacobi 迭代法收敛. 由

$$(I-D^{-1}A)^T=I-A^TD^{-1}$$

$$=(D-A^T)D^{-1}$$

得

$$D-A^T=(I-D^{-1}A)^TD.$$

于是

$$I-D^{-1}A^T=D^{-1}(I-D^{-1}A)^TD.$$

这说明 $I-D^{-1}A^T$ 与 $(I-D^{-1}A)^T$ 相似, 从而它们

的特征值相同. 又$(I-D^{-1}A)^T$与$I-D^{-1}A$的特征值相同,因此$I-D^{-1}A^T$与$I-D^{-1}A$的特征值相同,从而

$$\rho(I-D^{-1}A)=\rho(I-D^{-1}A^T).$$

据假设

$$\| I-D^{-1}A^T \|_\infty < 1,$$

而

$$\rho(I-D^{-1}A^T) < \| I - D^{-1}A^T \|_\infty,$$

故

$$\rho(I-D^{-1}A) < 1.$$

这就证得 Jacobi 迭代法收敛.

12.3.5 设 A 为 n 阶实对称正定矩阵,给定解线性方程组 $Ax=b$ 的迭代法

$$x_m = x_{m-1} + \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}(b - Ax_{m-1}), m=1,2,\cdots,$$

其中 λ_0 和 λ_1 分别为 A 的最大和最小特征值($\lambda_0 \neq \lambda_1$). 证明:若 $m \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\ln\frac{1}{\varepsilon}$,则有

$$\frac{\| e_m \|_2}{\| e_0 \|_2} \leqslant \varepsilon,$$

其中 $e_m = x^* - x_m$,x^* 为 $Ax=b$ 的准确解.

证明 由于

$$\begin{aligned} e_m &= x^* - x_m \\ &= x^* - x_{m-1} - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}(b - Ax_{m-1}) \\ &= x^* - x_{m-1} - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A(x^* - x_{m-1}) \\ &= (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)(x^* - x_{m-1}) \\ &= (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)e_{m-1} \\ &= (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)^m e_0, \end{aligned}$$

因此

$$\| e_m \|_2 \leqslant \| (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)^m \|_2 \, \| e_0 \|_2,$$

即

$$\frac{\| e_m \|_2}{\| e_0 \|_2} \leqslant \| (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)^m \|_2.$$

又因

$$\begin{aligned} &\| (I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)^m \|_2 \\ &= \rho((I - \frac{2}{\lambda_0+\lambda_1}A)^m) \\ &= \max_{0 \leqslant i \leqslant n-1} \left| 1 - \frac{2\lambda_i}{\lambda_0+\lambda_1} \right|^m, \end{aligned}$$

其中诸 λ_i 均为 A 的特征值,以及

$$\left| 1 - \frac{2\lambda_i}{\lambda_0+\lambda_1} \right| \leqslant 1 - \frac{2\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} = \frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1},$$

因此

$$\frac{\| e_m \|_2}{\| e_0 \|_2} \leqslant \left(\frac{\lambda_0-\lambda_1}{\lambda_0+\lambda_1} \right)^m = \left(\frac{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right)^m.$$

若要

$$\frac{\| e_m \|_2}{\| e_0 \|} \leqslant \varepsilon,$$

只要

$$\left(\frac{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right)^m \leqslant \varepsilon,$$

即只要

$$m \geqslant \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\left(\frac{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right)}.$$

由于

$$\ln\left(\frac{1+\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right) = \ln\left(1 + \frac{2\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \right) \geqslant \frac{2\frac{\lambda_1}{\lambda_0}}{1-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}} \geqslant 2\frac{\lambda_1}{\lambda_0},$$

因此,若取

$$m \geqslant \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{2\frac{\lambda_0}{\lambda_1}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

则有

$$\frac{\| e_m \|_2}{\| e_0 \|_2} \leqslant \varepsilon.$$

12.3.6 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$. 试给出区间分半法求方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内的一个根的一种算法.

解 由假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)f(b)<0$,据介值定理知方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根. 区间分半法首先是取 $[a,b]$ 的中点 $x_1=\frac{a+b}{2}$;若 $f(x_1)f(b)<0$,则区间 (x_1,b) 内至少有 $f(x)=0$ 的一个根;若 $f(x_1)f(b)>0$,则区间 (a,x_1) 内至少有 $f(x)=0$ 的一个根,因此可继续将区间 $[x_1,b]$ 或 $[a,x_1]$ 分半得

$$x_2 = \frac{x_1+b}{2} \quad 或\ x_2 = \frac{a+x_1}{2},$$

如此继续下去,可得到序列

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots.$$

现给出区间分半法的一种算法:

输入 a, b;误差容限 TOL1, TOL2;迭代最大次数 N

Step1 令 $i=1$.

Step2 当 $i \leqslant N$ 时执行(1)—(5):

(1) $p \leftarrow \frac{a+b}{2}$

(2) 若 $|f(p)|<$TOL1,则输出 p,停机

(3) $i \leftarrow i+1$

(4) 若 $f(p)f(b)<0$,则令 $a \leftarrow p$,否则 $b \leftarrow p$

(5) 若 $b-a<$TOL2,则输出 p,停机

Step3 输出 N(进行 N 次迭代没有得到结果),停机.

12.3.7 证明方程 $x^3+x-4=0$ 在(1,4)内有唯一根 x^*. 试用区间分半法求 x^* 的近似值 x_n,并确定迭代次数 n 使 $|x_n - x^*|<10^{-3}$.

解 令

$$f(x) = x^3 + x - 4.$$

由于 $f(x)$在[1,4]上连续,且 $f(1)f(4)<0$,据介值定理知 $f(x)$在(1,4)内至少有一个根,而

$$f'(x) = 3x^2+1>0, x \in [1,4],$$

说明 $f(x)$在(1,4)内单调增加,故 $f(x)$在(1,4)内有唯一根 x^*. 由区间分半法得到的 x_n 满足

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{b-a}{2^n} = \frac{4-1}{2^n} = \frac{3}{2^n}.$$

若要 $|x_n - x^*|<10^{-3}$,则只要

$$\frac{3}{2^n} < 10^{-3},$$

即

$$n > \frac{\lg 3 \times 10^3}{\lg 2} \approx 11.55.$$

因此所需迭代次数为 12.

根据区间分半法的算法(参见 12.3.6),每一步迭代得结果见表 12.2.

表 12.2

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
1	1	4	2.5	14.125
2	1	2.5	1.75	3.1094
3	1	1.75	1.375	-0.0254
4	1.375	1.75	1.5625	1.1897
5	1.375	1.5625	1.46875	0.6372
6	1.375	1.46875	1.421875	0.29625

表 12.2(续)

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$
7	1.375	1.421875	1.3984375	0.13326
8	1.375	1.3984375	1.38671875	0.0533635
9	1.375	1.38671875	1.380859375	0.01384
10	1.375	1.380859375	1.377929688	-5.8×10^{-3}
11	1.377929688	1.380859375	1.379394531	4×10^{-3}
12	1.377929688	1.379394531	1.37866211	-9×10^{-4}

12.3.8 方程 $f(x)=x^3+2x^2+10x-20=0$ 在[1,2]内有唯一根 x^*,把它化为等价的方程:

(1) $x = \dfrac{20}{x^2+2x+10}$;

(2) $x = \dfrac{20-2x^2-x^3}{10}$;

(3) $x = x - \dfrac{x^3+2x^2+10x-20}{3x^2+4x+10}$.

选取初始值 $x_0=1$,用 Picard 迭代求 x^* 的近似值,并讨论方法的收敛性.

解 (1),(2)和(3)的 Picard 迭代公式分别为

$$x_n = \frac{20}{x_{n-1}^2 + 2x_{n-1} + 10}, n = 1,2,\cdots,$$

$$x_n = \frac{20-2x_{n-1}^2 - x_{n-1}^3}{10} = \frac{1}{10}(20 - x_{n-1}^2(2+x_{n-1})), \quad n=1,2,\cdots$$

和

$$x_n = x_{n-1} - \frac{x_{n-1}^3 + 2x_{n-1}^2 + 10x_{n-1} - 20}{3x_{n-1}^2 + 4x_{n-1} + 10}.$$

最后一个迭代公式实际上是 Newton 迭代. 取初始值 $x_0=1$,计算得迭代序列见表 12.3.

表 12.3

	(1)	(2)	(3)
n	x_n	x_n	x_n
1	1.538461538	1.70	1.411764706
2	1.295019157	0.9307	1.369336471
3	1.401825309	1.746142036	1.368808189
4	1.354209390	0.857796794	1.368808108
5	1.375298092	1.789718928	
6	1.365929788	0.786117462	
7	1.370086003	1.827823327	
8	1.368241023	0.721147915	

表 12.3(续)

	(1)	(2)	(3)
n	x_n	x_n	x_n
9	1.369059812	1.858485528	
10	1.368696397	0.667291269	
11	1.368857688		
12	1.368786102		
	⋮		
23	1.368808110		
24	1.368808107		

在(1)中,

$$g(x)=\frac{20}{x^2+2x+10},$$

$$g'(x)=-\frac{40(x+1)}{(x^2+2x+10)^2}<0,\ x\in[1,2],$$

$$g''(x)=\frac{120(x^2+2x-2)}{(x^2+2x+10)^4}>0,x\in[1,2].$$

$$\max_{x\in[1,2]}|g'(x)|=\max(|g'(1)|,|g'(2)|)$$

$$=|g'(1)|=\frac{80}{169}<1.$$

$g(x)$单调减小,$g(1)=\frac{20}{13}$,$g(2)=\frac{20}{18}$,因此当 $x\in[1,2]$时,$g(x)\in[1,2]$ 又

$$|g(x)-g(y)|\leqslant\frac{80}{169}|x-y|,\forall x,y\in[1,2],$$

据 Picard 迭代的收敛性定理,迭代序列收敛于 x^*.

在(2)中,

$$g(x)=\frac{1}{10}(20-2x^2-x^3),$$

$$g'(x)=-\frac{1}{10}(4x+3x^2)<0,x\in[1,2],$$

$$g''(x)=-\frac{1}{10}(4+6x)<0,x\in[1,2].$$

$$\max_{x\in[1,2]}|g'(x)|=\max(|g'(1)|,|g'(2)|)$$

$$=|g'(2)|=2>1,$$

因此不能断定迭代序列收敛.从表 12.3 看出,迭代序列中的奇数点列单调增大,而偶数点列单调减小,因此迭代序列不收敛.

(3)为 Newton 法.由于

$$f(1)f(2)=(-7)\times16<0,$$

$$f'(x)=3x^2+4x+10\neq0,x\in[1,2],$$

$$f''(x)=6x+4>0,x\in[1,2],$$

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right|=\frac{7}{13}<2-1=1,$$

$$\left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|=\frac{8}{15}<2-1=1,$$

因此,据 Newton 法的收敛性定理,对任意的初始值 $x_0\in[1,2]$,Newton 序列收敛于 x^*.

从表 12.3 看出,第一种方法迭代 24 步得到近似根 1.368808107,而 Newton 法则只需迭代 4 步便得近似根 1.368808108.

12.3.9 证明方程 $f(x)=x^3-2x-3=0$ 在(1,2)内有唯一根 x^*.你能否断定对任意的初始值 $x_0\in[1,2]$,Newton 序列都收敛于 x^*?若把区间[1,2]改为$[\frac{8}{5},2]$,则 Newton 序列收敛于 x^* 吗?

解 因 $f(x)$在[1,2]上连续,且

$$f(1)f(2)=-4<0,$$

$$f'(x)=3x^2-2>0,x\in[1,2],$$

因此 $f(x)$在(1,2)内有唯一根 x^*.由于

$$f''(x)=6x>0,x\in[1,2],$$

但

$$\left|\frac{f(1)}{f'(1)}\right|=4>2-1=1,$$

$$\left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|=\frac{1}{10}<2-1=1,$$

因此不能断定对任意初始值 $x_0\in[1,2]$,Newton 序列都收敛于 x^*.但若把区间缩小为$[\frac{8}{5},2]$,则

$$f(\frac{8}{5})f(2)=-\frac{263}{125}<0,$$

$$\left|\frac{f(\frac{8}{5})}{f'(\frac{8}{5})}\right|=\frac{263}{710}<0.4=2-\frac{8}{5},$$

$$\left|\frac{f(2)}{f'(2)}\right|=\frac{1}{10}<0.4=2-\frac{8}{5}.$$

因此对任意 $x_0\in[\frac{8}{5},2]$,Newton 序列都收敛于 x^*.

12.3.10 对方程 $f(x)=x^{\frac{1}{3}}=0$,讨论 Newton 法的收敛性.

解 显然方程 $f(x)=0$ 有唯一根 0.由于

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

因此据 Newton 法的迭代公式,我们有

$$x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}x_{n-1}^{-\frac{2}{3}}}$$

$$=x_{n-1}-3x_{n-1}=-2x_{n-1}=(-2)^nx_0.$$

这样,当 $x_0\neq0$ 时,序列$\{x_n\}$不收敛.这就是说,对任意的初始值 $x_0\neq0$ 出发,Newton 法都不收敛.

12.3.11 证明方程 $x^2=\cos x$ 在$(0,\frac{\pi}{2})$内有唯一根 x^*,并且存在区间$(x^*-\delta,x^*+\delta)(\delta>0)$,使得当初始值 $x_0\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$时,Newton 序列收敛于 x^*.

证明 令 $f(x)=x^2-\cos x$.因 $f(x)$连续,且

$$f(0)f\left(\frac{\pi}{2}\right)=(-1)\frac{\pi}{4}<0,$$

$$f'(x)=2x+\sin x>0, x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right).$$

因此 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加. 故方程 $f(x)=0$ 存在唯一根 $x^*\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. 而 $f'(x^*)\neq 0, f''(x)=2+\cos x$ 在 x^* 附近连续, 据 Newton 法的局部收敛性定理, 存在 $\delta>0$, 使得当初始值 $x_0\in(x^*-\delta,x^*+\delta)$ 时, 由 Newton 法

$$x_n=x_{n-1}-\frac{x_{n-1}^2-\cos x_{n-1}}{2x_{n-1}+\sin x_{n-1}}, n=1,2,\cdots$$

产生的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x^*.

12.3.12 设函数 $f(x)$ 存在导数 $f'(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $f'(x)\geqslant M>0$, 其中 M 为常数. 试证明, 方程 $f(x)=0$ 有唯一根在 $x=0$ 和 $x=-f(0)/M$ 之间.

证明 首先设 $f(0)>0$, 据中值定理, 在 0 与 $-f(0)/M$ 之间存在一点 ζ 使得

$$\begin{aligned}&f(-f(0)/M)-f(0)\\&=f'(\zeta)(-f(0)/M-0)\\&=-f'(\zeta)f(0)/M\leqslant -f(0),\end{aligned}$$

从而 $f(-f(0)/M)\leqslant 0$. 由介值定理知 $f(x)$ 在 0 与 $-f(0)/M$ 之间至少有一个根. 其次设 $f(0)<0$, 类似地可推知 $f(x)$ 在 0 与 $-f(0)/M$ 之间至少有一个根. 至于 $f(0)=0$, $x=0$ 就是一个根.

由于 $f'(x)>0, x\in(-\infty,+\infty)$, 因此 $f(x)$ 单调增加. 故在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)$ 只有一个根, 且它必在 0 与 $-f(0)/M$ 之间.

12.3.13 设函数 $g(x)$ 存在导数, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且 $|g'(x)|\leqslant L<1$, 其中 L 为常数. 证明: 对任意的初始数值 x_0, 由迭代法

$$x_{k+1}=g(x_k), k=0,1,\cdots$$

产生的序列 $\{x_k\}$ 都收敛于方程 $x=g(x)$ 的唯一解.

证明 因为

$$(x-g(x))'=1-g'(x)\geqslant 1-L>0,$$

因此据 12.3.12 知 $x=g(x)$ 有唯一根, 设其为 x^*. 应用中值定理,

$$\begin{aligned}|x_k-x^*|&=|g(x_{k-1})-g(x^*)|\\&\leqslant|g'(\zeta)||x_{k-1}-x^*|\\&\leqslant L|x_{k-1}-x^*|\\&\leqslant L^k|x_0-x^*|,\end{aligned}$$

其中 ζ 在 x_{k-1} 与 x^* 之间. 因 $L<1$, 因此 $k\to\infty$ 时, $L^k\to 0$, 从而 $|x_k-x^*|\to 0$. 这就证得 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*.

12.3.14 设函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 存在, $x\in(-\infty,+\infty)$, 且恒有 $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$, 其中 m, M 均为常数. 证明: 对任意的初始值 x_0, 由迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k), k=0,1,\cdots$$

$(0<\lambda<\frac{2}{M})$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 都收敛于方程 $f(x)=0$ 的唯一根.

证明 令

$$g(x)=x-\lambda f(x),$$

则

$$g'(x)=1-\lambda f'(x).$$

由于 $0<m\leqslant f'(x)\leqslant M$, $0<\lambda<\frac{2}{M}$, 因此有

$$\begin{aligned}-1<1-M\lambda\leqslant g'(x)&=1-\lambda f'(x)\\&\leqslant 1-\lambda m<1.\end{aligned}$$

取 $L=\max\{|1-M\lambda|,|1-m\lambda|\}$, 由 $L<1$, 从而 $|g'(x)|\leqslant L<1$. 据 12.3.13 知, 对任意的初始值 x_0, 由迭代法

$$x_{k+1}=x_k-\lambda f(x_k), k=0,1,\cdots$$

$(0<\lambda<\frac{2}{M})$ 产生的序列 $\{x_k\}$ 都收敛于方程 $f(x)=0$ 的唯一根.

12.3.15 设 $f(x)$ 于区间 $[a,b]$ 上至少三次连续可微, $x^*\in(a,b)$ 为 $f(x)$ 的一个二重零点, 求一个 λ 值使改进的 Newton 法

$$x_{k+1}=x_k-\lambda\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

至少是二阶收敛的.

解 因 x^* 是 $f(x)$ 的一个二重零点, 因此可把 $f(x)$ 写成

$$f(x)=(x-x^*)^2h(x),$$

从而

$$\begin{aligned}f'(x)&=(x-x^*)[2h(x)+(x-x^*)h'(x)]\\f''(x)&=2h(x)+4(x-x^*)h'(x)\\&\quad+(x-x^*)^2h''(x).\end{aligned}$$

令

$$g(x)=x-\lambda\frac{f(x)}{f'(x)}$$

为迭代函数, 则

$$\begin{aligned}g'(x)=1-\lambda+&\frac{1}{[2h(x)+(x-x^*)h'(x)]^2}\\&\times\{\lambda[2h(x)+4(x-x^*)h'(x)\\&+(x-x^*)^2h''(x)]h(x)\}.\end{aligned}$$

因此

$$g'(x^*)=1-\lambda+\frac{\lambda}{2}.$$

要使改进的 Newton 法至少是二阶收敛的, 必须 $g'(x^*)=0$. 于是解得 $\lambda=2$.

注 设 x^* 是 $x=g(x)$ 的一个根, $g(x)$ 在 x^* 的某

邻域内为 p 次连续可微,且

$$g^{(m)}(x^*)=0, m=1,\cdots,p-1, g^{(p)}(x^*)\neq 0 \quad (p\geqslant 2),$$

则当初始值 x_0 充分接近于 x^* 时,Picard 迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 x^*,且收敛阶为 p.现

$$g(x)=x-\lambda\frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$=x-\lambda\frac{(x-x^*)h(x)}{2h(x)+(x-x^*)h'(x)},$$

$$\lim_{x\to x^*}g(x)$$

$$=x^*-\lambda\lim_{x\to x^*}\frac{(x-x^*)h(x)}{2h(x)+(x-x^*)h'(x)}$$

$$=x^*,$$

因此,可补充定义 $g(x^*)=x^*$.

12.3.16 迭代法

$$x_{n+1}=\frac{x_n^3+3dx_n}{3x_n^2+d}\quad(d>0)$$

是解方程 $f(x)=0$ 的 Newton 法,试求 $f(x)(x>0)$,并证明当初始值 $x_0(>0)$充分接近于 $f(x)$的根时迭代法是三阶收敛的.

解 由迭代公式

$$x_{n+1}=\frac{x_n^3+3dx_n}{3x_n^2+d},$$

有

$$x_{n+1}-x_n=\frac{-2x_n^3+2dx_n}{3x_n^2+d}=-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

因此

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{3x^2+d}{2x^3-2dx}=-\frac{1}{2x}+\frac{2x}{x^2-d}.$$

积分得

$$\ln|f(x)|=-\frac{1}{2}\ln x+\ln|x^2-d|+C.$$

取 $C=0$,得

$$\ln|f(x)|=\ln\frac{|x^2-d|}{x^{\frac{1}{2}}}.$$

因此求得

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}(x^2-d),$$

或

$$f(x)=x^{-\frac{1}{2}}(d-x^2).$$

由此可知 $f(x)=0$ 的根为$\sqrt{d}$.由于

$$x_{n+1}-\sqrt{d}=\frac{x_n^3+3dx_n}{3x_n^2+d}-\sqrt{d}$$

$$=\frac{(x_n-\sqrt{d})^3}{3x_n^2+d},$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-\sqrt{d}}{(x_n-\sqrt{d})^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3x_n^2+d}=\frac{1}{4d}.$$

故此迭代法是三阶收敛的.

注 考虑 $f(x)=x^2-d$ 求$\sqrt{d}$的 Newton 法是二阶收敛的.现在考虑 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}(x^2-d)$或 $f(x)=x^{-\frac{1}{2}}(d-x^2)$,则 Newton 法是三阶收敛的,从而提高了收敛速度(但每一步迭代增加了计算量).取 $x_0=1$,用两种方法计算$\sqrt{2}$的结果见表 12.4.($\sqrt{2}=1.414213562$)

表 12.4

n	$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+\frac{2}{x_{n-1}})$	$x_n=\frac{x_{n-1}^3+3dx_{n-1}}{3x_{n-1}^2+d}$
1	1.5	1.4
2	1.41666667	1.41421320
3	1.41421569	1.41421356
4	1.41421356	

§12.4 函数逼近方法

在科学技术、工程和经济领域中,常常会遇到计算一个函数 $f(x)$(或函数值)的问题,然而函数关系往往是很复杂的,甚至没有明显的解析表达式.我们寻求另一个较简单的函数 $\varphi(x)$(如多项式)来近似地代替 $f(x)$.这就是函数逼近.基本的函数逼近方法有插值法和最小二乘法等.

插值法中有 Lagrange 插值.取 $n+1$ 个互异点 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$,则 Lagrange 基本插值多项式为

$$l_i(x)=\prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant n+1\\ j\neq i}}\left(\frac{x-x_j}{x_i-x_j}\right), i=1,2,\cdots,n+1.$$

而 Lagrange 插值多项式为

$$p_n(x)=\sum_{i=1}^{n+1}f(x_i)l_i(x).$$

$p_n(x)$是次数不高于 n 的多项式,且

$$p_n(x_i)=f(x_i), i=1,2,\cdots,n+1.$$

取 $f(x)\approx p_n(x)$,而

$$f(x)=p_n(x)+e_n(f,x),$$

其中

$$e_n(f,x)=\frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\prod_{j=1}^{n+1}(x-x_j).$$

特别有用的是 $n=1,2$ 的情形(线性插值和抛物线插值).线性插值的误差界为

$$|e_1(f,x)|\leqslant\frac{M_2}{8}(x_2-x_1)^2,$$

其中

$$M_2 = \max_{x\in[x_1,x_2]} |f''(x)|.$$

Lagrange 插值多项式 $p_n(x)$形式对称，但若需增加一个插值点时，则原先计算得到的 $p_n(x)$对计算 $p_{n+1}(x)$没有用. Newton 插值公式

$$f(x) = N_n(x) + e_n(f,x)$$

则克服了这种特点，其中

$$\begin{aligned}N_n(x) = f(x_1) &+ f[x_1,x_2](x-x_1)\\ &+ f[x_1,x_2,x_3](x-x_1)(x-x_2)+\cdots\\ &+ f[x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}](x-x_1)\\ &\times(x-x_2)\cdots(x-x_n).\end{aligned}$$

$f(x)$关于基点 x_i, x_j 的一阶均差为

$$f[x_i,x_j] = \frac{f(x_j)-f(x_i)}{x_j-x_i}.$$

关于基点 $x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}$的 k 阶均差为

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}] = \frac{f[x_2,\cdots,x_{k+1}]-f[x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_1},$$

它与导数的关系是

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}] = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}.$$

Lagrange 插值多项式 $p_n(x)$与 Newton 均差插值多项式只是形式上不同而已.

若不仅要求插值多项式 $p(x)$在插值基点 x_i 有 $p(x_i)=f(x_i)$，而且还要求 $p(x)$与 $f(x)$在基点处有若干阶导数相等，则有 Hermite 插值.

使用次数太高的插值多项式计算 $f(x)$的近似值未必能得到极好的效果. 在实际应用插值法时，可使用低次插值多项式的分段插值法. 这时，$f(x)$的近似函数 $\varphi(x)$由低次多项式分段表示，在衔接点处不光滑. 为克服这个缺点，可采用样条插值法.

假设 $f(x_i)=y_i$(或 $f(x_i)\approx y_i$)，$i=1,\cdots,m$，$\varphi_0(x)$、$\varphi_1(x)$，$\cdots$，$\varphi_n(x)$是取定的线性无关函数系，线性最小二乘逼近方法是构造函数

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$$

(选取 $a_0,a_1,\cdots,a_n$)使其曲线在点$(x_i,y_i)(i=1,\cdots,m)$附近经过，但要求

$$E_2(a_0,a_1,\cdots,a_n) = \sum_{i=1}^{m}[\varphi(x_i)-y_i]^2$$

取极小. 据极值存在的必要条件，使 $E_2(a_0,a_1,\cdots,a_n)$极小的 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 必须满足法方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial a_0}E_2(a_0,a_1,\cdots,a_n) = 0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial}{\partial a_n}E_2(a_0,a_1,\cdots,a_n) = 0.\end{cases}$$

$\varphi(x)$又称为数据$\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^m$的最小二乘拟合函数.

12.4.1 已知 ln3.1 = 1.1314, ln3.2 = 1.1632, 试用 Lagrange 线性插值求 ln3.16 的近似值，并估计误差.

解 据线性插值公式

$$\begin{aligned}f(x) = \ln x &\approx p_1(x)\\ &= f(x_1) + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1),\end{aligned}$$

取 $x_1=3.1, x_2=3.2, x=3.16$ 得

$$\begin{aligned}\ln 3.16 &\approx p_1(3.16)\\ &= 1.1314+\frac{1.1632-1.1314}{3.2-3.1}(3.16-3.1)\\ &= 1.15048.\end{aligned}$$

由于 $f'(x)=\frac{1}{x}, f''(x)=-\frac{1}{x^2}$，因此

$$M_2 = \max_{x\in[x_1,x_2]} |f''(x)| = \frac{1}{(3.1)^2}.$$

据误差估计式，我们有

$$|e_1(f,x)| \leqslant \frac{M_2}{8}(x_2-x_1)^2 < 0.0002.$$

12.4.2 已知函数 $y=f(x)$的观测数据为 $f(-1)=-3, f(0)=2, f(1)=0, f(2)=4$. 试用抛物线插值计算 $f(0.4)$和 $f(0.6)$的近似值.

解 计算 $f(0.4)$的近似值时，应取基点为 $x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. 于是

$$\begin{aligned}f(0.4) &\approx p_2(0.4)\\ &= -3\times\frac{(0.4-0)(0.4-1)}{(-1-0)(-1-1)}\\ &\quad +2\times\frac{(0.4+1)(0.4-1)}{(0+1)(0-1)}\\ &\quad +0\times\frac{(0.4+1)(0.4-0)}{(1+1)(1-0)}\\ &= 2.04.\end{aligned}$$

计算 $f(0.6)$的近似值时，应取基点为 $x_1=0, x_2=1, x_3=2$. 于是

$$\begin{aligned}f(0.6) &\approx p_2(0.6)\\ &= 2\times\frac{(0.6-1)(0.6-2)}{(0-1)(0-2)}\\ &\quad -0\times\frac{(0.6-0)(0.6-2)}{(1-0)(1-2)}\\ &\quad +4\times\frac{(0.6-0)(0.6-1)}{(2-0)(2-1)}\\ &= 0.08.\end{aligned}$$

注 在插值基点为等距的情形，求插点 x 位于插值区间的中部时，插值误差较小. 这是上述选取插值基点的依据.

12.4.3 试利用 100, 121 和 144 的平方根求 $\sqrt{115}$.

解 令 $f(x)=\sqrt{x}$. 据题意有 $f(100)=10$, $f(121)=11$, $f(144)=12$. 应用抛物线插值公式，得

$$\sqrt{115} \approx \frac{(115-121)(115-144)}{(100-121)(100-144)} \times 10 + \frac{(115-100)(115-144)}{(121-100)(121-144)} \times 11 + \frac{(115-100)(115-121)}{(144-100)(144-121)} \times 12 = 10.7228.$$

12.4.4 已知函数 $y = f(x)$ 的观测数据为 $f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = 3, f(2) = 9$. 试作出不高于三次的 Lagrange 插值多项式 $p_3(x)$.

解

$$p_3(x) = 3 \times \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 1 \times \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} + 3 \times \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} + 9 \times \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)} = 2x^2 + 1.$$

注 四点 $(-1,3),(0,1),(1,3),(2,9)$ 正好在同一条抛物线 $y = 2x^2 + 1$ 上. 因此构造得 Lagrange 插值多项式 $p_3(x)$ 是一个二次多项式.

12.4.5 观测得一个二次多项式 $p_2(x)$ 的值:

x_i	-2	-1	0	1	2
$p_2(x_i)$	3	1	1	6	15

表中 $p_2(x)$ 的某一个数值有错误, 试找出并校正它.

解 首先构造经过点 $(-2,3),(-1,1),(0,1)$ 的一个二次 Lagrange 插值多项式

$$p(x) = x^2 + x + 1,$$

于是

$$p(1) = 3 \neq 6, p(2) = 7 \neq 15.$$

这说明前三点中有一点有误(否则 $p(x)$ 必经过 $(1,6)$ 或 $(2,15)$ 中的一点).

其次, 构造经过点 $(0,1),(1,6),(2,15)$ 的一个二次 Lagrange 插值多项式

$$q(x) = 2x^2 + 3x + 1,$$

$$q(-2) = 3, q(-1) = 0 \neq 1.$$

可见点 $(-1,1)$ 有误, 应改为 $(-1,0)$.

12.4.6 测量函数 $f(x)$ 在若干点处的函数值: $f(0) = 1, f(1) = 9, f(2) = 23, f(4) = 3$. 试构造不高于三次的 Newton 插值多项式 $p_3(x)$ 以及计算 $f(3)$ 的近似值.

解 首先构造各阶均差表(见表 12.5).

表 12.5

x	$f(x)$	$f[\cdot\cdot]$	$f[\cdot\cdot\cdot]$	$f[\cdot\cdot\cdot\cdot]$
0	1			
1	9	8		
2	23	14	3	
4	3	-10	-8	$\frac{11}{4}$

因此得 Newton 插值多项式

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f(0) + f[0,1](x-0) \\ &\quad + f[0,1,2](x-0)(x-1) \\ &\quad + f[0,1,2,4](x-0)(x-1)(x-2) \\ &= 1 + 8x + 3x(x-1) - \frac{11}{4}x(x-1)(x-2). \end{aligned}$$

$$f(3) \approx p_3(3) = \frac{53}{2}.$$

12.4.7 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}$ 为 $n+1$ 个相异的插值基点, $l_i(x)(i = 1, \cdots, n+1)$ 为 Lagrange 基本多项式. 证明

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n+1} l_i(x) = 1$;

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n+1} x_i^j l_i(x) = x^j, j = 1, \cdots, n$;

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n+1} (x_i - x)^j l_i(x) = 0, j = 1, \cdots, n$;

(4) $$\sum_{i=1}^{n+1} l_i(0) x_i^j = \begin{cases} 1, & j = 0; \\ 0, & j = 1,2,\cdots,n; \\ (-1)^n x_1 x_2 \cdots x_{n+1}, & j = n+1. \end{cases}$$

证明 (1) 由 Lagrange 插值公式

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) f(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_1)\cdots(x - x_{n+1}).$$

令 $f(x) = 1$, 则 $f(x_i) = 1, i = 1, \cdots, n+1$, 且 $f^{(n+1)}(x) = 0$. 因此得到

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) = 1.$$

(2) 若令 $f(x) = x^j, j = 1, \cdots, n$, 则 $f^{(n+1)}(x) = 0$. 于是有

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i(x) x_i^j = x^j, j = 1, \cdots, n.$$

(3) 由于

$$(x_i - x)^j = x_i^j - C_j^1 x_i^{j-1} x + \cdots (-1)^j C_j^j x^j,$$

因此据(2)有

$$\sum_{i=1}^{n+1} (x_i - x)^j l_i(x) = \sum_{i=1}^{n+1} x_i^j l_i(x) - C_j^1 x \sum_{i=1}^{n+1} x_i^{j-1} l_i(x)$$

$$+\cdots+(-1)^j C_j^j x^j \sum_{i=1}^{n+1} l_i(x)$$

$$= x^j(1-C_j^1+\cdots+(-1)^j C_j^j)$$

$$=(x-x)^j=0, j=1,\cdots,n.$$

(4) 考虑包含 $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ 的区间$[a,b]$，而 $a<0, b>0$. 在(1)中令 $x=0$，得

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i(0)=1,$$

因此有

$$\sum_{i=1}^{n+1} l_i(0) x_i^0=1.$$

在(2)中令 $x=0$ 得

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^j l_i(0)=0, j=1,\cdots,n.$$

若令 $f(x)=x^{n+1}$，则 $f^{(n+1)}(x)=(n+1)!$. 因此

$$x^{n+1}=\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{n+1} l_i(x)+\frac{(n+1)!}{(n+1)!}(x-x_1)\cdots(x-x_{n+1}).$$

在上式中令 $x=0$ 得

$$0=\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{n+1} l_i(0)+(-1)^{n+1} x_1 x_2 \cdots x_{n+1}.$$

故得

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i^{n+1} l_i(0)=(-1)^n x_1 x_2 \cdots x_{n+1}.$$

12.4.8 设 $f(x)=x^7+x^3+1$，求均差 $f[2^0,2^1]$，$f[2^0,2^1,2^2]$，$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]$和 $f[2^0,2^1,\cdots,2^8]$.

解 $f[2^0,2^1]=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=134$,

$$f[2^1,2^2]=\frac{f(2^2)-f(2)}{2^2-2}=8156,$$

$$f[2^0,2^1,2^2]=\frac{f[2^1,2^2]-f[2^0,2^1]}{2^2-2^0}=2674,$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^7]=\frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}=1,$$

$$f[2^0,2^1,\cdots,2^8]=\frac{f^{(8)}(\eta)}{8!}=0.$$

12.4.9 证明函数 $f(x)$在 $n+1$ 个互异点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的 n 阶均差 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$可表示成

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}.$$

证明 用归纳法. 当 $n=1$ 时，

$$f[x_0,x_1]=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}=\frac{f(x_0)}{x_0-x_1}+\frac{f(x_1)}{x_1-x_0},$$

因此结论成立. 现设 $n=k$ 时结论成立，即有

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_k]=\sum_{i=0}^{k} f(x_i)/[(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)],$$

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]=\sum_{i=1}^{k+1} f(x_i)/[(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{k+1})].$$

当 $n=k+1$ 时，则由 n 阶均差的定义

$$\begin{aligned}
&f[x_0,x_1,\cdots,x_k,x_{k+1}]\\
&=\frac{f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]-f[x_0,x_1,\cdots,x_k]}{x_{k+1}-x_0}\\
&=\frac{f(x_0)}{(x_0-x_1)\cdots(x_0-x_k)(x_0-x_{k+1})}\\
&\quad+\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_k)(x_{k+1}-x_0)}\times\left[\frac{1}{x_1-x_{k+1}}-\frac{1}{x_1-x_0}\right]\\
&\quad+\cdots+f(x_i)/[(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_k)(x_{k+1}-x_0)]\\
&\quad\times\left[\frac{1}{x_i-x_{k+1}}-\frac{1}{x_i-x_0}\right]+\cdots\\
&\quad+\frac{f(x_{k+1})}{(x_{k+1}-x_1)\cdots(x_{k+1}-x_k)(x_{k+1}-x_0)}\\
&=\sum_{i=0}^{k+1} f(x_i)/[(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})\times(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{k+1})],
\end{aligned}$$

因此对 $n=k+1$ 时，结论亦成立.

注 从均差的这个表达式看出，均差具有对称性. 这就是说，均差 $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$ 与基点 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的排列顺序无关. 例如

$$f[x_0,x_1,x_2]=f[x_1,x_0,x_2]=f[x_2,x_1,x_0].$$

12.4.10 设 $f(x)$是一个 n 次多项式，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是它的 n 个互异实根. 证明

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]=0, k=0,1,\cdots,n-1.$$

证明 由于 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 是n 次多项式$f(x)$的 n 个互异实根，即有 $f(x_i)=0, i=1,2,\cdots,n$，且 $x_i\neq x_j, i\neq j$. 因此，据均差的对称性表达式(见 12.4.9)

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}]=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{k+1}(x_i-x_j)}=0, k=0,1,\cdots,n-1.$$

注 有些证明题应用均差的对称性表达式来证明是很方便的(参见 12.4.11，12.4.12).

12.4.11　试证明，对 $k=0,1,\cdots,n-2$ 恒有等式

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(i-j)}=0.$$

证明　从这个恒等式，容易联想到均差的对称表达式(见12.4.9)以及均差与导数的关系．据均差与导数的关系

$$f[x_1,x_2,\cdots,x_k]=\frac{f^{(k-1)}(\xi)}{(k-1)!},$$

ξ 为包含 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的区间内的某一点．若 $f(x)$ 是不超过 $n-2$ 次的多项式，则

$$f[1,2,\cdots,n]=\frac{f^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!}=0.$$

现取 $f(x)=x^k(k=0,1,\cdots,n-2)$，则 $f[1,2,\cdots,n]=0$，但

$$f[1,2,\cdots,n]=\sum_{i=1}^{n}\frac{f(i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(i-j)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(i-j)},$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{i^k}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(i-j)}=0,k=0,1,\cdots,n-2.$$

12.4.12　设 n 次多项式 $f(x)$ 有互异的 n 个实根 $x_1,x_2,\cdots,x_n$．试证明

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0,k=0,1,\cdots,n-2,\\ a_n^{-1},k=n-1.\end{cases}$$

其中 a_n 为 $f(x)$ 的最高次项系数．

证明　据均差的对称性表达式(见12.4.9)

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{\prod\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)}.$$

由于 $f(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$，因此

$$\begin{aligned}f'(x_i)&=\lim_{x\to x_i}\frac{a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{x-x_i}\\&=a_n(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})\\&\quad\times(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n).\end{aligned}$$

于是

$$g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ng(x_i)}{f'(x_i)}.$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{g(x_i)}{f'(x_i)}=\frac{1}{a_n}g[x_1,x_2,\cdots,x_n]=\frac{1}{a_n}\frac{g^{(n-1)}(\xi)}{(n-1)!},$$

其中 ξ 为包含 $x_1,\cdots,x_n$ 的区间中的某一点．令 $g(x)=x^k$，则当 $k=0,1,\cdots,n-2$ 时，$g^{(n-1)}(\xi)=0$；当 $k=n-1$ 时，$g^{(n-1)}(\xi)=(n-1)!$，这就证得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^k}{f'(x_i)}=\begin{cases}0,k=0,1,\cdots,n-2,\\ a_n^{-1},k=n-1.\end{cases}$$

注　应用12.4.7(4)，容易证得本题．或可用12.4.7(4)的证明方法来证明．

12.4.13　设 $f(x)$ 是一个 k 次多项式，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为互异的实数，且 $k>m$．证明均差 $f[x_1,\cdots,x_m,x]$ 是关于 x 的 $k-m$ 次多项式．

证明　用归纳法．当 $m=1$ 时，由于 x_1 是 $f(x)-f(x_1)$ 的一个根，因此有

$$f(x)-f(x_1)=(x-x_1)f_1(x).$$

于是

$$f[x_1,x]=\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}=f_1(x)$$

是一个 $k-1$ 次多项式．设 $m=l\leqslant k-2$ 时结论成立．对 $m=l+1$，由均差的对称性知

$$f[x_2,\cdots,x_{l+1},x_1]-f[x_1,\cdots,x_{l+1}]=0.$$

因此 x_1 是

$$f[x_2,\cdots,x_{l+1},x]-f[x_1,\cdots,x_{l+1}]$$

的一个根，从而有

$$\begin{aligned}&f[x_2,\cdots,x_{l+1},x]-f[x_1,\cdots,x_{l+1}]\\&=(x-x_1)f_{l+1}(x).\end{aligned}$$

由归纳法假设知 $f[x_2,\cdots,x_{l+1},x]$ 是 $k-l$ 次多项式，因此 $f_{l+1}(x)$ 是 $k-(l+1)$ 次多项式．而

$$\begin{aligned}&f[x_1,x_2,\cdots,x_{l+1},x]\\&=\frac{f[x_2,\cdots,x_{l+1},x]-f[x_1,\cdots,x_{l+1}]}{x-x_1}\\&=f_{l+1}(x),\end{aligned}$$

故 $f[x_1,x_2,\cdots,x_{l+1},x]$ 是 $k-l-1$ 次多项式．这就证得所要证的结论．

12.4.14　设 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上有三阶连续导数．作一个不高于二次的多项式 $p(x)$ 使满足条件

$$p(x_1)=f(x_1)=f_1,$$
$$p'(x_1)=f'(x_1)=f_1',$$
$$p(x_2)=f(x_2)=f_2,$$

证明其唯一性，并导出它的余项 $f(x)-p(x)$ 表达式．

解　令

$$p(x)=f_1+f_1'(x-x_1)+a(x-x_1)^2,$$

则显然有 $p(x_1)=f_1,p'(x_1)=f_1'$．再由 $p(x_2)=f_2$ 得

$$a=\frac{f_2-f_1-f_1'(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}.$$

因此所求的多项式为

$$p(x)=f_1+f_1'(x-x_1)$$
$$+\frac{f_2-f_1-f_1'(x_2-x_1)}{(x_2-x_1)^2}(x-x_1)^2.$$

设另有 $q(x)$ 满足题意,则

$$p(x)-q(x)=b(x-x_1)(x-x_2),$$

$$\frac{d}{dx}(p(x)-q(x))\bigg|_{x=x_1}$$
$$=b(x-x_2+x-x_1)\big|_{x=x_1}$$
$$=b(x_1-x_2)=0,$$

但 $x_1\neq x_2$,因此 $b=0$.故 $p(x)=q(x)$.

为求余项,作辅助函数

$$g(t)=f(t)-p(t)-K(t-x_1)^2(t-x_2),$$

显然 $g(x_1)=g'(x_1)=g(x_2)=0$.另外,可要求 $g(x)=0$,由 Rolle 定理,$g'(t)$在含有 x_1,x_2,x 的区间上至少有三个零点.反复应用 Rolle 定理可知,$g'''(t)$在含有 x_1,x_2,x 的区间中至少有一个零点 ζ,即

$$g'''(\zeta)=f'''(\zeta)-3!K=0,$$

因此

$$K=\frac{1}{3!}f'''(\zeta).$$

故

$$f(x)-p(x)=\frac{1}{3!}f'''(\zeta)(x-x_1)^2(x-x_2),$$

其中 ζ 在区间$(\min(x_1,x),\max(x,x_2))$中.

12.4.15 设 $f(x)$在$[x_0,x_2]$上有四阶连续导数,试求满足下列条件的不高于三次的插值多项式 $p(x)$:

$$p(x_0)=f(x_0),p(x_1)=f(x_1),$$
$$p(x_2)=f(x_2),p'(x_1)=f'(x_1),$$

其中 $x_0<x_1<x_2$,并求出余项 $f(x)-p(x)$的表达式.

解 令

$$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)$$
$$+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$
$$+A(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2),$$

显然 $p(x)$满足条件

$$p(x_0)=f(x_0),\ p(x_1)=f(x_1),$$
$$p(x_2)=f(x_2).$$

为了确定 A,可利用条件 $p'(x_1)=f'(x_1)$.由于

$$p'(x)=f[x_0,x_1]+f[x_0,x_1,x_2](2x-x_0-x_1)$$
$$+A(x-x_1)(x-x_2)+A(x-x_0)$$
$$\times(x-x_2)+A(x-x_0)(x-x_1),$$

因此由 $f'(x_1)=p'(x_1)$可得

$$A=\frac{f'(x_1)-f[x_0,x_1]-(x_1-x_0)f[x_0,x_1,x_2]}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)},$$

从而求得所需的插值多项式 $p(x)$.

为导出余项表达式,令

$$g(t)=f(t)-p(t)$$
$$-\frac{(t-x_0)(t-x_1)^2(t-x_2)}{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}(f(x)-p(x)),$$

易知

$$g(x)=g(x_0)=g(x_1)=g(x_2)=g'(x_1)=0.$$

反复应用 Rolle 定理可知,存在一点 ζ 使

$$g^{(4)}(\zeta)$$
$$=f^{(4)}(\zeta)-\frac{4!\,(f(x)-p(x))}{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}=0.$$

从而得

$$f(x)-p(x)$$
$$=\frac{(x-x_0)(x-x_1)^2(x-x_2)}{4!}f^{(4)}(\zeta),$$

其中 $\zeta\in(x_1,x_2)$.

注 例如,求一个不高于三次的多项式 $p(x)$使 $p(0)=0,p(1)=p'(1)=1,p(2)=1$.

我们先构造均差表,计算得 $p[0,1]=1,p[0,1,2]=-\frac{1}{2}$.于是

$$p(x)=p(0)+p[0,1]x+p[0,1,2]x(x-1)$$
$$+Ax(x-1)(x-2)$$
$$=x-\frac{1}{2}x(x-1)+Ax(x-1)(x-2).$$

而

$$A=\frac{p'(1)-p[0,1]-(1-0)p[0,1,2]}{(1-0)(1-2)}$$
$$=\frac{1-1+\frac{1}{2}}{1}=-\frac{1}{2},$$

故

$$p(x)=x-\frac{1}{2}x(x-1)-\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)$$
$$=-\frac{1}{2}x^3+x^2+\frac{1}{2}x.$$

或者,令 $p(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.由条件 $p(0)=0,p(1)=p'(1)=1,p(2)=1$ 来确定多项式 $p(x)$的系数 a,b,c,d.

12.4.16 给定一组基点 $x_0=-2,x_1=-1,x_2=0,x_3=1,x_4=2$.求满足条件:

$$S^{(p)}(x_0)=S^{(p)}(x_4)=0,p=0,1,2$$

及 $S(x_2)=1$ 的区间$[-2,2]$上的三次样条函数 $S(x)$.

解 记 $m_j=S''(x_j),j=0,1,2,3,4$.在$[x_{j-1},x_j]$ $(j=1,2,3,4)$上,

$$S(x)=m_{j-1}\frac{(x_j-x)^3}{6h_j}+m_j\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_j}$$
$$+\left(\frac{y_j}{h_j}-\frac{m_jh_j}{6}\right)(x-x_{j-1})$$

$$+\left(\frac{y_{j-1}}{h_j}-\frac{m_{j-1}h_j}{6}\right)(x_j-x), \qquad ①$$

m_j 满足方程组

$$\begin{cases}\mu_1 m_0+2m_1+\lambda_1 m_2=d_1,\\ \mu_2 m_1+2m_2+\lambda_2 m_3=d_2,\\ \mu_3 m_2+2m_3+\lambda_3 m_4=d_3,\end{cases}$$

其中

$$\lambda_j=\frac{h_{j+1}}{h_j+h_{j+1}},\mu_j=\frac{h_j}{h_j+h_{j+1}},$$

$$d_j=\frac{6}{h_j+h_{j+1}}\left[\frac{y_{j+1}-y_j}{h_{j+1}}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_j}\right],$$

$$j=1,2,3.$$

据题意有

$$y_0=y_4=0,y_2=1,m_0=m_4=0,$$
$$h_j=1,j=1,2,3,4.$$

于是

$$\lambda_1=\lambda_2=\mu_2=\mu_3=\frac{1}{2},$$
$$d_1=3(1-2y_1),d_2=3(y_3-2+y_1),$$
$$d_3=3(-2y_3+1),$$

从而 m_j 满足方程组

$$\begin{cases}2m_1+\frac{1}{2}m_2=3(1-2y_1),\\ \frac{1}{2}m_1+2m_2+\frac{1}{2}m_3=3(y_3-2+y_1), \qquad ②\\ \frac{1}{2}m_2+2m_3=3(-2y_3+1).\end{cases}$$

由 ① 求得 $S'(x)$，据条件 $S'(x_0)=S'(x_4)=0$ 得 $m_1=6y_1,m_3=6y_3$，将它们代入方程组 ② 解得

$$m_2=-3,y_1=\frac{1}{4},y_3=\frac{1}{4},$$
$$m_1=\frac{3}{2},m_3=\frac{3}{2}.$$

故由 ① 得

$S(x)=$

$$\begin{cases}\frac{1}{4}(x+2)^3,x\in[-2,-1],\\ -\frac{1}{4}x^3-\frac{1}{2}(x+1)^3+\frac{3}{2}(x+1),x\in[-1,0],\\ -\frac{1}{2}(1-x)^3+\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2},x\in[0,1],\\ \frac{1}{4}(2-x)^3,x\in[1,2].\end{cases}$$

12.4.17 设

$$x_i=-1+\frac{i}{n},i=0,1,2,\cdots,2n,$$

$$f(x)=\frac{1}{2}(x-|x|).$$

求 $f(x)$ 的零次最小二乘拟合多项式 $g(x)=a$（a 为常数）.

解
$$E_2(a)=\sum_{i=0}^{2n}(g(x_i)-f(x_i))^2$$
$$=\sum_{i=0}^{2n}\left(a-\frac{1}{2}(x_i-|x_i|)\right)^2.$$

由法方程

$$\frac{\partial E_2(a)}{\partial a}=0$$

得

$$\sum_{i=0}^{2n}\left(a-\frac{1}{2}(x_i-|x_i|)\right)=0.$$

于是得到

$$a=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n}(x_i-|x_i|)$$
$$=\frac{1}{2(2n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}2\left(-1+\frac{i}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2n+1}\left(-n+\frac{(n-1)n}{2n}\right)$$
$$=\frac{-(n+1)}{4n+2}.$$

注 若令 $f(x)=\frac{1}{2}(x+|x|)$，则

$$a=\frac{1}{2n+1}\cdot\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{2n}(x_i+|x_i|)$$
$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{i=n+1}^{2n}\left(-1+\frac{i}{n}\right)$$
$$=\frac{n+1}{4n}.$$

12.4.18 观测得数据 $(-2,0.5)$，$(0,1.0)$，$(1,1.5)$，$(2,2.0)$，$(4,3.0)$. 试用最小二乘法求拟合直线 $y=a_0+a_1x$.

解 由于

$$\sum_{i=1}^{5}x_i=5,\sum_{i=1}^{5}x_i^2=25,$$
$$\sum_{i=1}^{5}y_i=8,\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=16.5,$$

于是得到法方程

$$\begin{cases}5a_0+5a_1=8,\\ 5a_0+25a_1=16.5.\end{cases}$$

解得

$$a_0=1.175,a_1=0.425.$$

故得拟合直线

$$y=1.175+0.425x.$$

注 求数据组 $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{m}$ 的最小二乘拟合直线 $y=a_0+a_1x$ 的法方程为

$$\begin{cases}ma_0+\left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)a_1=\sum_{i=1}^{m}y_i,\\ \left(\sum_{i=1}^{m}x_i\right)a_0+\left(\sum_{i=1}^{m}x_i^2\right)a_1=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i.\end{cases}$$

12.4.19 观测得数据$(-1,2),(1,2),(2,5),(3,10)$.求最小二乘拟合多项式 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

解 由于

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 5, \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 15,$$

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^3 = 35, \sum_{i=1}^{4} x_i^4 = 99,$$

$$\sum_{i=1}^{4} y_i = 19, \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 40, \sum_{i=1}^{4} x_i^2 y_i = 114,$$

因此得法方程

$$\begin{cases} 4a_0 + 5a_1 + 15a_2 = 19, \\ 5a_0 + 15a_1 + 35a_2 = 40, \\ 15a_0 + 35a_1 + 99a_2 = 114. \end{cases}$$

解得 $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1$.故得拟合多项式

$$y = 1 + x^2.$$

注 求数据组 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ 的最小二乘拟合多项式 $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ 的法方程为

$$\begin{cases} m a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a_2 = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^3\right) a_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a_0 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^4\right) a_2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i. \end{cases}$$

12.4.20 观测得数据组$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^n$,试求形如$y = ae^x + be^{-x}$ 的最小二乘拟合.

解 由于

$$E_2(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ae^{x_i} + be^{-x_i} - y_i)^2,$$

因此

$$\frac{\partial E_2(a,b)}{\partial a} = 2\left(a \sum_{i=1}^{n} e^{2x_i} + bn - \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} y_i\right),$$

$$\frac{\partial E_2(a,b)}{\partial b} = 2\left(an + b \sum_{i=1}^{n} e^{-2x_i} - \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} y_i\right).$$

从而法方程

$$\frac{\partial E_2(a,b)}{\partial a} = 0,$$

$$\frac{\partial E_2(a,b)}{\partial b} = 0$$

可写成

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} e^{2x_i}\right) a + nb = \sum_{i=1}^{n} e^{x_i} y_i, \\ na + \left(\sum_{i=1}^{n} e^{-2x_i}\right) b = \sum_{i=1}^{n} e^{-x_i} y_i. \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \left(e^{x_i} \sum_{j=1}^{n} e^{-2x_j} - ne^{-x_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2(x_i - x_j)} - n^2},$$

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \left(e^{-x_i} \sum_{j=1}^{n} e^{2x_j} - ne^{x_i}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2(x_i - x_j)} - n^2}.$$

注 例如,求数据组$(-1,0),(0,1),(1,0)$的最小二乘拟合 $y = ae^x + be^{-x}$.由法方程

$$\begin{cases} (e^{-2} + 1 + e^2) a + 2b = 1, \\ 2a + (e^{-2} + 1 + e^2) b = 1 \end{cases}$$

解得

$$a = \frac{1}{e^{-2} + e^2 + 3}, \quad b = \frac{1}{e^{-2} + e^2 + 3}.$$

12.4.21 观测得数据$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$.求形如 $f(x) = a + bx^2 + ce^{-x}$ 的最小二乘拟合的法方程.

解 令

$$E_2(a,b,c) = \sum_{i=1}^{m} (a + bx_i^2 + ce^{-x_i} - y_i)^2.$$

求 a,b,c 使$E_2(a,b,c)$为极小.由极值存在的必要条件,必须

$$\frac{\partial E_2(a,b,c)}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{m} (a + bx_i^2 + ce^{-x_i} - y_i) = 0,$$

$$\frac{\partial E_2(a,b,c)}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{m} (a + bx_i^2 + ce^{-x_i} - y_i) x_i^2 = 0,$$

$$\frac{\partial E_2(a,b,c)}{\partial c} = 2\sum_{i=1}^{m} (a + bx_i^2 + ce^{-x_i} - y_i) e^{-x_i} = 0.$$

因此得法方程

$$\begin{cases} ma + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} e^{-x_i}\right) c = \sum_{i=1}^{m} y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^4\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} e^{-x_i} x_i^2\right) c = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 y_i, \\ \left(\sum_{i=1}^{m} e^{-x_i}\right) a + \left(\sum_{i=1}^{m} e^{-x_i} x_i^2\right) b + \left(\sum_{i=1}^{m} e^{-2x_i}\right) c = \sum_{i=1}^{m} y_i e^{-x_i}. \end{cases}$$

12.4.22 设 $\bar{p}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_n x^n$ 是给定数据组$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ 的最小二乘拟合多项式.证明:若 $m = n + 1$,则 $\bar{p}(x)$ 恰是经过点集$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ 的 Lagrange 插值多项式.

证明 首先证明,若 $n < m$,则数据组$\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^m$ 的最小二乘拟合多项式 $\bar{p}(n)$ 是唯一的.令 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$,则

$$E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x_i^k - y_i\right)^2.$$

由$\frac{\partial E_2}{\partial a_k} = 0, k = 0,1,\cdots,n$ 得法方程

$$\sum_{i=0}^{n} S_{i+j} a_i = t_j, j = 0,1,\cdots,n,$$

其中

$$S_k = \sum_{i=1}^{m} x_i^k, t_k = \sum_{i=1}^{m} y_i x_i^k, k = 0,1,\cdots,n.$$

其相应的齐次线性方程组为

$$\sum_{i=0}^{n} S_{i+j} a_i = 0, j = 0,1,\cdots,n.$$

用 a_j 乘此齐次方程组的第 j 个方程后从 $j = 0,1,\cdots,n$ 相加得

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n}\Big(\sum_{i=0}^{n} S_{i+j} a_i a_j\Big) &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{n} a_i a_j\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k^i x_k^j\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{j=0}^{n} a_j x_k^j\Big)\Big(\sum_{i=0}^{n} a_i x_k^i\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{m}[p(x_k)]^2 = 0.\end{aligned}$$

因此,若 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 满足齐次方程,则 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 有 m 个互异实根 $x_1, x_2, \cdots, x_m$. 但 $n < m$,因此 $p(x) \equiv 0$,即 $a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$. 这说明齐次方程组只有零解,故系数行列式不等于零,从而 $n < m$ 时,法方程组有唯一解.

现设 $\bar{p}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_n x^n$ 的系数 $\bar{a}_0, \bar{a}_1, \cdots, \bar{a}_n$ 满足法方程组,$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 是任一不高于 n 次的多项式,则 $\bar{p}(x) - p(x)$ 也是任一不高于 n 次的多项式. 由于

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{m}(\bar{p}(x_i) - p(x_i) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m}(\bar{p}(x_i) - y_i)^2 - 2\sum_{i=1}^{m} p(x_i)(\bar{p}(x_i) - y_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}(p(x_i))^2.\end{aligned}$$

$\bar{p}(x)$ 的系数满足法方程,因此上式右端中

$$\sum_{i=1}^{n} p(x_i)(\bar{p}(x_i) - y_i) = 0,$$

从而

$$\sum_{i=1}^{m}(\bar{p}(x_i) - y_i)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{m}(\bar{p}(x_i) - p(x_i) - y_i)^2.$$

这说明 $\bar{p}(x)$ 使 $E_2(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ 极小,即 $\bar{p}(x)$ 是最小二乘拟合多项式. 它是唯一的.

特别,当 $n = m - 1$ 时,数据 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ 的最小二乘拟合多项式 $\bar{p}(x) = \bar{a}_0 + \bar{a}_1 x + \cdots + \bar{a}_{m-1} x^{m-1}$ 是唯一的. 由于经过点 $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^{m}$ 的不高于 $m-1$ 次的 Lagrange 插值多项式 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{m-1} x^{m-1}$ 满足 $p(x_i) = y_i, i = 1, \cdots, m$,因此

$$E_2(a_0, a_1, \cdots, a_{m-1}) = \sum_{i=1}^{m}(p(x_i) - y_i)^2 = 0.$$

故当 $n = m - 1$ 时,Lagrange 插值多项式就是最小二乘拟合多项式.

§ 12.5 数值积分法

计算定积分

$$I(f) = \int_a^b w(x) f(x) \mathrm{d}x,$$

其中 $w(x)$ 为权函数,常用的数值方法是用被积函数 $f(x)$ 在若干个点

$$a \leqslant x_1 < x_2 < \cdots < x_{N+1} \leqslant b$$

处的值 $f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_{N+1})$ 的线性组合:

$$I_N(f) = \sum_{i=1}^{N+1} A_i f(x_i)$$

作为 $I(f)$ 的近似值:

$$I(f) \approx I_N(f),$$

称之为求积公式,其中系数 $A_i (i = 1, \cdots, N+1)$ 与 $f(x)$ 无关. 一般地,

$$I(f) = I_N(f) + E_N(f),$$

$E_N(f)$ 为余项. 求积公式的精确程度取决于余项 $E_N(f)$ 的大小,但是用代数精确度的概念则更便于讨论.

构造求积公式的方法通常是用简单的、便于积分的逼近于 $f(x)$ 的函数代替 $f(x)$(例如,取 $f(x)$ 的 Taylor 展开式的前几项,Lagrange 插值多项式等). 用 Lagrange 插值多项式代替 $f(x)$ 得插值求积公式

$$I_N(f) = \sum_{i=1}^{N+1} A_i f(x_i),$$

其中

$$\begin{aligned}A_i &= \int_a^b l_i(x) w(x) \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b [(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\cdots \\ &\quad \times (x - x_{N+1})]/[(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{i-1}) \\ &\quad \times (x_i - x_{i+1})\cdots(x_i - x_{N+1})] w(x) \mathrm{d}x, \\ &\quad i = 1, \cdots, N+1.\end{aligned}$$

当 $[a, b]$ 为有限区间,$w(x) = 1$,并取等距基点时,插值求积公式就是 Newton-Cotes 型求积公式. 此时

$$I_N(f) = Ah \sum_{i=1}^{N+1} B_i f(x_i),$$

其中

$$B_i = \frac{A_i}{Ah},$$

$$\begin{aligned}A_i = (-1)^{N+1-i} &\frac{h}{(i-1)!(N+1-i)!} \\ &\times \int_0^N t(t-1)\cdots(t-(i-2))(t-i)\cdots(t-N)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

$$i = 1,2,\cdots,N+1,$$
$$h = \frac{b-a}{N},$$

$Ah > 0$ 是诸 $A_i(i = 1,\cdots,N+1)$ 的公因子. 特别,取 $N = 1$ 时,得到梯形公式:

$$I_1(f) = \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)],$$

$N = 2$,得到 Simpson 公式:

$$S_2(f) = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)\left[f(a) + 4f\left(\frac{b+a}{2}\right) + f(b)\right].$$

高阶的 Newton-Cotes 型求积公式会产生数值不稳定性,而低阶求积公式如梯形公式和 Simpson 公式精度不高. 因此,常使用复合求积公式.

$N+1$ 个等距基点($x_1 = a, x_{N+1} = b$)的复合梯形公式是

$$T_N(f) = \frac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=2}^{N} f(x_i) + f(b)],$$

其中步长 $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N}$,误差界为

$$|T_N(f) - I(f)| \leqslant \frac{h^2(b-a)}{12} M_2,$$
$$M_2 = \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

$N+1$ 个等距基点(N 为偶数,$x_1 = a, x_{N+1} = b$)的复合 Simpson 公式是

$$S_N(f) = \frac{h}{3}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{N/2-1} f(x_{2i+1}) + 4\sum_{i=1}^{N/2} f(x_{2i}) + f(b)\right],$$

其中步长 $h = x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{N}$,误差界为

$$|S_N(f) - I(f)| \leqslant \frac{h^4(b-a)}{180} M_4,$$
$$M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

从梯形值序列

$$T_{11} = \frac{h_1}{2}(f(a) + f(b)) = \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b)),$$
$$T_{i1} = \frac{1}{2}[T_{i-1,1} + h_{i-1}\sum_{k=1}^{2^{i-2}} f(a + (k - \frac{1}{2})h_{i-1})],$$
$$i \geqslant 2,$$

($h_i = \frac{1}{2}h_{i-1}$ 是将 $[a,b]$ 分成 2^i 等分的步长)开始用 Richardson 外推法,得到 Romberg 积分法,其计算公式为

$$T_{i,j} = \frac{4^{j-1}T_{i,j-1} - T_{i-1,j-1}}{4^{j-1} - 1},$$
$$i \geqslant j \geqslant 2.$$

取 N 个基点的插值求积公式的代数精确度至多是 $2N-1$. 若 N 个基点的插值求积公式的代数精确度是 $2N-1$,则称它是 Gauss 型求积公式:

$$I(f) = \int_a^b f(x)w(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N} A_i f(x_i) + C_N f^{(2N)}(\gamma),$$

其中基点 $x_1,\cdots,x_N$ 是 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 的 N 次直交多项式的 N 个实根. C_N 为一常数,γ 为 (a,b) 中的某一数.

$[-1,1]$ 上关于 $w(x) = 1/(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的直交多项式是 Цебышёв 多项式

$$T_k(x) = \cos(k\arccos x), k \geqslant 0.$$

N 点 Gauss-Цебышёв 求积公式为

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x \sim \frac{\pi}{N}\sum_{i=1}^{N} f(\cos\frac{2i-1}{2N}\pi).$$

建立 Gauss 型求积公式的方法可以是先求出区间 $[a,b]$ 上关于函数 $w(x)$ 的直交多项式,然后求得直交多项式的根作为求积公式的基点,最后根据插值求积公式的系数计算公式求得系数. 我们还可以根据 Gauss 型求积公式的代数精确度得一个线性或非线性方程组,再解此方程组便得到求积公式的基点和系数(参见 12.5.17,12.5.18 和 12.5.19). 对于某些积分可以作适当的变换化为能应用已知的 Gauss 型求积公式的积分形式.

12.5.1 已知函数 $f(x)$ 在若干点处的值:

x_i	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$f(x_i)$	9	$\frac{15}{4}$	0	$-\frac{9}{4}$	-3	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{15}{4}$	9

试计算积分 $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x$ 的梯形值 $T_1(f), T_2(f), T_4(f), T_8(f)$ 及 Simpson 值 $S_2(f), S_4(f), S_8(f)$.

解

$$T_1(f) = \frac{4}{2}(9+9) = 36,$$
$$T_2(f) = \frac{2}{2}[9+9+2\times(-3)] = 12,$$
$$T_4(f) = \frac{1}{2}[9+9+2(0-3+0)] = 6,$$
$$T_8(f) = \frac{\frac{1}{2}}{2}[9+9+2(\frac{15}{4}+0-\frac{9}{4}-3-\frac{9}{4}+0+\frac{15}{4})] = 4.5,$$
$$S_2(f) = \frac{2}{3}[9+9+4\times(-3)] = 4,$$
$$S_4(f) = \frac{1}{3}[9+9+2\times(-3)+4\times(0+0)] = 4,$$
$$S_8(f) = \frac{\frac{1}{2}}{3}[9+9+2\times(0-3+0) + 4(\frac{15}{4}-\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+\frac{15}{4})] = 4.$$

注 若观测得函数在若干点处的值，计算积分的近似值时，在选定求积公式后，要确定求积公式的基点和步长，最后进行计算.

12.5.2 应用复合梯形和复合 Simpson 公式计算积分

$$I=\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

（取步长 $h=0.1$，计算结果取五位小数），并与准确值 $I=\frac{\pi}{4}$ 比较.

解 计算得函数 $y=\frac{1}{1+x^2}$ 在若干点处的值（表 12.6）

表 12.6

i	x_i	y_i
1	0.0	1.00000
2	0.1	0.99010
3	0.2	0.96154
4	0.3	0.91743
5	0.4	0.86207
6	0.5	0.80000
7	0.6	0.73529
8	0.7	0.67114
9	0.8	0.60976
10	0.9	0.55249
11	1.0	0.50000

用复合梯形公式得

$$\begin{aligned}I&\simeq T_{10}(f)\\&=\frac{0.1}{2}[y_1+y_{11}+2(y_2+y_3+\cdots+y_{10})]\\&=0.78498.\end{aligned}$$

用复合 Simpson 公式得

$$\begin{aligned}I&\simeq S_{10}(f)\\&=\frac{0.1}{3}[y_1+y_{11}+2(y_3+y_5+y_7+y_9)\\&\quad+4(y_2+y_4+y_6+y_8+y_{10})]\\&=0.78540.\end{aligned}$$

$$\left|T_{10}(f)-\frac{\pi}{4}\right|<10^{-3},$$

$$\left|S_{10}(f)-\frac{\pi}{4}\right|<10^{-5}.$$

12.5.3 试用 Romberg 积分法计算积分

$$I=\int_0^{1.5}\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x,$$

要求相邻两次结果的误差不超过 10^{-5}，并将所得结果与 I 的准确值比较.

解 根据 Romberg 积分法，计算得

$$T_{11}=\frac{1.5}{2}(f(0)+f(1.5))=1.05,$$

$$T_{21}=\frac{1}{2}[T_{11}+1.5f(0.75)]=0.953571429,$$

$$T_{22}=\frac{4T_{21}-T_{11}}{3}=0.921428571,$$

$$\begin{aligned}T_{31}&=\frac{1}{2}[T_{21}+0.75(f(0.375)+f(1.125))]\\&=0.925983575,\end{aligned}$$

$$T_{32}=\frac{4T_{31}-T_{21}}{3}=0.916787624,$$

$$T_{33}=\frac{16T_{32}-T_{22}}{15}=0.916478228,$$

等等. 现将计算的结果列于表 12.7 中.

表 12.7

i	T_{i1}	T_{i2}	T_{i3}	T_{i4}	T_{i5}
1	1.05				
2	0.953571429	0.921428571			
3	0.925983575	0.916787624	0.916478228		
4	0.918741799	0.916327874	0.916297224	0.916294351	
5	0.916905342	0.916293190	0.916290077	0.916290776	0.916290762

由于 $|T_{55}-T_{44}|<10^{-5}$，因此

$$I\simeq T_{55}=0.916290762,$$

且 $|I-T_{55}|=|\ln 2.5-T_{55}|<10^{-7}$.

12.5.4 应用复合梯形公式计算积分

$$I=\int_0^1 6e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

时，要求误差不超过 10^{-6}，试确定所需的步长 h 和基点个数.

解 由于 $f(x)=6e^{-x^2}$，因此

$$f'(x)=-12xe^{-x^2},$$

$$f''(x)=12e^{-x^2}(2x^2-1),$$

$$f'''(x)=24xe^{-x^2}(3-2x^2)\neq 0,\ x\in(0,1).$$

从而

$$\begin{aligned}M_2&=\max_{x\in[0,1]}|f''(x)|\\&=\max\{|f''(0)|,|f''(1)|\}\\&=|f''(0)|=12.\end{aligned}$$

现要使误差界不超过 10^{-6}，即

$$\frac{M_2h^2(b-a)}{12}=\frac{12h^2(1-0)}{12}=h^2\leqslant 10^{-6},$$

亦即 $h\leqslant 10^{-3}$，因此可取步长 $h=10^{-3}$. 由于

$$h=\frac{b-a}{N}=\frac{1}{N},$$

因此得 $N=10^3$，故可取基点数为 1001.

12.5.5 应用复合 Simpson 公式计算积分

$$I(f)=\int_0^1 \frac{180}{e}e^x\mathrm{d}x,$$

为使误差不超过 10^{-8}，试确定所需的步长 h 和基点个数.

解 由于 $f(x)=\frac{180}{e}e^x$，因此 $f^{(4)}(x)=\frac{180}{e}e^x$，且

$$M_4=\max_{x\in[0,1]}|f^{(4)}(x)|=180.$$

复合 Simpson 公式的误差界为

$$\frac{M_4h^4(b-a)}{180},$$

现要它不超过 10^{-8}，即要

$$h\leqslant\left[\frac{180}{(b-a)M_4}10^{-8}\right]^{\frac{1}{4}}=10^{-2},$$

因此可取步长 $h=10^{-2}$，而 $N=\frac{b-a}{h}=100$，故可取基点个数为 101.

12.5.6 试用复合梯形公式计算积分

$$I=\int_1^2\frac{1}{2x}\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过 10^{-3}，并把结果与准确值 I 比较.

解 令 $f(x)=\frac{1}{2x}$，则 $f''(x)=\frac{1}{x^3}$. 因此

$$M_2=\max_{x\in[1,2]}|f''(x)|=1.$$

若要误差界

$$\frac{h^2(b-a)}{12}M_2=\frac{(b-a)^3}{12N^2}=\frac{1}{12N^2}<10^{-3},$$

只要 $N\geqslant10$，因此取 $N=10$，$h=\frac{b-a}{N}=0.1$. 于是

$$\begin{aligned}I&\approx T_{10}(f)\\&=\frac{0.1}{2}\times\frac{1}{2}\left[1+\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{1.1}+\frac{1}{1.2}+\cdots+\frac{1}{1.9}\right)\right]\\&=0.346885701,\end{aligned}$$

且 $|T_{10}(f)-I|=|T_{10}(f)-\frac{1}{2}\ln2|<3.12111\times10^{-4}$.

12.5.7 试用复合 Simpson 公式计算积分

$$I(f)=\int_1^2 3\ln x\mathrm{d}x,$$

要求误差不超过 10^{-5}，并把计算的结果与准确值比较.

解 令 $f(x)=3\ln x$，则 $f^{(4)}(x)=-\frac{18}{x^4}$，且

$$M_4=\max_{x\in[1,2]}|f^{(4)}(x)|=18.$$

若要误差界

$$\frac{h^4(b-a)}{180}M_4=\frac{(b-a)^5M_4}{180N^4}=\frac{1}{10N^4}\leqslant10^{-5},$$

只要 $N\geqslant10$. 取 $N=10$，$h=\frac{b-a}{N}=0.1$. 于是

$$\begin{aligned}I(f)&\approx S_{10}(f)\\&=3\times\frac{0.1}{3}[\ln1+\ln2+2(\ln1.2+\ln1.4+\ln1.6+\ln1.8)+4(\ln1.1+\ln1.3+\ln1.5+\ln1.7+\ln1.9)]\\&=1.15888021.\end{aligned}$$

$$|I(f)-S_{10}(f)|\leqslant2.87\times10^{-6}.$$

12.5.8 证明 Newton-Cotes 求积公式中系数 B_i 具有对称性：

$$B_i=B_{N+2-i},\ i=1,2,\cdots,N.$$

证明 由于

$$A_i=AhB_i,$$

因此只要证明

$$A_i=A_{N+2-i},\ i=1,2,\cdots,N.$$

因为

$$\begin{aligned}&A_{N+2-i}\\&=(-1)^{N+1-(N+2-i)}\\&\quad\times\frac{h}{(N+2-i-1)!(N+1-(N+2-i))!}\\&\quad\times\int_0^N t(t-1)\cdots(t-(N+2-i-2))(t-(N+2-i))\cdots(t-N)\mathrm{d}t\\&=(-1)^{i-1}\frac{h}{(N-i+1)!(i-1)!}\int_0^N t(t-1)\cdots(t-N+i)(t-N+i-2)\cdots(t-N)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

令 $N-t=u$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}u$，且

$$\begin{aligned}&A_{N+2-i}\\&=(-1)^{i-1}\frac{h}{(N+1-i)!(i-1)!}\int_N^0(N-u)(N+1-u)\cdots(i-u)(i-2-u)\cdots(1-u)(-u)\\&\quad\times(-1)\mathrm{d}u\\&=(-1)^{N+1-i}\frac{h}{(N+1-i)!(i-1)!}\int_0^N u(u-1)\cdots(u-(i-2))(u-i)\cdots(u-N)\mathrm{d}u\\&=A_i.\end{aligned}$$

12.5.9 假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 证明对复合梯形公式和复合 Simpson 公式有

$$\lim_{N\to\infty}T_N(f)=\lim_{N\to\infty}S_N(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明 由假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续知 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 据复合梯形公式

$$\begin{aligned}T_N(f)&=\frac{h}{2}[f(a)+2\sum_{i=2}^{N}f(x_i)+f(b)]\\&=\frac{1}{2}[f(a)+\sum_{i=2}^{N}f(x_i)]h\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{N}f(x_i)+f(b)]h.$$

其中 $h=\frac{b-a}{N}$,因此由积分定义可知

$$\lim_{N\to\infty}T_N(f)=\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由复合 Simpson 求积公式

$$S_N(f)$$
$$=\frac{h}{3}[f(a)+2\sum_{i=1}^{N/2-1}f(x_{2i+1})+4\sum_{i=1}^{N/2}f(x_{2i})+f(b)]$$
$$=\frac{1}{6}[(f(a)+\sum_{i=1}^{N/2-1}f(x_{2i-1}))2h+(\sum_{i=1}^{N/2-1}f(x_{2i+1})$$
$$+f(b))2h+4\sum_{i=1}^{N/2}f(x_{2i})2h].$$

因此

$$\lim_{N\to\infty}S_N(f)$$
$$=\frac{1}{6}\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+4\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

12.5.10　设 n 为偶数,证明

$$S_n(f)=\frac{1}{3}[4T_n(f)-T_{n/2}(f)].$$

证明　由于

$$T_n(f)=\frac{h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=2}^{n}f_i],$$
$$h=\frac{b-a}{n},f_i=f(x_i),$$
$$T_{n/2}(f)=\frac{2h}{2}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n/2-1}f_{2i+1}],$$

因此

$$\frac{1}{3}[4T_n(f)-T_{n/2}(f)]$$
$$=\frac{h}{3}[2f(a)+2f(b)+4\sum_{i=2}^{n}f_i-f(a)-f(b)$$
$$-2\sum_{i=1}^{n/2-1}f_{2i+1}]$$
$$=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+4\sum_{i=1}^{n/2-1}f_{2i+1}+4\sum_{i=1}^{n/2}f_{2i}$$
$$-2\sum_{i=1}^{n/2-1}f_{2i+1}]$$
$$=\frac{h}{3}[f(a)+f(b)+2\sum_{i=1}^{n/2-1}f_{2i+1}+4\sum_{i=1}^{n/2}f_{2i}]$$
$$=S_n(f).$$

12.5.11　设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,$T_{m,j}$ 是 Romberg 积分法得到的序列,即

$$T_{m,j}=\frac{4^{j-1}T_{m,j-1}-T_{m-1,j-1}}{4^{j-1}-1},m\geqslant j\geqslant 2.$$

试证明对固定的 j,有

$$\lim_{m\to\infty}T_{m,j}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

证明　当 $j=2$ 时,据 12.5.10 知 $\{T_{m,2}\}$ 是 Simpson 值序列,因此,由 12.5.9 知

$$\lim_{m\to\infty}T_{m,2}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

设当 $j=k$ 时,结论成立,即有

$$\lim_{m\to\infty}T_{m,k}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

由于

$$T_{m,k+1}=\frac{4^kT_{m,k}-T_{m-1,k}}{4^k-1},$$

因此

$$\lim_{m\to\infty}T_{m,k+1}=\frac{1}{4^k-1}(4^k\lim_{m\to\infty}T_{m,k}-\lim_{m\to\infty}T_{m-1,k})$$
$$=\frac{1}{4^k-1}\left(4^k\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)$$
$$=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

据归纳法原理,证得对任意固定的 j 有

$$\lim_{m\to\infty}T_{m,j}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

12.5.12　证明:计算积分 $I(f)=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的 $N+1$ 个基点的求积公式

$$I_N(f)=\sum_{i=1}^{N+1}A_if(x_i)$$

的代数精确度至少是 N 的充分必要条件是

$$A_i=\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x,i=1,\cdots,N+1,$$

其中

$$l_i(x)=\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N+1}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}.$$

证明　充分性.设 $f(x)$ 是任一不高于 N 次的多项式,则由 Lagrange 插值公式知

$$f(x)=p_N(x)=\sum_{i=1}^{N+1}f(x_i)l_i(x).$$

积分得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{i=1}^{N+1}f(x_i)l_i(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{i=1}^{N+1}f(x_i)\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x$$
$$=\sum_{i=1}^{N+1}A_if(x_i).$$

因此,求积公式 $I_N(f)$ 的代数精确度至少是 N.

必要性.设求积公式 $I_N(f)$ 的代数精确度至少是 N,则对任一不高于 N 次的多项式 $f(x)$ 都有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N+1} A_i f(x_i).$$

特别，对于 $f(x) = l_j(x)$（N 次的）上式也成立，即

$$\int_a^b l_j(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N+1} A_i l_j(x_i),$$

$$j = 1,2,\cdots,N+1.$$

但

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

因此

$$\int_a^b l_i(x)\mathrm{d}x = A_i, \quad j = 1,2,\cdots,N+1.$$

12.5.13 用代数精确度较高的求积公式来计算积分是否必得到较精确的结果？研究例子

$$I = \int_{-1}^{1}(-8+45x^2-25x^4)\mathrm{d}x,$$

取步长 $h=1$，应用 Simpson 公式和复合梯形公式进行计算.

解 $I = \int_{-1}^{1}(-8+45x^2-25x^4)\mathrm{d}x = 4.$

取 $h=1$，应用复合梯形公式计算得

$$T_2(f) = \frac{1}{2}[f(-1)+2f(0)+f(1)] = 4.$$

应用 Simpson 公式计算得

$$S_2(f) = \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)] = -\frac{8}{3}.$$

Simpson 公式的代数精确度为 3，梯形公式的代数精确度为 1. 但就此例，应用梯形公式较 Simpson 公式所得结果精确.

12.5.14 试验证求积公式

$$\int_0^{nh} f(x)\mathrm{d}x \approx h(f(0)+f(h)+\cdots+f(nh)) - \frac{5}{8}h(f(0)+f(nh)) + \frac{h}{6}(f(h) + f((n-1)h)) - \frac{1}{24}h(f(2h)+f((n-2)h))$$

的代数精确度至少是 3.

证明 不妨设 $h=1$. 把求积公式左端记作 $I(f)$，右端记作 $I_n(f)$.

令 $f(x)=1$，则

$$I_n(1) = (n+1) - \frac{10}{8} + \frac{2}{6} - \frac{1}{12} = n = I(1).$$

令 $f(x)=x$，则

$$I_n(x) = 1+2+\cdots+n - \frac{5n}{8} + \frac{n}{6} - \frac{n}{24} = \frac{n^2}{2} = I(x).$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$\begin{aligned} I_n(x^2) &= 1^2+2^2+\cdots+n^2 - \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{6}(1+(n-1)^2) - \frac{1}{24}(2^2+(n-2)^2) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{5}{8}n^2 + \frac{1}{6}(1+(n-1)^2) - \frac{1}{24}(2^2+(n-2)^2) \\ &= \frac{n^3}{3} = I(x^2). \end{aligned}$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$\begin{aligned} I_n(x^3) &= 1^3+2^3+\cdots+n^3 - \frac{5}{8}n^3 + \frac{1}{6}(1+(n-1)^3) - \frac{1}{24}(2^3+(n-2)^3) \\ &= \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 - \frac{5}{8}n^3 + \frac{1}{6}(1+(n-1)^3) - \frac{1}{24}(2^3+(n-2)^3) \\ &= \frac{n^4}{4} = I(x^3). \end{aligned}$$

故此求积公式的代数精确度至少是 3.

12.5.15 求求积公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)]$$

的代数精确度，其中 $h=b-a$.

解 记

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x,$$

$$I_2(f) = \frac{h}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{h^2}{12}[f'(b)-f'(a)].$$

令 $f(x)=1$，则

$$I_2(1) = b-a = I(1).$$

令 $f(x)=x$，则

$$I_2(x) = \frac{b-a}{2}[a+b] = \frac{b^2-a^2}{2} = I(x).$$

令 $f(x)=x^2$，则

$$I_2(x^2) = \frac{b-a}{2}(a^2+b^2) - \frac{(b-a)^2}{12}(2b-2a) = \frac{1}{3}(b^3-a^3) = I(x^2).$$

令 $f(x)=x^3$，则

$$I_2(x^3) = \frac{b-a}{2}(a^3+b^3) - \frac{(b-a)^2}{12}(3b^2-3a^2) = \frac{1}{4}(b^4-a^4) = I(x^3).$$

令 $f(x)=x^4$，则

$$I_2(x^4) = \frac{b-a}{2}(a^4+b^4) - \frac{(b-a)^2}{12}(4b^3-4a^3),$$

$$I(x^4)=\frac{1}{5}(b^5-a^5).$$

取 $a=0,b=1$,则

$$I(x^4)=\frac{1}{5}\neq I_2(x^4)=\frac{1}{6}.$$

故此求积公式的代数精确度为 3.

12.5.16 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有二阶连续导数,证明

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),$$
$$\xi\in(a,b).$$

证明 据 Taylor 公式有

$$f(x)=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

$\eta\in(a,b)$,因此

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x.$$

由于 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2$ 在 (a,b) 内不变号,因此应用推广的积分中值定理,在 (a,b) 内存在一点 ξ,使

$$\int_a^b\frac{1}{2}f''(\eta)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}f''(\xi)\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi).$$

又因

$$\int_a^b f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\mathrm{d}x=0,$$

故证得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f''(\xi),$$
$$\xi\in(a,b).$$

注 对于积分区间较小的情形,将被积函数用 Taylor 公式展开,也是建立数值求积公式的一种方法.

12.5.17 求 A_1,A_2,A_3 使得计算积分

$$I(f)=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

的求积公式

$$I_2(f)=A_1f(-1)+A_2f\left(-\frac{1}{3}\right)+A_3f\left(\frac{1}{3}\right)$$

的代数精确度至少为 2.

解 分别令 $f(x)=1,x,x^2$,得

$$I(1)=\int_{-1}^1 1\mathrm{d}x=2,$$
$$I(x)=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x=0,$$
$$I(x^2)=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$

而

$$I_2(1)=A_1+A_2+A_3,$$
$$I_2(x)=-A_1-\frac{1}{3}A_2+\frac{1}{3}A_3,$$
$$I_2(x^2)=A_1+\frac{1}{9}A_2+\frac{1}{9}A_3.$$

因要求求积公式的代数精确度至少为 2,因此必须有 $I(1)=I_2(1),I(x)=I_2(x),I(x^2)=I_2(x^2)$. 于是得方程组

$$\begin{cases}A_1+A_2+A_3=2,\\ A_1+\frac{1}{3}A_2-\frac{1}{3}A_3=0,\\ A_1+\frac{1}{9}A_2+\frac{1}{9}A_3=\frac{2}{3}.\end{cases}$$

解此方程组得

$$A_1=\frac{1}{2},A_2=0,A_3=\frac{3}{2}.$$

12.5.18 求 x_1,x_2,使得计算积分

$$I(f)=\int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$

的求积公式

$$I_2(f)=\frac{1}{3}[f(-1)+2f(x_1)+3f(x_2)]$$

的代数精确度至少是 2.

解 令 $f(x)=x,x^2$ 得

$$I(x)=\int_{-1}^1 x\mathrm{d}x=0,$$
$$I(x^2)=\int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3},$$
$$I_2(x)=\frac{1}{3}[-1+2x_1+3x_2],$$
$$I_2(x^2)=\frac{1}{3}[1+2x_1^2+3x_2^2],$$

因要求求积公式的代数精确度至少是 2,因此有

$$\frac{1}{3}[-1+2x_1+3x_2]=0,$$
$$\frac{1}{3}[1+2x_1^2+3x_2^2]=\frac{2}{3},$$

即有

$$\begin{cases}2x_1+3x_2=1,\\ 2x_1^2+3x_2^2=1.\end{cases}$$

解此方程组得

$$x_1=\frac{1-\sqrt{6}}{5},x_2=\frac{3+2\sqrt{6}}{15},$$

或

$$x_1=\frac{1+\sqrt{6}}{5},x_2=\frac{3-2\sqrt{6}}{15}.$$

注 12.5.17 和 12.5.18 都是根据代数精确度要求来建立求积公式的.前者是确定求积公式的系数,由解一个线性方程组得到;后者是确定求积公式的基点,它必须解一个非线性方程组.

12.5.19 计算 Gauss 型求积公式

$$\int_0^1 f(x)\ln x\mathrm{d}x\simeq A_1f(x_1)+A_2f(x_2)$$

的系数 A_1,A_2 以及基点 x_1,x_2.

解 取权函数 $w(x)=-\ln x$.先求区间[0,1]上关于权函数 $-\ln x$ 的二次首一直交多项式.区间 $[a,b]$ 上关于权函数 $w(x)$ 的 k 次首一直交多项式 $q_k(x)$ 满足递推关系式:

$$q_{k+1}(x)=(x-\alpha_k)q_k(x)-\beta_kq_{k-1}(x),$$
$$k=0,1,\cdots,$$
$$q_0(x)=1$$

(规定 $q_{-1}(x)=0$),其中

$$\alpha_k=\int_a^b x[q_k(x)]^2w(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b[q_k(x)]^2w(x)\mathrm{d}x,$$

$$\beta_k=\begin{cases}0,k=0,\\ \int_a^b[q_k(x)]^2w(x)\mathrm{d}x\Big/\int_a^b[q_{k-1}(x)]^2w(x)\mathrm{d}x,\\ \qquad k\geqslant 1.\end{cases}$$

现在,我们有

$$q_0(x)=1,$$
$$\alpha_0=\int_0^1x(-\ln x)\mathrm{d}x\Big/\int_0^1(-\ln x)\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$
$$\beta_0=0,$$

因此

$$q_1(x)=(x-\alpha_0)q_0(x)-\beta_0q_{-1}(x)$$
$$=x-\frac{1}{4}.$$

又

$$\alpha_1=\frac{\int_0^1x(x-\frac{1}{4})^2(-\ln x)\mathrm{d}x}{\int_0^1(x-\frac{1}{4})^2(-\ln x)\mathrm{d}x}=\frac{13}{28},$$

$$\beta_1=\frac{\int_0^1(x-\frac{1}{4})^2(-\ln x)\mathrm{d}x}{\int_0^1(-\ln x)\mathrm{d}x}=\frac{7}{144},$$

因此

$$q_2(x)=(x-\frac{13}{28})(x-\frac{1}{4})-\frac{7}{144}$$
$$=x^2-\frac{5}{7}x+\frac{17}{252}.$$

求积公式的基点 x_1,x_2 是 $q_2(x)$ 的两个根:

$$x_1=\frac{15-\sqrt{106}}{42},x_2=\frac{15+\sqrt{106}}{42}.$$

系数 A_1,A_2 为

$$A_1=-\int_0^1\frac{x-x_2}{x_1-x_2}(-\ln x)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}-\frac{9\sqrt{106}}{424},$$
$$A_2=-\int_0^1\frac{x-x_1}{x_2-x_1}(-\ln x)\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{1}{2}+\frac{9\sqrt{106}}{424}.$$

或解 由于两点 Gauss 型求积公式的代数精确度为 3,因此求积公式对 $f(x)$ 为 $1,x,x^2,x^3$ 都准确成立:

$$\begin{cases}A_1+A_2=-1(=\int_0^1 1\cdot\ln x\mathrm{d}x),\\ A_1x_1+A_2x_2=-\frac{1}{4}(=\int_0^1x\ln x\mathrm{d}x),\\ A_1x_1^2+A_2x_2^2=-\frac{1}{9}(=\int_0^1x^2\ln x\mathrm{d}x),\\ A_1x_1^3+A_2x_2^3=-\frac{1}{16}(=\int_0^1x^3\ln x\mathrm{d}x),\end{cases}$$

写成矩阵表示形式为

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}, & ①\\ \begin{bmatrix}x_1^2&x_2^2\\x_1^3&x_2^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{16}\end{bmatrix}. & ②\end{cases}$$

由①得

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1\\x_1&x_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{x_2}{x_2-x_1}&\frac{-1}{x_2-x_1}\\ \frac{-x_1}{x_2-x_1}&\frac{1}{x_2-x_1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-\frac{1}{4}\end{bmatrix}, \qquad ③$$

由②得

$$\begin{bmatrix}A_1\\A_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^2&x_2^2\\x_1^3&x_2^3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{16}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\frac{x_2}{x_1^2(x_2-x_1)}&\frac{-1}{x_1^2(x_2-x_1)}\\ \frac{-x_1}{x_2^2(x_2-x_1)}&\frac{1}{x_2^2(x_2-x_1)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{9}\\-\frac{1}{16}\end{bmatrix}. \qquad ④$$

比较③与④式,并约去 $\frac{1}{x_2-x_1}$ 得

$$\begin{bmatrix} x_2 & 1 \\ -x_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_2}{x_1^2} & -\frac{1}{x_1^2} \\ \frac{-x_1}{x_2^2} & \frac{1}{x_2^2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{16} \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases} -x_2+\frac{1}{4}=-\frac{x_2}{9x_1^2}+\frac{1}{16x_1^2}, & ⑤ \\ x_1-\frac{1}{4}=\frac{x_1}{9x_2^2}-\frac{1}{16x_2^2}. & ⑥ \end{cases}$$

$x_1\times$⑤$+x_2\times$⑥，并经整理得

$$x_2=\frac{16x_1-9}{36x_1-16}. \qquad ⑦$$

将它代入⑤式，经整理得

$$x_1^2-\frac{5}{7}x_1+\frac{17}{252}=0,$$

解得

$$x_1=\frac{15\pm\sqrt{106}}{42},$$

将它代入⑦式得

$$x_2=\frac{15\mp\sqrt{106}}{42}.$$

这样，可取

$$x_1=\frac{15-\sqrt{106}}{42},\quad x_2=\frac{15+\sqrt{106}}{42},$$

将它们代入③式得

$$A_1=-\frac{1}{2}-\frac{9\sqrt{106}}{424},\quad A_2=-\frac{1}{2}+\frac{9\sqrt{106}}{424}.$$

注 因要求区间$[a,b]$上的权函数$w(x)\geqslant0$，并且最多只能有有限个零点，因此区间$[0,1]$上取$w(x)=-\ln x$.

12.5.20 应用两点和三点 Gauss-Lagendre 求积公式计算积分

$$I=\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

并与积分准确值比较.

解 因 Gauss-Lagendre 求积公式中积分区间为$[-1,1]$，因此要把区间$[1,3]$变成$[-1,1]$. 为此，令

$$x=\frac{3-1}{2}t+\frac{1+3}{2}=t+2,$$

则

$$I=\int_1^3\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}t}{t+2}.$$

两点 Gauss-Lagendre 求积公式为

$$I=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t\approx I_2(f)=f\left(-\frac{1}{\sqrt3}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt3}\right),$$

于是

$$I\approx I_2(f)=\frac{1}{-\frac{1}{\sqrt3}+2}+\frac{1}{\frac{1}{\sqrt3}+2}=\frac{12}{11}.$$

三点 Gauss-Lagendre 求积公式为

$$I=\int_{-1}^1 f(t)\mathrm{d}t\approx I_3(f)$$
$$=\frac{1}{9}\left[5f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right)+8f(0)+5f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\right],$$

于是

$$I_3(f)=\frac{1}{9}\left[\frac{5}{-\sqrt{\frac{3}{5}}+2}+\frac{8}{2}+\frac{5}{\sqrt{\frac{3}{5}}+2}\right]=\frac{56}{51}.$$

$$|I-I_2(f)|=|\ln3-I_2(f)|<7.7032\times10^{-3},$$
$$|I-I_3(f)|=|\ln3-I_3(f)|<5.7308\times10^{-4}.$$

12.5.21 作一个合适的变换，化积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x^2}}{(1+x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$

为能应用 Gauss-Laguerre 求积公式来计算的积分.

解 能应用 Gauss-Laguerre 求积公式来计算的积分形式为$\int_0^{+\infty}f(t)e^{-t}\mathrm{d}t$，因此可令 $x=\sqrt{\frac{t}{3}}$，则 $\mathrm{d}x=\frac{1}{2\sqrt3}\frac{1}{\sqrt t}\mathrm{d}t$，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{e^{-3x^2}}{(1+x^2)^{1/2}}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2\sqrt3}\int_0^{+\infty}\frac{1}{\left(t\left(1+\frac{t}{3}\right)\right)^{1/2}}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

12.5.22 应用两点 Gauss-Цебышев 求积公式计算积分

$$I=\int_{-1}^1(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x,$$

并与积分准确值比较.

解 为应用两点 Gauss-Цебышев 求积公式，把积分改写成

$$I=\int_{-1}^1(1-x^2)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x.$$

于是，令 $f(x)=(1-x^2)$，则

$$I_2(f)=\frac{\pi}{2}\left[f\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\cos\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}\left[1-\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1-\left(-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2\right]$$
$$=\frac{\pi}{2}.$$

又

$$I=2\left(\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}\right)\Big|_0^1$$
$$=\arcsin1=\frac{\pi}{2}.$$

于是应用两点 Gauss-Цебышёв 求积公式得到积分的准确值. 这是因为此求积公式的代数准确度是 3, 而 $f(x)=1-x^2$ 是二次多项式, 故求积公式准确成立.

12.5.23 利用变换

$$x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$$

把积分

$$\int_a^b \frac{f(x)}{[(x-a)(b-x)]^{1/2}}\mathrm{d}x$$

化为适合于应用 Gauss-Цебышёв 求积公式的积分形式.

解 令 $x=\frac{b-a}{2}t+\frac{b+a}{2}$, 则 $\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\mathrm{d}t$, 且

$$\int_a^b \frac{f(x)}{[(x-a)(b-x)]^{1/2}}\mathrm{d}x$$
$$=\int_{-1}^1 \frac{f(x(t))}{(1-t^2)^{1/2}}\mathrm{d}t.$$

上式右端积分适合于应用 Gauss-Цебышёв 求积公式来计算.

12.5.24 作适当变换, 把积分

$$I=\int_0^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x(2-x)}}\mathrm{d}x$$

化为能应用 N 点 Gauss-Цебышёв 求积公式的积分. 当 N 为何值时, 能得到积分的准确值? 并计算它.

解 令

$$x=\frac{2-0}{2}t+\frac{0+2}{2}=t+1,$$

则

$$I=\int_{-1}^1 \frac{t^2+2t}{\sqrt{1-t^2}}\mathrm{d}t$$

能应用 Gauss-Цебышёв 求积公式. 由于 $f(t)=t^2+2t$ 是二次多项式, 因此应用两点以上 $(N\geqslant 2)$ Gauss-Цебышёв 求积公式可得到积分的准确值. 据两点 Gauss-Цебышёв 求积公式,

$$\begin{aligned}I&=\frac{\pi}{2}\left[f(\cos\frac{\pi}{4})+f(\cos\frac{3\pi}{4})\right]\\&=\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right.\\&\quad\left.+2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

§ 12.6 解初值问题的数值方法

解常微分方程初值问题

$$y'=f(t,y),$$
$$y(t_0)=y_0$$

的数值方法是把这种连续型问题化为一个离散型问题, 就是通过一定方法把它化为一个差分方程初值问题, 然后求差分方程的解作为微分方程的解在一些离散点处的近似值. 离散化方法通常有差商代替导数、Taylor 级数和数值积分等方法. 采用这些离散化方法, 得到解微分方程初值问题的一些基本的和常用的数值方法, 如 Euler 方法、修改的 Euler 方法、Runge-Kutta 方法和 Adams 方法等等. 对某些特殊的函数 $f(t,y)$, 数值方法的计算公式可以适当简化.

在数值方法中, 我们还要讨论数值解是否收敛于精确解和(绝对)数值稳定性问题.

12.6.1 假设用 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases}y'=10y,\\y(0)=1,\end{cases}$$

取 $h=\frac{1}{n}$. 证明数值解 $y_n\to y(1)=e^{10}\ (n\to\infty)$.

证明 据 Euler 方法,

$$\begin{aligned}y_n&=y_{n-1}+10hy_{n-1}\\&=(1+10h)y_{n-1}=\cdots=(1+10h)^n y_0\\&=(1+\frac{10}{n})^n.\end{aligned}$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}y_n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{10}{n})^n=e^{10}.$$

12.6.2 用 Euler 方法解初值问题

$$\begin{cases}y'=-y\\y(0)=2.\end{cases}$$

取步长 $h=0.25, 0.125$ 和 0.0625 计算 $y(1)$ 的近似值, 并与 $y(1)=\frac{2}{e}$ 进行比较.

解 据 Euler 方法

$$\begin{aligned}y_n&=y_{n-1}+h(-y_{n-1})\\&=(1-h)y_{n-1}=\cdots=(1-h)^n y_0.\end{aligned}$$

由于 $y_0=y(0)=2$, 因此

$$y_n=2(1-h)^n.$$

取 $h=0.25=\frac{1}{4}$, 得

$$\begin{aligned}y(1)\approx y_4&=2(1-\frac{1}{4})^4=2(\frac{3}{4})^4\\&=0.6328125,\end{aligned}$$
$$|y(1)-y_4|<0.10295.$$

取 $h=0.125=\frac{1}{8}$, 得

$$\begin{aligned}y(1)\approx y_8&=2(1-\frac{1}{8})^8=2(\frac{7}{8})^8\\&=0.687217831,\end{aligned}$$
$$|y(1)-y_8|<0.04855.$$

取 $h=0.0625=\frac{1}{16}$, 得

$$y(1)\approx y_{16}=2(1-\frac{1}{16})^{16}=2(\frac{15}{16})^{16}$$

$-0.71214826,$

$|y(1)-y_{16}|<0.02362.$

12.6.3 用 Euler 方法解初值问题

$$y' = \frac{2}{t}y + t^2e^t,$$
$$1\leqslant t\leqslant 2, y(1)=0,$$

取步长 $h=0.1$. 并把计算结果与精确解比较.

解 微分方程 $y'=\frac{2}{t}y+t^2e^t$ 是一阶线性微分方程,它的通解为

$$y = e^{\int \frac{2}{t}dt}\left(\int t^2e^te^{-\int\frac{2}{t}dt}dt + C\right)$$
$$= t^2\left(\int t^2e^t\cdot\frac{1}{t^2}dt + C\right)$$
$$= t^2\left(\int e^t dt + C\right),$$

即

$$y = t^2(e^t + C).$$

由初值条件 $t=1, y=0$ 得 $C=-e$. 因此初值问题的解为

$$y = t^2(e^t - e),$$

从而

$$y(t_n) = t_n^2(e^{t_n} - e).$$

据 Euler 方法

$$y_{n+1} = y_n + h\left(\frac{2}{t_n}y_n + t_n^2e^{t_n}\right),$$
$$y_0 = y(1) = 0,$$
$$t_n = t_0 + nh = 1 + 0.1n,$$

我们有

$$y_1 = y_0 + h\left(\frac{2}{t_0}y_0 + t_0^2e^{t_0}\right) = 0.271828182,$$

$$y_2 = y_1 + h\left(\frac{2}{t_1} + t_1^2e^{t_1}\right) = 0.684755578$$

等等. 计算结果见表 12.8.

表 12.8

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$y(t_n)-y_n$
0	1.0	0	0	0
1	1.1	0.271828182	0.345919876	0.074091694
2	1.2	0.684755578	0.866642536	0.181886958
3	1.3	1.276978344	1.607215079	0.330236735
4	1.4	2.093547688	2.620359552	0.526811864
5	1.5	3.187445121	3.967666295	0.780221174
6	1.6	4.620817844	5.720961527	1.100143683
7	1.7	6.466396375	7.963873479	1.497477104
8	1.8	8.809119685	10.79362466	1.984504975
9	1.9	11.74799654	14.32308154	2.575085
10	2.0	15.39823564	18.68309708	3.28486144

注 此例说明,当步长不是很小时,Euler 方法精确度不高. 步长取定后,步数愈多,误差愈大.

12.6.4 用修改 Euler 方法解初值问题

$$y' = \frac{1}{t}(y^2+y), 1\leqslant t\leqslant 3,$$
$$y(1) = -2,$$

取步长 $h=0.5$. 并把计算结果与精确解比较.

解 微分方程 $y'=\frac{1}{t}(y^2+y)$ 可以分离变量,即可把它写成

$$\frac{dy}{y^2+y} = \frac{1}{t}dt.$$

两边积分得

$$\ln\left|\frac{y}{y+1}\right| = \ln|Ct|$$

或

$$\frac{y}{y+1} = Ct.$$

由初值条件 $t=1, y=-2$ 得 $C=2$. 因此初值问题的解为

$$\frac{y}{y+1} = 2t,$$

或改写成

$$y = \frac{2t}{1-2t}.$$

从而有

$$y(t_n) = \frac{2t_n}{1-2t_n}, n = 0,1,2,\cdots$$

据修改的 Euler 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(t_n,y_n)$$
$$+ f(t_{n+1}, y_n + hf(t_n,y_n))],$$
$$y_0 = y(1) = -2,$$

现 $h=0.5$, $t_n = t_0 + hn = 1 + 0.5n$, $f(t_n,y_n) = \frac{1}{t_n}(y_n^2+y_n)$, 因此我们有

$$y_1 = y_0 + 0.25[f(t_0,y_0)$$
$$+ f(t_1, y_0 + 0.5f(t_0,y_0))]$$
$$= -2 + 0.25[f(1,-2)$$
$$+ f(1.5, -2+0.5f(1,-2))]$$
$$= -1.5.$$
$$y_2 = y_1 + 0.25[f(t_1,y_1)$$
$$+ f(t_2, y_1 + 0.5f(t_1,y_1))]$$
$$= -1.5 + 0.25[f(1.5,-1.5)$$
$$+ f(2, -1.5+0.5f(1.5,-1.5))]$$
$$= -1.3359375,$$

$y_3 = -1.252458658$, $y_4 = -1.202087254$.

计算结果和精确解的比较见表 12.9.

表 12.9

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$y(t_n)-y_n$
0	1.0	−2	2	0
1	1.5	−1.5	1.5	0
2	2.0	−1.3359375	−1.3333333	2.6042×10^{-3}
3	2.5	−1.252458658	−1.25	2.4588658×10^{-3}
4	3.0	−1.202087254	−1.2	2.087254×10^{-3}

12.6.5 用变形的 Euler 方法解初值问题

$$y' = e^t + y, 0\leqslant t\leqslant 1, y(0) = 1,$$

取 $h=0.2$.并把计算的结果与初值问题的精确解比较.

解 微分方程 $y'=e^t+y$ 是一阶线性方程,通解为

$$y = e^{\int dt}\left(\int e^t e^{-\int dt}dt + C\right)$$

$$= e^t(t+C).$$

由初值条件 $t=0,y=1$ 得 $C=1$.因此得到初值问题的解为

$$y = e^t(t+1),$$

从而

$$y(t_n) = e^{t_n}(t_n+1).$$

变形的 Euler 方法的计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}f(t_n,y_n)\right),$$

其中 $f(t_n,y_n)=e^{t_n}+y_n, t_0=0, y_0=y(0)=1, h=0.2, t_n=t_0+hn=0.2n$.于是

$$y_1 = 1+0.2f(0.1, 1+0.1f(0,1))$$
$$= 1.461034184,$$
$$y_2 = y_1+0.2f(0.3, y_1+0.1f(0.2, y_1))$$
$$= 2.076861521,$$

等等.计算结果同精确解的比较见表 12.10.

表 12.10

n	t_n	y_n	$y(t_n)$	$y(t_n)-y_n$
0	0	1	1	0
1	0.2	1.461034184	1.46568331	4.649126×10^{-3}
2	0.4	2.076861521	2.088554577	1.1693056×10^{-2}
3	0.6	2.893351804	2.91539008	2.2038276×10^{-2}
4	0.8	3.969082118	4.005973671	3.6891553×10^{-2}
5	1.0	5.378711625	5.436563657	5.7852032×10^{-2}

12.6.6 用古典四阶 Runge-Kutta 方法解初值问题

$$y' = \frac{1}{t}(y^2+y), 1\leqslant t\leqslant 3, y(1) = -2,$$

取 $h=0.5$.

解 令

$$f(t,y) = \frac{1}{t}(y^2+y).$$

古典四阶 Runge-Kutta 方法的计算公式为

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

其中

$$k_1 = f(t_n, y_n),$$
$$k_2 = f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}k_1\right),$$
$$k_3 = f\left(t_n+\frac{h}{2}, y_n+\frac{h}{2}k_2\right),$$
$$k_4 = f(t_{n+1}, y_n+hk_3),$$
$$t_n = t_0+nh.$$

现在,$t_0=1, y_0=y(t_0)=-2, h=0.5$.因此

$n=0$ 时,

$$k_1 = f(t_0,y_0) = f(1,-2) = 2,$$
$$k_2 = f\left(t_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{h}{2}k_1\right)$$
$$= f(1.25, -1.5) = 0.6,$$
$$k_3 = f\left(t_0+\frac{h}{2}, y_0+\frac{h}{2}k_2\right)$$
$$= f(1.25, -1.85) = 1.258,$$
$$k_4 = f(t_1, y_0+hk_3)$$
$$= f(1.5, -1.371) = 0.339094,$$
$$y_1 = y_0+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$
$$= -1.495408834.$$

$n=1$ 时,

$$k_1 = f(t_1, y_1)$$
$$= f(1.5, -1.495408834)$$
$$= 0.493892498,$$
$$k_2 = f\left(t_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{h}{2}k_1\right)$$
$$= f(1.75, -1.371935710)$$
$$= 0.291583932,$$
$$k_3 = f\left(t_1+\frac{h}{2}, y_1+\frac{h}{2}k_2\right)$$
$$= f(1.75, -1.422512851)$$
$$= 0.343445692,$$
$$k_4 = f(t_2, y_1+hk_3)$$
$$= f(2, -1.323685988)$$
$$= 0.21422925,$$
$$y_2 = y_1+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$
$$= -1.33056041.$$

$n=2$ 时,

$k_1=0.219915298$, $k_2=0.156234134$,

$k_3=0.167322322$, $k_4=0.123143396$,

$y_3=-1.248046115$.

$n=3$ 时,

$k_1=0.123829196$, $k_2=0.096078680$,

$k_3=0.099714288$, $k_4=0.079155946$,

$y_4=-1.198498525$.

注 此初值问题的精确解为

$$y(t_n)=\frac{2t_n}{1-2t_n},\ n=0,1,2,3,4$$

(见 12.6.4).

12.6.7 试写出古典四阶 Runge-Kutta 方法解初值问题 $y'(t)=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T, y(t_0)=y_0$ 的计算公式.它与数值积分公式有什么关系?

解 设 $h=\frac{T-t_0}{N}$(N 为偶数),解初值问题 $y'=f(t), t_0\leqslant t\leqslant T, y(t_0)=y_0$ 的古典四阶 Runge-Kutta 方法的计算公式中,

$$k_1=f(t_i),\ k_2=f(t_i+\frac{h}{2}),$$

$$k_3=f(t_i+\frac{h}{2}),\ k_4=f(t_i+h),$$

因此

$$\begin{aligned}y_{i+1}&=y_i+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\\&=y_i+\frac{h}{6}[f(t_i)+4f(t_i+\frac{h}{2})+f(t_i+h)],\\&\qquad i=0,1,\cdots,N-1.\end{aligned}$$

$t_i=t_0+ih, i=0,1,\cdots,N$.

在区间$[t_i,t_{i+1}]$上,我们有

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{6}[f(t_i)+4f(t_i+\frac{h}{2})+f(t_{i+1})],$$

即

$$\begin{aligned}&y_{i+1}-y_i\\&=\frac{1}{3}\times\frac{h}{2}[f(t_i)+4f(t_i+\frac{h}{2})+f(t_{i+1})],\\&\qquad i=0,1,\cdots,N-1.\end{aligned}$$

上式右端正是区间$[t_i,t_{i+1}]$上计算积分

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}}f(t)\mathrm{d}t$$

的 Simpson 求积公式.

在整个区间$[t_0,T]$上得到的 y_N-y_0 为用复合 Simpson 公式计算得积分$\int_{t_0}^{T}f(t)\mathrm{d}t$ 的近似值(N 为偶数).

12.6.8 试写出解初值问题 $y'=f(y), y(t_0)=y_0$ 的古典四阶 Runge-Kutta 方法的计算公式.并用它求初值问题

$$y'=e^{-y^2}, 0\leqslant t\leqslant 0.4,$$

$$y(0)=1.$$

取 $h=0.2$.

解 解初值问题 $y'=f(y), y(t_0)=y_0$ 的古典四阶 Runge-Kutta 方法的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),$$

$$n=0,1,\cdots,$$

其中

$$k_1=f(y_n),\ k_2=f(y_n+\frac{h}{2}k_1),$$

$$k_3=f(y_n+\frac{h}{2}k_2),\ k_4=f(y_n+hk_3).$$

现 $f(y)=e^{-y^2}, y_0=y(0)=1, h=0.2$.于是

$n=0$ 时,

$k_1=f(y_0)=e^{-1}=0.367879441$,

$k_2=f(y_0+\frac{h}{2}k_1)=0.341321906$,

$k_3=f(y_0+\frac{h}{2}k_2)=0.343204298$,

$k_4=f(y_0+hk_3)=0.319182165$,

$$\begin{aligned}y(0.2)\approx y_1&=y_0+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\\&=1.068459713.\end{aligned}$$

$n=1$ 时,

$k_1=f(y_1)=0.319305754$,

$k_2=f(y_1+\frac{h}{2}k_1)=0.35028965$,

$k_3=f(y_1+\frac{h}{2}k_2)=0.295913747$,

$k_4=f(y_1+hk_3)=0.280388952$,

$$\begin{aligned}y(0.4)\approx y_2&=y_1+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)\\&=1.131529763.\end{aligned}$$

12.6.9 试证明用古典四阶 Runge-Kutta 方程解初值问题 $y'=\lambda y, y(t_0)=y_0$ 的计算公式可写成

$$y_{n+1}=(1+h\lambda+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(\lambda h)^3+\frac{1}{24}(\lambda h)^4)y_n.$$

并就初值问题 $y'=-10y, y(0)=1$,求 $y(1)$的近似值(取 $h=0.1$).

解 令 $f(t,y)=\lambda y$,据古典四阶 Runge-Kutta 方法

$$k_1=\lambda y_n,$$

$$k_2=\lambda(y_n+\frac{h}{2}k_1)=(\lambda+\frac{h}{2}\lambda^2)y_n,$$

$$\begin{aligned}k_3&=\lambda(y_n+\frac{h}{2}k_2)\\&=(\lambda+\frac{h}{2}\lambda^2+\frac{1}{4}h^2\lambda^3)y_n,\end{aligned}$$

$$k_4=\lambda(y_n+hk_3)$$

$$=(\lambda+h\lambda^2+\frac{1}{2}h^2\lambda^3+\frac{1}{4}h^3\lambda^4)y_n.$$

因此

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4)$$

$$=(1+\lambda h+\frac{1}{2}(h\lambda)^2+\frac{1}{6}(h\lambda)^3+\frac{1}{24}(h\lambda)^4)y_n.$$

对初值问题 $y'=-10y, y(0)=1$，取 $h=0.1$，则 $\lambda h=-1$. 将它代入上式得

$$y(1)\approx y_{10}=\left(\frac{3}{8}\right)y_9=\left(\frac{3}{8}\right)^{10}y_0=\left(\frac{3}{8}\right)^{10}.$$

12.6.10 试用 Taylor 级数法(取 $p=3$)导出解初值问题

$$y'=\frac{t}{1+y^2}, y(0)=1$$

的数值方法.

解 据 Taylor 公式($p=3$)有

$$y(t+h)=y(t)+hy'(t)+\frac{1}{2}h^2y''(t)+\frac{1}{3!}h^3y'''(t)+\frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(\xi),$$

$$t<\xi<t+h.$$

于是

$$y(t+h)=y(t)+h\frac{1}{1+[y(t)]^2}-h^2\frac{y(t)}{[1+(y(t))^2]^3}+\frac{h^3}{3}\frac{5(y(t))^2-1}{[1+(y(t))^2]^5}+\frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(\xi).$$

截去 $\frac{1}{4!}h^4y^{(4)}(\xi)$，并以 t_n 替代 t 得到

$$y(t_n+h)\approx y(t_n)+h\left[\frac{1}{1+(y(t_n))^2}-\frac{hy(t_n)}{(1+(y(t_n))^2)^3}+\frac{h^2}{3}\frac{5(y(t_n))^2-1}{(1+(y(t_n))^2)^5}\right].$$

于是，我们得到解初值问题

$$y'=\frac{1}{1+y^2}, y(0)=1$$

的数值方法的计算公式

$$y_{n+1}=y_n+h\left[\frac{1}{1+y_n^2}-\frac{hy_n}{(1+y_n^2)^3}+\frac{h^2}{3}\frac{5y_n^2-1}{(1+y_n^2)^5}\right], n=0,1,2,\cdots,$$

$y_0=1$.

12.6.11 对初值问题

$$y'=\frac{1}{1+y^2}, 0\leqslant t\leqslant 1, y(0)=1$$

证明 Euler 方法收敛.

证明 设 $y(t_n)$ 是此初值问题的解在 t_n 处的值. 由 Taylor 公式，我们有

$$y(t_{n+1})=y(t_n)+h\frac{1}{1+(y(t_n))^2}+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n),$$

ξ_n 在 t_n 与 t_{n+1} 之间. 而据 Euler 方法，

$$y_{n+1}=y_n+h\frac{1}{1+y_n^2}.$$

令 $e_n=y(t_n)-y_n$，则由上面两式相减得

$$e_{n+1}=e_n+h\left[\frac{1}{1+(y(t_n))^2}-\frac{1}{1+y_n^2}\right]+\frac{h^2}{2}y''(\xi_n).$$

据中值定理，

$$\frac{1}{1+(y(t_n))^2}-\frac{1}{1+y_n^2}=\frac{-2\eta_n}{(1+\eta_n^2)^2}(y(t_n)-y_n),$$

η_n 在 $y(t_n)$ 与 y_n 之间. 令

$$L=\max_{(t,y)\in R}\left|\frac{-2y}{(1+y^2)^2}\right|=\max_{(t,y)\in R}\left|\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right|,$$

其中 R 表示矩形区域: $[0\leqslant t\leqslant 1; c\leqslant y\leqslant d]$，以及

$$M_2=\max_{t\in[0,1]}|y''(t)|=\max_{t\in[0,1]}\left|\frac{2y}{(1+y^2)^3}\right|,$$

由

$$|e_{n+1}|\leqslant(1+hL)|e_n|+\frac{h^2}{2}M_2$$

$$\leqslant(1+hL)^2|e_{n-1}|+\frac{h^2}{2}M_2[1+(1+Lh)]$$

$$\leqslant(1+hL)^{n+1}|e_0|+\frac{h^2}{2}M_2\sum_{j=0}^{n}(1+Lh)^j.$$

但是，$e_0=y(t_0)-y_0=0$，且

$$\sum_{j=0}^{n}(1+Lh)^j=\frac{(1+Lh)^{n+1}-1}{Lh},$$

因此

$$|e_{n+1}|\leqslant\frac{hM_2}{2L}[(1+Lh)^{n+1}-1].$$

又因 $h=\frac{1}{N}$，$n+1\leqslant N$，因此

$$(1+Lh)^{n+1}\leqslant e^{Lh(n+1)}\leqslant e^L.$$

这样，

$$|e_{n+1}|\leqslant\frac{hM_2}{2L}(e^L-1).$$

故 $h\to 0$ 时，$|e_{n+1}|\to 0$. 这说明 Euler 方法收敛.

注 容易求得初值问题 $y'=\frac{1}{1+y^2}$, $y(0)=1$ 的解为

$$t=\frac{y^3}{3}+y-\frac{4}{3}$$

因

$$\frac{dt}{dy}=y^2+1>0,$$

因此它是单调增函数，$t\in[0,1]$时，$1\leqslant y\leqslant 2$. 又

$$\frac{d\left(\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right)}{dy}=\frac{2(1-3y^2)}{(1+y^2)^3}<0,$$

因此$\frac{2y}{(1+y^2)^2}$关于y为单调减函数. 若令R为矩形区域: $[0,1;1,2]$, 则

$$L=\max_{(t,y)\in R}\left|\frac{2y}{(1+y^2)^2}\right|=\frac{1}{2}.$$

由于

$$|y''|=\frac{2y}{(1+y^2)^3},$$

$$\frac{d|y''|}{dy}=-2\frac{5y^2-1}{(1+y^2)^4}<0,\ y\in[1,2],$$

因此

$$M_2=\max_{t\in[0,1]}|y''(t)|=\frac{1}{4}.$$

故

$$|e_{n+1}|\leqslant\frac{hM_2}{2L}(e^L-1)=\frac{h}{4}(e^{\frac{1}{2}}-1).$$

12.6.12 试证明，用 Euler 方法解初值问题

$$y'=at+b,\ y(0)=0$$

得到的解为

$$y_n=\frac{1}{2}at_n^2+bt_n-\frac{1}{2}aht_n,$$

其中 $t_n=nh$，并证明方法是收敛的.

证明 据 Euler 方法，

$$\begin{aligned}
y_n&=y_{n-1}+h(at_{n-1}+b)\\
&=y_{n-2}+h(at_{n-2}+b)+h(at_{n-1}+b)\\
&=y_0+h(a(t_0+t_1+\cdots+t_{n-1})+nb)\\
&=h[a(h+2h+\cdots+(n-1)h)+nb]\\
&=h[a\frac{(n-1)n}{2}h+nb]\\
&=\frac{a}{2}n^2h^2-\frac{a}{2}nh^2+bnh\\
&=\frac{a}{2}t_n^2-\frac{a}{2}ht_n+bt_n.
\end{aligned}$$

由于初值问题的解为

$$y(t)=\frac{1}{2}at^2+bt,$$

从而

$$y(t_n)=\frac{1}{2}at_n^2+bt_n.$$

因此

$$y(t_n)-y_n=\frac{1}{2}aht_n.$$

当 $t=t_n$ 固定时，

$$\lim_{h\to 0}(y(t_n)-y_n)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{2}aht_n=0.$$

故 Euler 方法收敛.

12.6.13 用二步显式 Adams 方法求初值问题

$$y'=1-y,\ y(0)=0$$

的解 $y(t)$ 在 $t=1$ 的近似值(取 $h=0.2$, $y_1=0.181$)，并把计算结果与精确解进行比较.

解 二步显式 Adams 方法的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f_n-f_{n-1}).$$

就初值问题 $y'=1-y$, $y(0)=0$, 有

$$\begin{aligned}
y_{n+1}&=y_n+0.1(3-3y_n-1+y_{n-1})\\
&=y_n+0.1(2-3y_n+y_{n-1}),
\end{aligned}$$

其中 $y_0=0$, $y_1=0.181$. 计算结果见表 12.11.

表 12.11

n	t_n	y_n
0	0	0
1	0.2	0.181
2	0.4	0.3267
3	0.6	0.44679
4	0.8	0.545423
5	1.0	0.6264751

$$y(1)\approx y_5=0.6264751.$$

此初值问题的解为

$$y(t)=1-e^{-t},$$

因此

$$|y_5-y(1)|=|y_5-1+e^{-1}|<5.65\times 10^{-3}.$$

12.6.14 试用四步显式 Adams 方法和三步隐式 Adams 方法解初值问题

$$y'=-y+t+1,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$
$$y(0)=1,$$

取步长 $h=0.2$, 并把计算结果与精确解比较.

解 四步显式 Adams 方法的计算公式为

$$\begin{aligned}
y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}[&55f(t_n,y_n)-59f(t_{n-1},y_{n-1})\\
&+37f(t_{n-2},y_{n-2})-9f(t_{n-3},y_{n-3})].
\end{aligned}$$

由于 $f(x)=-y+t-1$, 且 $h=0.2$, $t_n=0.2n$, 因此

$$\begin{aligned}
y_{n+1}=\frac{1}{12}[&6.5y_n+5.9y_{n-1}-3.7y_{n-2}+0.9y_{n-3}\\
&+0.48n+2.64],\ n=3,4.
\end{aligned}$$

三步隐式 Adams 方法的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{24}\left[9f(t_{n+1},y_{n+1})+19f(t_n,y_n)-5f(t_{n-1},y_{n-1})+f(t_{n-2},y_{n-2})\right].$$

它可简化为

$$y_{n+1}=\frac{1}{12}\left[-0.9y_{n+1}+10.1y_n+0.5y_{n-1}-0.1y_{n-2}+0.48n+2.64\right],$$

$$n=2,3,4.$$

初值问题的解为

$$y=e^{-t}+t.$$

我们用古典四阶 Runge-Kutta 方法计算 Adams 方法的初始出发值:

$y_1=1.018733333$,误差 2.580×10^{-6},

$y_2=1.070324271$,误差 4.225×10^{-6},

$y_3=1.148816825$,误差 5.189×10^{-6}.

计算结果见表 12.12.

表 12.12

		四步显式 Adams		三步隐式 Adams	
n	t_n	y_n	误差	y_n	误差
3	0.6			1.148808888	2.748×10^{-6}
4	0.8	1.249409102	8.014×10^{-5}	1.249315863	1.310×10^{-5}
5	1.0	1.367986551	1.071×10^{-4}	1.367856193	2.325×10^{-5}

注 在三步隐式 Adams 方法中,计算 y_4,y_5 的公式右端的 y_4,y_5 由四步显式 Adams 方法得到.使用多步法时,极其重要的是要有足够精确的初始出发值.通常使用精度不低于多步法的单步法提供初始出发值.因此,我们用古典四阶 Runge-Kutta 方法来计算出发值.

12.6.15 应用变形的 Euler 方法解初值问题

$$y'=-10y,\ y(0)=y_0,$$

为保证绝对稳定性,问步长 h 应加什么限制?

解 变形的 Euler 方法的计算公式为

$$y_{n+1}=y_n+hf\left(t_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}hf(t_n,y_n)\right).$$

由于 $f(t,y)=-10y$,$y(0)=y_0$,因此

$$y_{n+1}=y_n-10hy_n+50h^2y_n$$
$$=(1-10h+50h^2)y_n.$$

设在 y_n 处有误差 δ_n.令 $\tilde{y}_n=y_n+\delta_n$,则

$$\tilde{y}_{n+1}=(1-10h+50h^2)\tilde{y}_n$$
$$=(1-10h+50h^2)y_n+(1-10h+50h^2)\delta_n,$$
$$\delta_{n+1}=\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=(1-10h+50h^2)\delta_n.$$

于是,若

$$|1-10h+50h^2|<1,$$

则

$$|\delta_{n+1}|<|\delta_n|,$$

变形的 Euler 方法便是绝对稳定的.由不等式

$$|1-10h+50h^2|<1$$

解得

$$0<h<\frac{1}{5}.$$

12.6.16 求后退 Euler 方法

$$y_{n+1}=y_n+hf(t_{n+1},y_{n+1})$$

的绝对稳定区间.

解 我们考虑用后退 Euler 方法解典型方程 $y'=\lambda y$,得到

$$y_{n+1}=y_n+\lambda hy_{n+1},$$

即

$$y_{n+1}=\frac{1}{1-\lambda h}y_n.$$

设在 y_n 处有误差 δ_n.令 $\tilde{y}_n=y_n+\delta_n$,则

$$\tilde{y}_{n+1}=\frac{1}{1-\lambda h}\tilde{y}_n=\frac{1}{1-\lambda h}y_n+\frac{1}{1-\lambda h}\delta_n.$$

于是

$$\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}=\frac{1}{1-\lambda h}(\tilde{y}_n-y_n).$$

因此 λh 满足 $\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right|<1$ 时,有 $|\tilde{y}_{n+1}-y_{n+1}|<|\tilde{y}_n-y_n|$,后退 Euler 方法是绝对稳定的.解不等式

$$\left|\frac{1}{1-\lambda h}\right|<1,$$

即

$$|1-\lambda h|>1$$

得

$$1-\lambda h<-1 \text{ 或 } 1-\lambda h>1.$$

即

$$\lambda h>2 \text{ 或 } \lambda h<0.$$

故绝对稳定区间为 $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

§12.7 误差估计

许多数学问题,通常得不到它的准确解.因此不得不用数值方法求其近似解.这就会产生误差.误差的主要来源有数据误差,如数学问题本身的数据有误差;离散误差,如用差分方程代替微分方程,数值积分中取 $I(f)\approx I_N(f)$;截断误差,如取函数 $f(x)$ 的 Taylor 展开式的有限项作为 $f(x)$ 的近似,迭代法中取有限次迭代得到的结果作为解的近似;以及由于数值方法不是精确求解,计算机的字长有限而产生舍入误差.为了选择一个有效的数值方法或者判断一个数值方法得到的计算解是否符合要求,就要作出误差估计.我们列举各类问题的例子来说明误差估计方法.

12.7.1 设方程组 $Ax=b$ 的系数矩阵 A 非奇

异，x^* 是此方程组的准确解，称

$$r = b - A(x^* + \delta x)$$

为与方程组 $Ax = b$ 的近似解 $x^* + \delta x$ 相应的残余向量. 试证明 Collatz 估计式，即当

$$\| I - (A + \delta A)^{-1}A \| < 1$$

时，有

$$\| \delta x \| \leqslant \frac{\|(A + \delta A)^{-1}\|}{1 - \| I - (A + \delta A)^{-1}A \|} \| r \|,$$

此处所考虑的矩阵范数与相应的向量范数相容，且 $\| I \| = 1$.

证明 据题意，$x^* + \delta x$ 是方程组

$$Ay = b - r$$

的准确解，即有等式

$$A(x^* + \delta x) = b - r.$$

因 A 非奇异，且 x^* 是 $Ax = b$ 的准确解，因此

$$x^* + \delta x = A^{-1}b - A^{-1}r,$$

从而有

$$\delta x = -A^{-1}r,$$

$$\| \delta x \| \leqslant \| A^{-1} \| \| r \|.$$

由于

$$A^{-1} = [I - (I - (A + \delta A)^{-1}A)]^{-1}(A + \delta A)^{-1},$$

因此

$$\| A^{-1} \| \leqslant \| [I - (I - (A + \delta A)^{-1}A)]^{-1} \| \cdot \|(A + \delta A)^{-1}\|.$$

又由假设 $\| I - (A + \delta A)^{-1}A \| < 1$，据 Banach 引理，有

$$\| [I - (I - (A + \delta A)^{-1}A] \|^{-1} \leqslant \frac{1}{1 - \| I - (A + \delta A)^{-1}A \|}.$$

于是有

$$\| \delta x \| \leqslant \| A^{-1} \| \| r \| \leqslant \frac{\|(A + \delta A)^{-1}\|}{1 - \| I - (A + \delta A)^{-1}A \|} \| r \|.$$

12.7.2 求解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 1, \\ 7x_1 + 10x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 2, \\ 6x_1 + 8x_2 + 10x_3 + 9x_4 = -1, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 3 \end{cases}$$

时，若系数矩阵中(1,1)位置元素有误差 10^{-3}，试估计得到的解会产生多大的误差？

解 设

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 6 & 5 \\ 7 & 10 & 8 & 7 \\ 6 & 8 & 10 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 10 \end{bmatrix},$$

则

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 68 & -41 & -17 & 10 \\ -41 & 25 & 10 & -6 \\ -17 & 10 & 5 & -3 \\ 10 & -6 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

令

$$\delta A = \begin{bmatrix} 10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

设 $b = [1, 2, -1, 3]^T$. 方程组 $Ax = b$ 的解 $x^* = [-1, 1, -1, 1]^T$. 设方程组 $(A + \delta A)x = b$ 的解为 $x^* + \delta x$，据误差估计式

$$\frac{\| x^* + \delta x - x^* \|_\infty}{\| x^* \|_\infty} = \frac{\| \delta x \|_\infty}{\| x^* \|_\infty}$$

$$\leqslant \frac{\mathrm{cond}(A)(\| \delta A \|_\infty / \| A \|_\infty)}{1 - \mathrm{cond}(A)(\| \delta A \|_\infty / \| A \|_\infty)},$$

其中 $\mathrm{cond}(A) = \| A \|_\infty \| A^{-1} \|_\infty$. 由于

$$\| A \|_\infty = 33, \| A^{-1} \|_\infty = 136,$$

$$\| \delta A \|_\infty = 10^{-3}, \| x \|_\infty = 1,$$

因此

$$\| \delta x \|_\infty \leqslant \frac{136 \times 10^{-3}}{1 - 136 \times 10^{-3}} = \frac{17}{108} < 0.15741.$$

注 从误差估计看出，系数矩阵 A 的(1,1)元素只有 10^{-3} 的误差，而解的误差 $\| \delta x \|$ 可能较大. 原因是 A 的条件数 $\mathrm{cond}(A) = 4488$，很大，此方程组本身是坏条件的. 假如 A 的(1,1)元素有误差 $\frac{1}{137}$，则 $\| \delta x \|_\infty \leqslant 136$. A 的行列式 $\det A = 1$. 若 A 的(1,1)元素有误差 t，则 $\det(A + \delta A) = 1 + 68t$. 取 $t = -\frac{1}{68}$ 时，矩阵 $A + \delta A$ 就是奇异的.

12.7.3 用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法解方程组

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 10 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 12 \\ 8 \\ 34 \end{bmatrix},$$

取初始近似 $x_0 = [0, 0, 0, 0]^T$. 若进行 5 次迭代，试估计所得的近似解的误差.

解 由于

$$B = I - D^{-1}A = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\| B \|_\infty = 0.6 < 1,$$

因此 Jacobi 和 Gauss-Seidel 迭代法都收敛. Jacobi 和 Gauss-seidel 迭代法迭代 5 次时，有误差估计

$$\|x_5 - x^*\|_\infty$$
$$\leqslant \frac{\|B\|_\infty^5}{1-\|B\|_\infty}\|x_1 - x^*\|_\infty,$$

其中 x^* 为准确解.

由 Jacobi 迭代得到 $x_1 = [-0.8, 1.2, 1.6, 3.4]^T$, $\|x_1 - x_0\|_\infty = 3.4$. 因此

$$\|x_5 - x^*\|_\infty \leqslant \frac{(0.6)^5}{1-0.6}\times 3.4 = 0.66096.$$

由 Gauss-Seidel 迭代得 $x_1 = [-0.8, 1.12, 1.644, 3.598]^T$, $\|x_1 - x_0\|_\infty = 3.598$. 因此

$$\|x_5 - x^*\|_\infty$$
$$\leqslant \frac{(0.6)^5}{1-0.6}\times 3.598 = 0.6994512.$$

注 这种误差估计比较粗糙. 实际上方程组的准确解 $x^* = [1,2,3,4]^T$. 用 Jacobi 迭代法迭代 5 次得到的近似解 x_5 的误差为

$$\|x_5 - x^*\|_\infty < 10^{-1}.$$

而用 Gauss-Seidel 迭代法迭代 5 次得到的近似解 x_5 的误差为

$$\|x_5 - x^*\|_\infty < 10^{-2}$$

12.7.4 用 Newton 法计算$\sqrt{3}$时, 取初始近似值 $x_0 = 1.5$. 问需要迭代多少次可使误差小于 10^{-5}?

解 Newton 法计算$\sqrt{3}$的迭代公式为

$$x_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + \frac{3}{x_{k-1}}), k = 1,2,\cdots.$$

取 $x_0 = 1.5$ 时, 得到

$$x_1 = \frac{1}{2}(1.5 + \frac{3}{1.5}) = 1.75.$$

令

$$g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{3}{x}),$$

则

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{3}{x^2}),$$

$$g''(x) = \frac{3}{x^3} > 0, x \in (0, +\infty).$$

由于$\sqrt{2} < \sqrt{3} < 2$, 因此

$$L = \max_{x\in[\sqrt{2},2]}|g'(x)|$$
$$= \max L(|g'(\sqrt{2})|, |g'(2)|)$$
$$= |g'(\sqrt{2})| = \frac{1}{4}.$$

据误差估计式, 有

$$|e_k| = |x_k - \sqrt{3}|$$
$$\leqslant \frac{L^k}{1-L}|x_1 - x_0| = \frac{1}{3\times 4^k}.$$

欲使 $|e_k| < 10^{-5}$, 只要

$$\frac{1}{3\times 4^k} < 10^{-5},$$

即

$$4^k > \frac{1}{3}\times 10^5,$$

因此

$$k > \frac{\lg(\frac{1}{3}\times 10^5)}{\lg 4} \approx 7.5.$$

取 $k = 8$, 即进行 8 次迭代得到$\sqrt{3}$的近似值的误差不超过 10^{-5}.

注 实际上取初始近似值 $x_0 = 1.5$ 时, 用 Newton 法迭代三次得到$\sqrt{3}$的近似值 $x_3 = 1.73205081$, 就有 $|x_3 - \sqrt{3}| < 10^{-8}$.

12.7.5 在物理学和工程中一个误差函数

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt$$

的函数值已造成函数表. 假设我们在 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = 5$ 之间用线性插值计算 $f(x)$ 的近似值, 即作线性插值多项式 $p_1(x)$, 取 $f(x) \approx p_1(x)$, $x \in (4,5)$. 问会有多大的误差?

解 据线性插值的误差估计式有

$$|f(x) - p_1(x)| \leqslant \frac{(5-4)^2}{8}M_2 = \frac{M_2}{8},$$

其中 $M_2 \geqslant \max_{x\in[4,5]}|f''(x)|$. 由于

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},$$

$$f''(x) = -\frac{4x}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2},$$

$$f'''(x) = \frac{4}{\sqrt{\pi}}(2x^2 - 1)e^{-x^2} > 0, x \in (4,5).$$

因此

$$\max_{x\in[4,5]}|f''(x)|$$
$$= \max(|f''(4)|, |f''(5)|)$$
$$= |f''(4)| < 1.01586\times 10^{-6} = M_2.$$

故得

$$|f(x) - p_1(x)| < 0.127\times 10^{-6}.$$

12.7.6 假定要造计算零价 Bessel 函数

$$I_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\sin t)dt$$

的等距数值表, 问如何选取表距 h, 使得利用这个数值表作线性插值时, 误差不超过 10^{-6}?

解 使用线性插值时, 有误差估计

$$|e_1(x)| \leqslant \frac{h^2}{8}|I_0''(x)| \leqslant \frac{h^2}{8}M_2.$$

欲使 $|e_1(x)| \leqslant 10^{-6}$, 只要

$$\frac{h^2}{8}M_2 \leqslant 10^{-6},$$

即

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\times 10^{-6}}{M_2}}.$$

现在

$$I_0''(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\cos(x\sin t)]''\sin^2 t\,\mathrm{d}t.$$

因 $t\in(0,\pi)$ 时,$\sin^2 t$ 不变号,应用推广的积分中值定理得

$$I_0''(x) = -\frac{1}{\pi}\cos(x\sin\eta)\int_0^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\cos(x\sin\eta),\ \eta\in(0,\pi).$$

因此 $|I_0''(x)|\leqslant\frac{1}{2}=M_2$. 故取

$$h \leqslant \sqrt{\frac{8\times 10^{-6}}{\frac{1}{2}}} = 4\times 10^{-3}$$

时,能使误差不超过 10^{-6}.

12.7.7 设函数 $f(x)$ 在 $[-h,h]$ 上充分可导,试推导求积公式

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)]$$

的余项.

解 从求积公式看出,以 $-h$,0 为基点作 Lagrange 线性插值多项式近似代替 $f(x)$,得

$$f(x) = \frac{x}{-h}f(-h)+\frac{x+h}{h}f(0)$$
$$+\frac{1}{2}f''(\xi)(x+h)x,$$

其中 $\min(x,-h)<\xi<\max(0,x)$. 这样

$$\int_0^h f(x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^h \frac{x}{-h}f(-h)\mathrm{d}x + \int_0^h \frac{x+h}{h}f(0)\mathrm{d}x$$
$$+\int_0^h \frac{1}{2}f''(\xi)(x+h)x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{h}{2}[3f(0)-f(-h)]$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^h f''(\xi)(x+h)x\mathrm{d}x.$$

因为 $(x+h)x$ 在 $(0,h)$ 中恒为正的以及假定 $f(x)$ 充分可导,因此,应用推广的积分中值定理得,求积公式的余项

$$R(x) = \frac{1}{2}\int_0^h f''(\xi)(x+h)x\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2}f''(\eta)\int_0^h x(x+h)\mathrm{d}x$$
$$= \frac{5}{12}f''(\eta)h^3,\ \eta\in(-h,h).$$

12.7.8 试导出两点 Gauss-Lagendre 求积公式

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(x)\mathrm{d}x$$
$$\simeq I_2(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

的余项.

解 两点 Gauss-Lagendre 求积公式的余项为

$$I(f)-I_2(f) = E_2(f) = C_2 f^{(4)}(\gamma),$$

γ 为 $[-1,1]$ 中的某一数,而求积公式的代数精确度为 3,它对 $f(x)=x^j$,有

$$I(x^j) = I_2(x^j),\ j=0,1,2,3.$$

现令 $f(x)=x^4$. 由于

$$I(x^4) = \int_{-1}^1 x^4\mathrm{d}x = \frac{2}{5},$$
$$I_2(x^4) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{9},$$
$$f^{(4)}(x) = 24,$$

因此

$$I(x^4)-I_2(x^4) = \frac{8}{45},$$
$$E_2(x^4) = 24C_2 = \frac{8}{45},$$

即得 $C_2=\frac{1}{135}$. 故两点 Gauss-Lagendre 求积公式的余项为

$$E_2(f) = \frac{1}{135}f^{(4)}(\gamma).$$

12.7.9 试给出计算积分

$$\int_{-1}^1 f(x)(1+x^2)\mathrm{d}x$$

的两点插值求积公式,使它的代数精确度为 3. 导出求积公式的余项.

解 据题意,欲导出代数精确度为 3 的两点插值求积公式,因而它是 Gauss 型求积公式. 设求积公式为

$$I_2(f) = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2),$$

则 x_1,x_2 是区间 $[-1,1]$ 上关于权函数 $w(x)=1+x^2$ 的二次直交多项式 $q_2(x)$ 的两个实根. 据直交多项式的递推关系式,由于 $q_{-1}(x)=0, q_0(x)=1$,以及

$$\alpha_0 = \int_{-1}^1 x[q_0(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x\Big/\int_{-1}^1[q_0(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 x(1+x^2)\mathrm{d}x\Big/\int_{-1}^1(1+x^2)\mathrm{d}x = 0,$$
$$\beta_0 = 0,$$

因此

$$q_1(x) = (x-\alpha_0)q_0(x)-\beta_0 q_{-1}(x) = x.$$

又因

$$\alpha_1 = \int_{-1}^1 x[q_1(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x\Big/\int_{-1}^1[q_1(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} x^3(1+x^2)\mathrm{d}x \Big/ \int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)\mathrm{d}x = 0,$$

$$\beta_1 = \frac{\int_{-1}^{1} x[q_1(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x}{\int_{-1}^{1}[q_0(x)]^2(1+x^2)\mathrm{d}x}$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2(1+x^2)\mathrm{d}x \Big/ \int_{-1}^{1}(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{2}{5},$$

因此

$$q_2(x) = (x-\alpha_1)q_1(x) - \beta_1 q_0(x) = x^2 - \frac{2}{5}.$$

二次直交多项式 $q_2(x) = x^2 - \frac{2}{5}$ 的两个根为 $-\sqrt{\frac{2}{5}}$ 和 $\sqrt{\frac{2}{5}}$. $I_2(f)$ 中的系数为

$$A_1 = \int_{-1}^{1} l_1(x)(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x-\sqrt{\frac{2}{5}}}{-\sqrt{\frac{2}{5}}-\sqrt{\frac{2}{5}}}(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3},$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} l_2(x)(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{x+\sqrt{\frac{2}{5}}}{\sqrt{\frac{2}{5}}+\sqrt{\frac{2}{5}}}(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}.$$

因此

$$I_2(f) = \frac{4}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right],$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1+x^2)\mathrm{d}x = I_2(f) + Cf^{(4)}(\gamma), \qquad ①$$

其中 γ 为 $(-1,1)$ 中的某一数.

令 $f(x) = x^4$,由 $f^{(4)}(x) = 24$,且

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1+x^2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^4(1+x^2)\mathrm{d}x = \frac{24}{35},$$

$$I_2(f) = \frac{4}{3}\left[\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^4 + \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)^4\right] = \frac{32}{75},$$

将它们代入①式,可得 $C = \frac{17}{1575}$. 故

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1+x^2)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{4}{3}\left[f\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right] + \frac{17}{1575}f^{(4)}(\gamma).$$

12.7.10 计算积分

$$I(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

时,把区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度为 h 的相等长度子区间. 在每个子区间上应用两点 Gauss 求积公式. 试建立复合 Gauss 求积公式和导出它的余项. 若用它来计算积分 $\int_2^8 \ln x\mathrm{d}x$ 时,为使误差不超过 10^{-6},试确定步长 h.

解 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个长度相等的子区间 $[x_i,x_{i+1}]$, $i=1,\cdots,n$, $x_i = a+(i-1)h$ $(i=1,\cdots,n+1)$, $h = \frac{b-a}{n}$. 为了在区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 上用两点 Gauss 求积公式,作变换

$$x = x(t) = \frac{h}{2}t + \frac{x_i + x_{i+1}}{2},$$

记 $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$,则

$$x = \frac{h}{2}t + x_{i+\frac{1}{2}}.$$

于是,据两点 Gauss 求积公式(参见 12.7.8),我们有

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{h}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{h}{2}t + x_{i+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{h}{2}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^5 \frac{1}{135}f^{(4)}(\zeta_i),$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[f\left(x_{i+\frac{1}{2}} - \frac{h}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_{i+\frac{1}{2}} + \frac{h}{2\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$+ \left(\frac{h}{2}\right)^5 \frac{1}{135}\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\zeta_i).$$

令 $M_4 = \max_{x\in[a,b]} |f^{(4)}(x)|$,则

$$\left|\frac{1}{135}\left(\frac{h}{2}\right)^5\sum_{i=1}^{n} f^{(4)}(\zeta_i)\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{135}\left(\frac{h}{2}\right)^5\sum_{i=1}^{n}|f^{(4)}(\zeta_i)|$$

$$\leqslant \frac{1}{135}\left(\frac{h}{2}\right)^5 nM_4 = \frac{h^4(b-a)}{4320}M_4.$$

若 $f(x) = \ln x$,则 $f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4}$,从而

$$M_4 = \max_{x\in[2,8]}|f^{(4)}(x)| = \left|\frac{-6}{2^4}\right| = \frac{3}{8}.$$

为使误差不超过 10^{-6},只要

$$\frac{h^4(8-2)}{4320} \times \frac{3}{8} \leqslant 10^{-6},$$

即

$$h^4 \leqslant 1920 \times 10^{-6} = 19.2 \times 10^{-4},$$

因此

$$h \leqslant \sqrt[4]{19.2} \times 10^{-1},$$

故可取 $h = 0.2$.

12.7.11 应用 Heun 方法

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}\left[f(t_n,y_n) + 3f\left(t_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3}hf(t_n,y_n)\right)\right]$$

解初值问题 $y' = -y$, $y(0) = y_0$ 时,问 h 应取何值

方能保证方法的绝对稳定性？

解　由于 $f(t,y)=-y$，据 Heun 方法

$$
\begin{aligned}
y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{4}\left[-y_n + 3\left(-\left(y_n + \frac{2}{3}h(-y_n)\right)\right)\right] \\
&= \left(1-h+\frac{1}{2}h^2\right)y_n.
\end{aligned}
$$

设在 y_n 处有误差 δ_n. 令 $\tilde{y}_n = y_n + \delta_n$，则

$$
\begin{aligned}
\tilde{y}_{n+1} &= \left(1-h+\frac{1}{2}h^2\right)\tilde{y}_n \\
&= \left(1-h+\frac{1}{2}h^2\right)y_n + \left(1-h+\frac{h^2}{2}\right)\delta_n,
\end{aligned}
$$

$$
\delta_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} - y_{n+1} = \left(1-h+\frac{1}{2}h^2\right)\delta_n.
$$

于是，若

$$
\left|1-h+\frac{1}{2}h^2\right| < 1,
$$

则 $\delta_{n+1} < \delta_n$，Heun 方法便是绝对稳定的. 解不等式 $\left|1-h+\frac{1}{2}h^2\right|<1$得

$$
0<h<2.
$$

第13篇 数学模型

数学模型要解决的问题不是纯理论的数学问题，而是实际问题，因此，解数学模型题的要求和方式与解纯数学题有很大的不同.本篇所举的都是国内外大学生数学模型竞赛的试题.数学模型竞赛，可以说是解决实际问题过程的一种模拟和演习，其宗旨是考察提高参赛学生利用数学知识及其它各方面的综合知识解决实际问题的能力.每次竞赛出两个考题，都是实际问题或有强烈实际应用背景的问题，每个参赛队选做其中一个题.竞赛过程为三天.每个参赛队由三名选手组成，在三天之内解决一个问题，写成一篇论文作为答卷.可以查资料，可以利用计算机及计算机软件.原题的条件不够的，可以通过查阅资料进行补充.原题的条件不明确的，要由自己做出假设加以明确.甚至原题的提法或资料有误的还要自己去纠正.在很多时候答案不是绝对的，允许不同方案甚至不同答数的存在，但要言之成理并经受实际的检验.这些特点显然非常不同于做普通的数学理论题.数学模型当然可以按其用到的数学知识分类，比如分为微分方程模型、概率统计模型、数据拟合模型、图论模型、规划模型等等.但本篇的内容不打算按这样的分类来安排，更不打算分门别类讲述这些知识及其在数学模型中的应用(对此，读者可以参阅有关的教科书及本书前面各篇的习题)，而主要通过一些例子，阐明用各数学模型来解决实际问题与纯理论的数学题相比的一些突出的特点.这些例子当然要用到各数学领域的知识，但我们不按这些知识来分类，而按思想方法，分论题来说明阐述这些特点.对每个试题做出解答时，我们参照了发表的获特等奖的优秀论文的解法，提供试题或评阅试卷的专家们的评阅意见，当然也有我自己的观点.我们在这里也不提供论文的标准格式和完整解答(更不提供标准答案)，而主要体现一些主要的思想，启发读者自己去动脑和动手.读者应当注意的是，在这项竞赛中(以及在解决实际问题时)，优秀是相对的、没有十全十美.因此，优秀论文可能被评阅论文的专家指出很多缺点，这并不奇怪.同样，我们在这里提供的想法和解法也不能说是最优的，读者完全可以加以完善和修改，或自己另辟蹊径.

以下的试题，主要取自两项竞赛：(1)从1985年开始的美国大学生数学建模竞赛(Mathematical Contest of Modeling)，以下简称MCM；(2)我国从1992年开始的全国大学生数学建模竞赛，以下简称CMCM.(请参见[1])

§13.1 模型的计算机实现

用数学模型解决实际问题，常常要处理大量数据，进行大量计算.这常常是手工计算所不能胜任的.因此，作为解决实际问题的一种模拟和演习，允许使用计算机，并且通常都需要使用计算机.但为了化成用计算机可以处理的问题，又必须先通过对问题本身的恰当的分析，将它化成适当的数学问题，也就是建立起数学模型.数学的分析和计算机的使用，两者必须有机地结合起来.

13.1.1 (MCM 1988-B题)两辆铁路平板车的装货问题.

有七种规格的集装箱要装到两辆铁路平板车上去.所有集装箱的宽和高是相同的，但厚度(t，以厘米计)及重量(W，以千克计)是不同的.下表给出了每种集装箱的厚度、重量及数量.每辆平板车有10.2米长的地方可用来装集装箱(像面包片那样)，载重为40吨.由于当地货运的限制，对C_5, C_6, C_7类的集装箱的总数有一个特别的限制：这类箱子在两辆车上所占的空间(厚度)的和不能超过302.7厘米.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
t(厘米)	48.7	52.0	61.3	72.0	48.7	52.0	64.0
W(千克)	2000	3000	1000	500	4000	2000	1000
件数	8	7	9	6	6	4	8

问：怎样装车可以使两辆平板车上剩下的空隙总和最小.

解答(参考[2])

一、必要的假设和问题的分析

首先作一些必要的假设使问题更明确.比如：假定题中所给的集装箱的厚度已经包括了两个集装箱紧挨在一起放置时两者之间不可避免的缝隙.这样才可能在将若干个集装箱依次并排放置时将它们的厚度之和作为总的厚度.

由于集装箱不可分割，所以在将集装箱装到平板车上时，一般都会出现这样的情况：已经装上去的集装箱厚度之和小于1020厘米(即10.2米)，因而还剩下一些空隙，但这空隙又不够大，装不下任何一个集装箱.因此原题要求设计一个适当的装车方案，使两辆车剩下的空隙的和最小.

将题中所列出的第 i 类集装箱 $C_i(i=1,2,\cdots,7)$ 的厚度记为 t_i，重量记为 W_i，总件数记为 n_i. 设第 i 类集装箱在第一辆车上装了 x_i 件，在第二辆车上装了 y_i 件，$i=1,2,\cdots,7$. 则原题用数学公式表达出来就是：

在约束条件

x_i, y_i 是非负整数且 $0\leqslant x_i+y_i\leqslant n_i$，对 $i=1,2,\cdots,7$，

$T_1=t_1x_1+\cdots+t_7x_7\leqslant 1020$，

$T_2=t_1y_1+\cdots+t_7y_7\leqslant 1020$，

$W_1x_1+\cdots+W_7x_7\leqslant 40000$，

$W_1y_1+\cdots+W_7y_7\leqslant 40000$，

$t_5(x_5+y_5)+t_6(x_6+y_6)+t_7(x_7+y_7)\leqslant 302.7$ ①

下，求目标函数

$$d=(1020-T_1)+(1020-T_2)$$

的最小值.

这显然是典型的整数规划问题，可以用一般的整数规划的解法(如分支定界法等). 也可以用计算机穷举的办法，对满足约束条件的 x_i, y_i 的所有的可能的值的组合一一算出目标函数的值，比较得出最优的方案. 但这样直接穷举的"蛮干"的方法，需要穷举的变量多达 14 个，穷举的次数太大. 注意本题数据的特点：C_5, C_6, C_7 三类集装箱允许的总厚度 302.7 厘米加上 C_1, C_2, C_3, C_4 四类不受限制的集装箱的总厚度 $n_1t_1+\cdots+n_4t_4=1737.3$ 厘米的总和等于 2040 厘米，恰是两辆车所能装下的总厚度. 因此，如果适当选择 C_5, C_6, C_7 三类受限制的集装箱的件数，使得它们的总厚度 T_{567} 不超过 302.7 厘米，但与 302.7 厘米的差 $\Delta=302.7-T_{567}$ 达到最小值 δ 厘米，则无论怎样装车，由于最后三类集装箱的厚度总和$\leqslant(302.7-d)$厘米，而前面三类集装箱的总厚度只有 1737.3 厘米，则两辆车所装的集装箱的总厚度至多只有 $1737.3+(302.7-\delta)=2040-\delta$(厘米)，即两辆车的空隙之和至少为 δ 厘米. 如果能将所选好的 C_5, C_6, C_7 三类集装箱(使 $\Delta=302.7-T_{567}$ 达到最小值)以及前四类集装箱的全部都设法分装在两辆平板车上，两辆车上的空隙之和就达到了最小值 d. 再对达到这个最小值的每个解检验一下它是否符合关于每辆车载重量$\leqslant$40 吨的要求，去掉不符合条件的解就行了.

二、算法的设计和实现

按前述分析，分两步进行：

第一步. 设 $z_i=x_i+y_i$ 是两辆车上第 i 类集装箱 C_i 的总件数，$i=5,6,7$. 求满足约束条件

$$0\leqslant z_i\leqslant n_i,\ i=5,6,7,$$

$$T_{567}=t_5z_5+t_6z_6+t_7z_7\leqslant 302.7$$

的整数 z_5, z_6, z_7 使目标函数 $\Delta(z_5,z_6,z_7)=302.7-T_{567}$ 达到最小值 d.

由于现在只有三个变量 z_5, z_6, z_7，这三个变量所有可能的组合的取值只有 $(n_5+1)(n_6+1)(n_7+1)=(6+1)\times(4+1)\times(8+1)=315$(种)，用计算机穷举可以很快得出答案. 事实上，条件 $T_{567}\leqslant 302.7$ 还迫使 $z_7\leqslant 302.7/t_7=302.7/64.0<5$，$z_7\leqslant 4$，而且也不需要对三个变量穷举，只要考虑后两个变量 $0\leqslant z_6, z_7\leqslant 4$(25 种组合)在条件 $t_6z_6+t_7z_7\leqslant 302.7$ 下的所有可能的组合（不到 20 种），对每一种组合取 z_5 等于 $(302.7-t_6z_6-t_7z_7)/t_5$ 的整数部分，$\Delta(z_5,z_6,z_7)$ 只由两个变量 z_6, z_7 决定. 甚至可以用手算得出答案：

当 $z_5=z_6=3, z_7=0$ 时，Δ 达到最小值 0.6 厘米.

第二步. 设法将 C_5, C_6 类集装箱各 3 件及前 4 类的全部集装箱分装在两辆平板车上. 我们已有 $z_7=x_7+y_7=0$，从而 $x_7=y_7=0$. 记 $m_i=n_i$(当 $i=1,2,3,4$)，$m_5=m_6=3$. 则对 $i=1,2,\cdots,6$，有 $x_i+y_i=m_i$，从而 $y_i=m_i-x_i$. 只要选 6 个独立变量 $0\leqslant x_i\leqslant m_i, i=1,2,\cdots,6$，使

$$\begin{aligned}&t_1x_1+\cdots+t_6x_6\leqslant 1020,\\&t_1(m_1-x_1)+\cdots+t_6(m_6-x_6)\leqslant 1020.\end{aligned} \quad ②$$

则两辆车的空隙总和自然就达到可能的最小值 0.6 厘米. 而且，由于

$$t_1m_1+\cdots+t_6m_6=2040-0.6,$$

上述约束条件②的第二式可以变成 $t_1x_1+\cdots+t_6x_6\geqslant 1020-0.6$，从而条件②变成

$$1020-0.6\leqslant t_1x_1+\cdots+t_6x_6\leqslant 1020.$$

再注意到 $t_1=t_5=48.7$ 厘米，$t_2=t_6=52.0$ 厘米，在只考虑厚度时可以将 C_1, C_5 算作同样的集装箱，C_2, C_6 算作同样的集装箱. 记 $X_1=x_1+x_5, M_1=m_1+m_5, X_2=x_2+x_6, M_2=m_2+m_6$，而对 $i=3,4$ 记 $X_i=x_i, M_i=m_i$. 则问题变成：求非负整数 $X_i\leqslant M_i, i=1,2,3,4$，使

$$1020-0.6\leqslant t_1X_1+\cdots+t_4X_4\leqslant 1020.$$

再对满足条件的解 (X_1,X_2,X_3,X_4)，将 X_1, X_2 分别拆成两个非负整数的和 $X_1=x_1+x_5, X_2=x_2+x_6$，使 $x_1\leqslant 8, x_2\leqslant 7, x_5\leqslant 3, x_6\leqslant 3$. 并去掉重量不符合要求的解，即要求两车载重量都$\leqslant$40 吨. 考虑到两车总共装运的各类集装箱的件数是已知的(即 $C_1\sim C_4$ 全部装运，C_5, C_6 各装 3 件)，从而其总重量 $\sum W=2\times 8+3\times 7+1\times 9+0.5\times 6+4\times 3+2\times 3=67$(吨)已知. 只要第一辆车装运的重量 $2x_1+3x_2+x_3+0.5x_4+4x_5+2x_6\leqslant 40$ 吨，并且$\geqslant 67-40=27$(吨)，则两辆车装运的重量都符合要求.

现在的变量只有四个：X_i，$i=1,2,3,4$，$M_i=11$，10，9，6，并且只须取其中三个为独立变量．为了减少可能的组合的数目，我们取 X_2,X_3,X_4 为独立变量，而取 X_1 等于 $1020-(t_2X_2+t_3X_3+t_4X_4)\geqslant 0$ 的整数部分．再考虑到：对每一组符合条件的解，将两辆车交换一下所装的集装箱又可以得到另一组解，这两组解应该认为事实上是相同的，只要取其中一组就行了．注意到 $M_3=9$ 是奇数，在刚才所说的可以相互交换得到的两组解中必有一组的 $X_3\leqslant 4$，另一组的 $X_3\geqslant 5$，从这两组解中只要取 $X_3\leqslant 4$ 的那组解就行了．这样，需要穷举的次数不超过 $(10+1)(4+1)(6+1)=385$，这对计算机来说是个很小的数字，很快就可算出答案．实际计算结果，共得到 30 组符合条件的解．我们就不在这里罗列它们了，读者不难自己把它们算出来．

三、讨论

按原题条件，所求得的 30 组解都符合要求，但也可以自己附加一些别的标准，从这些解中再选出按某个标准更优一些的解．比如可以要求 0.6 厘米的空隙在两辆车上平均分配，各为 0.3 厘米，或选取这样的解使所装运的总重量最大，等等．

本题的解法显然有特殊性，依赖于特殊的数据．特别是对 C_5,C_6,C_7 这三类集装箱，按所给的限制条件恰好可以简化运算，这样的巧合显然是为了变成考题而有意加工的，不一定符合实际．如果是更一般的情形，恐怕还得用更一般的解整数线性规划的方法．

13.1.2 (MCM 1986－B 题)应急设施的设置．

里奥兰翘镇迄今还没有自己的应急设施．1986 年该镇得到了建立两个应急设施的拨款．每个设施都把救护站、消防队和警察所合在一起．附图指出了 1985 年每个长方形街区发生应急事件的次数．在北边的 L 形状的区域是一个障碍，而在南边的长方形区域是一个有浅水池塘的公园，应急车辆驶过一条南北向的街道平均要花 15 秒，而通过一条东西向的街道平均花 20 秒．你的任务是确定这两个应急设施的位置，使得总响应时间最少．

N←－

<table>
<tr><td>5</td><td>2</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>0</td><td>3</td><td>2</td><td>4</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>3</td><td>4</td><td>1</td><td>3</td><td>0</td><td>4</td></tr>
<tr><td>4</td><td>3</td><td>3</td><td></td><td>3</td><td>4</td><td>0</td><td colspan="2">0</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">0</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3</td><td>3</td><td>2</td><td>5</td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>0</td><td>3</td><td>3</td></tr>
</table>

图 13.1 1985 年里奥兰翘每个长方形街区应急事件的数目

(Ⅰ)假定需求集中在每个街区的中心，而应急设施位于街角处．

(Ⅱ)假定需求是沿包围每个街区的街道上平均分布的，而应急设施可位于街道的任何地方．

解答(参考[3])

一、若干假设

1. 附图所标出的 1985 年每个长方形街区应急事件的次数具有典型代表性，能够反映该街区应急事件出现的概率的大小．

2. 应急车辆的响应时间只考虑在街道上行驶时间，其它因素(如转弯时间等)可以忽略不计．

3. 两个应急设施的功能完全相同．在应急事件出现时，只要从离事件发生地点最近的应急设施派出应急车辆即可．

4. 执行任何一次应急任务的车辆都从某一个应急设施出发，完成任务后回到原设施．不出现从一个应急事件点直接到另一事件点的情况．(这是因为，每一个地点发生事件的概率都很小，两个地点同时发生事故的概率就更是小得可以忽略不计．)

二、假定(Ⅰ)下的模型

在假定(Ⅰ)下，应急需求集中在每个街区中心．我们可以进一步假定应急车辆只要到达该街区四个街角中最近的一个，就认为到达了该街区，可以开始工作了．按假定(Ⅰ)，每个应急设施选在街角处，可能的位置只有 $6\times 11=66$(个)．两个应急设施的位置的可能的组合至多只有 $66\times 65/2=2145$(个)．这个数目对计算机来说并不大，可用计算机进行穷举，对每种组合一一算出所对应的总响应时间，依次比较得出最小的响应时间及对应的选址方案．具体算法是：

建立直角坐标系，以该镇的西北角为原点，从北到南为 X－轴正方向，从西到东为 Y－轴正方向，在南北、东西方向上分别以一个街区的长作为单位长．则街角的坐标 (X,Y) 是满足条件 $0\leqslant X\leqslant 10$，$0\leqslant Y\leqslant 5$ 的整数．而每个街区中心的坐标具有形式 $(i+0.5,j+0.5)$，其中 i,j 是满足条件：$0\leqslant i\leqslant 9$，$0\leqslant j\leqslant 4$ 的整数．如果不考虑障碍和水塘的影响，则应急车辆从设在 (X,Y) 点的应急设施到以 $(i+0.5,j+0.5)$ 为中心的街区的行驶时间等于

$$\begin{aligned} t(X,Y,i,j) &= 15(|X-i-0.5|-0.5) \\ &\quad +20(|Y-j-0.5|-0.5) \\ &= 15|X-(i+0.5)| \\ &\quad +20|Y-(j+0.5)|-17.5(\text{秒}) \end{aligned} \quad ①$$

记 $p(i,j)$ 为以 $(i+0.5,j+0.5)$ 为中心的街区的事故发生频率(即在图上该街区所标的数字)．如果应急设施设在 (X_1,Y_1)，(X_2,Y_2) 这两点，且总不妨设 $X_1\leqslant X_2$．则该设置方案的总响应时间为

$$T(X_1,Y_1,X_2,Y_2)$$
$$=\sum_{i=0}^{9}\sum_{j=0}^{4}p(i,j)\min\{t(X_1,Y_1,i,j),t(X_2,Y_2,i,j)\},$$

让 X_1 取遍 0～10，X_2 取遍 X_1～10，Y_1，Y_2 分别独立地取遍 0～4. 依次对四数组（X_1，Y_1，X_2，Y_2）的每一个值算出对应的总响应时间 $T(X_1, Y_1, X_2, Y_2)$. 通过比较可得出所有这些总响应时间的最小值及对应的四数组.

以上算法不难用计算机编程实现. 由于数组的个数不算多（只有两千多个），计算机可很快得出答案. 答案是：

两个应急设施分别设在点(2,3)，(6,3)时最优.

这是在不考虑 L 形障碍区域和水塘的影响的假定下得出的最优解. 但从这两个点到任何街区都可避开 L 形障碍区域和水塘，故它们也就是原题所需要的最优选址.

三、假定（Ⅱ）下的模型

在假定（Ⅱ）下，由于允许应急设施设在街道上任何位置，这就有无穷多种可能位置，不能直接用计算机穷举. 不过，我们可证明：应急设施仍应设在街角处，才能使总响应时间最少.

对已选定的两个应急设施的位置 A 和 B，我们先来看总响应时间怎样计算. 首先，我们将街道上所有的点的集合划分成两个责任区 V_A，V_B，分别由 A，B 进行救助：街道上的点 P 如果由 A 点去救助比由 B 点去救助的路程更近，就将 P 划进 A 的责任区 V_A，反之就划进 V_B. 为叙述方便，我们将每个长方形街区的四条边中的每一条称为一条"街道"，街道的一段称为"街段". 每个街道中属于 V_A 的点与属于 V_B 的点各组成一街段，分别称为 A 的或 B 的"责任段". 一条街道最多被分成两个责任段（也有可能整条街道属于同一个责任区，因而本身就是一个责任段）. 责任地段只有有限多条. 对每个应急设施，我们分别算出它的每个责任段的总响应时间，将这些总响应时间求和就得到这个设施的责任区的总响应时间. 将两个责任区各自的总响应时间相加就得到这一选址方案的总响应时间.

下面需要知道：任一设施 A 到它的一个责任段 EF 的总响应时间怎样计算. 按假定（Ⅱ），街区出现事故的频率平均分布在它周围的四条街道上，每条街段的事故发生频率与它的长度成正比. 将应急车辆每秒钟行驶的路程作为长度单位，则当街区事故频率为 p、街段的长度为 t 时，这一街段的事故频率为 $p \times t/70$，70 是街区的周长，即车辆绕街区行驶一周需 70 秒. 在大多数情况下，一条街段同时与两个街区相邻，两个街区的事故它都有份，它的事故频率应为 $(p+q) \times t/70$，p，q 分别是这两个街区的事故的总频率（即原题图上标出的数）. 当然可以用积分的方法. 即插入分点将责任段 EF 分成许多微小街段 δ_i，每一小段 δ_i 按其长度计算出它的事故发生频率 $p_i = k ds_i$，其中 ds_i 是 δ_i 的长度，k 是与 i 无关（但与 EF 的选取有关）的常数，取应急车辆从 A 到 δ_i 中任意一点的行驶时间 T_i 作为 A 到 δ_i 的时间，则微小街段 δ_i 的响应时间近似地等于 $T_i ds_i$. 对这些微小的响应时间求和即得到 EF 的总响应时间的近似值. 让每个 $ds_i \to 0$，求和变成求积分即可. 但在这里，问题比较简单，可以不用积分. 事实上，由于 EF 的每一小段的事故发生频率只与这一小段的长度有关，换句话说，频率密度是常数，只要求出 EF 到 A 的平均行驶时间 T，再乘以 EF 的总的事故频率就行了. 当 A 设在街角处时，平均行驶时间也就是 A 到 EF 的中点 M 的行驶时间 $T_{MA} = 15|X - m_1| + 20|Y - m_2|$ 秒，这里 (X, Y)，(m_1, m_2) 分别是 A，M 的坐标，而且不考虑障碍和水塘的影响. 将 T_{MA} 乘以 EF 的事故频率，就得到 EF 的总响应时间. 换句话说，就是将 EF 的事故频率 p_{EF} 集中到 M 点，认为 M 按频率 p_{EF} 发生事故，而 EF 的其它点都不发生事故. 这样不会改变 EF 的总响应时间，却便于计算. 如果应急设施 A 不是设在街角处，而是设在某条街道 CD 的两个端点 C，D 之间，则可能出现这样的情况：从 A 出发到 EF 中的某些点的最短救助路线应经由 C 点，而到另一些点去则应经由 D 点. 这时，平均时间就不等于 A 到 EF 中点 M 的时间 T_{AM}，而是比 T_{AM} 小. 在这样的情况下 EF 可以分成两段 EG，GF，从 A 到其中一段（比如 EG）上的所有的点的最短救助路线应经由 C 点，而到另一段（比如 GF）上的所有的点则应经由 D 点最近，而 G 点到 A 点则有两条最短救助路线分别经由 C 点和 D 点，这两条路线的路程相等. 分别计算 EG，GF 的事故发生频率 p_{EG}，p_{GF}，将这两个频率分别集中在 EG，GF 各自的中点 M_1，M_2，就可分别算出 EG，GF 的总响应时间，再将它们相加就得到 EF 的总响应时间.

下面证明：最短的总响应时间必可由设在街角处的应急设施 A，B 来实现. 假定已选择两个应急设施 A，B 的位置使总响应时间最短，且至少有一个设施（比如 A）不是设在街角处，而是设在某一条街道 CD 的两个端点 C，D 之间. 我们证明：可以把这个设施从 A 移到 C 或 D，使总响应时间不增加（而且很可能减少）. 证明的主要想法是：将设施迁移到街角后，它到某些街段缩短了一段路程，同时到另外某些街段则增加同样长的一段路程，如果路程缩短的那些街段的事故总频率大于路程增加的那些街段的事故总频率，则总响应时间缩短了，设施位置得到优化，说明原来的位置不是最优. 从 A 到它的责任区 V_A 的任一点 P，有两种可能的最短救助路线 AP：一种是沿 AC、经由 C 点到 P，另一种是沿 AD、经由 D 点到 P. 凡是 AP

属于前一种情况的，这样的点 P 组成的集合记作 U_C；凡是 AP 属于后一种情况，这样的点 P 组成的集合记作 U_D. 这样就将 A 的责任区按最短救助路线出发时的两个不同方向分成了两个区域（各由一些街段组成）. 比较 U_C，U_D 这两个区域各自的事故总频率 p_C，p_D 的大小. 如果 p_C 比 p_D 大，我们就将设施从 A 移到 C，向 U_C 靠拢（同时远离 U_D）；反之，当 p_D 比 p_C 大时，将设施由 A 迁到 D 去靠近 U_D（同时远离 U_C）；当 $p_C = p_D$ 时将设施任意迁到 C 或 D 都可以. 我们证明：将设施经过这样的迁移后，总响应时间只可能减少，不可能增加. 因此，假如迁移前的方案最优，迁移后一定还是最优（事实上，当 $p_C \neq p_D$ 时，迁移后的方案一定比原来更优，说明原来不可能最优）. 不妨先假定 $p_C \geqslant p_D$，设施从 A 迁到 C 点（$p_D > p_C$ 的情况同理）. 为了便于比较迁移前后的总响应时间的变化情况，我们先作下面两个假设（其中所说的“旧”是指设施迁移前的情况，而“新”则是指迁移后的情况）.

(1) 应急设施从 A 搬迁到 C 后，两个旧的责任区 V_A，V_B 先仍分别由 C 和 B 负责救助，暂不改变. 如果在这样不改变责任区的情形下都能证明总响应时间不增加，则再进一步合理调整 C，B 的责任区还可能进一步缩短（至少不会增加）总响应时间，更加说明搬迁方案的优越.

(2) 搬迁后从新设施 C 到旧区域 U_C 中的任何一点 P 的救助路线为：从 C 出发离开 CD 沿原先 A 的旧的救助路线到 P；从 C 到旧区域 U_D 的任何一点 P 的救助路线为：从 C 出发沿 CD（经过 A）到 D，再沿原先 A 的旧的救助路线到 P.

设应急车辆从 A 到 C 的行驶时间为 T. 则按(2)的行驶路线，U_C 的点到设施的路程都减少了 AC，行驶时间减少 T，总响应时间减少 p_CT；U_D 的点则相反，路程都增加 AC，行驶时间都增加 T，总响应时间增加 p_DT. 由于 $p_C \geqslant p_D$，$p_CT \geqslant p_DT$，总响应时间减少量超过（或等于）增加量，总的效果是减少了（或不改变）总响应时间，设施搬迁后的位置比原来更优，至少同样优.

假设(2)的路线不一定是最短路线. 如果再进一步选择最短路线，则还有可能进一步缩短新设施方案的总响应时间，更加说明其优越性. 假设(1)的责任区的划分不一定是合理的. 可以再进行调整，将街道上的每一点划给离它最近的设施的责任区，这样又可能再减少新设施方案的总响应时间，再一次增加它的优越程度. 这样就证明了新设施比旧设施更优，或同样优.

因此，在假定(Ⅱ)之下，仍可设应急设施在街角处. 于是与假定(Ⅰ)的情况类似地可用计算机穷举算出答案来. 对任一对候选的应急设施位置 $A(X_1, Y_1)$，$B(X_2, Y_2)$（坐标为整数），求出每一条街道 CD 的总响应时间，将所有街道的总响应时间相加就得到这一选址方案的总响应时间. 进行比较就可得出最短的总响应时间及对应的选址方案. CD 的总响应时间的计算方法已在前面讲过. 并且由于设施都设在街角处，只要将 CD 分成两个责任段（在多数情形下实际上只有一个责任段）CE，ED，将这两个责任段的事故频率分别集中在它们各自的中点计算就可以了.

计算结果：应急设施以设在点(2,3)，(7,3)时最优.

在假定(Ⅱ)之下本题还有一种更简单一些的近似算法. 按照这个算法，假定(Ⅱ)和假定(Ⅰ)下得出同样的答案. 我们将假定(Ⅰ)和假定(Ⅱ)进行比较. 首先，既然已经证明在假定(Ⅱ)下应急设施仍应设在街角处，这就与假定(Ⅰ)相同了. 只是对每一对候选位置 A，B 计算总响应时间时的算法不同. 我们考虑每一个街区和它周围的四条街道在两种不同假设下算出的总响应时间有何不同. 注意大部分街道都是街区的分界线，属于两个街区共同所有，分担两个街区的事故频率. 但我们可以把这样的街道顺着街道方向剖开成为两部分（左半部分和右半部分），认为每半部分各只属于一个街区，只承担这一个街区的事故发生频率，不用再将两个相邻街区的频率相加. 求出所有这些“半边街道”的总响应时间之和，也就是整个城镇的总响应时间了. 现在我们来看在假设(Ⅱ)下围成每个街区的四条边（“半边街道”）的总响应时间. 如果这四条边处在同一个责任区中，我们称这个街区为非边界街区. 在计算非边界街区的四条边的总响应时间时把它们所分担的事故频率各自集中在它们的中点. 相对的两条边分担的事故频率相等，在求它们的响应时间之和时可以用这两条边各自的中点到应急设施的行驶时间的平均值 T 乘上它们的事故频率之和（即每一个的事故频率的两倍）来计算. 但这个平均值 T 就是街区中心到应急设施的行驶时间（想象有穿过街区中心的东西方向和南北方向的道路供行驶）. 因此，可以把相对两边的事故频率集中在街区的中心，从而把整个街区的事故频率集中到街区中心. 设这个街区的中心 M 的坐标为$(i+0.5, j+0.5)$ ($0 \leqslant i \leqslant 9, 0 \leqslant j \leqslant 4$ 是整数)，而这个街区所属的应急设施 A 的坐标为(X, Y)，则这个街区周围的四条街道到 A 的平均行驶时间就等于

$$15|X-(i+0.5)|+20|Y-(j+0.5)| \text{ (秒)}. \quad ②$$

将这一结果与假定(Ⅰ)下从 $A(X, Y)$ 到这个街区救助的行驶时间 $t(X, Y, i, j)$（见前面①式）相比，只相差一个常数 17.5 秒. 换句话说，按假定(Ⅰ)只要求应

急车辆到达街区的最近的一个街角，而现在相当于要求车辆继续行驶到街区的中心(假定存在着可供车辆行驶的穿过该中心的东西、南北两条道路).如果在假定(Ⅰ)下也改为要求车辆行驶到街区中心，则每一种选址方案的总响应时间增加一个常数，最短的总响应时间也就增加一个常数，而方案的优劣不会因此改变，原来的最优方案仍然最优.但这样一来在两个假定下对非边界街区的总响应时间的计算方法就完全相同了.唯一有区别的地方是被责任区分界线一分为二的街区.在假定(Ⅰ)下是按该街区中心所在责任区将它整个划归这个责任区.按假定(Ⅱ)则将街区分成两部分，分别属于两个责任区，这样可使这个街区的总响应时间比按假定(Ⅰ)略小一些.在假定(Ⅱ)下，如果在计算时对所有的街区也按街区中心的归属将这个街区全部划入一个责任区，这样算出来的就是近似的总响应时间，而按这样的算法得出的最优解就是近似的最优.而这个近似的最优解必定就是假定(Ⅰ)下的最优解(2,3),(6,3)，无须重新计算.在假定(Ⅱ)下精确计算这个方案的总响应时间，与前面用计算机求出的真正的最优方案(2,3),(7,3)相比较，只相差1秒钟.考虑到原始数据(街区的事故次数)本身并不能百分之百的代表今后的事故频率，1秒钟的误差应说是在允许范围，并不能说明用近似算法算出的解就一定不是最优，在实际中完全可以当最优解来用.更何况，即使在假定(Ⅱ)下，如果采用方案(2,3),(6,3)，则每个街区都整个的在一个责任区中，没有哪个街区被分割开来分别划进两个责任区；而方案(2,3),(7,3)却将5个街区分割开了，这给应急设施进行救助带来不方便.权衡利弊，我们得出下面的结论：

按假定(Ⅱ)，方案(2,3),(7,3)比方案(2,3),(6,3)的总响应时间约少1秒钟(分别为5121.4秒、5122.5秒).但考虑到实施救助的方便起见，宁肯采用方案(2,3),(6,3).

四、算法的进一步讨论

以上算法是建立在用计算机进行穷举的基础上，可以称为：算法1.计算机穷举法.

穷举的方法当然可以说是笨办法，它对一些明显不优的位置仍要一个个去验证，这实在显得太笨.但穷举的办法也有一个好处，那就是：不用再证明最后答案的最优性.这个答案已经和所有的别的可能方案都比较过了，比它们都优，最优性已经得到证明.本题的一个特点是需要穷举的可能方案的数目不大，用计算机进行穷举所花的时间很少，因而是可行的，也是优越的.但假如考虑更一般的城市，街道数目较多，且应急设施的个数也可能不止两个，而是更多，则计算机所花时间将会大大增加.能不能有一种非穷举的有效算法呢？可以考虑采用如下的方法.

算法2.逐次改近法：它的基本想法都是先从一个初始的方案(不一定最优)出发，逐步加以改进，直到得到一个不能再改进的方案，就有可能是最优方案.具体做法是：

先任选两个位置(坐标为整数的点)A_0,B_0作为应急设施A,B的最初的选址.比如可选$A_0(0,0)$,$B_0(10,5)$，即选这个城镇的西北角、东南角分别为A_0,B_0(当然也可一开始凭直觉将A_0,B_0选得更好一些，更快地达到最后结果).试考虑将设施A向东、西、南或北四个方向各移动一个街区(即将A的横坐标或纵坐标增加或减少一个单位)，B暂时不动，看总响应时间如何变化(当然，如果在某个方向上已经不可能移动，即已经处于城镇的边界，就不考虑这一方向上的移动).如果向某一方向上的移动引起总响应时间的增加(或不变)，这一方向不是好方向，再换另一个方向试试.如果向某一方向的移动引起总响应时间的减少，这一方向就是好方向，将A向这一方向移动一个街区(从A_0移到A_1)，以A,B的新位置作为出发点重新向各个方向试探.如果A向四个方向的移动都不能缩短总响应时间，则将A固定不动，再试B的移动，直到B向四个方向上的移动都不能缩短总响应时间，再考虑A的移动.这样将A,B两个设施轮流移动以优化方案，直到不能再优化为止：即A,B中任何一个向任何方向的移动都不能使总响应时间再缩短.这时这个优化过程就收敛了，我们可以认为找到了最优方案.如果从我们刚才所说的两点(0,0),(10,5)出发，采用假定(Ⅰ)的算法，进行逐次改进，最后就收敛于(2,3),(6,3)这两点.已经知道它确实是最优方案.

能否证明：从任意两点出发都收敛于最优方案？从数学理论上讲，这样的逐次改进的方法达到的是"极好值点"，而不一定是"最好值点".即：将总响应时间T作为两个应急设施位置的四个坐标X_1,Y_1,X_2,Y_2的函数，用逐次改进法所得到的是函数的极小值点，但不一定是最小值点.如果能证明这个函数只有一个极小值点，它也就是最小值点.但这一般是不成立的，即使成立也是很难证明的.比如本题，如果从(4,0),(4,5)这两点出发，就会发现最后收敛于(4,1),(5,4)这两个位置，不是最优方案(按假定(Ⅰ)的算法，方案(4,1),(5,4)的总响应时间是3355秒，而方案(2,3),(6,3)的总响应时间只有3215秒).但将这两点向周围作的任何试探都不能加以改进.事实上，本题有两个极小值点(2,3),(6,3)和(4,1),(5,4).由于选择的初始位置不同，逐次改进后分别收敛于这两组位置.初始的两个点的横坐标比较接近的，

容易收敛于后一组解.反之一般收敛于前一组解.对本题来说,由于城镇的形状是东西方向窄,南北方向宽,从直观上讲,一开始选的两个点应该一个偏北,另一个偏南,这样才使每个责任区中相距最远的点的距离都不大,总响应时间才不会太大.如果选的两个位置呈东西方向排列(即横坐标很接近),如上面所说的(4,0),(4,5)两点,则两个责任区都是南北方向上的长条,责任区西北端的点和东南端的点相距很远,总响应时间显然不会小,因而一开始就是不合理的,收敛过程也就容易误入歧途.

由此可见,上述的逐次改进法在理论上是不完善的,但在实用上却是可行的.只要最初的两个位置不是选得太不合理,实际上仍能得出最优解.当然也可以从不同的初始位置出发多试几次,如果经过收敛得到若干个不同的解,再通过比较从这些解中选出一个最优的就行了.不过,就本题来说,由于计算机穷举法计算量本来就不大,在理论上又没有漏洞.逐次改进法虽然可以提高一些速度,但仍然不能用手工计算,反而带来理论上的缺陷,似乎还是得不偿失,反而不如计算机穷举法来得干净利落.

五、最优解满足的条件

上述的逐次改进法,试图改进计算机穷举法不管好坏一概穷举的"笨拙"之处,但它自己也同样笨拙.一开始的初始位置随便乱选,也是不管好坏;试探的时候不管怎样只走一步,而不敢向好的方向大踏步的改进.能不能将它再改进一下,使得能比较容易判断方案的好坏,很快地得到最好的方案?为此,先来考察一下最优解到底应该满足什么样的条件.即使不能得出充分条件,那怕得出一些操作方便的必要条件也行.

说起来也简单,最优解满足的必要且充分的条件是:用任何方法都不能将它改进.当然,"任何方法"是难以操作的:谁也不好担保它所找到的方法已经穷尽了所有的方法.但是,如果找到了一种方法将它改进,就足以说明它不是最优.因此,最优解满足的必要条件是:用你所找到的方法不能将它改进.这一条件比较好操作,前提是你必须尽量找到一些方法,使得用你的方法不能改进的解很少.下面就给出一个这样的方法.

先将问题简化,改为:只设一个应急设施.此时存在非穷举的有效算法如下.这个方法有些类似于求质点系统的力学重心(但只是类似而并不完全相同),叙述方便,不妨称为"重心法".

设应急设施的最优位置在 A 点,其坐标为(X,Y).我们的基本想法是:如果 A 点北面(即横坐标$\leqslant X$)的街区与南面(即横坐标$>X$)的街区的事故发生的频率悬殊很大,则将设施向事故较多的那个方向移动就可以减少总响应时间,从而将方案改进.因此,最优位置 A 应使得它的北面和南面发生事故的频率尽可能相等.换句话说,北面发生的事故应当尽可能接近整个城镇事故总数的一半.同理,它的东面和西面的事故频率也应该尽可能相等,两面发生的事故应尽可能接近事故总数的一半.

为此,对横坐标 $0\leqslant x\leqslant 10$ 的每个整数值定义 x -事故频率函数 $p(x)$,它等于所有满足条件 $i\leqslant x$ 的街区(i,j)的事故频率的总和.这里,我们用每个街区东南角的坐标(i,j)来代表这个街区.这样,$p(x)$ 是单调递增函数.$p(0)=0$.当 $x\geqslant 1$ 时 $p(x)-p(x-1)$就是横坐标等于 x 的 5 个街区的事故频率之和.因此 $p(x)-p(x-1)\geqslant 0$.而且,对本题的数据而言,$p(x)-p(x-1)>0$ 对 $x=1,2,\cdots,9,10$ 成立,$p(x)$是严格单调递增函数.$P=p(10)$就是整个城镇的事故频率总和,本题中 $P=109$.按照上面的说法,最优解 $A(X,Y)$的横坐标 X 应使$|p(X)-P/2|$最小.这样的 X 最多只有两个(分别大于和小于 $P/2$).就本题的数据而言,计算得

$i=0\sim 10$ 时 $p(i)$依次为 0,15,28,38,47,65,78,85,92,99,109.

$p(4)=47$ 最接近 $P/2=54.5$,故 $X=4$.同样,对纵坐标 $0\leqslant y\leqslant 5$ 的每个整数值定义 $q(x)$为满足条件 $j\leqslant y$ 的街区(i,j)的事故频率总和,本题为

$j=0\sim 5$ 时 $q(j)$依次为 0,25,40,57,83,109.

同样找出 Y 使$|q(Y)-P/2|$最小,得 $Y=3$ ($q(3)=57$ 与 $109/2=54.5$ 最接近).因此,如果不考虑障碍和水塘的影响,则一个设施的最优位置为(4,3).这个位置恰好不受障碍和水塘的影响,确实就是所求的最优位置.

下面证明这个方法的正确性.最优位置显然存在.只要证明其它的位置都可以改进,不是最优,则(X,Y)当然就是最优了.考虑应急设施的任一其它位置(x,y).先考察 M 的横坐标 x.过 M 作一条东西方向的直线 l_1 将城镇分为两部分.将事故频率小的那一部分称为 U_1,事故频率较大的那部分称为 U_2(两部分事故频率相等时,任意指定一个为 U_1,另一个为 U_2,不过本题并不出现这一情况).考虑将 M 向 U_2 那一侧移动一个街区到 N 点(纵坐标仍为 y,横坐标变为 $x+1$ 或 $x-1$).过 N 点再作一条东西方向的直线 l_2(与 l_1 平行),l_2 将事故较多的这一区域 U_2 再分成两部分,其中 l_1,l_2 之间的那部分记为 U_0,另一部分记为 V_1.我们来看 U_1,U_0,V_1 这三部分到设施的路程的变化及由此引起的总响应时间的变化.结果是

U_0 中的街区到新旧设施的路程不变,对总响应时间没有影响.

U_1 中的街区到新设施 N 的路程比到旧设施 M 增加 1 个街区,引起总响应时间增加 $15\times p_1$ 秒,p_1 是 U_1 的事故总频率.

V_1 中的街区到新设施 N 的路程比到 M 减少 1 个街区,引起总响应时间减少 $15\times p_2$ 秒,p_2 是 V_1 的事故总频率.

容易看出,只要 $p_2>p_1$,则移动设施的总效果是总响应时间减少,方案优化,原方案不优.

如果设 U_0 的事故总频率为 p_0.则按照原来的假设,U_2(由 U_0,V_1 组成)中的事故频率 p_2+p_0 大于 U_1 中的事故频率 p_1.如果 p_2+p_0 比 p_1 大得太多,以至于从 p_2+p_0 中减去 p_0 后所得的 p_2 仍大于 p_1,原来的方案就不是最优了.我们证明:当 $x\neq X$ 时一定是这样.先设 $p(X)\leqslant P/2$(比如本题 $p(4)=47<54.5$,就是这样).如果 $x<X$,则 $x+1\leqslant X$,$p(x)<p(x+1)\leqslant p(X)\leqslant P/2$,$p(x)<P/2\leqslant P-p(x+1)$.考虑将设施从旧位置$(x,y)$移动到新位置$(x+1,y)$,则 $p(x)$就是旧设施北面的事故总数,$P-p(x+1)$就是新设施南面的事故总数,既然 $p(x)<P-p(x+1)$,新设施就比旧设施优,旧设施不优.再考虑 $x>X+1$ 的情形,则 $p(X)\leqslant P/2\leqslant p(X+1)\leqslant p(x-1)<p(x)$,$p(x-1)\geqslant P/2>P-p(x)$,将设施从$(x,y)$移到$(x-1,y)$可以优化.除 $x<X$,$x>X+1$ 外,$x\neq X$ 的唯一可能是 $x=X+1$,$p(X)\leqslant P/2\leqslant p(X+1)=p(x)$.如果 $p(X+1)-P/2=P/2-p(X)$,则 $p(X+1)$与 $p(X)$同样接近 $P/2$,$X+1$ 也可以取来作为 X,$(X+1,Y)$与(X,Y)同样优.假设不是这样的情况(如本题),则 $p(X+1)-P/2>P/2-p(X)$,$p(X)<P-p(X+1)$,即(X,y)北面的事故比$(X+1,y)$南面的事故多,将设施从(x,y)(即$(X+1,y)$)向北移到(X,y)可以引起优化.这就在 $p(X)\leqslant P/2$ 的情况下证明了:当 $x\neq X$ 时(x,y)一定不是最优.对 $p(X)>P/2$ 的情况,同理可以证明同样的结论.同理还可证明:当 $y\neq Y$ 时(x,y)也一定不是最优.结果只剩下(X,Y)才有可能最优,因面也就确实是最优.

现在回到原题条件,考虑设两个应急设施的情形.假如按前面所说的算法 2,指定了两个点 A_0,B_0 作为应急设施的候选位置.这一组位置是否已经最优了?如果不是,有什么方法较快地改进它,而不要一步一步地试探着前进?我们可以先按设施的两个候选位置 A_0,B_0 划定它们的责任区 V_{A_0},V_{B_0}的范围,将每个街区(按假定(Ⅰ))或街道上的两个点(按假定(Ⅱ))划给离它最近的设施的责任区.到两个设施的路程相等的,任意划给一个责任区.然后,在每个责任区内可按前述的"重心法"各找到一个的最佳位置 A_1、B_1.用 A_1,B_1 分别取代 A_0、B_0,即使在不调整责任区的情形下已经能够说明方案被优化了.如果 A_1、B_1 的位置与 A_0,B_0 不完全相同,责任区也可能发生变化.按设施的新位置 A_1,B_1 重新划定责任区.在两个新的责任区范围内再一次用"重心法"各选一个新位置.这样,调整责任区范围和在每个责任区内寻找最优位置交替进行,每进行一次都使方案得到优化.这个过程必定收敛(因为方案不能无穷地优化下去),即设施位置及责任区范围都不能再改变.这就达到了这个方法所能找到的最优方案.

以上方法可以作为算法 3,仍称为"重心法"(因为它是在两个责任区内分别用重心法求最优位置).而且,在实际计算时,可以颠倒一下顺序:第一步不先选两点位置,而先按某种方案将所有街区划分成两个区域,作为最初的责任区,再在责任区内分别用重心法求出两个点.

重心法通常都比算法 2 的一步一步改进要快,很快就可收敛到一组不能再改进的方案.收敛后是否就得到了最优解?与算法 2 的情形类似,仍然不能肯定,很可能与一开始划定责任区范围的方式有关.

使用重心法时,还应当考虑到这样的情况:如果不改变责任区,A_i,B_i 在各自的责任区内当然是最优位置,一移动就会使总响应时间增加,设增加量为 t_1.但如果移动后引起责任区改变,则调整责任区可再使总响应时间减少某个 t_2.假如移动的方式选得适当,使 $t_2>t_1$,则方案仍然获得改进.这说明,在用重心法达到收敛后,还应该用算法 2 再试探一下,看是否还有改进的余地.不过,不需要具体计算出总响应时间,只要考察总响应时间的增减情况就行了.由于试探时设施只移动一步(一个街区的长度),引起的责任区改变只有半步,t_2 一般都很小,实际上很难使 $t_2>t_1$.要使 t_1 比 t_2 更小,将责任区内已经达到最优位置(X,Y)的点的坐标 X(或 Y)变动为 $X\pm1$(或 $Y\pm1$)时应尽量使频率函数值 $p(X\pm1)$(或 $q(Y\pm1)$)仍很接近 $P_1/2$,这里 P_1 是该责任区内的事故频率总数.但要 $p(X)-P_1/2$ 与 $p(X+1)-P_1/2$(或 $q(Y)-P_1/2$ 与 $q(Y\pm1)-P_1/2$)都很接近于 0,只有它们符号相反时才有可能.也就是说:只考虑(X,Y)向事故多的方向上的移动.

下面用重心法来计算本题的最优解.由于收敛速度很快,可以用手算实现.只要第一步的责任区划分得不是太不合理,求出的也的确是最优解.

先在假定(Ⅰ)下计算：

考虑到城镇是长方形，很自然先用沿东西方向的直线 $x=5$ 将城镇分成同样大的南、北两块(各含 25 个街区) U_1，V_1. 这样做的理由是：可以使每块内部点与点之间的最远路程不会太长，有利于降低总响应时间. 分别计算这两块的频率函数得

北块：x - 频率函数值：0,15,28,38,47,65；

y - 频率函数值：0,16,23,36,50,65.

南块：x - 频率函数值：0,13,20,27,34,44；

y - 频率函数值：0,9,17,21,33,44.

北块 x - 频率函数值最接近 $65/2=32.5$ 的是 28，y - 频率函数值最接近 $65/2=32.5$ 的是 36. 最优点 A_1 的坐标为(2,3)；同理可算出南块的最优点为 $B_1(7,3)$.

再划分 A_1、B_1 的责任区：横坐标为 4 的四个街区的中心离 A_1，B_1 的路程相等，划给 A_1 或 B_1 都可以. 如果划给 A_1，则就是原来的责任区方案 U_1，V_1，设施位置不能再优化. 考虑将它们划给 B_1. 则新的责任区 U_2，V_2 分别由北面的 20 个街区(横坐标≤3 的)和南面的 30 个街区(横坐标≥4 的)组成. 对这两块重新选最优点. U_2 的最优点仍是 $A_1(2,3)$，V_2 的最优点变成 $B_2(6,3)$.

A_1，B_2 的责任区仍只能分为 U_2，V_2，各自的最优点当然还是 A_1，B_2. 已不能再优化. 将它们作为最终答案.(与算法 1 的结果比较知它们确实是最优.)

再在假定(Ⅱ)下计算：

第一步：仍先平均分成南、北两个相等的区域 U_1，V_1，最优点仍分别为 $A_1(2,3)$，$B_1(7,3)$.

第二步：A_1，B_1 的责任区的边界为直线 $x=4.5$，它将横坐标为 4 的 5 个街区都沿东西方向剖为两半，各属于一个责任区，这些街区的事故频率总和 18 也被这两半所平分，各占 9. 仍将 A_1 的责任区记为 U_2，B_1 的责任区记为 V_2. 则 U_2 的 x - 频率函数值为：0,15,28,38,47,56，$p(2)=28$ 最接近 $56/2=28$，故最优点的横坐标仍为 2；y - 频率函数值为：0，17.5，26.5，41，56.5，74，最接近 $74/2=37$ 的是 $q(3)=41$，最优点纵坐标为 3. 即 U_2 的最优点仍为 $A_1(2,3)$. 同理可计算出 V_2 的最优点也还是 $B_1(7,3)$. 即过程已经收敛.

第三步：考虑用算法 2(逐次改进法)能否再改进方案. 比如，考虑 $B_1(7,3)$能否移动. 在原来的责任区 V_2 内，B_1 的北面的事故总频率为 29，南面为 24，考虑向北面移动一个街区. 但这样移动使南面的街区的街区的行驶时间都增加了 15 秒，总响应时间增加 15×24 秒，而北面的街区中有 5 个(它们的事故总频率为 7)的行驶时间没有改变，而另外有事故频率为 22 的街区的行驶时间减少了 15 秒，引起总响应时间减少 15×22 秒. 减少量＜增加量，是得不偿失，但二者的差别 $15\times(24-22)=30$ 秒已经不大，看看能否通过责任区的调整得到补偿. 由于设施从 $B_1(7,3)$移到 $B_2(6,3)$，责任区边界由 $x=4.5$ 变为 $x=4$，向北移了半个街区，造成了 5 个"半街区"从 A_1 的责任区变为 B_2 的责任区. 这 5 个"半街区"的北面一侧的街道调整前后的行驶时间相同，不引起总响应时间的改变. 剩下只有东西两侧偏北的半条街道的行驶时间减少了 7.5 秒(南北方向半个街区的行驶时间)，而这些街段占街区周长的 $(15/2\times2)/70=3/14$(70 秒为车辆绕街区行驶一周的时间)，故事故总频率为 $18\times3/14$(18 是这 5 个街区事故频率之和). 故责任区的调整引起总响应时间减少 $7.5\times18\times3/14\approx28.9$ 秒，尚差 1.1 秒才能补偿前面所增加的 30 秒总响应时间. 因此，将第二个设施从(7,3)移到(6,3)反而引起总响应时间增加 1.1 秒，还是以不移动为优(注意：这 1.1 秒之差就是前面计算机穷举法时用假定(Ⅰ)下的结果近似地作为假定(Ⅱ)下的结果造成的差别).

如果在一开始不用直线 $x=5$ 来分割责任区，而用直线 $x=4$. 则第一步得到的方案就是(2,3)，(6,3). 类似的分析可得出：在假设(Ⅱ)下，如果将(6,3)向南移动一个街区，可使总响应时间减少 1.1 秒，从而方案得到优化.

如果一开始用南北方向的直线 $y=2.5$ 来分割责任区，将城镇分成同样大小的东、西两块. 在假定(Ⅰ)下用重心法计算的结果，最后收敛于(4,1)，(5,4)两点，恰好就是逐次改进法所得到的另一对极值点. 但这样的责任区分割方案显然是不可取的.

§13.2 数据的处理

用数学模型解决实际问题，常常需要处理大量数据. 由于问题的不同，处理数据的方式也不同. 有的是求一个连续的函数去对所给的离散的数据进行拟合或回归；有的是先根据问题本身的机制建立起数学公式，再利用所给数据求出公式中的待定参数. 所给的数据来自实际测量或经验，当然都是近似值，不可避免有误差. 而我们要求出的函数或公式也必然只能近似地反映客观规律. 因此，进行误差分析和稳定性分析是重要的.

13.2.1 (MCM 1991 - A 题)估计水箱流量.

某些州的用水管理机构需估计公众用水速度(单位是加仑/小时)和每日总用水量的数据. 许多地方没有测量流入或流出市政水箱流量的设备而只能测量

水箱中的水位(误差不超过 0.5%).当水箱水位低于某最低水位 L 时,水泵抽水灌入水箱直到水位达到最高水位 H 为止.但是也无法测量水泵的流量.因此,在水泵开动时无法立即将水箱中的水位和用水量联系起来,这种情形一天发生一次或二次,每次约为二小时.

估计所有时刻,包括水泵抽水期间流出水箱的流量 $f(t)$,并估计一天总用水量,附表给出了某一天某小镇的真实数据.

表中以秒为单位给出距开始测量的时间,水位单位是百分之一英尺.例如:3316 秒之后水箱中的水深是 31.10 英尺.水箱是高 40 英尺、直径为 57 英尺的正圆柱.通常水泵当水位落到 27 英尺以下时开始抽水,而当水位回升至 35.5 英尺时,水泵停止工作.

时间(秒)	0	3316	6635	10619	13937	17921	21240	25223	28543
水位(英尺)	3175	3110	3054	2994	2947	2892	2850	2795	2752
32284	35923	39332	39435	43118	46636	49953	53936	57254	60574
2697	水泵开动	水泵开动	3550	3445	3350	3260	3167	3087	3012
64554	68535	71854	75020	79254	82649	85948	89953	93270	
2927	2842	2767	2697	水泵开动	水泵开动	3475	3397	3340	

解答(主要参考获特等奖的三篇论文[4])

一、问题的分析

由于水箱的横截面积 $S = 57^2 \times \pi/4 = 2552.76$(平方英尺)是已知的常数,由每个时刻 t 水箱里的水位 $h(t)$ 就可以算出此时水箱里水的体积 $V(t) = S \times h(t)$,也可以认为 $h(t)$ 就代表 $V(t)$(仅相差常数因子).除了水泵抽水的两段时间外,其余三段未抽水的时间里水位的降低完全是由用水引起的.这三段时间里 $V(t)$ 的变化速度(即 $-V(t)$ 对时间的导数 $-V'(t) = -Sh'(t)$)就是水箱流量函数 $f(t)$.而未抽水的每段时间的最初水量减去最后水量(即:最初水位减去最后水位再乘以 S)就是这段时间里的总用水量.因此,可以根据这三段时间内已知的 $h(t)$ 的数据 $h(t_i)$,用拟合或插值的方法去分别得出每段时间里的函数 $h(t)$,进而得出这三段时间内各自的 $f(t)$.问题是在水泵抽水期间的情况不知道.但可以假设:水箱流量函数 $f(t)$(也就是用水量函数)的值与是否抽水无关.因此可以由已得到的在未抽水期间的 $f(t)$ 的值拟合或回归出整个 $f(t)$ 的函数,得到水泵抽水期间 $f(t)$ 的值.

二、由 $V(t) = Sh(t)$ 的数据拟合流量函数 $f(t)$

1. 未抽水期间流量函数值的计算:

这也就是由 $V(t)$ 的若干已知的值 $V(t_i) = Sh(t_i)$($i = 1, 2, \cdots, n$, $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$)来计算导函数 $-V'(t)$ 的值.这在数学分析中有许多现成的算法.

最简单、也最粗糙的办法是:在每段小区间 $[t_i, t_{i+1}]$ 内把 $-V(t)$ 当作线性函数,即把已知点 $(t_i, -V(t_i))$,$(t_{i+1}, -V(t_{i+1}))$ 连成直线段来作为 $V(t)$ 在这个小区间内的函数图象,该直线段的斜率 $\frac{V(t_i) - V(t_{i+1})}{t_{i+1} - t_i}$(即差商)作为 $f(t_i)$ 或作为 $f(\frac{t_i + t_{i+1}}{2})$ 的值.

更精确一些的办法是:用多项式插值的方法,将函数 $-V(t)$ 的图象上每一个已知点 $(t_i, -V(t_i))$ 与它附近的几个已知点 $(t_{i\pm k}, -V(t_{i+k}))$ 作综合考虑,找一条最低次数的多项式曲线去经过这几个点,将这条多项式曲线在 $(t_i, -V(t_i))$ 点的切线斜率作为 $f(t_i)$ 的值.比如,考虑过点 $(t_{i\pm k}, -V(t_{i+k}))$($k = 0, \pm 1, \pm 2$)的多项式曲线就得到(Newton-Gregory 公式):

$$f(t_i) = \frac{-V_{i+2} + 8V_{i+1} - 8V_{i-1} + V_{i-2}}{12(t_{i+1} - t_i)}$$

(这是对整个大区间内部的点用"两边插值法".对整个区间的左端点或右端点,t_{i-k} 或 t_{i+k} 可能不存在,这时可类似地用"向前插值法"或"向后插值法"等.)

2. 由已有的若干 $f(t_i)$ 的值得出 $f(t)$ 的曲线.

由于假设了 $f(t)$ 的变化规律与水泵是否抽水无关,可以由已得到的 $y_i = f(t_i)$(都是在水泵不抽水期间的)的值,用拟合或插值的方法得出整个 $f(t)$ 的曲线.

有的优秀论文采取用多项式拟合的办法.即:找一个指定次数的多项式函数曲线去尽可能接近所有的已知点 (t_i, y_i),来作为 $f(t)$ 的图象."尽可能接近"的标准是:在已知点的误差的平方和 $\sum_i (f(t_i) - y_i)$ 最小.这就是最小二乘法.

但是,这样用一个统一的多项式函数来拟合的方法有一个严重缺陷:如果所用的多项式的次数太低,自由参数(多项式的系数)太少,拟合的效果就会太差,误差很大.如果为了减少误差而采用高次多项式,

则稳定性太差,即某一点的值的微小变化(已知值的微小误差)可能造成离这点很远的点的值的巨大变化(巨大误差),这是不合理的.因为,按常识,任一点的值的变化,只应该对离它较近的点的值有较大影响,而离它越远影响越小.

一篇优秀论文采取了更合理的办法:用三次样条函数插值.即在每个小区间$[t_i, t_{i+1}]$内用三次曲线连接两个已知点(t_i, y_i),(t_{i+1}, y_{i+1}),使两个相邻区间的图象的连接处的一、二阶导数都相等.

三、求总用水量

假定已经将$f(t)$用整体的或分段的多项式函数来表达,则很容易求它的定积分来得到总用水量.并且还可算出水泵每次抽水的总量及抽水速度.三篇优秀论文算出的结果分别是:338000,326600和330000(单位:加仑).

四、误差分析

本题给出了水箱水位测量误差≤0.5%.对于测量来说,这误差不能算大.由于总水位为27英尺~35.5英尺,0.5%的误差在0.15英尺左右,不超过0.18英尺.如果在未抽水的二段时间里分别用水箱里的最初水位减去最终水位再乘上S来计算总用水量,误差也不大.但问题在于,在前述优秀论文的解法中利用了相邻两个已知水位之差$\Delta h = h(t_{i+1}) - h(t_i)$来计算$f(t_i)$的值.而$\Delta h$很小,一般在0.5英尺左右,而原始数据$h(t_{i+1})$,$h(t_i)$的误差0.15英尺与$\Delta h \approx 0.5$英尺相比就算是相当大了(更何况$h(t_{i+1}) - h(t_i)$可能达到0.15英尺×2=0.3英尺),可能引起$f(t_i)$的值的很大的相对误差.再用这样的$f(t_i)$来拟合得出流量函数$f(t)$和计算用水总量,误差就可能相当大并且难以估计.因此,就这一点来说,专家评阅意见对三篇优秀论文都不满意.

题目的提供者Yves Nievergelt自己提出了一个拟合方法,可以在一定程度上避免这一缺陷.他的方法是:不先用相邻数据计算$f(t_i)$,而先假定流量函数为某种类型的函数$f(c_0, c_1, \cdots, c_n, t)$,其中$c_0, c_1, \cdots, c_n$是决定这一函数的待定参数,并选取$f$的类型使$f$对$c_0, c_1, \cdots, c_n$是线性关系(比如取$f$是$t$的多项式,$c_0, c_1, \cdots, c_n$是多项式的系数).由$f(c_0, c_1, \cdots, c_n, t)$的表达式可以算出积分值

$$\int_{t_i}^{t_{i+k}} f(c_0, c_1, \cdots, c_n, t)\mathrm{d}t = V(t_i) - V(t_{i+k}),$$

依赖于$c_0, c_1, \cdots, c_n$的线性表达式.注意上面的等式右边$V(t_i) - V(t_{i+k})$是已知的.用最小二乘法选择参数$c_0, c_1, \cdots, c_n$的值.使上面的等式的左边与右边(已知数)的误差的平方和最小.k可以选得稍大使t_i与t_{i+k}距离远一些,以减少由相邻数据引起的积累误差.

13.2.2 (CMCM 1992-A题)施肥效果分析.

某地区作物生长所需的营养素主要是氮(N)、磷(P)、钾(K).某作物研究所在该地区对土豆与生菜作了一定数量的实验,实验结果如下列表格所示,其中ha表示公顷,t表示吨,kg表示千克.当一个营养素的施肥量变化时,总将另二个营养素的施肥量保持在第七个水平上,如对土豆产量关于N的施肥量作实验时,P与K的施肥量分别取为196kg/ha与372kg/ha.

试分析施肥量与产量之间关系,并对所得结果从应用价值与如何改进等方面作出估价.

土豆:

N 施肥量(kg/ha)	N 产量(t/ha)	P 施肥量(kg/ha)	P 产量(t/ha)	K 施肥量(kg/ha)	K 产量(t/ha)
0	15.18	0	33.46	0	18.98
34	21.36	24	32.47	47	27.35
67	25.72	49	36.06	93	34.86
101	32.29	73	37.96	140	38.52
135	34.03	98	41.04	186	38.44
202	39.45	147	40.09	279	37.73
259	43.15	196	41.26	372	38.43
336	43.46	245	42.17	465	43.87
404	40.83	294	40.36	558	42.77
471	30.75	342	42.73	651	46.22

生菜:

N 施肥量(kg/ha)	N 产量(t/ha)	P 施肥量(kg/ha)	P 产量(t/ha)	K 施肥量(kg/ha)	K 产量(t/ha)
0	11.02	0	6.39	0	15.75
28	12.70	49	9.48	47	16.76
56	14.56	98	12.46	93	16.89
84	16.27	147	14.33	140	16.24
112	17.75	196	17.10	186	17.56
168	22.59	294	21.94	279	19.20
224	21.63	391	22.64	372	17.97
280	19.34	489	21.43	465	15.84
336	16.12	587	22.07	558	20.11
392	14.11	685	24.53	651	19.40

解答(主要参考中国科技大学获特等奖队的论文)

一、合理的假设

1. 假设试验是在该地区平均气候及水分供应的情况下进行的,施肥量与产量之间满足一定的规律.

2. 试验是在相同盐碱性土壤中进行的,土壤本身已含有一定数量的氮、磷、钾肥,即具有一定的天然

肥力.

3. 各次试验所用的肥料都一样,农作物的品种也是一样的.

4. 试验者具有相同的劳动水平及耕作程序.

5. 各次试验是相互独立的,互不影响.

二、一元效应模型

由于在考察每一种肥料效应时,总将另二种肥料的施用量保持在一个固定水平上,因而可以将每组试验看成单因素试验. 为此,先根据每组试验的结果,找到反映施肥量与产量关系的一元效应方程和曲线.

农业规律表明,施肥量与产量之间满足如下的关系:开始施肥时,作物产量随施肥量的增加而迅速增加;施肥量达到一定程度后,作物产量随施肥量的增加而缓慢上升;施肥量超过一定限度后,产量反而随施肥量的增加而下降.

对于产量 W 与施肥量 x 的关系,农学家有以下的理论:

(1) Nicklas 和 Miller 的理论:设最高产量时施肥量为 h,边际产量(即产量 W 对施肥量 x 的导数) $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x$ 与 $h-x$ 成正比. 即

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}x = c(h-x),$$

$$\text{从而 } W = b_0 + b_1x + b_2x^2,$$

其中 b_0, b_1, b_2 为参数,c 为比例因子. $W=W(x)$的图象是抛物线.

(2) 米采利西学说:设最高产量为 A,边际产量 $\mathrm{d}W/\mathrm{d}x$ 与 $A-W$ 成正比.

$$\mathrm{d}W/\mathrm{d}x = c(A-W),$$

$$\text{从而 } W = A(1-\exp(-cx)).$$

图象呈指数曲线. 考虑到土壤本身具有一定的天然肥力,上式修正为

$$W = A(1-\exp(-cx+b)).$$

(3) 英国科学家博伊德发现,将施肥对象按施肥水平分组,则各组的效应曲线呈直线形式.

上述农学家的理论显然不一致. 对此应作这样的理解:这些理论适合于不同的情况(不同的作物、土壤条件等). 我们先根据实测的试验数据作出图象,看它大致与那种情形比较吻合,选择曲线的类型. 再运用回归的方法(最小二乘法)求出待定的参数的值. 还要通过验证误差(方差分析)看对曲线类型的最初假设是否比较合乎实际. 如果偏差太大,还应修正原来的假设或进一步分析是否有别的因素应考虑.

分别以氮、磷、钾肥的施用量为自变量,土豆、生菜的产量为因变量,按本题所提供的实测数据进行描点作图(图 13.2~图 13.7). 从中看出,氮肥对于作物的贡献大致呈抛物线形式,磷肥的贡献大致呈分段直线形式. 钾肥对土豆而言大致呈指数关系,对生菜而言,随着施肥量的增加,产量的上升幅度很小.

因此,我们对各不同情况分别建立不同的模型如下. 其中 W(t/ha)代表产量,n, p, k(kg/ha)分别代表氮、磷、钾肥的施用量.

(1) 氮肥对两种作物的产量的影响呈抛物线形式. 因此,运用二次多项式回归,即选择 $W=b_0+b_1x+b_2x^2$ 的系数 b_0, b_1, b_2 使 $W=W(x)$在已知点的偏差平方和最小. 得

氮肥对土豆的效应方程:

$$W = 14.74 + 0.197n - 0.00034n^2.$$

氮肥对生菜的效应方程:

$$W = 10.23 + 0.101n - 0.00024n^2.$$

(2) 磷肥对两种作物的产量的影响呈分段直线形式. 因此,运用线性回归得到

磷肥对土豆的效应方程:

$$W = \begin{cases} 32.077 + 0.084p & (0 \leqslant p \leqslant 101.04), \\ 39.968 + 0.0059p & (101.04 \leqslant p \leqslant 342). \end{cases}$$

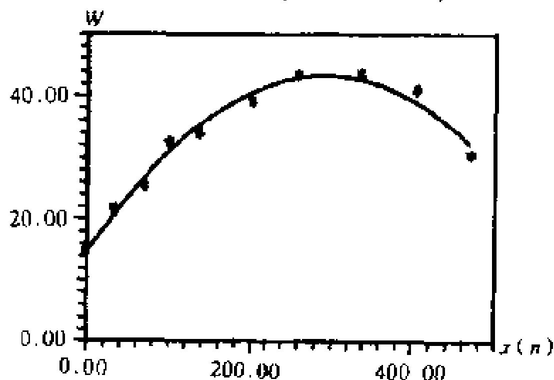


图 13.2 氮肥对土豆的效应曲线

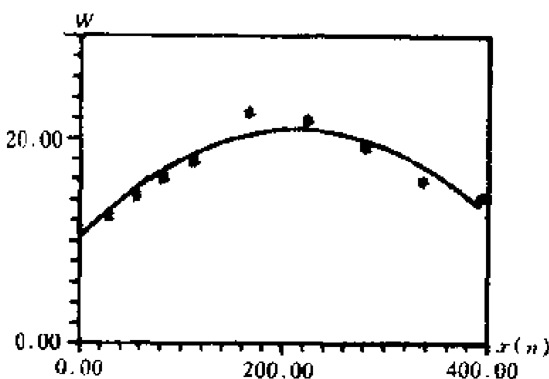


图 13.3 氮肥对生菜的效应曲线

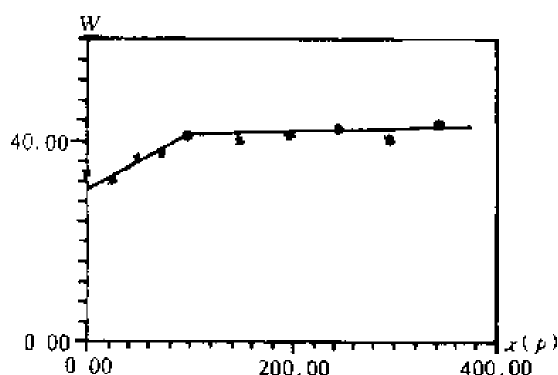


图 13.4 磷肥对土豆的效应曲线

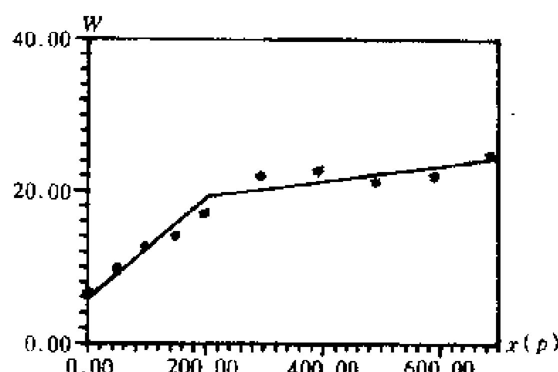


图 13.5 磷肥对生菜的效应曲线

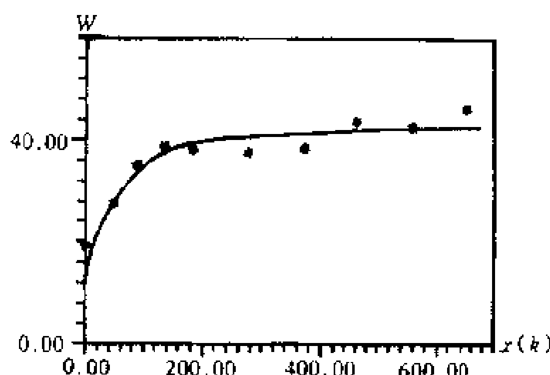


图 13.6 钾肥对土豆的效应曲线

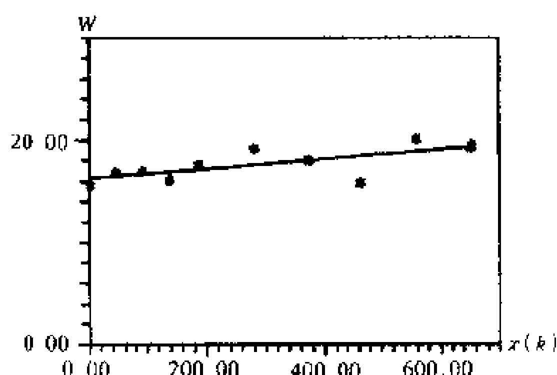


图 13.7 钾肥对生菜的效应曲线

磷肥对生菜的效应方程：

$$W=\begin{cases}6.809+0.0521k & (0\leqslant k\leqslant 202.54),\\ 20.196+0.00472k & (202.54\leqslant k\leqslant 685).\end{cases}$$

(3) 钾肥对土豆的影响呈指数曲线形式，效应方程取作 $W(k)=A(1-\exp(-ck+b))$ 的形式，A 为产量极限值，b，c 为参量，运用指数回归，得到钾肥对土豆的效应方程

$$W(k)=42.17(1-\exp(-0.01k-0.641)).$$

钾肥施用量对生菜的产量影响很小，通过线性回归得到效应方程：

$$W(k)=16.2269+0.00395k.$$

各种肥料的效应曲线仍见图 13.2－图 13.7.

对上述效应方程进行回归分析，计算得到各方程偏差平方和 SSE 值如下：

SSE(n→土豆) = 1.26，　SSE(n→生菜) = 1.06，
SSE(p→土豆) = 0.89，　SSE(p→生菜) = 0.54，
SSE(k→土豆) = 4.90，　SSE(k→生菜) = 0.47.

SSE 值都很小，表明模型与实际情况比较吻合，比较正确地反映了施肥量与产量之间的关系.

三、一元效应模型的分析和应用

1. 从效应曲线看出：过量施用氮肥会造成作物的减产，磷肥施用量超过一定限度后对产量的贡献很小，钾肥对土豆的贡献也是这样. 钾肥对生菜产量几乎没有什么贡献，这可以解释为：生菜对钾肥的需求量很小，而土壤本身已含有足够的钾肥满足生菜生长的需要.

2. 考虑到肥料本身的成本，不能盲目追求产量的最大值，还应当考虑到多投入的肥料的价钱与多增加的产品的价钱哪个更多. 从模型可以看出，边际产量 dW/dx（即产量对于施肥量的变化率）随着 x 的增大而不断减少. 令 Px 代表肥料价格，PW 代表产品价格. 则当增加的产品 dW 的价钱 $PW\cdot dx$ 大于需增加的施肥量 dx 的价钱 $Px\cdot dx$，也就是 $dW/dx>Px/PW$ 时，再增加施肥量才是划算的. 当 $dW/dx<Px/PW$ 时再增加施肥量就得不偿失了. 因此，最佳施肥量应满足条件

$$dW/dx=Px/PW.$$

四、关于三种肥料的交互作用的讨论

一元效应模型将作物产量看作三种肥料的施用量的一元函数. 但实际上，这三种肥料是有交互效应的. 比如，将磷肥、钾肥不是都固定在第七个水平上，而是固定在另外的水平，则作物产量对氮肥施用量的变化规律及最佳施肥量都会有变化. 为此，自然应当把 W 作为这三种肥料的施用量 n,p,k 的三元函数 $W=W(n,p,k)$. 当然，也可以假定考虑 W 是 n,p,k 的三元多项式，比如设为三元二次多项式

$$W = b_0 + b_n n + b_p p + b_k k + b_{nn} n^2 + b_{pp} p^2 + b_{kk} k^2$$
$$+ b_{np} np + b_{nk} nk - b_{pk} pk, \qquad ①$$

再用回归的方法来求待定系数.

那么,这样求出的交叉项系数是否就反映了肥料之间的交互效应呢? 为了分析这个问题,作如下的处理(参见[5]). 注意到所有的试验点只是在以(n,p,k)为坐标中三条平行于坐标轴的直线上变动,这三条线交于一个公共点(n_0,p_0,k_0),其坐标分别是 n,p,k 的第七个水平(这个公共点的试验实际上重复了三次,得出的 W 各不相同). 将坐标轴平移,使坐标原点移到(n_0,p_0,k_0). 即以 n_0,p_0,k_0 作为标准施肥量,而以施肥量与它们的差 $N=n-n_0, P=p-p_0, K=k-k_0$ 作为新的变量,称为相对施肥量. W 也就是N, P,K 的三元二次函数

$$W = B_0 + B_N N + B_P P + B_K K + B_{NN} N^2 + B_{PP} P^2$$
$$+ B_{KK} K^2 + B_{NP} NP + B_{NK} NK + B_{PK} PK. \qquad ②$$

对新的坐标系,所有的试验点都在坐标轴上,至少有两个坐标为 0. 将这些试验点的自变量值(相对施肥量)和函数值(作物产量)代入函数表达式去求各系数,就发现所有的交叉项系数 B_{NP}, B_{NK}, B_{PK} 都消失了(因为该项的两个自变量中至少有一个是 0),不可能由试验结果来确定. 换句话说,这三个交叉项的系数可以任意取值而不影响与试验结果的一致. 这说明,由这样的试验结果完全不能确定②式的交叉项,也就不能确定①式的交叉项. 如果直接对①式用回归的方法求交叉项,求出的交叉项系数实际是由②式的一次项系数及 n_0,p_0,k_0 得出的,不能反映三种肥料的交互效应. 这是由试验方法决定了的:将两种因素固定、一种因素变动,这样安排试验所得的试验效果注定了是不能得出交互效应的.

五、关于试验设计的改进

由上面的分析可以知道,原题所用的试验设计方式是不好的,应予改进,在平行于坐标轴的那三条直线之外再安排一些试验,以反映肥料之间的交互作用. 例如,项可凤在[5]中建议了如下的复合设计方法,对三因素试验,选了 15 个试验点如下:

(1) 首先选择一个中心点(n_0,p_0,k_0)(如原题所说的三种肥料的第七个水平).

(2) 三个因素各选一个步长 $\Delta n, \Delta p, \Delta k$,每个因素各选中心点上、下两个水平 $n\pm\Delta n, p\pm\Delta p, k\pm\Delta k$,三个因素各取这两个水平之一,共组合成 8 个试验点.

(3) 取系数 $\lambda=\sqrt{(\sqrt{8\times15}-8)/2}\approx1.215$,每个因素再选中心点上、下两个水平 $n\pm\lambda\Delta n, p\pm\lambda\Delta p, k\pm\lambda\Delta k$,让其中任意一个因素取这里的两个水平之一,另外两个因素取中心点的水平,共得到 6 个点.

§ 13.3 数学模型必须接受实际检验

建立数学模型来解决实际问题,一般应经过如下三个步骤:

1. 将实际问题中的数量关系用数学的语言加以刻划,变成一个数学问题,这就是数学模型. 这一步称为建模.

2. 用已有的数学工具或发明新的数学工具(并借助于必要的计算手段)求解所得到的数学问题,求出它的数学解或数值解.

3. 根据实际问题的需要和要求对所得到的数学解或数值解进行检验,看它是否合乎实际,是否可以付诸实施,是否经济合算,等等.

实际问题是十分复杂的. 在上述第一个步骤中,我们必须从实际问题的诸多因素舍弃掉次要的因素,选取主要的因素加以描述,建立起模型. 这一模型只能是近似地刻划了实际问题,而不可能作到绝对准确的刻划. 因此,第二步所得到的数学解或数值解是否符合实际,必须经过检验. 如果不符合实际,就要回到第一步,重新考察影响该问题的诸因素,修改原先的假设,建立新的模型,再重新求解和检验. 我们不可能达到十全十美. 只要得到了比较符合实际的模型及其解答,就可以先交付使用,产生经济效益和社会效益. 同时,在必要和可能的情况下再进一步改善所得到的模型,以追求更好的效益.

以上所说的是实际部门的工作者用数学模型来解决实际问题的过程. 大学生在学校里解答数学模型问题,是对这种过程的模拟和预演,也必须遵循上述三个必要的步骤,而不能像解答纯数学理论问题那样,只管得出数学解就完了.

13.3.1 (CMCM 1992 - B 题)实验数据分解.

组成生命蛋白质的若干种氨基酸可以形成不同的组合. 通过质谱实验测定分子量来分析某个生命蛋白质分子的组成时,遇到的首要问题就是如何将它的分子量 X 分解为几个氨基酸的已知分子量 $a[i](i=1,2,\cdots,n)$之和. 某实验室所研究的问题中,

$n=18$.

$a[1:18]=57,71,87,97,99,101,103,113,114,115,128,129,131,137,147,156,163,186$.

X 为正整数≤1000.

要求针对该实验室拥有或不拥有微型计算机的情况,对上述问题提出你们的解答,并就你所研讨的

数学模型与方法在一般情形下进行讨论.

解答（主要参考中国人民大学获特等奖队的论文[6]）

一、最一般的模型

根据题意,问题可化为求解多元线性不定方程

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{18} a_i x_i = X,\\ x_i(1\leqslant i\leqslant 18)\text{是非负整数}.\end{cases} \quad ①$$

最"蛮干"的算法是在计算机上把满足条件 $0\leqslant x_i\leqslant[X/a_i]$ $(1\leqslant i\leqslant 18)$ 的整数 x_i 的所有的可能的组合一一代入方程检验,等式成立即为解.当然,可以想出各种数学技巧来改进算法,大量排除那些肯定不会是解的组合,减少穷举的次数.但从根本上说,方程①的解的个数随 X 的增加成指数关系增加.在题意所说的 $X=1000$ 时的解的个数就已达到 28268.而实际上,一般的蛋白质的分子量都大于 5000,解的个数就更是大得惊人.在这样的情况下,问题已不在于怎样用巧妙的算法来求出这些解.假定你已经找到了一种最好的算法,能够毫不浪费时间,"百发百中"地求出所有的解.但哪怕用最快的速度把这些解全部罗列一遍,所花的时间就已经大得不可能实现.而面对如此众多的解,任何人也不可能像题意所说那样,对这些数学解一一鉴别它们是否真正代表了蛋白质分子?换句话说,如此众多的解,即使能找出来,也已失去了实际意义,没有任何用处了.

由此看来,仅仅根据原题所提供的条件来解决这个问题是没有出路的,也是没有实际意义的.这主要是由于原题所提供的对解的约束条件太少,太宽,不足以排除大量肯定不会代表蛋白质分子的解.如果是解纯数学题,我们一般就说:"原题条件不够,没法求出有实际意义的解."但这里的情形却不同.既然我们认识到原题条件不够,就应当不受原题条件的局限,自己设法根据有机化学中关于蛋白质分子的知识来补充一些新的条件,重新做出解答.为了获得这样的知识,可以查阅有关的资料,这在实际工作中是允许并且必要的,在数学建模竞赛中也是允许并且必要的.下面列举的就是 1992 年的竞赛中北京赛区中国人民大学获特等奖的队所补充的若干个条件中的两个.由于补充的条件不同,得到了不同的模型.

二、已知含氮量的模型

根据有机化学知识,构成生命蛋白质的主要氨基酸有 20 种,其中有两对氨基酸的分子量相等.因此,正如原题所说,氨基酸有 18 种不同的分子量.但既然这些氨基酸是已知的,我们就不但知道它们的分子量,而且也知道它们的分子式,每种氨基酸分子中含 C,N,O,H 的原子个数都是已知的.又由有机化学知道,生命蛋白质中氮的含量约占总量的 16% 左右,其波动范围为 15%～17%.对 $x_i(1\leqslant i\leqslant 18)$ 的每一种组合,由每种氨基酸的含氮量可以计算出组合出的"蛋白质"的含氮量.将 15% ≤含氮量≤17% 这一约束条件补充到方程①中,可以减少解的个数和运行时间.如 $X=1000$ 时解的个数由 28268 个减少为 10954 个,减少到原来的 40%.

三、已知蛋白质分子式的模型

根据有关质谱实验在有机化学中的应用方面的资料可知,质谱法可以得到有关分子结构的信息以及化合物的准确分子量和分子式.因此,可以假定蛋白质的分子式已经知道,即蛋白质分子中各种元素的原子的个数已经知道.生命蛋白质中常见的氨基酸由 C,N,O,H,S 五种元素组成,每种元素的原子在每种氨基酸中的个数已知.由于 S 只在一种氨基酸中出现,将它作特殊处理,只考虑其余四种元素 C,N,O,H 的原子个数.设第 i 种氨基酸$(1\leqslant i\leqslant 18)$中第 j 种元素的原子$(1\leqslant j\leqslant 4)$个数为 c_{ij},而所测蛋白质分子中第 j 种元素的原子个数为 d_j.将约束条件

$$\sum_{i=1}^{18} c_{ij}x_i = d_j\,(j=1,2,3,4) \quad ②$$

补充到方程①中,可大大减少解的个数和运行时间.例如,对试验数 $X=1133$ 的情形,补充了条件②之后解只有 1195 个,只为没有补充这个条件时的 1/20.

四、已知氨基酸种类的模型

如果实验室拥有较先进的化学分析设备,可以得到被测定的蛋白质完全水解生成的氨基酸的全部种类,从而可以给出如下的假设:

假设某蛋白质由且仅由 k 种已知的氨基酸(或 k 种不同的分子量对应的氨基酸)构成.

只要 $k<18$,就知道了方程①中已知的 k 个变量 $x_i\geqslant 1$,而其余的变量取值为 0,这就减少了可能的解的组合,提高了求解速度,减少了解的个数.事实上,如果设 $i_1,\cdots,i_k$ 是已知的 k 种氨基酸,令 $X'=X-\sum_{l=1}^{k}a_{i_l}$, $y_{i_l}=x_{i_l}-1\geqslant 0\,(l=1,2,\cdots,k)$,则方程①变为

$$\begin{cases}\sum_{l=1}^{k} a_{i_l}y_{i_l},\\ y_{i_l}\text{为非负整数}\ (l=1,2,\cdots,k).\end{cases}$$

如果实验室还可进一步测出蛋白质的分子式,则如模型三所说,解的个数还可进一步减少.当 k 的取值不大(比如 $k\leqslant 8$)的情况下,甚至可以在没有微机的情况下用手工算出线性方程组的通解,然后再找出其整数解.

13.3.2 (MCM 1992－A 题)机场雷达的功率.

要求你决定一个主要城市的机场的空中交通控

制雷达发射的功率.机场部门希望兼顾安全性与经济性使雷达的发射功率最小.

机场行政部门限于使用现有的天线和接收线路,唯一可考虑的选择是改进雷达的发射电路使雷达更强大.

你要回答的问题是雷达必须发射多少功率(以瓦特为单位)足以保证能探测到100千米以内的标准客机.

技术说明:

a. 雷达天线是一个旋转抛物面的一部分,该抛物面的焦距为1米,它投影至与顶点相切的平面是一个长轴为6米,短轴为2米的椭圆.从焦点发出的主能量束是一个椭圆锥,其长轴角为1弧度,短轴角为50毫弧度.天线和能量束如图13.8所示.

b. 理想化的一类飞机是具有75平方米完全雷达反射截面的飞机.亦即在你的初步模型中飞机等价于一个75米^{2}的中心位于天线轴线上并垂直于该轴的100%的反射圆碟.你亦可以考虑其它模型或改进这个模型.

c. 接收线路的灵敏度是雷达天线反馈报警器(位于雷达天线的焦点)对10微瓦的回波信号会做出反应.

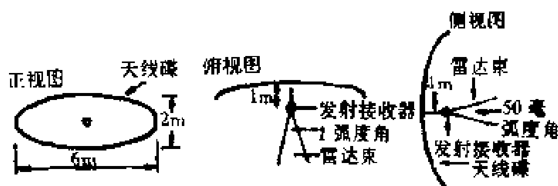


图13.8 雷达天线和能量束

解答(主要参考了获特等奖队的论文[7])

一、计算公式

首先计算照射到目标上的能量流.假定雷达发出的能量沿题中所说的椭圆锥束均匀发射,到$r=100$千米远处能量均匀分布在面积为A的一部分球面上,A是半径为100千米的球面被椭圆锥截出的那部分面积,可以用积分算出.设目标(飞机)的反射截面为σ,则目标接收到的功率占雷达发出的功率的σ/A,为

$$P_{目标接收}=P_{雷达发射}\times\frac{\sigma}{A}.$$

再计算被目标反射回雷达天线的能量.假定目标将能量向四周均匀反射,到$r=100$千米远处均匀分布在半径为r(从而面积为$4\pi r^2$)的球面上.天线的接收面积$A_{天线}$可以近似地认为是天线在与其顶点相切的平面上的投影面积,即长轴为6米,短轴为2米的椭圆面积,等于$\pi\times3\times1$平方米.于是

$$P_{天线接收}=P_{目标接收}\times\frac{A_{天线}}{4\pi r^2}=P_{雷达发射}\times\frac{\sigma\cdot A_{天线}}{A\cdot4\pi r^2}.$$

由接收线路的灵敏度(即$P_{天线接收}$)可反算出

$$P_{雷达发射}=P_{天线接收}\times\frac{A\cdot4\pi r^2}{\sigma\cdot A_{天线}}.\qquad①$$

二、初始模型

将原题所给数据$P_{天线接收}\geqslant10$微瓦代入公式①,可算出$P_{雷达发射}\geqslant7.3\times10^6$瓦.虽太高,尚可产生.

三、改变飞机面积后的模型

经调查,实际的小飞机的雷达反射截面低于原题所给的数据75米^2.为了保证安全性,应要求机场雷达能够探测到100千米远处的这种小飞机.将飞机的雷达反射截面积改为2米^2,重新折算成σ后代入公式①,算出$P_{雷达发射}\geqslant2.6\times10^{13}$瓦.这样大的功率在实际上是难以实现的.

四、修改灵敏度后的模型

虽然按原题所说,"机场行政部门限于使用现有的天线和接收线路,唯一可考虑的选择是改进雷达的发射电路使雷达更强大."但按机场方面提供的数据计算出来的雷达功率实在是大得不合理,难以实现.这就使我们有理由怀疑所提供的原始数据是否合理.经查阅资料,由1944年某雷达天线信噪比的数据算出,按照该雷达的灵敏度,可以对1.5×10^{-14}瓦的信号做出反应.相比之下,本题所给的雷达的灵敏度就太差了.既然1944年就可以有灵敏度如此高的雷达,就有理由怀疑提供给我们的灵敏度的数据有误.如果此数据(10微瓦)无误,就有理由要求机场将这种已经落伍的雷达淘汰掉,换用灵敏度更高的雷达以保证安全性.按照$P_{天线接收}\geqslant1.5\times10^{-14}$瓦的灵敏度重新代入公式①计算,得到$P_{雷达发射}\geqslant36$千瓦.这就比较符合实际了.

五、脉冲式发射的模型

为节省能量,雷达波不须连续发射,以脉冲方式发出,仍可有效地探测到飞机.设脉冲长度为1微秒,每秒发射500个脉冲,发射时的功率仍为36千瓦.则平均功率降为18瓦,大大节省了能量.

六、考虑天气影响的模型

由有关知识,云的影响不大,但雨的影响不宜忽略.经计算,下雨可使雷达发出的能量损失达10%左右.因此,发射功率应增加10%,至40千瓦.

§13.4 模型的不断改进

数学模型的好坏是相比较而言的.因此,在用数学模型来解决实际问题时,通常不应只提出一种模

型.你所认为的好的模型,至少应比普通人不须多少分析就能提出的模型要更好,才能体现其好.好的数学模型不是从天上掉下来的,它常常是从某一个初步的模型出发,通过对其缺陷的分析和逐步改进中完善起来的.这在前面的例题的解答中已经有所体现.下面是两个更典型的例子.

13.4.1 (CMCM 1993 · B题)足球比赛的排名.

下表给出了我国 12 支足球队在 1988 年—1989 年全国足球甲级队联赛中的成绩,要求:

(1) 设计一个依据这些成绩排出诸队名次的算法,并给出用该算法排名次的结果.

(2) 把算法推广到任意 N 个队的情况.

(3) 讨论:数据应具备什么样的条件,用你的方法才能排出诸队的名次.

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	T_8	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}
T_1	×	0:1 1:0 0:0	2:2 1:0 0:2	2:0 3:1 1:0	3:1	1:0	0:1 1:3	0:2 2:1	1:0 4:0	1:1 1:1	×	×
T_2		×	2:0 0:1 1:3	0:0 2:0 0:0	1:1	2:1	1:1 1:1	0:0 0:0	2:0 1:1	0:2 0:0	×	×
T_3			×	4:2 1:1 0:0	2:1	3:0	1:0 1:4	0:1 3:1	1:0 2:3	0:1 2:0	×	×
T_4				×	2:3	0:1	0:5 2:3	2:1 1:3	0:1 0:0	0:1 1:1	×	×
T_5					×	0:1	×	×	×	×	1:0 1:2	0:1 1:1
T_6						×	×	×	×	×	×	×
T_7							×	1:0 2:0 0:0	2:1 3:0 1:0	3:1 3:0 2:2	3:1	2:0
T_8								×	0:1 1:2 2:0	1:1 1:0 0:1	3:1	0:0
T_9									×	3:0 1:0 0:0	1:0	1:0
T_{10}										×	1:0	2:0
T_{11}											×	1:1 1:2 1:1
T_{12}												×

解答(主要参照中国科技大学获特等奖队的论文)

一、合理的假设

1. 排名仅根据现有比赛结果,不考虑其它因素.

2. 每场比赛对于估计排名的重要程度是一样的,具有相同的可信度.不同的比赛相互独立.

3. 有些队之间没有比赛,完全是由于比赛安排的原因造成的.不是由于球队在以前比赛中的胜负造成的.也不是由于某一方弃权造成的(根据比赛规则,弃权一方应被判输球,从而应在数据表中显示出来).

4. 按流行的赛制,以二分制计算比赛积分,即:胜一场得 2 分,平一场得 1 分,输一场得 0 分(当然也可以按三分制计算积分,将胜一场的得分改为 3 分,以鼓励进攻.这样的修改对我们的模型不造成任何困难).

作出以上的假设,一方面是由于原题没有提供更多的信息,我们没有理由认为某场比赛比别的比赛更具有特殊性等.当然,按照数学建模竞赛的规则,在原题条件不够的情况下允许自己查阅资料,补充信息.但本题中如果真的从体育资料中去查出 1988 年—1989 年我国足球甲级队联赛的具体情况,在模型中予以反映,所建立的模型就失去了普遍意义.因此,做出上述假设的更重要的出发点是为了是所建立的模型能够具有普适性,适合于各种不同的比赛.

二、问题的分析

众所周知,足球界对同一赛事中比赛结果的排名有现成的算法.例如:循环比赛结果的排名,按前述二

分制(或三分制)计算总积分,以总积分的高低来决定名次的先后(总积分相同者,再比净胜球数的多少,总进球数的多少,等等).但是,这一算法着眼于排出比赛的胜负名次,并不总能合理地反映出各队真实水平的高低.比赛名次当然主要决定于各队的真实水平,但各队在比赛场次安排中"运气"的好坏也有相当的影响.比如,某队在比赛中避开了强队而大胜弱队,就是由于"运气"好而得分高的例子.我们不能完全排除这一类因素,但应尽可能合理地考虑并处理它.

另外,足球界的上述算法只适用于同一赛事的比赛结果.对于不同赛事的混合结果,特别对于比赛场次及数据参差不齐的情况(如本题所给的数据),就显得无能为力了.

我们的目标就是要针对这种不规则的比赛数据提出一种算法,尽可能合理的反映各队的真实水平.

三、初步的排名方案

我们先从最通行的算法开始,通过分析其缺点而一步步加以改进.

模型1. 总积分法:按两分制(或三分制)计算各队在所有比赛中总的积分,按总积分的高低排出名次.

但是,在所给的数据表中,各队比赛场次有多有少.而按我们的假设,比赛场次的多少并不是由于该队在以前的比赛中的胜负所致.如果按总计分法,则比赛场次少的队吃亏.为了克服这一不合理性,很自然改进为:

模型2. 平均积分法:将每个队的总积分除以该队参加比赛的场数,得出每场平均积分.按各队平均积分的高低来排名.

上述方法当然还可以做出一些小的改进.比如再将净胜球数、总进球数等因素也折算成一定的分数,计入总分.

四、特征向量法的提出

在我们看来,以上总积分法和平均记分法(及其考虑了净胜球数、总进球数之后的改良版本)最大的不合理性是:在计算比赛得分时没有考虑对手的强弱.比如,胜强队和胜弱队同样都得2分,这就明显不合理.由此看来,更合理的算法应当是:胜强队得分应该多一些,胜弱队的得分应该少一些.用数学语言说,应该给每个队赋予一个"强弱系数"x_i(非负实数),来反映该队实力的强弱,强队的系数大,弱队的系数小.如果对手的强弱系数为x_i,你胜了它,你的得分就用这个系数对基本得分(2分)进行加权,为2分$\times x_i$.为了叙述方便,将第i队记为$T_i(1\leqslant i\leqslant N)$.要算出$T_i$的总的得分,先对每个$T_j$算出$T_i$对$T_j$的各场比赛中按二分制的平均得分,记为$a_{ij}$.如果$T_i$与$T_j$没有比赛过,就取$a_{ij}=0$.特别$a_{ii}=0$(严格说来,对没有比赛过的队$T_i$,$T_j$取$a_{ij}=0$并不合理,这等于是判这两个队各输一场,他们相对于其他的队就吃亏了.对这种情形的详细讨论将在后面进行).将T_i对T_j的上述得分a_{ij}用T_j的强弱系数x_j加权,则T_i对T_j的得分变为$a_{ij}x_j$. T_i的总得分为

$$y_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{iN}x_N. \quad ①$$

这样算出的各队的总得分$y_1,\cdots,y_N$反映了各队实力强弱的比,可以作为排名的标准.

我们的目的是为了求出反映各队实力强弱比的向量$Y=(y_1,\cdots,y_N)$,但为了求Y又要用到反映各队实力强弱比的另一个向量$X=(x_1,\cdots,x_N)$.将X,Y都写成列向量形式,并记矩阵$A=(a_{ij})_{N\times N}$,则以上的计算公式①可以写成矩阵形式

$$Y=AX. \quad ②$$

由于X未知,当然不能直接从这个公式算出Y来.但既然X与Y同样都是反映各队实力强弱比的向量,有理由认为它们所反映的比相等,即存在正实数λ,使$Y=\lambda X$.即$AX=\lambda X$,λ是A的特征向量,X是对应于λ的特征向量.

为叙述方便,我们把矩阵A称为得分矩阵,它的元素a_{ij}是T_i对T_j的各场比赛的平均得分,是非负实数.按矩阵论的术语,A是非负矩阵.按照矩阵论中关于非负矩阵的Perron-Frobenius定理,不可约的非负矩阵存在最大正实特征根,对应于唯一(可相差常数倍)的实特征向量$X=(x_1,\cdots,x_N)'$.这里,说某个非负矩阵不可约,是指它不可能仅仅通过各行之间的置换或各列之间的置换化成至少有两个对角块的准对角阵.如果得分矩阵A可约,就意味着N支足球队可以分成若干组(至少两组),所有的比赛都只在同组的队之间举行,不同组的队之间从未比赛过.在这样的情况下,显然不可能判定不同组的队之间的水平的高低.因此,要能对各队排出名次,至少应要求得分矩阵是不可约的(如果将每个队用一个顶点表示,两队之间如果有比赛,就在相应的两个顶点之间连一条边,这样得到一个反映各队比赛情况的竞赛图.得分矩阵不可约,即相当于这个竞赛图是连通图).这时就可以由Perron-Frobenius定理知道A存在最大正实特征根及相应的特征向量X.可以取这个X作为反映各队实力比的向量.

在实际计算中,要求出矩阵的特征根需要解一元N次方程,这一般是很困难的,更不用说还要求特征向量了.而上述Perron-Frobenius定理还指出:

设$e=(1,1,\cdots,1)'$是全由1组成的N维列向量,A是不可约的非负矩阵,λ是它的最大正实特征根,则极限

$$X=\lim_{m\to\infty}\frac{A^m e}{\lambda^m}$$

存在,且就是 A 的对应于 λ 的特征向量.由此得出计算 X 的实用算法如下.注意,我们所需要的是 $X=(x_1,\cdots,x_N)$ 的各分量的比值.而将各分量同时扩大或缩小相同的倍数后,其比值不变.为了使 X 由这比值唯一决定,我们将 X 的各分量同时除以它们的和 $x=x_1+\cdots+x_N$,即用 $X/x=(x_1/x,\cdots,x_N/x)$ 代替 X,化成 $x_1+\cdots+x_N=1$ 的情形.我们称满足条件 $x_1+\cdots+x_N=1$ 的向量 $X=(x_1,\cdots,x_N)$ 为"归一化向量".称上述将非负向量 $X=(x_1,\cdots,x_N)$ 化成归一化向量 $X/(x_1+\cdots+\cdots)$ 的过程为"归一化".

先取 $e=(1,1,\cdots,1)'$ 的归一化向量 $X(1)=(1/n,\cdots,1/n)'$ 作为 X 的初始值.换句话说:既然一开始并不知道各队实力的强弱,不妨先认为各队实力相同.将 $X=X(1)$ 代入②式,算出 $Y(1)=AX(1)$ 作为 Y 的最初近似值(即先不加权,直接计算 T_i 的总分 $a_{i1}+\cdots+a_{iN}$ 作为 $Y(1)$).$Y(1)$ 当然比 $X(1)$ 更好的反映了各队实力强弱的比,归一化后得到的 $X(2)$ 作为 X 的更好的近似值.再用这个 $X(2)$ 算出 Y 的更好的近似值 $Y(2)=AX(2)$.这个过程可以不断进行下去,即在得到 X 的第 m 个近似值 $X(m)$ 之后,再由 $X(m)$ 算出 $Y(m)$,将 $Y(m)$ 归一化后得到 $X(m+1)$,作为 X 的第 $m+1$ 个近似值.由 Perron-Frobenius 的上述定理可知,这一迭代过程是收敛的,极限 $X=\lim_{m\to\infty}X(m)$ 存在且就是 A 的对应于最大正实特征根的特征向量.实际计算时,只要 $X(m+1)-X(m)$ 的各分量的绝对值都小于预先给定的误差允许值 ε,就可以结束计算,取 $X=X(m+1)$.求 A 的特征向量 X 的这一算法,在计算数学中通常叫做"幂方法".

五、水平比矩阵法

上面提出的特征向量法,是在建立了得分矩阵 $A=(a_{ij})_{N\times N}$ 之后,求出 A 的对应于最大正实特征根的特征向量,作为代表各队水平比的向量,以它的依据来为各队排名次.以下我们还要提出进一步改进后的模型,它们都以求特征向量为基础,都可以叫做特征向量法.这些模型的区别是矩阵 A 的构造方法不同.我们将上述计算得分矩阵 A 的特征向量的模型称为:

模型 3. 得分矩阵法:矩阵 $A=(a_{ij})_{N\times N}$ 的元素 a_{ij} 是 T_i 对 T_j 各场比赛按二分制(或三分制)算出的平均得分.当 T_i 与 T_j 没有比赛过时取 $a_{ij}=0$.

模型 3 比模型 1,2 更合理.但仔细考察仍有不合理性:用来加权的向量 $X=(x_1,\cdots,x_N)'$ 代表的是各队水平的比,而算出的向量 $Y=(y_1,\cdots,y_N)'=AX$ 的各分量是各队的得分.严格说起来,向量 $Y=(y_1,\cdots,y_N)'$ 代表的是各队水平的差而不是比.比如有某个队屡战屡败,得分为 0,它所对应的 $y_i=0$.这当然说明它比别的队都差,但也不能说它与别队的水平比是 0,或说别的队的水平是它的无穷大倍.设想将记分制改为:胜一场得 1 分,平得 0 分,败得 -1 分,这也是合理的.这样就相当于将各队的得分各减去 1 分,Y 的各分量同时减去 1,它们相互的差不变,但比却变了.而代表各队水平比的向量 X 却不应因此改变.由此看来,更合理的办法应该是:用反映 T_i 与 T_j 的水平的比的正实数 b_{ij} 代替 a_{ij},用水平比矩阵 $B=(b_{ij})_{N\times N}$ 来代替得分矩阵.这样,由 $Y=BX$ 算出的向量 Y 就仍是水平比向量,它才真正应该与 X 成比例从而是特征向量.水平比矩阵 B 与得分矩阵 A 的一个显著区别是:所有的矩阵元素 b_{ij} 都是正实数,不能为 0.而且,既然 b_{ij} 是 T_i 与 T_j 的水平比,而 b_{ji} 是 T_j 与 T_i 的水平比,b_{ij} 与 b_{ji} 就应当互为倒数.特别 $b_{ii}=1$(即 T_i 与自己的水平比为 1).这样的矩阵 B 称为互反矩阵.B 的元素 $b_{ij}(1\leqslant i,j\leqslant N)$ 是各队两两之间的水平比,而所求出的特征向量 X 就是各队的水平比.这正是下一个论题"层次分析法"的主要思想.

现在的问题是:怎样具体算出水平比矩阵 B 呢?显然应当根据 T_i 与 T_j 比赛的成绩来算出 b_{ij}.很自然会想到用 T_i,T_j 相互比赛得分的比 a_{ij}/a_{ji} 作为 b_{ij}.这样,$b_{ji}=a_{ji}/a_{ij}$ 自然也就是 b_{ij} 的倒数了.但这也有一个问题,假如 $a_{ji}=0$ 怎么办?我们可以认为,凡是有资格参加比赛的队 T_i 的水平都不是 0,而是有一个起码的水平分 $a>0$(a 是待定参数).将这个起码分 a 加上比赛得分 a_{ij} 作为 T_i 与 T_j 的水平分.反过来,$a+a_{ji}$ 是 T_j 对 T_i 的水平分,而 $b_{ij}=(a+a_{ij})/(a+a_{ji})$ 就可作 T_i 与 T_j 的水平比.参数 a 可由体育界的人士根据经验来确定,它的大小在一定程度上反映比赛的成绩的可信程度,以及偶然因素起作用的机会的大小.这样就得到:

模型 4. 参数法:预先取定参数 a(正实数).设任意 T_i 对 T_j 的各场比赛平均得分为 a_{ij},则取 $b_{ij}=(a+a_{ij})/(a+a_{ji})$.所有的 b_{ij} 组成水平比矩阵 $B=(b_{ij})_{N\times N}$.再求出 B 的对应于最大正实特征根的特征向量作为反映各队水平比的向量.

当 T_i 与 T_j 未比赛时,两队水平比 b_{ij} 应怎样选取呢?我们取 $b_{ij}=x_i/x_j$.这样的取法的正确性当然无可争议.但问题是 x_i,x_j 未知,当 $i\neq j$ 时不能得到 b_{ij} 的确切的值(当 $i=j$ 时 $b_{ii}=x_i/x_i=1$ 有确切值).记 $J=\{1\leqslant j\leqslant N\mid T_i$ 与 T_j 比赛过$\}$,$S=\{1\leqslant j\leqslant N\mid j\notin J\}$ 是与 T_i 未比赛过的队的编号的集合(包括 i 在内).则对任意 $1\leqslant j\leqslant N$,当 $j\in J$ 时 b_{ij} 可以由比赛成

绩算出，是已知的；而当 $j\in S$ 时 $b_{ij}=x_i/x_j$. 我们有

$$y_i=\sum_{j=1}^{N}b_{ij}x_j=\sum_{j\in J}b_{ij}x_j+\sum_{j\in S}\frac{x_i}{x_j}x_j$$
$$=\sum_{j\in J}b_{ij}x_j+rx_i=\sum_{j=1}^{N}c_{ij}x_j,$$

其中 $r=|S|$ 是与 T_i 未比赛过的队(包括 T_i 自己)的个数,

$$c_{ij}=\begin{cases}b_{ij}, 当 j\in J,\\ r, 当 j=i,\\ 0, 当 j\in S, 且 j\neq i.\end{cases}$$

可见，我们可以用矩阵 $C=(c_{ij})_{N\times N}$ 代替 B 来进行计算. 也就是说，如果共有 r 个队(包括 T_i 自己)没有和 T_i 比赛过，则取 $b_{ii}=r$，而当 T_i 与 T_j 没有比赛(且 $i\neq j$)时将 b_{ij}，b_{ji} 都取作 0. 再用幂方法求所得到的矩阵的特征向量即可.

六、概率法

上述模型 4 中的参数 a 的选定带有主观随意性，不能令人满意. 而且，a 是否应因 T_i，T_j 的不同而易，也是问题. 更主要的问题是：计算 b_{ij} 时所用的得分 a_{ij} 是用平均积分法得出的，其中有不合理性：试想如果 T_i 与 T_j 只赛了一场，T_i 一战一胜得 2 分，平均得分 $a_{ij}=2$；假如 T_i 对 T_j 赛了三场，T_i 三战三胜，共得 6 分，平均得分 a_{ij} 仍为 2 分. 但实际上，三战三胜的难度显然比一战一胜大，而两者得分相同，这就不合理. 应该让三战三胜的得分比一战一胜的得分多，这才是合理的. 为什么我们觉得三战三胜的难度显然比一战一胜大呢？假如 T_i 胜 T_j 的概率是 70%，则一战一胜的概率也就是 70%，很有可能实现；但三战三胜的概率就只有 $(70\%)^3=34.3\%$，很难实现. 如果实现了，就有理由认为 T_i 胜 T_j 的概率不止 70%，而有可能是 $\sqrt[3]{70\%}\approx 89\%$. 由此得出以下的模型.

模型 5. 概率法：对任何两个队 T_i，T_j，客观存在着 T_i 胜 T_j 的概率 p_{ij}. 用 p_{ij} 和 p_{ji} 的比 $b_{ij}=p_{ij}/p_{ji}$ 作为 T_i 与 T_j 的水平比，构造出水平比矩阵 B，算出各队的水平比向量.

以 p_{ij}/p_{ji} 作为 T_i 与 T_j 的水平比，其合理性当然是毋容置疑的. 但同样显而易见的问题是：怎样找出概率 p_{ij} 来呢？当然只能以两队的比赛成绩为依据，从成绩表中的数据算出 p_{ij} 来. 从统计的角度看，两队进行若干场比赛的结果，并不能绝对地反映两队水平的高低. 但这些结果却是 p_{ij} 和 p_{ji} 在一定程度上的实现. 我们设法从这些结果反推出 p_{ij}，p_{ji}. 具体来说，根据 T_i 在对 T_j 的各场比赛中的总得分(注意不是平均积分)来计算 p_{ij}. 我们的主要想法是：假如 p_{ij}，p_{ji} 预先给定了，则可以由它们分别算出 T_i 在对 T_j 的各场比赛中总共得 0 分，1 分，2 分，…的概率，这些概率都是 p_{ij}，p_{ji} 的函数. 假如 T_i 的实际总得分为 m 分，就有理由认为 T_i 得 m 分的概率比得其它分的概率都大(这就是极大似然估计的思想：认为实际发生了的事件比没有发生的事件的概率更大). 这样就可以得到关于 p_{ij}，p_{ji} 的一些不等式，其中包含参数 m. 解这些不等式就可得到 p_{ij}，p_{ji} 对于 m 的依赖关系，从而可以由已知数 m(由比赛成绩表算出)决定未知的 p_{ij}，p_{ji}.

将这个想法付诸实施时，需要解决一个技术性问题：平局的概率怎样计算？为此，我们将每场比赛想象成由两个半场组成，每半场只有胜负，没有平局(注意这只是为分析问题而想象的两个半场，并不是实际比赛的上半场和下半场). 在两个半场中一胜一负就是全场的平局，而两胜、两负则分别是全场的胜和负. 我们还规定在半场中胜得 1 分、负得 0 分，则全场的胜、平、负的得分就分别是 2，1，0 分，与原来的规定一致. 将 T_i 在半场中战胜 T_j 的概率 q_{ij} 作为唯一一个独立参数，简记为 q，则 $q_{ji}=1-q$. 由此可以算出 T_i 对 T_j 进行多场比赛时 T_i 的各种得分情况出现的概率. 比如，在三场比赛中 T_i 如果得 4 分(可能是两胜一负或一胜两平)，那就是 T_i 在 6 个“半场”中胜 4 个半场，负 2 个半场，概率为 $C_6^4q^4(1-q)^2$. 一般地，在 n 场比赛中 T_i 得 m 分的概率为 $C_n^mq^m(1-q)^{n-m}$. 如果 T_i 在对 T_j 的 n 场比赛中实际的总得分为 m，则认为 T_i 得 m 分的概率比得其它分的概率都大，即

$$C_n^mq^m(1-q)^{n-m}>C_n^kq^k(1-q)^{n-k},$$
$$对所有的 0\leqslant k\leqslant n, k\neq m.$$

对给定的 m 值解出这些不等式，就得到由 m 决定的 q 的取值范围，结果如下：

一场比赛		二场比赛		三场比赛	
积分	q	积分	q	积分	q
2	0.67～1	4	0.8～1	6	0.86～1
1	0.33～0.67	3	0.6～0.8	5	0.71～0.86
0	0～0.33	2	0.4～0.6	4	0.57～0.71
		1	0.2～0.4	3	0.43～0.57
		0	0～0.2	2	0.29～0.43
				1	0.14～0.29
				0	0～0.14

这里，T_i 的每一种得分值 m 对应于 q 的一个取值范围. 将 q 值到底定在这个范围里的什么位置呢？这个选择的自由仍留给体育界人士，按比赛结果的可信度来决定. 比如，可以选在范围的下限，或上限，或中间. 一个更为合理的处理办法是：根据净胜球数 w 的多少来决定把 q 值选在所得范围的高处或低处. 也就是说，将 q 设计成 w 的某个递增函数，其取值范围就是由 T_i 的总得分 m 所决定的 q 的范围，随 w 的

增加而趋近于这个范围的上界. q 值决定之后，就可算出 p_{ij}，p_{ji} 从而算出 b_{ij}（等于 $q^2/(1-q)^2$）. 当然也可直接取 $b_{ij}=q/(1-q)$. T_i 与 T_j 没有比赛的情形，按模型 4 同样的方法处理.

七、模型的检验和比较

前述五种方法得到的排名结果如下表：

方案＼名次	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(1)	T_7	T_1	T_3	T_9	T_2	T_{10}	T_8	T_5	T_4	T_{12}	T_6	T_{11}
(2)	T_7	T_1	T_3	T_9	T_2	T_{10}	T_8	T_6	T_5	T_{12}	T_{11}	T_4
(3)	T_7	T_1	T_3	T_2	T_{10}	T_9	T_8	T_6	T_5	T_{12}	T_{11}	T_4
(4)	T_7	T_1	T_3	T_{10}	T_2	T_9	T_8	T_6	T_5	T_{12}	T_{11}	T_4
(5)	T_7	T_1	T_3	T_2	T_{10}	T_8	T_9	T_6	T_5	T_{12}	T_4	T_{11}

其中：(1)总积分法；(2)平均积分法；(3)得分矩阵法；(4)参数法；(5)概率法.

既然数学模型必须接受实际检验. 那么，为解决这个问题的前述各种模型孰优孰劣，用什么标准检验呢？当然，直观上说，每战必胜的队一定排在第一，每战必败的队一定排在最末，无论用哪一个模型算出来的结果都是这样. 这检验不出模型的优劣. 而互有胜负的队到底谁优谁劣，各种模型的答案不一，似乎又拿不出一个令人信服的客观标准来说明某个模型比别的模型更合理. 有的同学查出国家体委对 1988－1989 甲级足球队的排名来作为标准答案. 这也是不对的. 这一方面使对这一问题的解答失去普遍意义. 同时，任何人的排名结果只能是某一种模型所得的结果，其合理性本身就是被检验的对象而不是检验别人的标准. 在这方面，中国科大获特等奖队提出的计算机模拟的办法，应该说是一种比较客观、令人信服的检验办法. 他们的想法其实很简单.

在计算机上随机地产生一个按元素大小顺序排列的向量 $T=(t_1,\cdots,t_N)$. 认为 $t_1,\cdots,t_N$ 代表 N 支假想的球队的实力强弱的比，决定它们相互比赛胜负的概率. 在计算机上让这些球队按 T 规定的胜负概率进行模拟比赛，任意两个队比赛的场次可以是 0，1，2，3 场，产生出若干参差不齐的比赛成绩，如本题的数据情况那样. 然后利用前面所说的各种模型，由这些比赛结果来对这些队进行排名. 显然，这里的排名结果是有标准答案的，那就是由最初的向量 T 规定的排名顺序. 由各种模型的排出的名次，与这个标准答案越接近，就说明这个模型越好，从而用这样的模型按本题的数据表排出的结果也就可以认为更正确. 为了衡量各种模型排出的名次与预先规定的标准名次的偏差，定义偏差

$$\text{Error}=\sum_{i=1}^{N}|R_i-r_i|,$$

其中 r_i 是第 i 个队的标准名次，R_i 是模型给它排出的名次. 为了减少计算机模拟中的随机性的影响，使所得结果更为可靠，可以对同一个 T 进行多次模拟，计算每种模型所排出的名次的偏差的平均值，按照平均偏差的大小来判定模型的优劣. 中国科大队在 $N=12$ 的情形下进行了 100 次模拟，得出的平均偏差的情况如下：

模型	1	2	3	4	5
平均偏差	21.36	20.04	14.56	12.12	11.98

不难看出，检验的结果与前面的分析是一致的，即特征向量算法（模型 3～5）明显优于前面两种模型，而尤以概率法（模型 5）为最优.

八、模型的进一步分析

1. 稳定性分析：一个好的模型所预见的结果不应该由于初始数据的微小波动而有大的改变. 为检验稳定度，随机地改变一到三场的比赛成绩，以排名结果的变化大小的程度来检验模型的稳定程度，排名结果变化大小的程度按前面所定义的偏差来衡量. 结果发现模型 4 和 5 都是有很好的稳定程度.

2. 模型 4 中参数 a 的选择：依次试取 a 为 1 至 10 间的整数值，用前面所说计算机模拟的方法检验，发现取 $a=4$ 时的偏差最小.

§13.5 层次分析法

上面在解答足球比赛的排名问题时，一个基本思想是：根据 N 支足球队两两的水平比 b_{ij} 来求出这 N 支球队总的水平比 $x_1:x_2:\cdots:x_N$. 具体计算方法是：求出水平比矩阵 $B=(b_{ij})_{N\times N}$ 的对应于最大正实特征根的特征向量 $(x_1,\cdots,x_N)$ 来作为这 N 支足球队的水平比向量. 你也许会觉得，求特征向量是多此一举，也许可以采用下面的更简单的解法：既然两两的水平比 $b_{ij}=x_i/x_j$ 都知道了，任意取定一个队（假定是 T_k 个队）的水平为基准，将所有的队与 T_k 的水平比 $b_{ik}=x_i/x_k$ 相比，得到的 $b_{1k}:b_{2k}:\cdots:b_{Nk}$ 就是各队的水平比了. 换句话说，就是将矩阵 B 的任意一列 $(b_{1k},b_{2k},\cdots,b_{Nk})'$ 作为水平比向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_N)'$. 这个想法当然很有道理. 但问题是：既然矩阵 B 的任何一列都可以作为水平比向量，那么取不同的列得到的水平比是不是相同呢？也就是说，矩阵 B 的各列是不是成比例呢？要求 B 的各行成比例，也就是要求 $b_{ik}/b_{jk}=b_{ij}$ 对任意 i,j,k 成立. 也就是第 i,j,k 队的水平有传递性. 注意水平比矩阵 $B=(b_{ij})_{N\times N}$ 的元素都是正实数，并且满足 $b_{ji}=1/b_{ij}$. 这样的矩阵称为互反矩阵. 如果它还满足上面所说的传递性条件，即它的各列成比例（也即是 B 的秩为 1），则 B 称为具有一致性的互反矩阵，或简称一致阵. 但既然

b_{ij}, b_{ik}, b_{jk}是由分别独立的比赛成绩计算出来的,那就很难保证它们有严格的传递性.比如说:不能由 T_1 的水平是 T_2 的2倍、T_2 是 T_3 的3倍就推出 T_1 是 T_3 的6倍.看过真正的足球比赛的人都知道,甚至常常出现 T_1 胜 T_2, T_2 胜 T_3,但 T_3 反而胜 T_1 的情况,完全破坏了这种传递性.因此,实际得到的水平比矩阵通常不是一致阵(但要求它的"不一致性"不要太厉害.如何从数量上刻划不一致性,可以参阅有关层次分析法的教科书,一般数学模型的教科书上都有).也就是说,B 的各列一般是不成比例,不论取哪一列来作为水平比向量都具有片面性.正确的方法应该是将所有的列综合考虑,求出它们在某种意义上的平均,来作为水平向量.而求特征向量的方法,就是一种合理的求各列平均的方法.具体算法,除前面所采用的幂方法外,还有一种近似算法是求各列的几何平均:将每一行的所有的元素求几何平均得到一个数,所有这些数组成的列向量就是各列的几何平均,可以作为特征向量的近似.对 B 是一致阵的理想情形,秩1的互反矩阵 B 以0为它的 $N-1$ 重特征根,它还有一个唯一的非零特征根>0,就是它的最大正实特征根,而 B 的任何一列都是对应于这个特征根的特征向量.

上面的方法当然不只适用于足球赛的排名.在各种场合下,经常需要衡量若干个因素 $T_1, T_2, \cdots, T_N$ 对于某一个目标的影响的大小,也希望把这种影响的大小加以量化,用一个由非负实数组成的向量$(x_1, \cdots, x_N)$来表示.而要同时合理地给出比较所有这些因素通常是困难的.这时往往采取这样的方法:将这些因素两两进行比较,得出每一对 T_i, T_j 影响大小的比值 b_{ij},然后同样采用特征向量法来由 $B=(b_{ij})_{N\times N}$求$(x_1, \cdots, x_N)$.而且,每一个因素 T_i 可能又进一步由若干个更低层次的因素决定,又要用类似的方法来决定这些因素对 T_i 的影响.当然,这些低层次因素还有可能由更低层次的因素来决定.这样一层一层地分析,最后把总目标化为一些容易度量和调节的最低层次的因素的"函数".这样的分析方法叫作层次分析法.上面为足球赛排名次的方法可以说受了层次分析法思想的启发.但不同的是:足球比赛还可以比赛成绩为依据算出两两的水平比来.而一般用层次分析法的问题,两个因素 T_i, T_j 的影响大小的比 b_{ij}却没有办法算出来.比如下面的例题中,要为居民点、政府部门、工业、商业、社区、紧急单位等6类单位的重要性大小用一组正实数 $x_1, \cdots, x_6$ 来表示,你用什么数据作为计算依据?居民点和政府部门的重要性之比到底是1:3还是1:6,你用什么来计算?这实在很难由计算得出,往往只能由主观感觉得出.而这主观感觉又要尽可能比较符合客观实际,可以请有关方面的若干专家或有代表性的人士来确定.经过心理学家的研究,认为采用1至9这九个整数及其倒数来表示为宜.比如:$b_{ij}=1$ 表示 T_i、T_j 的作用相等,而 $b_{ij}=3,5,7,9$(同时就有 $b_{ji}=1/3,1/5,1/7,1/9$)则分别表示 T_i 的作用比起 T_j 来较强、强、很强、绝对强,而 $b_{ij}=2,4,6,8$ 则分别介于某两者之间.容易想象,要直接凭印象同时比较若干个因素是太困难、太不准确了.而采取这样的办法,只对这些因素分别独立地进行两两的比较,相对起来要容易一些、准确一些.然后再用求特征向量的方法将两两比较的结果加以综合,得出各因素影响大小的比,这就要准确和客观得多了.

13.5.1 (MCM 1992-B题)应急电力修复系统.

为沿海地区服务的电力公司必须具备应急系统来处理风暴引起的电力中断.这样的系统需要由估计修复的时间、费用以及由客观准则判定的停电损失大小构成的数据输入.过去HECO电力公司曾因缺乏优先方案而遭受传播媒介的批评.

假设你是HECO电力公司顾问.HECO公司具有一个实时处理、通常包含下述信息的服务电话的计算机数据库:

报修时间;需求者类型;估计受影响人数;地点(x, y).

工程队调度所位于$(0,0)$和$(40,40)$,其中 x, y 以英里为单位.HECO的服务区域在 $-65<x<65$ 和 $-50<x<50$ 之内.因为有极好的道路网络,该地区完全都市化了.工程队只是在上班和下班时必须回调度所.公司的政策是:若停电的设施是铁路或医院,只要有工程队可派就立即处理,其它情形都要等暴风雨离开这一地区后才开始工作.

HECO雇你为表13.1所列的电力修复的请求和表13.2所列的维修能力建立客观准则和安排工作计划.注意,第一个电话是4:20 a.m.接到的,暴风雨是6:00 a.m.离开该地区.还要注意很多修复请求是当日很迟才提出的.

HECO出自自身的目的需要一份技术报告和一份用外行术语写成的"执行摘要"可提交新闻媒介.他们希望有对将来的建议.为决定你的优先计划安排系统,你还需作一些附加的假设,详述这些假设.将来你可能希望有附加的数据,若是,详述这些需要的信息.

表 13.1　风暴修复需求

时间 (a.m.)	位置	类型	受影响人数	估计修复时间 (一队需小时数)
4:20	(−10,30)	事业(有线电视)	?	6
5:30	(3,3)	住宅	20	7
5:35	(20,5)	事业(医院)	240	8
5:55	(−10,5)	事业(铁路系统)	25 工人 75,000 乘客	5
6:00	风暴离开,工程队可以派出			
6:05	(3,30)	住宅	45	2
6:06	(5,20)	社区*	2000	7
6:08	(60,45)	住宅	?	9
6:09	(1,10)	政府(市政厅)	?	7
6:15	(5,20)	事业(购物中心)	200 工人	5
6:20	(5,−25)	政府(消防部门)	15 工人	3
6:20	(12,18)	住宅	350	6
6:22	(7,10)	社区*	400	12
6:25	(−1,19)	工业(报业公司)	190	10
6:40	(−20,−19)	工业(工厂)	395	7
6:55	(−1,30)	社区*	?	6
7:00	(−20,30)	政府(高中)	1200 学生	3
7:00	(40,20)	政府(小学)	1700	?
7:00	(7,−20)	事业(饭店)	25	12
7:00	(8,−23)	政府(警察局,监狱)	125	7
7:05	(25,15)	政府(小学)	1900	5
7:10	(−10,−10)	住宅	?	9
7:10	(−1,2)	政府(学院)	3000	8
7:10	(8,25)	工业(电脑制造)	450 工人	5
7:10	(18,55)	住宅	350	10
7:20	(7,35)	社区*	400	9
7:45	(20,0)	住宅	800	5
7:50	(−6,20)	事业(医院)	300	5
8:15	(10,40)	事业(几家商店)	50	6
8:20	(15,−25)	交通灯	?	3
8:35	(−20,−35)	事业(银行)	20	5
8:50	(47,30)	住宅	40	?
9:50	(55,50)	住宅	?	12
10:30	(−18,−35)	住宅	10	10
10:30	(−1,50)	事业(市中心)	150	5
10:35	(−7,−8)	事业(机场)	350 工人	4
10:50	(5,−25)	政府(消防部门)	15	5
11:30	(8,20)	社区*	300	12

* 社区指二个或多个其它类型的结合

表 13.2　工程队情况

- 工程队调度所位于(0,0)和(40,40)
- 每个工程队由三个熟练工人组成.
- 工程队只是在上下班时向调度所报告.
- 工程队上班时全部时间用来做它的调度所指派的工作. 工程队通常按常规执行任务. 在风暴离开该区域之前,他们只能因紧急情况派出.
- 工程队工作 8 小时结束后换班.
- 每个调度所指挥六个工程队
- 工程队一天最多加一班,加班领取一倍半的工资

解答（主要参考华盛顿大学获特等奖队的论文[8]）

一、问题的分析

由于申请修复的单位太多,而维修的力量很有限,不可能同时满足所有申请者的修复请求. 因此,问题的关键是对如此多的申请修复的单位排出先后顺序,以及在排好顺序之后怎样派工人去执行修复任务. 修复计划的安排希望兼顾三个目标:

1. 考虑各单位的社会重要性,使重要的单位优先修好,以减少经济的和社会的损失.
2. 使整个修复计划尽早完成.
3. 减少所花的费用.

如果在这三个目标上都能达到最满意的效果,那固然很好,但实际上这是做不到的. 这一个目标和那一个目标常常是相互冲突的,有时为了保证这一个目标的效果,不得不对另一个目标做出一定的牺牲. 如何兼顾这三个目标,使总的效果最满意? 这是需要解决的问题.

二、层次分析法的应用

论文[8]利用了层次分析法来安排各单位修复工作的先后顺序.

每个单位在修复工作中的优先次序由以下三个因素决定:1. 单位的类型;2. 受影响人数的多少;3. 修复时间的长短. 单位越重要的,越应该先修;受影响人数多的,应该先修;修复时间短的,应该先修. 但这三个方面的顺序往往又不一致. 比如甲单位比乙单位更重要,但受影响人数少一些,谁应该先修? 这就要看重要性的差别是大还是小,受影响人数的差别大还是小,还要看重要性大小和受影响人数多少这两个因素在确定修复的先后顺序中占的分量各有多大.

论文[8]把修复时间长短这一因素另外考虑,先将前两个因素综合成一个优先权顺序,用一个正实数来表示,称为优先权数.

优先权数由单位的类型和受影响人数这两个因素决定. 这两个因素重要性之比是多少? 论文[8]认为应是 5:1. 这样,在确定优先权数时,单位类型的权重是 5/6,受影响人数的权重是 1/6. 为此,要对每个单位确定两个数:TR,NP. TR 的大小代表单位类型的重要性,我们不妨称为类型优先数;NP 由受影响人数的多少决定,称为人数优先数. 将每个单位的 TR 值和 NP 值分别乘以 5/6,1/6 再相加就得到这个单位的优先权数.

单位类型共有 6 种,每两种类型之间重要性的比值 b_{ij} 经过打分确定的值排成下表,其中第 1,2,3,4,5,6 种类型分别是:居民点、政府部门、工业、商业、社区、紧急单位(医院、铁路等). 表的最后一列是前面 6 列的几何平均再经过归一化(同除以各分量之和)得到,作为各不同类型的单位 TR(类型优先数). 所有类型 TR 的和等于 1.

类型＼类型	1	2	3	4	5	6	类型优先数
1	1	1/6	1/6	1/4	1/3	1/9	0 024843
2	6	1	3	5	3	1/7	0.181076
3	6	1/3	1	6	4	1/6	0.139315
4	4	1/5	1/6	1	3	1/9	0.058630
5	3	1/3	1/4	1/3	1	1/9	0 045142
6	9	7	6	9	9	1	0.550994

再来确定受影响人数的权重的值 NP. 有些单位的受影响人数无法估计,在表上是"?",怎么处理? [8]的处理办法是用同类型的单位受影响人数的平均值来代替. 在没有别的资料可供参考的情况下,这不失为一个比较合理的处理办法(如果用所有单位的受影响人数的平均值来代替,就太粗糙). 另外,既然受影响人数已有具体数值,能不能直接用这些数值的比作为影响大小的比值? 粗看似乎有点道理,但实际上,权重的大小并不与人数多少成比例. 比如:受影响人数 3000 人与受影响人数最少的 20 人的人数之比高达 150,但说它们所占分量之比也有这么悬殊,那就太过分了. 既然在对单位重要性进行两两比较的时候,最悬殊的倍数也只有 9 倍. 在比较人数的时候最大的悬殊也应当是这个水平. 实际上,影响的大小不是与人数本身成比例,而大体上可以说是与人数的对数成比例,即人数每扩大某一个倍数,影响大小不是乘上同样的倍数,而是加上一个数,增加一个等级. [8]在处理这个问题时列出下面的表,把受影响人数的权重大小也转换成 1 到 9 的整数标度来表示. 再归一化后作为每类人数的权重 NP.

标度	1	2	3	4	5
人数	10～20	21～50	51～100	101～250	251～500

6	7	8	9
501～800	801～1300	1301～2000	2001～3000

每个单位(设为第 j 个单位)的 TR,NP 值得出来之后,再用公式

$$P_j = \text{TR} \times \frac{5}{6} + \text{NP} \times \frac{1}{6}$$

算出该单位的优先权数 P_j. 计算结果如下表所示，其中的优先权数已经经过归一化使它们的总和为 100（代表 100%）. 各单位按原题的表 13.1 中的顺序排列，并标出报告时间便于查找. 注意表中各单位是按报告时间先后次序排列的，但也有若干单位的报告时间相同.

报告时间	4:20	5:30	5:35	5:55	6:05	6:06	6:08	6:09	6:15	6:20	6:22	6:25	6:40	6:55
优先权数	0.41	0.13	26.90	26.60	0.27	1.15	0.42	1.03	0.54	0.44	0.75	2.01	2.15	0.85

7:00	7:00	7:00	7:00	7:05	7:10	7:10	7:10	7:10	7:20	7:45	7:50	8:15	8:20	8:35
1.24	1.37	0.28	0.84	1.37	0.42	1.50	2.15	0.66	0.75	0.79	27.00	0.28	1.03	0.15

8:50	9:50	10:30	10:30	10:35	10:50	11:30
0.27	0.42	0.13	0.54	0.68	0.44	0.70

正如王连芬在[1]中所指出的，上述算法也有问题. 虽然规定了在计算优先权数时单位重要性（用 TR 表示）占 5/6，受影响人数的影响（用 NP 表示）占 1/6，但由于各单位的 TR 值经过归一化之后总和为 1，NP 值也是如此. 如果单位类型增加，比如说再增加 6 种类型，共是 12 种类型. 它们的 TR 的总和仍为 1，每类单位的 TR 值必然减少，但它们的 NP 值却没有变. 这实际上造成了 TR 在计算优先权数时所占的比重下降. 在将各类单位的 TR 值同乘以一个正的常数的时候，它们的相对比例虽然没有改变，但却造成了 TR 与 NP 所占份额的改变. 为了使得不管怎样增加或减少单位类型的数目，不影响 TR 与 NP 所占份额的改变，在归一化时不应当固定所有 TR 值的和为 1，而应当固定某类单位的 TR 值. 对 NP 也是这样. 于是改为：将所有的 TR 值除以它们中的最大值，使最重要的单位的 TR 值化为 1. 同样，对 NP 值也进行这样的归一化（称为"准则型归一化"）使 NP 的最大值是 1. 这样，不管单位类型有多少，也不管受影响人数分为多少个等级，最重要单位的 TR 值和受影响人数最多的单位的 NP 值在计算优先权数时所占的比重就是固定不变的了.

三、排序方案

论文[8]提出了 5 种方案供比较和选用：

方案 1. 先报告先服务：按报告时间的先后次序（即表 13.1 中的顺序）安排修复顺序，先报告的先安排修复. 这是一般的服务中常常采取的原则.

方案 2. 按上面用层次分析法算出优先权数从大到小排序，优先权数大的先安排修复.

方案 3. 按表 13.1 中所估计修复时间从少到多排序，费时少的先安排修复. 表 13.1 中修复时间未知的（用"?"号表示），将"?"号用同类型单位所需修复时间的平均值代替.

方案 4. 松驰时间法. 在很多排序问题中都用到松驰时间的概念. 为了说明这个概念，我们假设每个待修复的单位有一个必须修好的最晚时刻，如果到了这个时刻还没有修好就会造成很大的损失. 这里我们以现在的时刻作为起点，用从现在起到这个最晚时刻所经过的时间 D_j 来表示这个时刻. 比如 $D_j = 2$ 小时就表示从现在算起最迟在两小时之后必须修好. 如果对这个单位进行修复需要费时 E_j 小时，那么就必须比 D_j 提前 E_j 小时开始修复工作，也就是最迟在 $D_j - E_j$ 小时后开始修复工作，才能保证在预定的最迟期限 D_j 之前修好. 这样，每个单位都有一个时间 $S_j = D_j - E_j$，从现在算起最迟在 S_j 小时之后必须开工，否则就不可能在预定的期限 D_j 内完成修复任务. 这个时间 S_j 称为"松驰时间". S_j 越小，说明这个单位的形势越紧张，必须尽快开工，否则就来不及了. S_j 很大，说明这个单位还可以多等待一些时间，还可以松驰松驰. 松驰时间法就是按照松驰时间从短到长的顺序安排服务顺序，松驰时间短的优先安排. 但在这个问题中，对每个单位没有规定一个最后期限 D_j，怎样来计算松驰时间呢？论文[8]根据每个单位的优先权数 P_j、修复所需时间 E_j 和报告时刻 T_j 的先后规定了一个最后期限如下：

$$D_j = E_j / P_j + T_j.$$

我们不必追究为什么要用这样一个公式而不用别的公式，只要看一看它是否大体上合理. 从公式可以看出：优先权数 P_j 越大，则 D_j 越小，越应当尽早修复；修复所需时间 E_j 越短，越应当尽早修复；报告时间越早（即 T_j 越小），越应当尽早修复. 这些都是合理的. 按照这个公式算出最迟必须修复的时间 D_j 后，再用

$$S_j = D_j - E_j$$

就可算出松驰时间 S_j.

方案 5. 按修复所需时间 E_j 与优先权数 P_j 之比 $R_j = E_j / P_j$ 的值从小到大安排修复顺序，比值 R_j 小的先安排修复.

四、修复方案的实施

为了用计算机模拟派工人去实施修复工作的效果，除了原题规定的条件外，又补充了若干假设如下：

(1) 街道全都沿东西方向或南北方向,两点(X_1,Y_1),(X_2,Y_2)之间的路程等于$|X_1-X_2|+|Y_1-Y_2|$.所有街道的交通状况良好,车辆运行速度相等,设为60英里/小时.只考虑车辆运行时间,不考虑其费用(认为其费用与工人工资相比忽略不计).

(2) 每个正常工班工资为10美元/小时,加班费为15美元/小时.工人在未完成一项修理任务之前不得另外开始新的修理工作.每个工人可至多加班t小时,$0\leqslant t\leqslant 8$为可调参数,以比较加班时间长短的利弊.但在加班期间只能继续完成未做完的工作,不能另外开始一项新的修理工作.

(3) 每个工程队的能力相同,都能胜任任何一个单位的修理工作.每个工程队是一个整体,不能分开派往两个不同单位去执行修理任务,也不能靠同时派两个工程队去修复同一个单位而缩短修复时间.

(4) 两个修复中心各六个工程队分三个工班安排,每个工班每个中心有两个队可派出.三个工班上班时间各为:早上8点至下午4点,下午4点至午夜12点,午夜12点至早上8点.

现在以上述任何一个排序方案为基础,制定派工人去执行修理任务的执行方案如下:

(1) 风暴结束前本来就有人值班,两个紧急单位(医院,5:35报告;铁路系统,5:55报告)一旦报告马上派人去修.

(2) 每个工班开始时,已经报告的单位按选定的排序方案安排先后次序(尚未报告的当然不予考虑),选其中排在最前面的4个待修单位,将两个修复中心的4个队派去修理.在安排哪一队修哪一个单位时,以走的总路程最少为准.

(3) 如果已有工程队中途完成修理任务,从此时已报告的单位中按排序方案选出最前面的,派此队去修理.

(4) 每个工班结束时,未完成修复任务的队可以继续加班,但以不违反对加班时间的限制(即加班时间不超过t小时)为准.如果加班时间(包括预计返回修理中心的路途时间)已经达到t小时,则应立即返回.

五、排序方案的鉴别标准

(1) 系统总时间:各单位修复工作等待时间的总和.每个单位的等待时间=修复时刻-报告时刻.

(2) 加权总时间:各单位的加权等待时间的总和.每个单位的加权等待时间=等待时间×优先权数.

(3) 总修复时间:完成全部修复任务的时间.

(4) 费用:修复期间总工资.

六、各排序方案的比较结果

用计算机分别模拟5种排序方案的执行情况,并计算上述4项指标的值.结果如下:

加权总时间:方案2,4,5好(即:加权总时间少),方案5最好.方案1,3差.这是很自然的.要使加权总时间减少,就应当让优先权数大的单位优先修复.方案2,4,5都考虑了优先权数,加权总时间当然就少,方案1,3则相反.

系统总时间:方案3,4,5好,方案1,2差.这是因为方案1,2没有考虑每个单位修复工作所需时间.而方案3,4,5则考虑到了.

综合各种指标,认为方案5(即按修复所需时间/优先权数排序)最好.

分析加班时间限制t的取值所引起的四项指标的变化,结果发现:t增大,费用增加,但其它三项指标都改善.t增大到8小时,引起费用上升约10%,但系统总时间下降50%,总的来说是划算的.因此得出结论:适当增加加班时间是可取的,应予提倡.

为了考察模拟的稳定性,论文[8]还考虑了车速的变化对结论的影响,发现对方案的优劣的次序基本没有影响.又考虑了改变三个工班的人数安排,结果发现将所有的工程队都安排到早晨8点到下午4点上班最好.这实际上是因为风暴是早上6点结束的,早上8点有最多的修复任务待完成.此时就把全部力量投入,让后两个工班的工程队提前8小时或16小时开始工作,显然有利于改善除费用以外的三项指标(对费用没有影响).

参 考 文 献

[1]叶其孝主编,数学建模培训教材,湖南教育出版社.

[2]MCM 88-B优秀论文,UMAP,V.9(1988),No.4,373-387.

[3]MCM 86-B优秀论文,Mathematical Modelling,V.7(1986),No.4,627-652.

[4]MCM 91-A优秀论文,UMAP,V.2(1991),No.3,223-230.

[5]项可风,关于施肥效果分析问题的评注,数学的实践与认识,1993年第3期,83-85.

[6]程龙,张云军,赵震,教练:胡云秀,龙永红,蛋白质氨基酸的组合问题,数学的实践与认识,1993年第3期,86-93.

[7]MCM 92-A优秀论文(第一篇),UMAP,V.13(1992),No.3,205-210.

[8]华盛顿大学队 MCM 92-B优秀论文,UMAP,V.13(1992),No.3,257-268.

(1) 街道全都沿东西方向或南北方向，两点(X_1, Y_1)，(X_2, Y_2)之间的路程等于 $|X_1 - X_2| + |Y_1 - Y_2|$. 所有街道的交通状况良好，车辆运行速度相等，设为60英里/小时. 只考虑车辆运行时间，不考虑其费用(认为其费用与工人工资相比忽略不计).

(2) 每个正常工班工资为10美元/小时，加班费为15美元/小时. 工人在未完成一项修理任务之前不得另外开始新的修理工作. 每个工人可至多加班 t 小时，$0 \leqslant t \leqslant 8$ 为可调参数，以比较加班时间长短的利弊. 但在加班期间只能继续完成未做完的工作，不能另外开始一项新的修理工作.

(3) 每个工程队的能力相同，都能胜任任何一个单位的修理工作. 每个工程队是一个整体，不能分开派往两个不同单位去执行修理任务，也不能靠同时派两个工程队去修复同一个单位而缩短修复时间.

(4) 两个修复中心各六个工程队分三个工班安排，每个工班每个中心有两个队可派出. 三个工班上班时间各为：早上8点至下午4点，下午4点至午夜12点，午夜12点至早上8点.

现在以上述任何一个排序方案为基础，制定派工人去执行修理任务的执行方案如下：

(1) 风暴结束前本来就有人值班，两个紧急单位(医院，5:35报告；铁路系统，5:55报告)一旦报告马上派人去修.

(2) 每个工班开始时，已经报告的单位按选定的排序方案安排先后次序(尚未报告的当然不予考虑)，选其中排在最前面的4个待修单位，将两个修复中心的4个队派去修理. 在安排哪一队修哪一个单位时，以走的总路程最少为准.

(3) 如果已有工程队中途完成修理任务，从此时已报告的单位中按排序方案选出最前面的，派此队去修理.

(4) 每个工班结束时，未完成修复任务的队可以继续加班，但以不违反对加班时间的限制(即加班时间不超过 t 小时)为准. 如果加班时间(包括预计返回修理中心的路途时间)已经达到 t 小时，则应立即返回.

五、排序方案的鉴别标准

(1) 系统总时间：各单位修复工作等待时间的总和. 每个单位的等待时间 = 修复时刻 − 报告时刻.

(2) 加权总时间：各单位的加权等待时间的总和. 每个单位的加权等待时间 = 等待时间 × 优先权数.

(3) 总修复时间：完成全部修复任务的时间.

(4) 费用：修复期间总工资.

六、各排序方案的比较结果

用计算机分别模拟5种排序方案的执行情况，并计算上述4项指标的值. 结果如下：

加权总时间：方案2,4,5好(即：加权总时间少)，方案5最好. 方案1,3差. 这是很自然的. 要使加权总时间减少，就应当让优先权数大的单位优先修复. 方案2,4,5都考虑了优先权数，加权总时间当然就少，方案1,3则相反.

系统总时间：方案3,4,5好，方案1,2差. 这是因为方案1,2没有考虑每个单位修复工作所需时间. 而方案3,4,5则考虑到了.

综合各种指标，认为方案5(即按修复所需时间/优先权数排序)最好.

分析加班时间限制 t 的取值所引起的四项指标的变化，结果发现：t 增大，费用增加，但其它三项指标都改善. t 增大到8小时，引起费用上升约10%，但系统总时间下降50%，总的来说是划算的. 因此得出结论：适当增加加班时间是可取的，应予提倡.

为了考察模拟的稳定性，论文[8]还考虑了车速的变化对结论的影响，发现对方案的优劣的次序基本没有影响. 又考虑了改变三个工班的人数安排，结果发现将所有的工程队都安排到早晨8点到下午4点上班最好. 这实际上是因为风暴是早上6点结束的，早上8点有最多的修复任务待完成. 此时就把全部力量投入，让后两个工班的工程队提前8小时或16小时开始工作，显然有利于改善除费用以外的三项指标(对费用没有影响).

参 考 文 献

[1]叶其孝主编，数学建模培训教材. 湖南教育出版社.

[2]MCM 88 − B 优秀论文，UMAP, V. 9(1988), No. 4, 373 − 387.

[3]MCM 86 − B 优秀论文，Mathematical Modelling, V. 7 (1986), No. 4, 627 − 652.

[4]MCM 91 − A 优秀论文，UMAP, V. 2(1991), No. 3, 223 − 230.

[5]项可风，关于施肥效果分析问题的评注，数学的实践与认识，1993年第3期，83 − 85.

[6]程龙，张云军，赵震，教练：胡云秀，龙永红，蛋白质氨基酸的组合问题，数学的实践与认识，1993年第3期，86 − 93.

[7]MCM 92 − A 优秀论文(第一篇)，UMAP, V. 13(1992), No. 3, 205 − 210.

[8]华盛顿大学队 MCM 92 − B 优秀论文，UMAP, V. 13 (1992), No. 3, 257 − 268.